

【主持人语】数学是思维的体操。学会思维,是数学学科所应关注的核心素养——关于数学核心素养,不妨暂且抛离整体系统且面面俱到的解构分析,从内容的层面,从一线教师的视角,就“一点”进行控析。为什么要学会思维?学会思维的涵义是什么?如何帮助学生学会思维?……期待本期“独家策划”呈现的三篇文章有助于打开我们的“思维”。

——贲友林

在思维中学会思维

——我对数学核心素养的一个认识

贲友林

(南京师范大学附属小学,210018)

摘要:学会思维,即从自然状态的思考走向愿意思考、善于思考,是数学学科所应关注的核心素养。它具体表现为如下四个方面:其一,能够认识并体验数学思考的基本方法,如归纳、类比、猜想与论证等。其二,能根据已有的事实进行数学推测、论断和解释,养成“推理有据”的习惯。其三,理解他人的思考方式和推理过程,并能与他人进行沟通。其四,能够反思自己的思考过程,通过解决问题活动,获得分析问题和解决问题的能力,发展探索精神和创新意识。

关键词:核心素养 数学思维 学会思维 教学实践

一、从一个问题说起

我曾这样描述我想象中的课堂:课堂中,学生积极主动,善于倾听,勤于思考,敢于质疑,争先恐后地举手,自信大方地表达,或补充,或修正,或肯定,或质疑,充满主见又不失童趣与深刻性的争辩,一个个“小精灵”都是知识、思想、方法的生产者,是学习的主人。课堂生机勃勃,兴味盎然,教师和学生都能感

受到成长的气息。南京大学哲学系郑毓信教授听了我的描述,问了我一个问题:“贲老师,你所说的是你想象中的课堂,我想问你,你想象中的数学课堂是什么样?”

当时,我没有回答得出来。但显然这是一个好问题。数学课,和语文课、英语课以及其他学科的课,应该有不不一样的地方。

毋庸置疑,每门学科的学习,都支撑并服

务于学生核心素养的培养。而每门学科,对学生核心素养的培养又有其独特的作用。数学教学对核心素养培养的作用,不同于语文、英语等其他学科。

谈及数学教学,“思维”是我们挂在嘴边的一个常用语词。数学是思维的体操。没有思维,就没有真正的数学学习。学生通过数学学习,可以发展思维。学会思维,是数学学科所应关注的核心素养。正如郑毓信教授所指出的,“数学核心素养的基本涵义就在于:我们应当通过数学教学帮助学生学会思维,并能使他们逐步学会想得更清晰、更深入、更全面、更合理”。

二、对思维及数学思维的认识

什么是思维?我们是否说得清楚?头脑中生成一些想法,这一过程,是否就是思维?

《现代汉语词典》对“思维”的解释是,在表象、概念的基础上进行分析、综合、判断、推理等认识活动的过程。这是作为名词解释的。如果作为动词解释,则指“进行思维活动”。《简明心理学百科全书》中指出:思维是人脑对客观事物的间接的和概括的反映。它是以感觉知觉和表象为基础的一种高级的认识过程。客观事物直接作用于人的感觉器官,产生感觉和知觉。它们以感性形象反映事物的个别属性或个别事物,使人把握各种现象和事物的外部联系。思维则运用分析综合、抽象概括等各种智力操作对感觉信息进行加工,以贮存于记忆中的知识为媒介,反映事物的本质和内部联系。这种反映以概念、判断和推理的形式进行,带有间接和概括的特性。

由此可见,人在思维活动过程中,要用到分析、综合、比较、抽象和概括等思维方法以及概念、判断、推理等思维形式。在思维方法中,分析与综合是最基本的方法,其他方法是

在分析与综合的基础上派生出来的,是分析与综合的继续和深化。概念是客观事物的本质属性在人头脑中的反映。在思维形式中,概念是思维活动中的基本单位,判断和推理都是由概念组成的,是概念的展开和发展。掌握和运用这些思维方法和形式的程度,是思维能力不同水平的表现。

在数学学习中,学生获取数学知识、形成数学技能、发展数学能力的思维活动是以对数学知识的感性认识为基础的,经过分析、综合、比较、抽象和概括,逐步达到对数学知识本质和规律的理性认识,然后又运用判断和推理等思维形式把所学的数学知识应用于实际。这种从数学的角度、从感性到理性的数学认识活动就是数学思维活动。

谈到数学思维,又想到“数学思想”这一在数学课程标准中也多处提及的词语。数学思维与数学思想既有联系又有区别。数学思想是人们对数学知识内容和所使用的方法的本质认识,它是从某些具体数学认识过程中提炼和概括出来而后被反复证实的数学规律,是人们经过长期实践而形成的,对数学具有一般意义和相对稳定特征的理性认识。数学思想是在与数学知识相对立的意义上得到并使用的,既成性与稳定性是其特点。数学思维则更多的是指思维活动的具体过程,过程性与动态变化性是其特征。可以这样看,数学思维和数学思想分别是与过程和结果大致相对应的;也可以这样看,数学思维更多地作为动词,数学思想更多地作为名词。

福建师范大学李祎教授从思维的视角,将数学思想方法细分如下:(1)观察与实验;(2)类比与猜想;(3)归纳与演绎;(4)分析与综合;(5)抽象与概括;(6)特殊化与一般化;(7)比较与分类。

郑毓信教授指出,小学最基本的一些数

学思想和思想方法如下:(1)分类与抽象;(2)类比与归纳;(3)特殊化、一般化与化归;(4)“寓理于算”与算法化思想;(5)形象思维与“数形结合”;(6)逆向思维与逻辑思维;(7)整体化思维与“序”的把握;(8)多元化与“优化的思想”;(9)建模与数学化的思想。

我以为,李祎教授与郑毓信教授的研究都具有指导意义。与研究数学思想究竟包含哪些内容同样重要的是,我们在实践中依据小学生的认知特点和年龄特征进一步探索与研究,小学生如何通过思维活动学会思维,并在数学思想方面达到怎样的发展水平。

三、学会思维的教学实践

学会思维,即从自然状态的思考走向愿意思考、善于思考。具体表现为如下四个方面:其一,学生能够认识并体验数学思考的基本方法,如归纳、类比、猜想与论证等。其二,学生能根据已有的事实进行数学推测、论断和解释,养成“推理有据”的习惯。其三,学生理解他人的思考方式和推理过程,并能与他人进行沟通。其四,学生能够反思自己的思考过程,通过解决问题活动,获得分析问题和解决问题的能力,发展探索精神和创新意识。

(一)交还时间,让思维沉潜

面对问题,无论是教师,还是学生,都需要思考。思考,必然需要时间。这是常识。不过,在课堂中,教师会还给学生思考的时间与空间吗?如下场景倒比较常见——课堂中,教师提出问题后,倘若全班无人举手,教师表面镇定,内心慌张。紧接着,教师通常会将问题分解成更“小”更“简单”的问题。总之,班上的学生举手了,教师悬着的心才稍微放下来一些。学生为何答不上来,原因很多,较为常见的是学生还在思考中,还没有准备好合适的说法来回答问题。此刻,表面看来是一种沉默,其实,学生的内心思维活动活跃

着呢!

著名数学家陈省身指出:“数学是自己思考的产物。首先要能够思考起来,用自己的见解和别人的见解交换,会有很好的效果。但是,思考数学问题需要很长时间,我不知道中小学数学课堂是否能够提供很多的思考时间。”以往在数学教学中,教师更注重的是学生的“快思”,而难以接纳“慢想”。

考虑到课堂中思考时间的局限性,我整体考虑学生课内学习与课外学习之间的关系,将课堂中要学习的内容设计成问题前置于课前,让学生进行思考与研究。比如,“三角形的分类”是苏教版小学数学四年级下册的教学内容,教材先引导学生根据角的特点对三角形进行分类,认识锐角三角形、直角三角形和钝角三角形,再根据边的特点,认识等腰三角形和等边三角形。我在教学这部分内容时,先组织学生独立自主地完成如下“研究学习”材料:

“三角形”研究学习

1. 如果将三角形按角进行分类,可以怎样分类?能用图表示吗?

2. 为什么说“三个角都是锐角的三角形是锐角三角形”?而直角三角形却说“有一个角是直角”,钝角三角形说“有一个角是钝角”?

3. 如果将三角形按边进行分类,可以怎样分类?能用图表示吗?

4. 关于三角形的分类

我的发现:

我的提醒:

我的疑问:

要说明的是,这份材料,让学生研究了三角形按角分类与按边分类,是后几节课的课

堂学习中使用的。

对于锐角三角形、直角三角形、钝角三角形,学生通过顾名思义的方式即可获得大致正确的认识。而我以“分类”为切入口,设计了这样的问题:如果将三角形按角、按边进行分类,可以怎样分类?能用图表示吗?这对学生来说,是更具有挑战性的问题。通过这样的问题,把学生带到学习任务中,让学生展开自己的思考,让他们带着想法走进课堂,展开“有准备的”课堂学习。学生在探讨三角形按角分类的过程中,进一步认识锐角三角形、直角三角形、钝角三角形;在探讨三角形按边分类的过程中,进一步认识等腰三角形、等边三角形。课前的研究学习,不仅弥补了课堂内学生独立思考时间的不足,而且,也让每位学生拥有了个性化思考的弹性与空间。

与以往我们所说的“预习”相比,前置于新课学习之前的研究,思维含量更高。就目的来看,预习,往往是让学生对将学的新内容有所了解,更多的是接受现成的结论;而前置性研究学习,是以研究的方式展开对将学内容的思考,更多的是记录自己的想法,写下自己的疑问。就完成的方式来看,预习更多地表现为接受教材中的内容;而前置性研究学习,是以研究的方式思考问题、实践体验。就结果来看,前置性研究学习,是组织学生以研究的方式面对将学的内容,而不是把教材中的知识乃至结论简单地移植,也就是说,它更多凸显思考的成分。

(二)滞后评价,让思维敞亮

学生的数学学习需要独立思考,也离不开独立思考之后与同伴、与老师的交流互动。学生的学习,不是“一个人在战斗”。正如《学记》中所指出的“独学而无友,则孤陋而寡闻”,学生在学习中要互相切磋,彼此交流心得和经验,促进思维增殖。

与以往教师在学生交流的过程中急切追求正确想法所不同的是,教师更应当注重引导学生坦诚地把自己的想法与全班交流,并努力在各自想明白的基础上讲清楚。比如,教学《长方形和正方形》一课,我出示这样一个问题:

一个边长是90米的正方形菜地,扩大后边长增加了3米,这块菜地扩大后的周长是多少米?

学生独立思考后汇报,我板书:

$$\begin{aligned} & (90+3)\times 4 \\ & =93\times 4 \\ & =372(\text{米}) \end{aligned}$$

马上有学生指出:“不对,算式应该是 $90\times 4+3$ 。”

第一位学生汇报的解答是对的,这在我的预料之中。但我只是板书,未作评判。因为教师这时候一句“对”的肯定,很可能就会让其他学生的不同想法不再敞亮。教师不言语,学生就会“接着说”。果不其然,一位学生指出前一位学生的算法“不对”,并列出了他认为正确的实际上是不正确的算式。我没想到学生会这样出错。不过,我仍旧“忍住”不说话。

又一位学生起立发言:算式不应有括号,应列式: $90+3\times 4$ 。这又是我没想到的答案。其实,当学生说出算式“ $90+3\times 4$ ”时,我便意识到学生对“扩大后边长增加了3米”的理解是有困难的。在全班不再有学生补充不同算法的时候,我让学生继续交流这道题目如何分析。

滞后评价,目的在于让学生安全而自由地表达自己的思考。学生的想法,不是“蓝本”,而是“镜子”。在全班展示、交流的过程中,每位学生都把他人的想法与自己的想法进行对照,在比较的过程中,发现自己的错

误,优化自己的想法,建构自己的新的认识。由此,促使他们主动思考,深入思考。

(三)适度指导,让思维跃升

放手,并不是放任不管。指导,要适时、适度、适当。与教师直接指导学生如何思考不同的策略是,教师可以通过组织学生分析同伴的发言,让学生“兵教兵”,在思考中学会思考。

如《三角形的分类》一课中,就提出问题:为什么说“三个角都是锐角的三角形叫锐角三角形”?而直角三角形却说“有一个角是直角”,钝角三角形说“有一个角是钝角”?学生交流如下——

刘嘉仪首先发言:因为 180° 可以分成3个锐角,但不能分成3个钝角或直角。

曹德坤补充:我认为还要考虑三角形的内角和 180° 不能分成两个钝角以及两个直角和一个锐角。

向无邪说:我是这样想的。因为三角形的三个角加起来等于 180° 。如果锐角加锐角再加锐角等于 180° ,这是可以的;如果锐角加锐角再加直角等于 180° ,也是可以的;如果锐角加两个直角,那就大于、等于 180° 了,这是错的;如果锐角加锐角加钝角等于 180° ,也是可以的;如果锐角加两个钝角,那也大于、等于 180° ,也是错的。

宋儒妍指出:向无邪,你刚才发言中有两个地方说得不准确。一个是“锐角加两个直角,大于、等于 180° ”,而锐角加两个直角,一定大于 180° ;还有一个是“锐角加两个钝角,大于、等于 180° ”,应该是锐角加两个钝角,也一定大于 180° 。

王佑楠接着说:我是这样想的。一个三角形,只能有一个钝角或一个直角。如果有两个直角,如角1、角2都是 90° ,那角3就是 0° ,这不成立;如果有两个钝角,如角1、角2

都是 91° ,那角3就是负 2° ,更不成立。所以三角形中只能有一个直角,一个钝角。

教师紧接着王佑楠的发言“介入”:我们来看王佑楠的想法,你觉得王佑楠的想法有什么特点?

王子晔说:她是举例子想的。

黄怡宁指出:王佑楠是从反面想的,在三角形中,如果有两个直角,或者有两个钝角,会怎么样,结果发现不可能,所以三角形只能有一个直角或一个钝角。

凌逸峰指着王佑楠的板书分析:王佑楠画了一个表格,尽管没有把表格线画出来,但这样看,很清楚,有条理。

教师小结:三位同学的分析,非常精彩!从王佑楠的想法中,我们看到,思考问题时,可以举例子想,从反面想,用表格有条理地表达自己的想法。

在学生敞亮各自想法的过程中,教师可以对学生的话语方式进行指导,如“我认为,你的想法是……”“由你的想法,我想到了……”“我觉得你的想法还可以改一改……”“你的想法,有个漏洞……”“我的想法,和你的想法有关系,但不同的地方是……”当然,最初学生在交流时有这样的话语方式,但渐渐地,学生就不受这些固定的话语模式限制了。指导话语方式,其价值不仅仅是让学生学会交流,更有意义的是,在这样的话语方式下,学生会形成互动的意识,促使思维更加合理、更加全面。当然,教师的指导,贯穿并渗透在日常课堂教学之中,非一日之功,不可能毕其功于一役。

(四)组织反思,让思维积淀

当学生思考之后,如何让学生积累思维经验呢?及时反思,是非常重要的。有学者通过对专家与新手的學習过程、學習方式的对比研究发现,专家的一个特点是能够监控、

调整自己的理解过程,不断学习适应性知识。也就是说,专家的学习具有自我调节的特征。自我调节,指学习者系统地引导自己的思维、情感和行为,使他们指向目标实现的一种过程。诸如“元认知”“自我观察”“自我判断”“自我监控”“自我评价”等,都是包含在自我调节中的认知行为。

因此,在课堂小结环节,要引导学生关注自己在学什么、怎么学的、学得如何,以及学习过程中思考了哪些问题、如何思考的。如《平行四边形的面积》一课,回顾全课学习内容,梳理的问题,不仅有公式是什么,还有公式是怎样推导来的,并进一步思考为什么把平行四边形转化成长方形;《三角形内角和》一课,引导学生想一想,为什么要分别把锐角三角形、直角三角形、钝角三角形进行操作,来发现内角和是 180° ?又如在解决问题的教学中,要引导学生针对所解决的问题本身、解决问题的过程、解决问题的结果进行反思:解决的是什么问题?是如何解决问题的?是怎样收集信息、处理信息的?为什么这样加工信息?分析时从哪里入手的?解决问题的思路为什么是这样?为什么这样算?我这样做,对吗?我为什么这样做?以后可以怎样做?解决问题的策略是什么?通过上述问

题,学生更自觉地认识自己的思维方法与过程、学习路径与进程,从而有效地调节、控制自己的学习,积累思维活动的经验。

小学生的数学学习有这样一个特点,那就是喜欢“勇往直前”,不太愿意“回头看路”。事实上,学生“走走停停”,“回头看看”,这对他们积累思维活动经验,形成自我调节的意识与能力都是非常必要与重要的。

四、结语

布鲁纳曾经指出:“我们教师的目的在于:我们应当尽可能使学生牢固地掌握学科内容。我们还应当尽可能使学生成为自主而自动的思想家。这样的学生,当他们在正式学校教育结束之后,将会独立地向前迈进。”在思维中学会思维,比思维本身更具意义。

参考文献:

- [1] 荆其诚. 简明心理学百科全书[M]. 长沙:湖南教育出版社,1991
- [2] 郑毓信. 小学数学概念与思维教学[M]. 南京:江苏凤凰教育出版社,2014
- [3] 李祎. 数学教学方法论[M]. 福州:福建教育出版社,2010
- [4] 郑毓信.“数学核心素养”之我见[J]. 教育视界(智慧教学),2016(4)