币“反面朝上”等. 将事件数字化，其做法是为后面选择性必修第三册事件用随机变量 X 表示做铺垫.

是先学习概率——将事件用随机变量 X(数)表示后，研究和讨论离散型随机变量 X 的概率分布列(类似数列——一列函数值)、分布表(两点分布 $X \sim 0-1$(对立事件)、超几何分布 $X \sim H(n,M,N)$(互斥事件)、二项分布 $X \sim B(n,p)$(独立重复事件)). 连续型随机变量 X 的概率分布图——正态分布 $N \sim (\mu,\sigma^2)$.

后学统计——统计案例：独立性 χ^2 检验，相关性 r 检验(主要是线性回归分析).

类比运用函数的思想方法，将概率分布看成是函数的取值分布：$f(x_0)$ 与 $P(X=x_0)$；$y=f(x)$ 与 $P(A)$. 不过概率的研究对象要比函数的研究对象复杂得多.

(3)要转变观念——这一块的教学内容及例题、练习题与函数、三角、数列等有很大不同，就是规定的定义、概念比较多，这些又不好让学生探究. 当然，也有可以让学生思考的问题，如等可能的所有样本点及其个数，用集合来理解事件之间的关系等. 教学中要注意利用典型例子，针对随机现象的特征、样本点、样本空间、随机事件及其关系等提出问题，最好是让学生自己提出问题. 教师上课讲的不要认为简单问题繁琐化，学生作业做的不要嫌不带劲(我们知道过去学生求概率就写一个式子或数字，不少老师和学生连“记……为事件 A”等都懒得写). 尤其是认为写出样本空间 Ω 及其中的元素即样本点 ω、事件 A 及其中的样本点，没有什么意思. 要抛弃这样的想法，这样的训练是基础性的，对于认识和理解随机现象有重要意义，不能匆匆而过多. 要多引导学生用适当的符号表示试验所有的可能结果，重视学生数学语言表达的训练.

基于高中数学核心素养的教学情境创设

——以“基本不等式”情境引入为例

江苏省常州市第三中学　(213000)　郭影影

上学期校内组织青年教师岗位练兵之模拟课堂活动，课题是《基本不等式》第一课时. 模拟课堂时间有限，最精彩的部分就是情境引入. 俗话说，好的开始是成功的一半. 一节数学新授课，情境引入环节是必不可少的，也是最重要的. 一节好的数学在新授概念课教学中，应该重视揭示数学概念的本质，渗透数学思想方法，培养数学学科核心素养. 促进学生对数学思想方法的理解，提高学生对数学知识的产生、发展、演变的探究兴趣，是数学教师们的不懈追求. 在《基本不等式》第一课时的教学中，本人在参与模拟课堂活动之后有感而发，总结出以下 6 种精彩的情境引入，分别以几何图形情境、操作情境和生活情境三个方面进行说明，并探究如何在情境教学中渗透数学核心素养.

1. 基于几何图形情境

《普通高中数学课程标准》指出通过高中数学课程的学习，学生能提升数形结合的能力，发展几何直观和空间想象能力；增强运用几何直观和空间想象思考问题的意识；形成数学直观，在具体的情境中感悟事物的本质. 《基本不等式》第一课时的首要教学目标就是让学生知道基本不等式的内容及其几何背景. 而从几何图形出发，让同学们在观察图形中直观获得代数关系，旨在培养学生的直观想象和数学抽象核心素养.

案例 1　如图 1，AB 是圆 O 的直径，$AC=a$，$CB=b$，过点 C 作 $CD\perp AB$ 交圆 O 的半圆于点 D，连接 AD，BD.

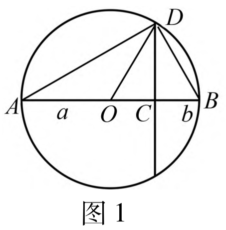

图 1

师：你能在图中找出长度分别为 $\frac{a+b}{2}$ 和 $\sqrt{ab}$ 的线段吗？

生：(思考并讨论片刻)图中 $OD=\frac{a+b}{2}$，$CD=\sqrt{ab}$.

师：可以给出证明吗？

生：OD 为半径长，由 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle DCB$ 相似可得 $\frac{CD}{CB}=\frac{CA}{CD}$，从而得 $CD=\sqrt{ab}$.

师：通过图形可直观发现线段 OD，CD 的长度关系是怎样的呢？

生:CD 长度小于 OD.

师:两者长度可能相等吗? 何时相等?

生:当 $a=b$ 时,$CD=OD$.

师:反过来,若 $CD=OD$,可知 $a=b$. 也就是说 $a=b \Leftrightarrow CD=OD$,即当且仅当 $a=b$ 时,有 $CD=OD$. 通过“半径不小于半弦”这一几何关系知道“两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数”这一代数关系,即 $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立,条件是 $a \geqslant 0, b \geqslant 0$,称为“基本不等式”.

设计意图:这是苏教版(2020 年)新高考新教材给出的情境,以几何图形作为情境引入,便于理解基本不等式,突出其几何解释,即“半径不小于半弦”. 这样设计,一是凸显几何图形的直观价值,体现数形结合数学思想的重要应用,同时为后续学习打下铺垫;二是引导学生从自然语言向图形语言、符号语言的转换,体现数学语言的精美和严谨;三是体现知识连贯性和生成性. 在教学中,以形辅数,通过图形直观发现代数量之间的关系是常用的教学手段,通过直观经验和感性认识,活化学生思维,激发学习热情,成就高效课堂.

案例 2　如图 2 是 2002 年 8 月在北京召开的第 24 届国际数学家大会会标,是根据古代数学家赵爽的弦图设计的,颜色的明暗变化使它看上去像是一个风车,代表着中国人民的热情好客. 该会标是由四个全等的直角三角形围成的. 设直角三角形的直角边长为 a,b.

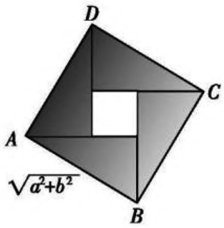

图 2

师:根据图示,请计算出大正方形 $ABCD$ 的面积和四个小直角三角形的面积之和?

生:大正方形 $ABCD$ 的面积为 a^2+b^2,四个小直角三角形的面积之和为 $2ab$.

师:根据图示,两个面积之间的大小关系怎样呢? 代数关系怎样表示?

生:大正方形 $ABCD$ 的面积大于四个小直角三角形的面积之和,代数表示为 $a^2+b^2>2ab$.

师:两个面积关系可能相等吗? 何时相等呢?

生:当四个直角三角形的直角边在正方形的对角线上时,两个面积关系相等,此时 $a=b$.

师:通过探究发现不等关系式 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$,称为“重要不等式”. 同学们再思考该不等式成立时 a,b 可以取任意实数吗?

生:可以取任意实数. 由上图知道取正数时可以,若 a,b 取一正一负是恒成立的,若 a,b 同时取负值,可以取值验证是正确的,若 a,b 取到 0 也是恒成立的.

师:很好. 重要不等式 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ 成立的条件是 $a,b \in \mathbf{R}$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立. 现在,用 $\sqrt{a}$ 替换 a,用 $\sqrt{b}$ 替换 b,可得到 $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$,即 $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$,这便是我们探究的 a,b 的几何平均数和算术平均数的大小关系,称为“基本不等式”. 这里 $a \geqslant 0$,$b \geqslant 0$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

设计意图:以 1300 多年前的赵爽弦图作为情境引入,吸引学生注意力,引发联想,激发探究欲望. 这里采用几何图形变化的形式,使同学们感受到弦图的魅力所在,感叹于古代数学家的智慧,深切感受我国数学学科的悠久历史和深厚的文化底蕴. 同时也易于学生理解和接受重要不等式的产生过程,从而迅速激发学习热情. 根据重要不等式,运用逻辑推理得出本节课的内容基本不等式. 数学核心素养的形成,学生必须具备一定的基础知识,而新授课堂的教学需要激发与学生的共鸣,从学生所具备的基础知识入手,简洁明了的进入主题. 该案例从精美的弦图入手,从直观图形中抽象出数学问题,通过观察、联想、总结得出“重要不等式”,进而引出“基本不等式”,培养学生的直观想象和数学抽象核心素养.

2. 基于操作情境

《普通高中数学课程标准》指出“动手实践、自主探索与合作交流是学生学习数学的重要方式”. 将数学的情境教学当作一个活动来执行,让学生动手操作“实验”,以动促思,自主探索,让数学课堂活起来,不在是死板的老师教学生学的传统课堂. 调动感官参与学习,进行适度抽象,获得数与形的联系,完成数学知识的“创造”. 使得每位同学都是知识得发现者、创造者. 在这种操作情境中有益于培养学生的直观想象、逻辑推理和数学抽象核心素养.

案例 3　同学们准备正方形纸片,如图 3,图 4,先将两张正方形纸片沿它们的对角线折成两个等腰直角三角形,再用这两个等腰直角三角形拼接构造成一个矩形.

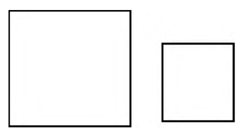
图 3

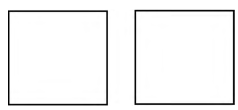
图 4

师:能构造出一个矩形吗?(同学到黑板画出)

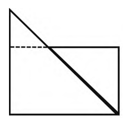
图 3′

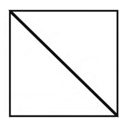
图 4′

师:假设图 3 中两个正方形的面积分别为 a,b $(a>0,b>0)$,分别计算出矩形的面积和两个等腰直角三角形的面积和. 它们之间具有怎样的大小关系?

生:矩形的面积 $S_1=\sqrt{ab}$,两个等腰直角三角形的面积和为 $S_2=\frac{a+b}{2}$. 由图 3´可知矩形面积小于两个等腰直角三角形面积和,由图 4´可知两个面积相等.

师:请用符号语言表示.

生:$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a>0,b>0)$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

师:两个正数的几何平均数不大于它们的算术平均数,当且仅当 $a=b$ 时等号成立. 称为基本不等式. 其中 a,b 为 0 时也是成立的. $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a\geqslant0,b\geqslant0)$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

设计意图:教师从简单的折叠拼接构造长方形这个简单易操作的活动开始,使同学们获得心理安全,每位同学都能够参与其中. 在讨论交流中获得知识、营造轻松愉快的课堂氛围,又使同学们获得心理自由,从而导致学习的创造性. 教师从基本不等式的几何背景入手,通过拼图实验,使同学们直观感受基本不等式的形成过程,增强学习内驱力,激发同学们对数学知识的“再创造”.

案例 4　情景:本节课探究两个正数 a,b 的算数平均数 $\frac{a+b}{2}$ 和几何平均数 $\sqrt{ab}$ 之间具有怎样的大小关系? 现在请每位同学自由举出 3 组 a,b 的值,算一算它们的算术平均数和几何平均数,并比较大小. 完成后可与同桌讨论自己的运算结果.

生 1:举的 3 组例子发现算数平均数 $\frac{a+b}{2}$ 小于几何平均数 $\sqrt{ab}$.

生 2:也有可能两者相等,当举例 $a=b$ 时.

生 3:同意以上两位同学的观点.

生 4,生 5,……

师:看来通过大家的计算都支持两个正数 a,b 的算数平均数 $\frac{a+b}{2}$ 小于等于几何平均数 $\sqrt{ab}$,即 $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{ab}$,当 $a=b$ 时得 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$. 现在请同学们思考如果 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$,能得到什么? 如何说明?

生:$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=0\Rightarrow\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2}=0\Rightarrow a=b$.

师:$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{ab}$ 成立的充要条件是 $a=b$,即当且仅当 $a=b$ 时等号成立. 我们猜想这便是我们探究的两个正数 a,b 的几何平均数和算术平均数的大小关系,这个猜想是否正确呢,只需通过严谨的代数证明即可.

设计意图:这是苏教版老教材必修 5 中给出的情境引入. 数据分析是数学学科六大核心素养之一,猜想验证也是一种重要的数学思想方法,荷兰数学教育家弗兰登塔尔说“真正的数学家——常常凭借数学的直觉思维做出各种猜想,然后加以证实.”因此,该教材中给出通过数据分析进行猜想验证的情境,意在要求教师们重视数据分析核心素养和猜想验证思想方法在教学中的渗透,以增强学生主动探索、获取数学知识的能力,促进学生创新能力的发展,旨在让学生做学习的主人,将课堂还给学生. 该课引入环节,问题设计简单,具有可操作性,同学们参与程度高,积极性强.

3. 基于生活情境

《普通高中数学课程标准》指出要让学生能够“运用数学的思维方式取观察、分析现实社会,去解决日常生活中和其他学科学习中的问题,增强应用数学的意识”. 下面两个案例的设计充分体现这一理念. 从生活中的实际问题出发,引导学生通过实验、观察、归纳、抽象、概括,数学地提出问题、分析问题和解决问题. 这样安排是为了体现数学知识的产生与发展过程,体现数学学科的应用价值. 旨在培养学生的数学建模和数学抽象核心素养.

案例 5　情景:小明同学的妈妈到某金店购买黄金首饰,店内的天平制造不够精确,天平的两臂长略有不同(其他因素不计). 老板分别将首饰放在左右盘中各称一次,两次测量首饰质量分别为 a 克和 b 克,老板说金首饰的重量为 $\frac{a+b}{2}$ 克. 请问你同意店老板的做法吗?

生:不同意,天平不够精确.

师:那你能够求出金首饰的实际质量吗?(同桌讨论交流)

生:设天平的两臂长分别为 l_1,l_2,物体实际质量为 M,根据力学原理有 $l_1M=l_2a,l_2M=l_1b$,得 $M=\sqrt{ab}$. 所以金首饰的实际质量为 $\sqrt{ab}$ 克.

师:很好. 那么 $\frac{a+b}{2}$ 和具有怎样的大小关系呢? 猜测一下呢?

生:猜测应该是物体的实际质量小于老板测量

出的质量.

师:怎么说明呢?

生:做差比较. $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0$,当且仅当 $a=b$ 时,$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$.

师:这便是我们今天要学习的基本不等式 $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{ab}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

设计意图:从物理实际问题出发,激发学生学习的兴趣.通过学生自主探究与展示,教师从中引导将实际问题抽象为数学问题.引出算术平均数和几何平均数的概念,进而是如何比较两者的大小问题.

案例 6　情景:甲、乙两人同去一家粮店分别买了两次粮食,两次粮食的价格分别是 a 元/千克,b 元/千克($a\neq b$),两人的购粮方式不同:甲每次买 1000 千克,乙每次买 1000 元.谁的购粮方式更合算呢?说明理由.

生 1:应该计算两人购粮的均价,再比较大小.

生 2:甲两次购粮的均价为 $\frac{1000a+1000b}{2000}=\frac{a+b}{2}$ 元/千克;乙两次购粮的均价为 $\frac{2000}{\frac{1000}{a}+\frac{1000}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$ 元/千克.

生 3:上节课介绍过可以作差比较大小. $\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}>0$,故 $\frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b}$.所以乙的购粮方式更合算.

师:很好. $a\neq b$ 时,$\frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b}$. $a=b$ 时,$\frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}$.反之,若 $\frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}$,则 $a=b$.所以 $\frac{a+b}{2}\geqslant\frac{2ab}{a+b}$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

师:上述不等式继续变形可得 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立,称为基本不等式.

设计意图:该案例从生活实际问题引入,学生首先合作交流寻找解决方法,再自主运算解决问题.让学生在自然、开放的氛围中充分发挥自己的探究能力,提高思维水平,进而提升解决问题的能力.

通过以上案例研究,笔者认为作为一线教师应该为每节课备出适合学情的教学方案,从而使学生在轻松舒适的氛围中获取知识.课堂教学的首要任务是将学生视为课堂主人,教师尽可能的少讲、精讲,应该通过创设情境适当组织学生独立思考、交流表达、对话互动.课堂教学的最终目标是渗透数学思想,发展学生数学核心素养.以《基本不等式》为例的 6 个情境创设,以核心素养为指导方向,始终注重数学思想方法的渗透,培养学生自主解决问题的意识.

参考文献

[1]中华人民共和国教育部制定.普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[M].人民教育出版社,2020.5.

[2]孙余.基本不等式的证明教学实录及感悟[J].中学数学教学参考,2016.5.

创设问题情境,关注生成过程,提升核心素养

——“直线与平面垂直的判定”教学实践与思考

湖北省襄阳市第一中学　(441099)　李　珍

湖北省襄阳市第五中学　(441057)　马文俊

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》强调要培养和提升高中学生的数学学科核心素养.数学核心素养包括:数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析.如何在课堂实践中提升高中学生的数学核心素养呢?笔者通过直线与平面垂直的判定的教学实践和思考做了一些探索,