

“数学与思维”之深思

郑毓信

(南京大学 哲学系, 江苏 南京 210093)

摘要:有效促进学生的思维应当成为判断数学课成功与否的主要标志, 后者既是指“专业(数学)思维”的学习, 也包括“常规思维”的改进。特别是, 不仅应当帮助学生逐步学会“长时间的思考”, 也应切实纠正“常规思维”的一些常见弊病。正因此, 就应从更为广泛的视角去认识数学思想和数学思想方法的普遍意义。

关键词:数学与思维; 数学教育; 快思慢想

中图分类号:G40-03 **文献标识码:**A **文章编号:**1004-9894 (2015) 01-0001-05

对于数学教育工作者、包括广大一线教师而言, “数学与思维”当然不是一个全新的论题, 特别是, 新一轮课程改革对于“三维目标”的提倡, 更有效地促进了人们对于这一论题的关注; 另外, 如果进一步拓宽视野的话, 又显然可以追溯到20世纪90年代在中国兴起的数学方法论研究, 因为, 数学思维也是后者的主要关注。

尽管如此, 对于“数学与思维”这一论题还是应当不断进行新的思考与研究, 包括已有工作的认真总结与反思, 以及进一步的理论学习, 因为, 就只有这样, 才能不断深化自身在这一方面的认识, 将相关工作切实做好。

1 数学教育应当促进学生的积极思考

从教育的角度看, 这无疑是这方面最为基本的一个问题: 为什么应当特别重视“数学与思维”这样一个论题?

对于上述问题并可说存在多种不同的解答; 但在研究者看来, 这又主要涉及到了数学教育的基本目标或主要价值, 包括应当如何去判断一个数学教学活动的成功与否, 也即究竟什么可以被看成好的数学教学的主要标志?

为了清楚地说明问题, 在此并可首先联系国际教育署(International Bureau of Education)和国际教育学会(International Academy of Education)2009年联合颁发的指导性文件《有效的数学教学》做出具体分析^[1]。

具体地说, 尽管这一文件使用的是“有效的数学教学”, 而不是“好的数学教学”这样一个词语, 其主要内容也是关于“有效的数学教学”的10条标准; 但这又是研究者在阅读这一著作时的主要印象, 即是对于“理解”(understanding)与“思维”(thinking)的突出强调。前者表明国际数学教育界何以会特别重视“有效的数学教学”, 因为, “机械学习”正是西方各国数学教学的普遍性弊病。其次, 对于“思维”的强调则又不仅因为这是实现“理解学习”的

关键, 而且也体现了关于数学教育目标的这样一个认识: 数学教育应当致力于促进学生更积极地去进行思考。

以下是这方面的进一步论据:

正如人们普遍认识到的, 教学方法与模式是教学研究的一个永恒主题, 特别是, 对于某些新的教学方法或模式的大力提倡更可被看成新一轮数学课程改革的一个明显特点, 即如课改初期对于“情境设置”、“合作学习”、“自主探究”、“动手实践”等新的教学方法的积极倡导, 以及近年来得到迅速推广的“先学后教”这样一种教学模式, 等等。

但是, 无论教学方法或教学模式主要地又应被看成实现一定教育目标的手段或方法, 从而, 就不应脱离后者泛泛地去谈论教学方法或模式; 恰恰相反, 就只有联系数学教育目标去进行分析思考, 才能更为深入地认识各种教学方法和模式的优点与局限性。

例如, 以下就是数学特级教师贲友林老师经由多年教学实践对“先学后教”优点的一个总结: “这可以让学生更有准备地学; 让学生在深层互动中学; 让学生在研究性练习中学习。”

但是, 正如作者在与贲友林老师的交谈中所提出的, 这又应被看成“先学后教”的核心, 即是有利于学生更为积极地进行思考, 并能逐步学会想得更深、更细、更合理、更有效。因为, 如果忽视了这样一点, 无论是“更有准备地学”、还是“在深层互动中学”或是所谓的“研究性练习”, 就都只是一句空话。

再例如, 显然也可从同一角度去理解, 究竟什么是这一两年来得到迅速发展的“翻转课堂”的主要优点:

“‘翻转课堂’将简单的记忆、理解、运用放在课下, 而高层次的综合运用和创新则在课上发生。”

又, “视频比导学单更生动形象; 前置的微视频学习为课堂腾出了更多的时间和空间; 有备而来让课堂互动走得更

收稿日期: 2014-10-20

作者简介: 郑毓信(1944—), 男, 浙江镇海人, 教授, 博士生导师, 国际数学教育大会(ICME-10)国际程序委员会委员, 主要从事数学哲学、数学教育研究。

深入更有效。”(关于“先学后教”和“翻转课堂”并可见文[2])

总之,这应当成为具体判断一堂数学课成功与否的一个主要标志,即其是否有效地促使学生更积极地去进行思考,并能逐步学会想得更深、更细、更合理、更有效!

显然,这也十分清楚地表明了深入研究“数学与思维”这样一个论题的重要性。

在此并应特别强调这一论题的现实意义:数学教学决不应唯一地强调动手,而应更加重视动脑,后者更可被看成新一轮课程改革给予教育工作者的一个重要启示或教训。(详见文[3]。应当提及的是,作为新一轮数学课程改革的必要总结与反思,研究者认为,除去各个具体的经验和教训以外,还应更为深入地去思考数学教育最为基本的一些道理,包括具体梳理出数学教育的各个关键词(概念)。后者正是研究者目前在从事的一项工作,而“思维”恰就是这些概念中最为重要的一个。)

当然,“动手”与“动脑”的“对立”又只是数学教育中“强调思维”最为基本的一个涵义。对于后者在以下还将做出进一步的分析论述。

最后,从教师专业成长的角度看,上述分析显然也已表明:相对于“实、活、新”这一传统的要求(周玉仁语)而言,在当前即应更加强调一个“深”字,也即应当针对具体的教学内容深入地去思考其内在的数学思想和数学思想方法,并应将如何能够通过自己的教学促进学生思维的发展看成搞好数学教学的关键。

2 “促进学生思维发展”的两种涵义

鉴于在这方面已经有了多年的实践,作为必要的总结,自然也应认真地去思考:这些工作的成效如何?又应如何去促进这一方面的工作,特别是,相关的教学工作如何才能更加有的放矢,更加有效?

为了解答前一个问题,不妨先思考这样两个问题(这方面的一些初步工作可见文[4]):

(1)应当如何去理解“数学思维”、“数学思想”、“数学思想方法”等词语的具体涵义,包括相互之间的联系与区别?

毋庸讳言,无论是实验稿的“数学课程标准”、还是 2011 年版的“新课标”,在这方面都应说表现出了不够严谨的弊病,甚至可以说一定程度的混乱,而这当然是作为课程改革指导性文件所应避免的。

(2)什么是基础教育各个学段最为重要的一些数学思想和数学思想方法?

以下则是相关人士的具体评论:由于新课标“没有展开阐述‘数学的基本思想’有哪些内涵和外延,这就给研究者留下了讨论的空间,而且由于它过去并没有被充分讨论过,所以可能仁者见仁,知者见智,不同的学者可能会有不完全

一样的说法”^[5]。理论研究有多种不同的观点十分正常,但作为数学教育的指导性文件出现这样的问题显然也很不应该,因为,这种不确定性必然会在教学实践中造成一定的混乱,特别是,如果连教师本身都没有弄清教学中究竟应当突出哪些数学思想和数学思想方法,又如何能够期望通过他们的教学帮助学生学会数学地思维?

综上可见,在这一方面的进展实在不能说很快,还有很长的路要走,因此必须更加努力,而决不能掉以轻心。

那么,究竟又应如何去促进这方面的工作呢?在研究者看来,一个首要的任务就是弄清“促进学生思维发展”的具体涵义?因为,只有做到了这样一点,教学才能真正做到有的放矢,也才可能更加有效。

从理论的角度看,在此应当说存在两个可能的方向:

第一,立足数学思维(数学家思维方式)的研究,并以此作为学生思维发展的必要规范。

显然,这也正是“帮助学生学会数学地思维”、以及数学方法论研究的基本立场。

但是,这一做法显然也有一定的问题。首先,是否真有必要帮助每个学生学会数学地思维?这也就是指,数学思维是否真的具有超出数学的普遍意义?其次,数学思维是否也有一定的局限性?

在此并应特别提及这样两个基本事实:(1)思维形式的多样性,如科学思维、文学思维、艺术思维、哲学思维等,各种思维形式并应说都有一定的合理性和局限性;(2)数学思维也有一定的局限性;在一些学者看来,更应清楚地看到“数学的恶”^[6]。

显然,这也为广大教育工作者更为深入地开展研究提供了重要背景。

第二,现实问题的分析,也即立足于常规思维的研究,并通过揭示其不足之处从而为这方面的具体工作指明努力方向,也即,教师如何能够通过数学教学帮助学生改进思维。

上述主张显然与“大教育”的立场比较接近;但就国内的现实情况而言,这又是一个比较薄弱的环节。与此相对照,国际上近年来在这方面有一些十分重要的工作,从而就为积极开展新的研究提供了重要背景。

应当指出的是,尽管后一方面的研究对于增强教学工作的针对性十分有益;但在充分肯定“改进常规思维”的重要性的同时,又应积极地去思考新的发展可能性,也即如何能够通过数学学习帮助学生形成一些新的思维方式。显然,这事实上也就十分清楚地表明了上述两个研究方向之间的辩证关系,这也就是指,在清楚地看到两者不同点的同时,又应高度重视它们的相互渗透与必要互补。例如,数学思维的研究即在很大程度上为人们更为深入地去理解“长时间的思考”提供了重要启示;另外,就思维的进一步发展而言,显然也不应单纯地从数学的角度去分析,而应更加重视各个数学思想与数学思想方法的普遍意义。

总之，就这方面的进一步工作而言，应当同时开展两个方面的研究与实践：常规思维的改进，与专业（数学）思维的学习，并应很好地处理两者之间的辩证关系。

这也正是数学教育中“强调思维”的第二层涵义。

相信读者至此也已对以下问题有了自己的看法：数学教育究竟应当提倡“帮助学生学会数学地思维”还是“通过数学学会思维”？特殊地，这也正是作者何以采用“数学与思维”这样一个标题的直接原因。

以下两节就将分别对所说的两个方向上的研究做出更为具体的论述。

3 数学教育与“常规思维”的改进

从数学教育的角度看，这或许就可被看成“改进常规思维”最为直接的一个涵义，即是逐步学会“长时间的思考”。由以下论述即可初步地认识数学教育中明确提出这样一个主张的重要性及其现实意义。

“数学是自己思考的产物，首先要能够自己思考起来，用自己的见解与别人的见解进行交谈，会有很好的效果，但是思考数学问题需要很长时间，我不知道中小学数学课堂，是否能够提供很多的思考时间。”^[7]

“思考问题的态度有两种：从专业角度看一种是花费较短时间的即时思考型；一种是较长时间的长期思考型。所谓的思考能人，大概就是指能够根据思考的对象自由自在分别使用这两种类型的思考态度的人。但是，在现在的……教育环境不是一个充分培养长期思考型的环境……没有长期思考型训练的人，是不会深刻思考问题的……无论怎样训练即兴性思考，也不会掌握前面谈过的智慧深度。”^[8]

另外，相信大多数读者依据自身的经历也会同意中国著名数学家姜伯驹先生在回答“什么是数学对自己最重要的影响”时给出的如下解答：数学使我学会长时间的思考，而不是匆忙地去做出解答。（教育频道，2011年5月2日）

除去对于“长时间的思考”的积极提倡以外，在此还应提及另一相关的研究：“即兴性思考（快思）”的特点与局限性。这也正是国际上近年来在思维研究上所取得的一个重要成果。

具体地说，这正是2002年诺贝尔经济学奖得主康纳曼（D. Kahneman）的一部名著：《快思慢想》^[9]，而其特点就是集中于“常规思维”的研究，包括其特点、作用与局限性等。应当指明的是，康纳曼所说的“常规思维”事实上也就是指一般所谓的“快思”，因为，在他看来，这正是人类思维的一个重要特点，即是“快思”（称为“系统一”）占据主导地位，从而就可被看成“常规思维”的基本形式。另外，在明确肯定“快思”对于人类认识活动重要作用的同时，康纳曼所关注的又主要是这样一个事实：“常规思维”在现实中常常会导致一些系统性的错误，以下则是他在这方面的一个主要研究结论：这种错误存在一定的心理机制，即“捷

径与偏见”（heuristics and biases）。

所谓“捷径”，在此是指人们在面对不确定的情况时头脑中常常会自动和迅速地出现某个比较简单的想法，尽管用之未必可以有效地解决所面对的问题，但主体却又往往会对此充满自信。“这些发生得非常快，而且全部同时发生，得到一个自我强化的认知、情绪和生理反应形态，这个反应形态是多样的和整合的。”^[9]

显然，这种迅速和自动的反应在很多情况下是不可避免的，又由于所说的“捷径”集中体现了主体已有的经验和知识，从而也就有一定的合理性，后者并就是康纳曼何以常常将自己所提到的各个“捷径”称为“可用性捷径”的主要原因；但在现实中又常常可以看到某些与之密切相关的“偏见”，如用案例去完全取代类的分析，或是不自觉地为“第一印象”所支配（“锚点效应”），等等。

另外，所谓的“以偏盖全”（Wysierti）与“促发效应”（编故事，找理由等）则就集中地体现了这样一种常见的心态，即人们往往会不自觉地去追求一致性，在此并可清楚地看到一种“自我强化”的现象。“系统一不擅长怀疑，它会压抑不确定性，而且会自动去建构故事，使一切看起来合理，除非这个信息被立刻否定。”^[9]

再者，这也是这方面十分重要的一个事实，即人们的思维并不完全属于认知的范围，而也与情感、动作密切相关，后者有时还起到了决定性的作用，尽管当事者常常没有意识到这样一点。“一般人是受到情绪指引而不是理智，我们很容易因不重要的细节而改变心意。”^[9]特殊地，这也正是康纳利何以专门引入“情感捷径”这样一个概念的直接原因。

由于康纳曼清楚地指明了与“系统性错误”直接相关的若干心理机制，从而，作为进一步的工作，自然也就应当考虑如何才能有效地避免或减少所说的错误？然而，又如康纳曼本人所明确承认的，后者正是他的工作较为薄弱的方面，也即只是给出了若干一般性的建议，却未能做出更为深入和全面的研究。从而，这事实上也就为如何能够结合自己的专业在这方面做出新的工作提供了现实的可能性。确实，如果数学教学能在减少“快思”（常规思维）的局限性这一方面发挥积极的作用，这就将是数学教育的重大进展。

以下就是这方面的一些初步想法，即在数学教学中应当有意识地强调这样一些思想或方面，从而更好地发挥数学教学对于纠正上述各种常见性错误的积极作用：

强调全面的分析，即如要求更多的实例，更多的理由，加强比较等；帮助学生更好地认识和处理特殊与一般之间关系；帮助学生学会“客观地研究”，从而切实避免主观情感的影响；大力提倡怀疑精神和批判精神，包括积极的自我批判；等等。

进而，如果说上面的想法较为一般的话，那么，以下的两个实例或许就可被看成更为具体地指明了究竟应当如何结合自己的专业去开展工作：

第一,与“用案例完全取代类的分析”(可称为“隐喻式思维”)相对照,这正是数学思维的一个重要特点:“文本式思维”。从而,在教学中也就应当更为明确地去强调两者的区分与必要互补。

第二,由于现实中明显地存在如下的“情感配对”:“好心情、直觉、创造力、易相信和对系统一的依赖,是聚集在一起的;悲伤、警觉、怀疑、分析和努力是聚集在一起的。快乐的心情会解开系统二对行为的控制:当人们心情好时,直觉和创造力会增强,但同时也较不警觉。”^[9]因此,从系统一和系统二(也即“快思”和“慢想”)的必要互补这一角度去分析,也可清楚地看出唯一强调“愉快学习”的局限性。

最后,作为这方面的一个具体实践,建议读者还可认真地去思考这样一个问题:“数学课程标准”中所提到的各个关键词,特别是“数感”、“符号意识”、“代数思想”等,所涉及的究竟是哪种思维方式,是“快思”、还是“慢想”?

4 通过数学学会思维

在具体论及“数学思维的学习”前,有必要强调两点:

第一,应当清楚地区分无意识的思维活动与有意识的方法论研究。这事实上也是康纳曼特别强调的一点:尽管他在对“常规思维”进行分析时所使用的也是“捷径”(heuristics)这样一个词语,但他同时也明确强调了后者与数学思维研究中经常提到的“数学启发法”之间的区别:“波利亚的启发法,是需要系统二去完成的策略程序,但是我……所谈到的捷径并不是特意选的,它们是心智发散性的结果,是我们对问题的回应不精确控制的结果。”^[9]

更为一般地说,如果接受关于“快思”与“慢想”的二分,那么,数学思维显然就属于“长时间的思考”(康纳曼称为“系统二”)的范围。

第二,又如前面所提到的,相对于“常规思维的改进”,数学思维的学习主要体现了思维发展的新的可能性;当然,在具体从事后一方面的工作时,又应采取更为广泛的视角,也即应当更加重视数学思想和数学思想方法的普遍意义。

由以下分析即可大致地看出数学在这一方面的积极作用^[10]。应当指出的是,尽管这一分析以康纳曼的工作作为直接的背景,但其内容则已超出了这一范围,特别是,即是赋予了“慢思”(“长时间的思考”)若干新的涵义:

快思	慢想
如何做?(工具性理解)	为什么可以这样做?(关系性理解)
问题解决(解题冲动)	策略性思考与调控(元认知)
特殊(model of)	一般(model for)

以下则是关于深入开展这一方面研究的一些具体意见:

第一,数学思维的具体形式。特别是,可围绕“数学活动”的基本形式对此做出具体分析:

(1)概念的生成、分析与组织。主要包括抽象思维(特别是,数学抽象的建构性质);结构性观念与逻辑分析;反

思与自反抽象(更高层次上的抽象);数学的自由创造(由现实到可能);等等。

(2)问题的提出与解决。特别是,序的观念(整体性观念)和元认知(调控);另外,解题策略的研究由于具有重要的方法论意义显然也应引起高度重视。

第二,思维品质的提高。

从“促进学生思维的发展”这一基本目标出发,相对于各个具体的思维方式或方法而言,显然又应更加重视思维品质的提高,特别是,思维的清晰性(包括清楚地表述),思维的合理性和有效性(适当的说明与论证,直至演绎),思维的深刻性与严密性(必要的审视与批判),思维的灵活性、综合性与创新性,等等。

第三,思维与理性精神的培养。

这主要反映了这样一个认识:从更为深入的层次去分析,数学思维的学习十分有利于人们“理性精神”的培养。

应当指出的是,数学思维的研究事实上可被看成为研究者更为深入地去理解“理性”这样一个概念提供了重要的背景,或者说,正是这一方面的研究赋予了“理性”这一概念更为丰富的内涵。

最后,还应强调的是,在此应注意防止这样一种简单化的认识,即是“快思”(系统一)和“慢想”(系统二)简单地等同于“错”和“对”,乃致完全否定了“快思”的作用,或是认为应当用“慢想”去完全取代“快思”。

事实上,由“快思”在人类认识活动中的主导地位,即可清楚地认识所说的取代是不应被提倡的,因为,这对于人们的日常生活与工作不可或缺;另外,也正因为“快思”的存在及其在认识活动中的首要地位是由人们的生理机制和生活方式直接决定的,因此,所说的取代也根本不可能实现。

从同一角度去分析,尽管以下的提法确有一定道理,即是“应当抑制低层次思维的过分膨胀”;但这显然又是更为合适的一个主张,即是,应当努力增强自身在这一方面(包括快思与慢想)的自觉性,从而切实避免或减少所说的系统性错误。

另外,还应提及的是,这也是康纳曼在这方面的一个重要建议,即是相对于“常规思维”而言,应当努力发展“专家型直觉”,因为,后者与前者相比更加可靠。

当然,即使就“专家型直觉”而言也应不断增强自身在这一方面的自觉性,后者事实上也正是康纳曼的一个直接论题:如何才能成为专家?进而,由于“专家型直觉”又并非完全可靠,因此就应当深入地去研究:什么时候可以相信专家?(详见文[9]第三章)

容易想到,后一结论对于数学思维研究也是同样适用的。即如:

第一,不要过于聪明,而应提倡“聪明人下笨功夫”(季羨林语)。显然,从这一角度去分析,也可更好地领会“经验”的重要性:数学思维的学习应当坚持必要的实践与逐步

的经验积累，而不应过早地上升到一般性方法。

第二，所有的方法都有一定的局限性，更不应成为束缚人们思维的桎梏；恰恰相反，这是做出真正的创造性工作的一个必然途径：“以正合，以奇胜”。

5 结束语

以上主要从宏观角度指明了深入研究“数学与思维”这一论题对于数学教育的特殊重要性，特别是，这更应被看成数学教育的一个基本目标，即是努力促进学生思维的发展，包括常规思维的改进，与专业（数学）思维的学习，从而逐步学会想得更深、更细、更合理、更有效。

当然，从实践的角度看，这又是更加重要的一个问题：应当如何去从事数学教学才能很好地实现上述目标？

显然，后一问题的解答同样有待于深入地研究，包括积极的教学实践与认真的总结与反思。以下则是研究者的一个初步认识，即在这一方面应当特别重视这样几个环节：

（1）“问题引领”；（2）数学地交流与互动，从而帮助学生很好地实现优化；（3）文化熏陶，言传身教。另外，在教学中又应依据学生的具体情况切实加强工作的针对性，包括很好地实现以下几个阶段的区分与合理过渡，即由“深藏不露”逐步过渡到“画龙点睛”，由“点到为止”逐步过渡到“系统论述”，由“教师介绍”逐步过渡到“学生的自我总结和自觉应用”。

希望广大数学教育工作者、特别是一线教师都能在上述方面做出自己的贡献。

[参考文献]

- [1] Anthony G, Walshaw M. *Effective Pedagogy in Mathematics* [R]. UNESCO, 2009.
- [2] 郑毓信. 数学教育改革 15 诫[J]. 数学教育学报, 2014, 23 (3): 1-7.
- [3] 郑毓信. 由“先学后教”到“翻转课堂”[J]. 教学月刊, 2014, (9): 4-8.
- [4] 郑毓信. 小学数学概念与思维教学[M]. 南京: 江苏教育出版社, 2014.
- [5] 顾沛. 数学基础教育中的“双基”如何发展为“四基”[J]. 数学教育学报, 2012, 21 (1): 14-16.
- [6] Schwartz J. The Pernicious Influence of Mathematics on Science [A]. In: Kac M, G-C Rota, Schwartz J. *Discrete Thought* [C]. Birkhauser, 1986.
- [7] 张奠宙. 我亲历的数学教育[J]. 南京: 江苏教育出版社, 2009.
- [8] 代钦. 对日本精英教育的怀旧及其借鉴作用——日本数学家藤田宏教授访谈录[J]. 数学教育学报, 2010, 19 (2): 82-84.
- [9] Kahneman D. *Thinking, Fast and Slow* [M]. Penguin Books, 2011.
- [10] 林福来. 数学教育理论的二维结构[R]. 首届全国数学教育哲学论坛, 2014.

Some Remarks on “Mathematics and Thinking”

ZHENG Yu-xin

(Department of Philosophy, Nanjing University, Jiangsu Nanjing 210093, China)

Abstract: It should be a basic aim for mathematics education to promote effectively students' thinking, which means not only to learn to think mathematically, but to improve ordinary thinking as well. Especially, we should help students to learn to think slowly and to prevent the common mistakes in ordinary thinking, and in doing so, a more general view should be taken in analyzing mathematical thinking methods.

Key words: mathematics and thinking; mathematics education; thinking fast and slowly

[责任编辑：周学智]