

注重数学的整体性, 提高系统思维水平(续)

——人教版《义务教育教科书·数学》九年级下册介绍

章建跃(人民教育出版社中学数学室)

2 编写时考虑的主要问题

2.1 注重数学的整体性

整体是事物的一种真实存在形式。数学也是一个整体,数学中的整体性既体现在代数、几何、三角等各部分内容之间的相互联系上,也体现在同一部分内容知识的前后逻辑关系上。但学生的学习是循序渐进、逐步深入的,概念要一个个地学,知识要一点点地教。所以,如何处理好这种矛盾是编写教材时思考的核心问题。鉴于本册书的内容特点,这个问题尤其需要重点考虑。

为了培养学生对数学内部联系性的认识,教科书加强了相关内容的沟通,并采取切实措施予以落实。例如,在章引言中通过类比与联系,构建全章的研究框架和整体思路,使学生感受将学的知识与已学知识的联系。“反比例函数”引言中“与研究……类似,我们将在……定义的基础上,研究……图像和性质,并……解决实际问题”,“相似”引言中“类似的,两个形状相同、大小不同的三角形,它们的边和角有什么关系?对应线段和面积有什么关系?如何判断……”,这些都是同一部分内容中,采取以旧引新的方法引出学习内容,并在思想方法的一致性上给予明确提示。而在具体内容的展开中,则注意两个问题:一是引导学生用已有知识解决问题,例如“反比例函数图像和性质”讨论的问题、过程和方法与正比例函数等是一致的;二是注意用新的眼光看已有知识,例如把全等看成相似的特例,从边与边的比的角度看“直角三角形中,30°的角所对的边是斜边的一半”等。

2.2 强调知识的逻辑连贯性

数学教学要使学生学会“数学地认识问题和解决问题”,其含义是数学有其认识和解问题的“基本套路”,我们要努力让学生学会这一“套路”。具体而言,对一个数学新对象的研究,一般是按“背景—定义—

表示—分类—(代数)运算、(几何)性质—联系和应用”的线索展开。本册书各章内容的编写也不例外。

例如,“反比例函数”一章,教科书先安排“思考”,让学生判断几个实际问题中变量之间的函数关系,然后抽象出反比例函数的定义和表达式(表示);再分 $k > 0$ 和 $k < 0$ 讨论函数的图像和性质;再应用反比例函数的性质解决问题,这些问题不仅有数学内部的,也有生活实际的,还有物理、化学等相关学科的。

再如,“投影和视图”中,教科书以生活中无处不在的“如影随形”的现象为背景,引入投影的概念,然后把投影分为平行投影和中心投影两类,又把平行投影进行再分类,接着研究正投影的性质(投影的形状、大小),再应用投影的性质解决三视图问题。这个过程也是按上述“基本套路”展开的。

2.3 加强数学学习理论的指导

在本套教材的总体指导思想中,提出使教材“利学利教”。这就要求我们以学生的数学认知规律为依据编写教材。例如,数学学习论指出,数学概念的学习一般要经历如下过程:

概念的引入——借助具体事例,从数学概念体系的发展过程或解决实际问题的需要引入概念;

概念属性的归纳——对典型丰富的具体例证进行属性的分析、比较、综合,归纳不同例证的共同特征;

概念的明确与表示——下定义,给出准确的数学语言描述(文字的、符号的);

概念的辨析——以实例为载体分析概念关键词的意义(恰当使用反例);

概念的巩固应用——用概念解决简单问题,形成用概念作判断的具体步骤;

概念的“精致”——通过概念的综合应用,建立与相关概念的联系,将概念纳入概念系统。

“锐角三角函数”的编写就体现了这一过程:

课题的引入:从实际需要看(如比萨斜塔的倾斜

问题);从数学内部看(已经研究直角三角形边与边、角与角的关系,边与角有什么确定的关系)。

概念属性的归纳:例证1从最熟悉的开始,由“直角三角形中,30°角所对的边总是斜边的一半”,得到30°角所对的边与斜边的比值是 $\frac{1}{2}$ 。

思考:由这个结论能解决什么问题?——直角三角形有一个锐角为30°,则已知一边可求其余边。

例证2等腰直角三角形中,锐角 $\angle A$ 的对边与斜边的比是多少?由此能解决什么问题?

归纳:任意给定锐角 $\angle A$, $\angle A$ 的对边与斜边的比值是否为一个确定的值?

概念的明确与表示:下定义,用符号表示。

定义的辨析:(1)Rt $\triangle ABC$ 中,给定锐角 $\angle A$,当 $\triangle ABC$ 的大小变化时, $\angle A$ 的对边与斜边的比值不变,即对于每一个锐角 $\angle A$ 都有唯一确定的比值与之对应,这个比值叫做 $\angle A$ 的正弦;(2)符号 $\sin A$ 的理解——一个由 $\angle A$ 唯一确定的数(比值),例如 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$;等等。

概念的巩固应用:已知直角三角形的边求正弦值等。

概念的精致:解直角三角形。

2.4 加强数学思考方法的指导

学生在数学学习中培养起来的思维方式和逻辑思维能力,能在解决各种问题中发挥作用。所以,教科书注重以数学内容为载体,把思考方法的指导融入其中。例如,在“三角函数”中,先在章引言中引导学生思考,对三角形已研究过什么,还可以研究什么,这是让学生体会“如何提出有研究价值的问题”;具体研究中,注重“从定性到定量的思考方法”,这是数学的普遍方法,其实也是解决其他问题的常用方法;对于一个抽象问题,强调从特殊问题入手,而且从最熟悉的情景开始(含30°角的直角三角形),这种从特殊到一般、从具体到抽象的研究方法具有普遍意义;对一个熟悉的问题,从另一个角度看,对旧问题作新解释,往往能开辟一片新天地,这是数学发展的基本思路之一;使学生在经历概念形成的完整过程中,体会数学思考的基本方法;等等。

这里还想谈谈教科书对如何研究数学性质的思考。什么叫“性质”?一般地,性质是指事物所具有的本质,即事物内部稳定的联系。问题是,这里的“事物内部”指什么?“稳定的联系”是怎么表现的?到底怎

样才能发现这种“联系”?教科书应该在这些问题上给出指导。对于三角形而言,“内部”可以是三角形的组成要素(三个角、三条边),也可以是“相关要素”(外角、高、中线、角平分线等),还可以是与度量相关的要素(周长、面积、高线的长等);而“稳定的联系”是指三角形要素、相关要素之间确定的关系(不随三角形的变化而变化)。例如,“三角形内角和定理”“两边之和大于第三边”“大角对大边”等,以及“外角等于不相邻两内角的和”“三条高交于一点”“等腰三角形三线合一”等性质都体现三角形的要素、相关要素之间确定的关系。如果要研究两个几何事物在某种关系下具有什么性质,则可以探索由这种关系所决定的两个几何事物的对应要素之间确定的关系。例如,两个三角形有相似关系,相似比为 k ,探究两个三角形的要素和相关要素与相似比 k 有没有确定的关系,就是在探索相似三角形的性质。教科书正是从这样的思路出发,先在“思考”栏目中引导学生思考相似三角形的性质指什么?然后再展开研究。这样的安排,把“相似三角形的几何量与相似比之间是否形成确定的关系”作为思考的切入点,再通过作图、观察、类比、联想、猜想等发现规律,得出猜想,然后通过推理、论证得到相似三角形的性质。这个过程与人类发现和组织几何知识的原始过程有一定的相似性。这样编写教材,加强了研究方法的指导,不仅使学生获得系统性知识,而且学会探究的方法,数学思维能力的培养也自然地贯穿其中。

3 教学建议

以上述其实已包含教学建议的成分。如果教师能从中得到启发,以本册书的数学内容为载体,在“理解数学,理解学生,理解教学”上下一番工夫,那么达成本册书的教学目标就有了保证。前面几册教科书介绍中已反复提及的建议,例如把握教学要求、加强过程性、落实“四基”“四能”、注意使用信息技术等,同样适用于本册,这里不再重复。下面根据本册教科书的主要特点谈两点教学建议:

3.1 加强系统思维的培养

数学是一个系统,理解和掌握数学知识需要系统思维。系统思维就是把认识对象作为系统,从系统和要素、要素和要素、系统和环境的相互联系及相互作用中综合地考察认识对象的一种思维方法。系统思维能极大地简化人们对事物的认知,并提高研究的质量和效率。系统思维给我们带来整体观、全局观,具

备系统思维是逻辑抽象能力强的集中表现。

中学数学中,数、式及其运算,方程、不等式与函数,平面几何,概率与统计等,都是一个系统。每一个数学概念都可以看成一个小系统。运用系统思维方式研究数学对象,以三角形为例,可以按如下过程展开:

(1)定义“三角形”,明确它的构成要素;

(2)用符号表示三角形及其构成要素,并以要素为标准对三角形进行分类;

(3)研究基本性质,即研究要素之间的关系,得到“三角形两边之和大于第三边”“三角形内角和等于 180° ”“三角形内,大角对大边,等角对等边”等;

(4)研究“相关要素及其关系”,如“三角形的外角等于不相邻两内角之和”“三角形三条中线(高、角平分线)交于一点”等;

(5)三角形的全等(反映空间的对称性,“相等”是重要的数学关系,也可以看成“确定一个三角形的条件”);

(6)特殊三角形的性质与判定(等腰三角形、直角三角形);

(7)三角形的变换(如相似三角形等);

(8)直角三角形的边角关系(锐角三角函数),解直角三角形。

概括起来就是:

定义—表示—分类(以要素为标准)—性质(要素、相关要素的相互关系)—特例(性质和判定)—联系(应用);

定性研究(相等、不等、对称性等)—定量研究(面积、勾股定理、相似、解直角三角形等)。

本册书研究的“相似”,作为“小系统”,其研究过程是:相似图形—相似多边形—相似三角形—位似。这是一个不断特殊化的过程。而对“相似三角形”的研究,又重复了上述过程:定义—判定与性质—应用。

值得指出,上述过程具有普适性,既适用三角形的研究,也适用其他数学对象的研究,因此体现系统思维方式的结构性。数学教学中,只要紧紧抓住这一结构,再通过横向或纵向的类比与联系,引导学生去认识和把握具体数学对象的要素和功能的关系,就能使他们建立起研究数学对象的结构,并形成完整的认识。

总之,培养系统思维,是为了使学生养成全面思考问题的习惯,避免“见木不见林”,并掌握具有普遍意义的思想方法,进而使他们在面对数学问题时,能把解决问题的目标、实现目标的过程、解决过程的优化以及对问题的拓展、深化等作为一个整体进行研

究。这样,“使学生学会思考,成为善于认识 and 解决问题的人才”就能落在实处。

3.2 加强发现和提出问题能力的培养

众所周知,问题意识、提问能力很重要,这是创新的基础。教育的根本目的是使学生成为善于发现和提出问题、分析和解决问题的人才,但目前的课堂教学中,培养发现和提出问题能力的措施还不够得力。

如何才能让学生学会发现和提出问题呢?我们认为,答案还是在数学内部,特别是要从知识所蕴涵的思想方法中寻找灵感,这才是根本性的。我们知道,提问有不同的层次。有凭一时兴趣的“即兴提问”,完全不懂,瞎问;有具备一定的知识基础,从知识的发生发展过程中自然而然地提出问题;更进一步地,在对一个问题深入思考后产生困惑而提出的问题。有含金量的问题,需要一般观念的引领,需要数学思想方法的指导,还需要有效的思维策略作支撑。

例如,学生在“两个三角形相似,它们的要素、相关要素与相似比 k 的确定的关系就是性质”的引导下,就能独立地发现相似三角形的性质。

从研究对象的基本关系出发,分析其表现形式,也是发现和提出问题的基本途径。例如研究正投影的性质,首先明确目标是“物体与其投影之间的形状、大小关系”,然后分析物体与投影面之间所有可能的位置关系,就可以发现性质。当然,以简单而典型的线段和正方形正投影为出发点,奠定画基本几何体三视图的基础,也体现了数学研究的一种基本观念。

加强知识的联系性,用新眼光看旧问题,又是发现和提出问题的一种途径。例如锐角三角函数中,“对直角三角形的边角关系,已经研究了什么,还可以研究什么”“如何看直角三角形中, 30° 所对的边是斜边的一半”,从“相似三角形的性质”到“直角三角形中两边之比值与锐角的对应关系”,从“全等直角三角形的判定”到“什么条件下直角三角形可解”等,都是“从联系性中发现和提出问题”的体现。

总之,数学的特点之一是逻辑的严谨性,它的概念、原理、法则、公式、性质等的发现,都有其内在的逻辑必然性。以数学知识发生发展过程的内在逻辑为基础,在一定的宏观思想指导下,经过深思熟虑,学生就一定能发现和提出有意义的、高质量的好问题。

参考文献:

- [1] 项武义. 基础数学讲义丛书·基础几何学[M]. 北京:人民教育出版社,2004.

(续完)