2016年全国高中数学联赛江苏赛区

复赛参考答案与评分细则

一　试

一、填空题（本题满分64分，每小题8分）

1．已知集合$A=\{(x，y)|(x-2)^2+(y-1)^2\leqslant 1\}$，$B=\{(x，y)|\ 2|x-1|+|y-1|\leqslant a\}$，$A\subseteq B$，则实数$a$的取值范围是_____.

解：画图可知，要使$A\subseteq B$，则$a>0$，且点(2，1)到直线$2x+y-3-a=0$的距离不小于1，

即$\dfrac{|2-a|}{\sqrt{5}}\geqslant 1$，解得$a\geqslant 2+\sqrt{5}$，故$a$的取值范围是$[2+\sqrt{5}，+\infty)$.

2．若不全相等的三个实数a，b，c满足$a^3+b^3+c^3=3abc$，则$a+b+c=$_____.

解：由$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0.$$

因为a，b，c为不全相等的三个实数，所以$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，

所以$a+b+c=0$.

3．已知a，b是实数．若二次函数$f(x)=x^2+ax+b$满足$f(f(0))=f(f(1))=0$，且$f(0)\neq f(1)$，则$f(2)$的值是_____.

解：由题设，$f(0)=b$，$f(1)=1+a+b$是方程$f(x)=0$的根，

故$x^2+ax+b\equiv(x-b)(x-(1+a+b))$，

即$a=-1-a-2b$，$b=b(1+a+b)$，解得$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=0$.

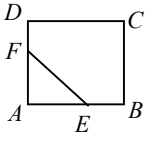
所以$f(2)=3$.

4．若小张每天的睡眠时间在6小时至9小时之间随机均匀分布，则小张连续两天平均睡眠时间不少于7小时的概率是_____.

解：设小张连续两天睡眠的时间分别为x小时和y小时，x，$y\in[6，9]$，

将可能出现的事件记作$(x，y)$，

其对应坐标平面中正方形$ABCD$边及其内的点．



小张连续两天平均睡眠时间不少于7小时，即$x+y\geqslant 14$，

$(x，y)$对应五边形$EBCDF$边及其内的点．

因此所求事件的概率 $1-\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{正方形ABCD}}=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$.

5. 已知函数 $f(x)=\log_a(ax^2-x+\frac{1}{2})$ 在区间 [1,2]上的值恒正，则实数 a 的取值范围是_____.

解：当 $a>1$ 时，函数 $f(x)=\log_a(ax^2-x+\frac{1}{2})$ 在区间［1，2］上单调递增，

故 $f(1)>0$，即 $a>\frac{3}{2}$.

当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时，函数 $f(x)=\log_a(ax^2-x+\frac{1}{2})$ 在区间［1，2］上单调递减，

故 $f(2)>0$，即 $a<\frac{5}{8}$，所以 $\frac{1}{2}<a<\frac{5}{8}$.

当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，则 $a-1+\frac{1}{2}\leqslant 0$，即当 $x=1$ 时，$f(x)$ 无意义.

所以 a 的取值范围为 $(\frac{1}{2},\ \frac{5}{8})\cup(\frac{3}{2},\ +\infty)$.

6. 已知复数 z_1，z_2 满足 $|z_1+z_2|=20$，$|z_1^2+z_2^2|=16$，则 $|z_1^3+z_2^3|$ 的最小值为_____.

解：由 $|z_1^3+z_2^3|=|z_1+z_2|\cdot|z_1^2-z_1z_2+z_2^2|$

$$=20\times|\frac{3}{2}(z_1^2+z_2^2)-\frac{1}{2}(z_1+z_2)^2|$$

$$\geqslant 20\times|\frac{3}{2}|z_1^2+z_2^2|-\frac{1}{2}|z_1+z_2|^2||=3520.$$

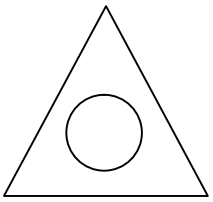
而当 $z_1^2+z_2^2=16$，$z_1+z_2=20$，即 $z_1=10+2\sqrt{23}\mathrm{i}$，$z_2=10-2\sqrt{23}\mathrm{i}$ 时，可取得等号.

所以 $|z_1^3+z_2^3|$ 最小值为 3520.

7. 正四面体的棱长为 $2\sqrt{6}$，以其中心 O 为球心作球，球面与正四面体四个面相交所成曲线的总长度为 4π，则球 O 的半径是_____.

解：设球 O 的半径为 R.

若正四面体一个面截球如图（甲），则小圆周长为 π，

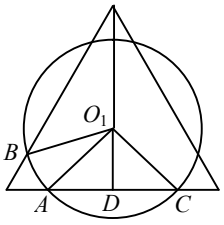


（第 7 题图甲）

所以小圆半径为 $\frac{1}{2}$.

又球心到四面体的面的距离为 1，故 $R=\sqrt{1^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

若正四面体一个面截球如图（乙），记 D 为 AC 的中点.



（第 7 题图乙）

由题意知，弧 AB 长为 $\frac{\pi}{3}$.

设小圆 O_1 的半径为 r，则 $\angle AO_1B=\frac{\pi}{3r}$.

又 $\angle BO_1C=\frac{2\pi}{3}$，$\angle AO_1D=\frac{1}{2}(\angle BO_1C-\angle AO_1B)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6r}$，$O_1D=\sqrt{2}$，

所以 $\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6r})=\frac{\sqrt{2}}{r}$. (*)

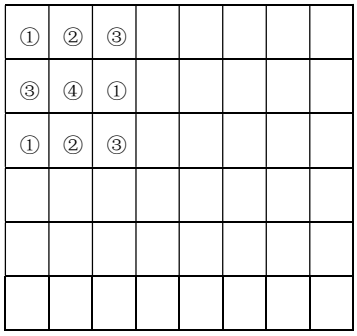
令 $f(r)=\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6r})-\frac{\sqrt{2}}{r}$，则 $f'(r)=-\frac{\pi}{6r^2}\cdot\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6r})+\frac{\sqrt{2}}{r^2}>0$，

故函数 $f(r)$在(0，＋∞)单调增，且最多有一个零点，而 $f(2)=0$，

所以方程(*)有唯一解 2，从而 $R=\sqrt{r^2+1}=\sqrt{5}$.

所以球 O 的半径是$\frac{\sqrt{5}}{2}$或$\sqrt{5}$.

8．在 8×6 的方格表中，每个方格被染上红，蓝，黄，绿四种颜色之一．若每个 2×2 的子方格表包含每种颜色的格都是 1 个，则称之为“均衡”的染法．则所有不同的“均衡”的染法有_____种．



解：“均衡”染法如图．若第一个 2×2 的子方格表中 4 格分别染①，②，③，④色，则第 3 列上面两格只能染①，③色．若第 3 列第 1 格染③色，则第 3 列第 2 格染①色，然后第 3 行第 2 格中只能染②色，第 3 行第 1 格中只能染①色，第 3 行第 3 格中只能染③色，……，如此类推，则在“均衡”的染法中，每列（或每行）中仅有两色交错出现，且其相邻的两列（或行）中另两色交错出现．当每列中两色交错出现时，第一列选两色，然后每列选首色，共有 $C_4^2\cdot 2^8$ 种染法；当每行中两色交错出现时，同理有 $C_4^2\cdot 2^6$ 种染法；重复的情况有 $A_4^4=24$ 种，故不同的染法种数有 $C_4^2\cdot 2^8+C_4^2\cdot 2^6-24=1896$.

二、解答题（本题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=ax-bx^2$，其中 a，b 为正数．

（1）若对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)\leqslant 1$，证明 $a\leqslant 2\sqrt{b}$ ；

（2）当 $b>1$ 时，证明：对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1$ 成立的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$.

证明：（1）因为 $f(x)\leqslant 1$ 恒成立，所以 $f(x)_{max}=f(\frac{a}{2b})=a\cdot\frac{a}{2b}-b\cdot\frac{a^2}{4b^2}\leqslant 1$，

即$\frac{a^2}{4b}\leqslant 1$.

因为 $b>0$，所以 $a^2\leqslant 4b$，即 $a\leqslant 2\sqrt{b}$. …… 5 分

（2）(i)必要性：

对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1$，

则 $f(1)\geqslant -1$，即 $a-b\geqslant -1$，从而 $a\geqslant b-1$.

又因为 $b>1$，则 $\frac{1}{\sqrt{b}}\in(0,1)$，从而 $f(\frac{1}{\sqrt{b}})\leqslant 1$，即 $a\leqslant 2\sqrt{b}$.

所以，对任意 $x\in[0,1]$，若 $|f(x)|\leqslant 1$，则 $b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$. …… 10 分

(ii)充分性：

由于 $b>1$，且 $b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$，

故对于任意 $x\in[0,1]$，$f(x)=ax-bx^2\geqslant (b-1)x-bx^2=bx(1-x)-x\geqslant -x\geqslant -1$；

另一方面 $f(x)=ax-bx^2\leqslant 2\sqrt{b}x-bx^2=-(\sqrt{b}x-1)^2+1\leqslant 1$，

所以对于任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1$.

综上所述，对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$.

…… 16 分

三、解答题（本题满分 20 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $P(2,1)$在椭圆 C：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 上，不经过坐标原点 O 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，且线段 AB 的中点为 D，直线 OD 的斜率为 1．记直线 PA，PB 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：k_1k_2 为定值．

证明：（方法一）设 A，B 两点的坐标为(x_1,y_2)，(x_2,y_2)，从而 $D(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$.

因为直线 OD 的斜率为 1，故 $x_1+x_2=y_1+y_2$.

又点 A，B 在椭圆上，则 $\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{3}=1$，

从而 $\frac{x_1^2-x_2^2}{6}+\frac{y_1^2-y_2^2}{3}=0$，即 $x_1-x_2+2(y_1-y_2)=0$，

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}$，即直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{2}$. …… 8 分

设直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+t$，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=-\frac{1}{2}x+t,\end{cases}$ 得 $\frac{3}{2}x^2-2tx+2t^2-6=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{4t}{3}$，$x_1x_2=\frac{4(t^2-3)}{3}$. …… 14 分

从而 $k_1k_2=\frac{(y_1-1)(y_2-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{y_1y_2-(y_1+y_2)+1}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$

$$=\frac{\frac{1}{4}x_1x_2-(\frac{t-1}{2})(x_1+x_2)-2t+t^2+1}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

$$=\frac{\frac{t^2-3}{3}-(\frac{t-1}{2})\times\frac{4t}{3}-2t+t^2+1}{\frac{4(t^2-3)}{3}-2\times\frac{4t}{3}+4}$$

$$=\frac{\frac{2t^2}{3}-\frac{4t}{3}}{\frac{4t^2}{3}-\frac{8t}{3}}=\frac{1}{2}.$$ …… 20 分

（方法二）设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，从而 $D(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$.

因为直线 OD 的斜率为 1，故 $x_1+x_2=y_1+y_2$. ①

又点 A，B 在椭圆上，则 $\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{3}=1$，

从而 $$\frac{x_1^2-x_2^2}{6}+\frac{y_1^2-y_2^2}{3}=0,$$

即 $$x_1-x_2+2(y_1-y_2)=0.$$ ② …… 8 分

由①②解得 $$\begin{cases} x_1=\frac{-y_1+3y_2}{2}, \\ x_2=\frac{3y_1-y_2}{2}. \end{cases}$$

由 $\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1$，得 $\frac{(-y_1+3y_2)^2}{24}+\frac{y_1^2}{3}=1$，

即 $$3(y_1^2+y_2^2)=8+2y_1y_2.$$ …… 14 分

从而 $k_1k_2=\frac{(y_1-1)(y_2-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{y_1y_2-(y_1+y_2)+1}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$

$$=\frac{y_1y_2-(y_1+y_2)+1}{\frac{-3(y_1^2+y_2^2)+10y_1y_2}{4}-2(y_1+y_2)+4}$$

$$=\frac{y_1y_2-(y_1+y_2)+1}{2y_1y_2-2-2(y_1+y_2)+4}$$

$$=\frac{1}{2}.$$ …… 20 分

四、解答题（本题满分 20 分）

在数列的每相邻两项之间插入此两项的和，形成新的数列，这样的操作叫做该数列的一次“Z 扩展”. 已知数列 1，2，3 第 1 次“Z 扩展”后得到数列 1，3，2，5，3；第 2 次“Z 扩展”后得到数列 1，4，3，5，2，7，5，8，3；…. 设第 n 次“Z 扩展”后所得数列为 1，x_1，x_2，…，x_m，3，并记 $a_n=1+x_1+x_2+\cdots+x_m+3$.

（1）求 a_1，a_2，a_3 的值；

（2）若 $b_n=a_n-2$，证明数列$\{b_n\}$是等比数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解：（1）$a_1=1+3+2+5+3=14$；

$a_2=1+4+3+5+2+7+5+8+3=38$；

$a_3=1+(1+4)+4+(4+3)+3+(3+5)+5+(5+2)+2+(2+7)+7+(7+5)+5$

$+(5+8)+8+(8+3)+3$

$=3(1+4+3+5+2+7+5+8+3)-1-3$

$=110$. …… 6 分

（2）设 $a_n=1+x_1+x_2+\cdots+x_m+3$，

则 $a_{n+1}=1+(1+x_1)+x_1+(x_1+x_2)+x_2+\cdots+(x_{m-1}+x_m)+x_m+(x_m+3)+3$

$=3(1+x_1+x_2+\cdots+x_m+3)-1-3$

$=3a_n-4$， …… 12 分

所以 $b_{n+1}=a_{n+1}-2=3a_n-6=3b_n$，

又 $b_1=12\neq 0$，所以$\{b_n\}$是等比数列.

即 $b_n=4\cdot 3^n$，

从而 $a_n=4\cdot 3^n+2$. …… 20 分

2016 年全国高中数学联赛江苏赛区

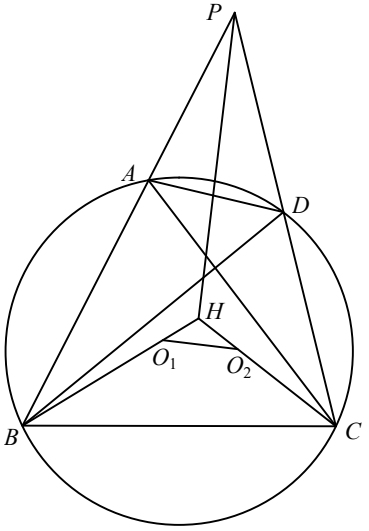
复赛参考答案与评分标准

加　试

一、（本题满分 40 分）

如图，圆内接四边形 $ABCD$ 中，边 BA，CD 的延长线交于点 P，点 O_1，O_2 分别是△ABC，△DBC 的内心，直线 BO_1，CO_2 交于点 H.

求证：$PH\perp O_1O_2$.



证明：如图，设直线 O_1O_2 分别交 AB，CD 于点 E，F，

连接 O_1C，O_2B.

因为 O_1 是△ABC 的内心，

所以 $\angle BO_1C=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$

$=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC$.

同理 $\angle BO_2C=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BDC$.

又因为 $\angle BAC=\angle BDC$，

所以 $\angle BO_1C=\angle BO_2C$，

所以 B，O_1，O_2，C 四点共圆．　…… 20 分

所以 $\angle EO_1B=\angle O_2CB=\frac{1}{2}\angle DCB$，

$\angle FO_2C=\angle O_1BC=\frac{1}{2}\angle ABC$，

从而 $\angle PEF=\angle EO_1B+\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle DCB+\frac{1}{2}\angle ABC$，

$\angle PFE=\angle FO_2C+\frac{1}{2}\angle DCB=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle DCB$，

所以 $\angle PEF=\angle PFE$.

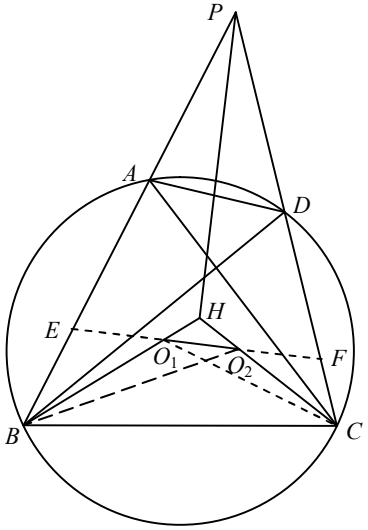
所以 $PE=PF$，　即△PEF 为等腰三角形．…… 30 分

又点 H 在 $\angle PBC$，$\angle PCB$ 的角平分线上，

所以点 H 是△PBC 的内心，

所以 $PH\perp EF$，

即 $PH\perp O_1O_2$.　…… 40 分



二、（本题满分 40 分）

求方程 $\sqrt[3]{x(3+\sqrt{8x-3})-1}+\sqrt[3]{x(3-\sqrt{8x-3})-1}=1$ 的实数解.

解：在实数范围内，$x\geqslant\frac{3}{8}$.

令 $A=\sqrt[3]{x(3+\sqrt{8x-3})-1}$，$B=\sqrt[3]{x(3-\sqrt{8x-3})-1}$，

则 $A^3+B^3=6x-2$，

$AB=1-2x$. …… 10 分

由于 $(A+B)^3=A^3+B^3+3AB(A+B)$，

令 $t=A+B$，

则 $t^3-3(1-2x)t-(6x-2)=0$，

即 $(t-1)(t^2+t+6x-2)=0$. …… 20 分

但是，$t^2+t+6x-2=(t+\frac{1}{2})^2+6(x-\frac{3}{8})$，

当 $x=\frac{3}{8}$ 时，$t=A+B=2\sqrt[3]{3x-1}=1$，从而 $t^2+t+6x-2>0$.

于是，对任意的 $x\geqslant\frac{3}{8}$，$t^2+t+6x-2>0$，从而 $t=1$.

故原方程的实数解构成的集合为 $\{x\mid x\geqslant\frac{3}{8}\}$. …… 40 分

三、（本题满分 50 分）

某台函数计算器上有一个显示屏和两个操作键．如果按一下第一个操作键，则将原显示屏上的数变为 $[\frac{x}{2}]$（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）；如果按一下第二个操作键，则将原显示屏上的数变为 $4x+1$．按一下任意一个操作键称为一次操作．

现在显示屏上的数为 1，问：

（1）是否可以经过有限次操作，显示屏上出现整数 2000？并说明理由；

（2）小于 2000 的整数中有多少个数可以经过有限次操作在显示屏上出现？

解：（1）不可能．

将数化成二进制，那么，按第一个操作键表示将显示屏上的数的最后一位去掉；按第二个操作键表示将显示屏上的数后面加上 01．

当初始数为 1 时，经过以上两种操作后得到的数没有两个 1 相邻，而 2000 化成二进制为$(11111010000)_2$，其中有两个 1 相邻，所以显示屏上不可能出现整数 2000．

…… 20 分

（2）另一方面，如果先进行第二种操作，后进行第一种操作，则等于在原数后加 1 个 0，所以任意一个二进中没有两个 1 相邻的数都可以经过有限次操作可得．

故在显示屏上可以出的小于 2000 的整数的个数等价于不大于$(10101010101)_2$，且没有两个 1 相邻的自然数的个数．

不含 1 的自然数只有 1；

含有 1 个 1 且不大于$(10101010101)_2$的自然数有 $C_{11}^1=11$；

含有 2 个 1 且不大于$(10101010101)_2$的自然数有 $C_{10}^2=45$；

含有 3 个 1 且不大于$(10101010101)_2$的自然数有 $C_9^3=84$；

含有 4 个 1 且不大于$(10101010101)_2$的自然数有 $C_8^4=70$；

含有 5 个 1 且不大于$(10101010101)_2$的自然数有 $C_7^5=21$；

含有 6 个 1 且不大于$(10101010101)_2$的自然数有 1；

综上所述，满足条件的自然数有：$1+11+45+84+70+21+1=233$．

…… 50 分

四、（本题满分 50 分）

设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}$，$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 3$．问是否存在正整数 n，使得 $2^{2016}\|a_n$（即 2^{2016} 整除 a_n，2^{2017} 不整除 a_n）？如果存在，求出最小的正整数 n 的值；如果不存在，请说明理由．

解：存在无穷多个正数 n，使得 $2^{2016}\| a_n$，并且最小的正整数 n 为 $3\cdot 2^{2013}$．

证明如下：

若 $2^a\|m$，则记 $v_2(m)=a$，因此 $v_2(mn)=v_2(m)+v_2(n)$，且 $v_2(m+n)\geqslant\min\{v_2(m)，v_2(n)\}$

如果 $v_2(m)\neq v_2(n)$，那么 $v_2(m+n)=\min\{v_2(m)，v_2(n)\}$．

断言：

① $v_2(a_n)=\begin{cases}0，& n\not\equiv 0(\mathrm{mod}3)；\\ 3+v_2(k)，& n=3k.\end{cases}$

如图：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
$a_n(\mathrm{mod}2)$	1	1	0	1	1	0	1	1	0	…

因此，当 $n\not\equiv 0(\mathrm{mod}3)$时，有 $v_2(a_n)=0$．　　…… 20 分

以下令 $n=3k$，$k\geqslant 1$．显然，$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$．…… 30 分

因此 $a_{3k}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{3k}-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{3k}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((9+4\sqrt{5})^k-(9-4\sqrt{5})^k\right)$$

$$=2\sum_{0\leqslant i\leqslant[(k-1)/2]}C_k^{2i+1}\cdot 9^{k-(2i+1)}\cdot 4^{2i+1}\cdot 5^i$$

$$=C_k^1\cdot 2^3\cdot 3^{2k-2}+C_k^3\cdot 2^7\cdot 3^{2k-6}\cdot 5^2+\cdots+C_k^{2i+1}\cdot 2^{4i+3}\cdot 3^{2k-4i-2}\cdot 5^i+\cdots.$$

因为　$C_k^{2i+1}=\frac{k}{2i+1}\cdot C_{k-1}^{2i}$，即$(2i+1)\,C_k^{2i+1}=k\cdot C_{k-1}^{2i}$，

从而　$v_2(C_k^{2i+1})=v_2(k)+v_2(C_{k-1}^{2i})$，$i\geqslant 1$．

因此　$v_2(a_{3k})=3+v_2(k)$．

② $v_2(a_{3k})=2016$ 当且仅当 $3+v_2(k)=2016$，即 $v_2(k)=2013$．

因此 $2^{2016}\|a_n$ 当且仅当 $n=3\cdot 2^{2013}\cdot m$，其中$(m，2)=1$．

综上，由①，②得最小的正整数 n 为 $n=3\cdot 2^{2013}$．　…… 50 分