

○教学研究○

HPM 视角下“点到直线的距离”的教学实践

张新胜

(江苏省常州市第一中学,213003)

摘要:数学史是数学学习的认知工具.数学家运用不同的推导方法得到了点到直线的距离公式.通过将这些方法融入课堂,有助于学生开展探究互动,从而更好地理解公式.本文在梳理与分析历史方法的基础上,以“点到直线的距离”为例,基于 HPM 视角进行教学探究.

关键词:数学史;距离公式;教学设计;发生教学法

一、前言

发生教学法是一种基于 HPM 视角的数学教学通常采用的方法,是数学史融入数学教育的一种方式.发生教学法从学生的认知起点出发,呈现知识自然发生和发展的过程.个体对数学知识的学习过程必须遵循数学知识的客观发生过程.如何将数学史融入到中学数学教学实践?本文以“点到直线的距离”为例,浅谈 HPM 视角下的数学教学设计.

二、数学史中相关背景资料

交点法是数学史中出现比较早的方法.1936 年,美国数学学者戴维斯在《解析几何》一书中就采用了这种方法,后来英国数学家杨格简化了运算,20 世纪 George Gibson 在杨格的基础上采用设而不求法,进一步减少了运算量.三角法也是很多教科书采用的方法.19 世纪,英国数学家托德亨特将点到直线的距离转化为直角三角形的边长.19 世纪末,英国数学家约翰斯顿将点到直线的距离转化为三角形的高,利用面积法求解.20 世纪,美国数学家泰勒在《微积分与解析几何》中介绍了用函数法求点到直线的距离.20 世纪 40 年代,向量知识逐渐出现在教科书中,1948 年,美国数学家默纳汉利用向量法求得点到直线的距离.

三、教学设计与实施

1. 定义初探

师:上节课我们已经学习了两点间的距离公式.已知点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 则两点间的距离 PQ 等于多少?

众生: $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

师:可以用什么方法来推导?

生 1:构造直角三角形,运用勾股定理.

师:任意给出两点 P, Q 坐标,我们可以用代数的方法计算出两点间距离,即线段 PQ 的长.如果一个点的坐标不变,另一个点的坐标换成一条直线上的方程,那么我们可以研究什么距离?

众生:点到直线的距离.

师:什么是点到直线的距离?

生 2:过点 P 作直线 l 的垂线 PH ,垂足为 H ,则线段 PH 的长即为点 P 到直线 l 的距离.

师:把点 P 到垂足 H 的距离定义为点 P 到直线 l 的距离,依据是什么呢?

生 2:点到直线上点的距离,垂线段最短.

师:很好!两点之间,线段最短.我们把线段长定义为两点间距离;而点到直线,垂线段最短,我们将这个最短距离定义为点到直线的距离.

师:如何求线段 PH 的长度呢?

设计意图 从已学知识两点间的距离出

发,引出点到直线的距离问题,并渗透最值思想.

2. 特例引路

师:请求出图 1 中点 P 到直线 l 的距离.
(学生回答)

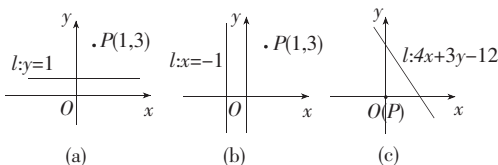


图 1

师:大家都算得比较快,请哪一位同学来说一下自己的方法?

生 3:前两个图中对应坐标的差,图 1(c)中就是直角三角形斜边上的高,可用面积法.

师:太棒了!原来线段 PH 可以有不同的表现形式.

设计意图 通过前两个特例体会当直线是水平或竖直状态时距离的求法,并通过图 1(c) 渗透面积思想.

3. 模型建立

问题 1 如果将图 1(c) 中的点 P 移动到点 $P(-1,2)$,你能求出此时点 P 到直线 l 的距离吗?想一想,试一试!

学生活动:学生首先独立思考、自主计算,然后小组合作探究,最后每个小组由一名学生代表展示算法.

师:汇报的同学先跟大家分享你们的思路,然后呈现计算过程.同学们仔细听,比较这些方法,你更喜欢哪一种?(学生代表汇报,教师进行方法汇总)

生 4:(展示了交点法的解题方法)

如图 2,先求出垂线段 PH 所在直线的方程 $3x - 4y + 11 = 0$,再联立直线 l 与 PH 的方程 $\begin{cases} 4x + 3y - 12 = 0, \\ 3x - 4y + 11 = 0, \end{cases}$ 可得点 $H(\frac{3}{5}, \frac{16}{5})$,最后根据两点间距离公式,得

$$PH = \sqrt{\left(-1 - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{16}{5}\right)^2} = 2.$$

生 5:(展示了面积法的解题方法)

• 2 •

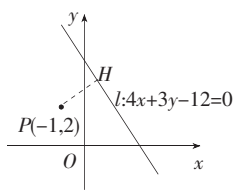


图 2

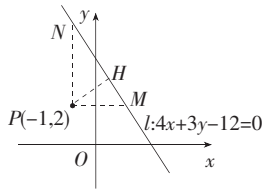


图 3

如图 3,利用两种不同方法计算同一个三角形的面积,从而求出点 P 到直线 l 的距离.

作 $PM \parallel x$ 轴交 l 于点 $M(\frac{3}{2}, 2)$,作 $PN \parallel y$ 轴交 l 于点 $N(-1, \frac{16}{3})$,计算可得 $PM = \frac{5}{2}$, $PN = \frac{10}{3}$.

因为 $\triangle MPN$ 是直角三角形,由勾股定理得 $MN = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{25}{6}$. 故 $S_{\triangle MPN} = \frac{1}{2}PM \cdot PN = \frac{1}{2}MN \cdot PH$,可得

$$PH = \frac{PM \cdot PN}{MN} = 2.$$

生 6:(展示了三角法的解题方法)

构造直角三角形,利用三角函数值比求解.

在图 3 中选取 $Rt\triangle PMH$,如图 4. 设直线 l 的倾斜角为 α ,则 $\tan \angle PMH = |\tan \alpha| = \frac{4}{3}$. 因为 $\angle PMH \in (0, \frac{\pi}{2})$,所以 $\sin \angle PMH = \frac{4}{5}$, $PH = PM \sin \angle PMH = 2$.

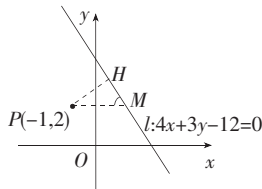


图 4

师:大家展示的都非常正确!还有没有其他方法呢?如果在直线上任取一点 $Q(x, y)$,那么线段长 $PQ = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$,与所研究的点 P 到直线 l 的距离有什么大小关系

呢?

众生: 点 P 到直线 l 的距离是 $PQ = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$ 的最小值.

师: 那么如何求它的最小值呢?

生7: 因为直线 l 上任一点 $Q(x, y)$ 满足 $4x + 3y - 12 = 0$, 故 $y = 4 - \frac{4}{3}x$, 代入上式, 可得 $PQ =$

$$\sqrt{\frac{25}{9}x^2 - \frac{10}{3}x + 5} = \sqrt{\frac{25}{9}\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + 4}.$$
 所以

当 $x = \frac{3}{5}$ 时, PQ 取最小值是 2, 即点 P 到直线 l 的距离是 2.

师: 很好, 这种方法我们称为函数法.

设计意图 从具体问题出发, 遵循学生的认知规律, 提高课堂教学实效, 通过自主探索、交流讨论激发学生思维, 从不同角度认识点线间的距离.

4. 公式推导

问题 2 能否根据已经获得的四种不同方法进一步探索更一般的情况: 点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0 (A \neq 0, B \neq 0)$ 的距离? 大家按小组合作讨论, 尝试算一算, 看你更愿意选择那种方法, 然后根据自己选择的方法独立推导.

生8: 我选择了面积法. 如图 5, 易得点 $M\left(\frac{By_0 + C}{-A}, y_0\right), N\left(x_0, \frac{Ax_0 + C}{-B}\right)$, 计算得 $PM =$

$$\left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A} \right|, PN = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{B} \right|.$$

同理, 由三角形面积的两种计算公式得

$$\begin{aligned} PH &= \frac{PM \cdot PN}{MN} = \frac{PM \cdot PN}{\sqrt{PM^2 + PN^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

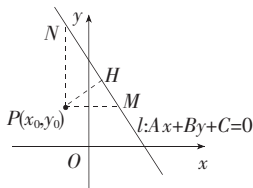


图 5

师: 这就是我们要推导的点到直线的距离公式. 19 世纪末, 英国数学家约翰斯顿也是运用面积法, 从而得到公式的. 你和他当时的想法相同, 有成为数学家的潜质.

生9: 我选择了三角法. 仍用图 5, $PM = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A} \right|$. 设直线 l 的倾斜角为 α , 则

$$\tan \angle PMH = |\tan \alpha| = \left| \frac{A}{B} \right|. \text{ 而 } \angle PMH \in$$

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以 } \sin \angle PMH = \frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ 进而}$$

$$PH = PM \sin \angle PMH = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

师: 这也是 19 世纪英国著名数学家托德亨特的方法, 你也取得了成功, 真是很棒的方法. 有同学选择其它的推导方法吗?

生10: 我选择了交点法. 如图 5, 直线 PH 的斜率为 $\frac{B}{A}$, 所以直线 PH 的方程为 $y - y_0 =$

$$\frac{B}{A}(x - x_0), \text{ 整理得 } Bx - Ay - Bx_0 + Ay_0 = 0.$$

与直线 l 的方程联立方程组, 可以求得交点 $H\left(\frac{B^2x_0 - AB y_0 - AC}{A^2 + B^2}, \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2}\right)$. 这

里用两点间距离公式求距离 PH 太复杂了, 所以还没有算出来.

师: 虽然这样做运算量比较大, 但是这是出现得较早的方法, 也是很多教科书采用的方法, 美国数学学者戴维斯早在 1836 年在《解析几何》一书中就采用了交点法推导出点到直线距离公式. 其实, 当我们得到点 H 的坐标后, 也就快成功了, 同学们有没有信心克服这个困难继续算下去? 请一位同学将推导过程写在黑板上.

生11: 将点 H 的坐标代入两点间距离公式, 得 $PH = [(x_H - x_0)^2 + (y_H - y_0)^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{A^2 + B^2} [A^2(Ax_0 + By_0 + C)^2 + B^2(Ax_0 + By_0 + C)^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$

师:大多数同学都能够化简成功,运算能力真强!还有同学没有化简成功的,可以在课后把它完成.

问题 3 同学们运用了三种方法推导出距离公式,关于公式的推导大家还有什么疑问吗?

生 12:老师,可以利用函数法推导出公式吗,怎样推导?

师:如果利用函数法,设 $Q(x, y)$ 是直线上任一点,则有 $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, 将其代入两点间距离公式,化简可得 $PQ^2 = \left(1 + \frac{A^2}{B^2}\right)x^2 + \left[\frac{2A}{B}\left(\frac{C}{B} + y_0\right) - 2x_0\right]x + x_0^2 + \left(\frac{C}{B} + y_0\right)^2$, 再利用二次函数的对称轴求出最小值(即点到直线的距离公式),具体推导过程同学们可以课后尝试. 1959 年,美国数学家泰勒在《微积分与解析几何》中就是通过函数的最值来求点到直线的距离.

生 13:在上面四种推导方法中都是直线 l 与坐标轴不平行. 当直线 l 与坐标轴平行(即 A, B 中有一个为 0)时,这两种特殊情况下的距离满足公式吗?

师:当 $A = 0, B \neq 0$ 时,如图 6, $l: y = -\frac{C}{B}$, $PH = \left|y_0 + \frac{C}{B}\right|$; 当 $A \neq 0, B = 0$ 时,如图 7, $l: x = -\frac{C}{A}$, $PH = \left|x_0 + \frac{C}{A}\right|$. 它们都满足前面推导的公式.

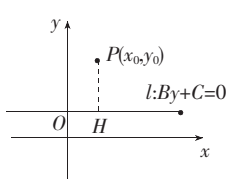


图 6

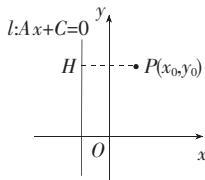


图 7

生 14:老师,还有更好的推导方法吗?

师:其实,在数学史中还有许多巧妙的方法推导出点到直线的距离公式,感兴趣的同学还可以继续探索新的方法,或许你会有新发

现. 接下来,请同学们对本节课进行小结.

生 15:本节课学习了点到直线的距离公式,掌握了许多推导方法,领略了历史上数学家对公式的推导,感受到了历史上数学家们对科学孜孜不倦的探索精神. 其中的数学思想有数形结合、转化、从函数的视角看问题等.

5. 课后作业(略)

四、教学感悟

美国数学家、数学教育家克莱因说过:“教材中定理和公理的叙述,是数学家经历艰苦的探索,字斟句酌的结果.” 学生的学习困难具有历史相似性,教师可以参照史料预测学生的认知障碍,然后制定有针对性的教学策略,帮助学生跨越学习障碍,这也是 HPM 领域的重要工作之一. 同时,数学史的引入,可以帮助学生了解数学的发展过程,学习数学家探索问题、追求真理的智慧,同样具有重要的教育价值.

HPM 视角下的公式教学,通过将史料和数学家的理性精神融入课堂,可以使学生更好地感受数学方法的演进过程,从而加深对数学知识的理解,培养学生探索精神. 德国著名教育学家第斯多惠说过:“教育的艺术不在于传授知识和本领,而在于激励、唤醒和鼓舞.” 数学教学要体现数学知识的发生、发展过程,使学生经历数学思维的发展过程,经历应用数学知识解决问题的过程,从而形成积极的数学情感与态度. 数学教学的过程也是学生思维水平发展和提升的过程,教师应激发学生积极思考的动力,捕捉学生的思维火花,展示学生的思维成果,使学生思维得到更好的拓展,使学生综合素质得到更有效的提升.

参考文献

- [1] 蔡东山. HPM 视角下点到直线的距离课例研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2020(11): 7-13.
- [2] 柳晓盛. 深度学习发展核心素养[J]. 数学之友, 2021(24): 53-54.

(下转第 43 页)

方程 $y = \frac{2}{3}x - 2$, 得点 T 横坐标为 $\frac{3}{2}t_1 \sin \theta$. 故

$$\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MH} = (3t_1 \sin \theta - 2 - t_1 \cos \theta, t_1 \sin \theta).$$

设 $\overrightarrow{PH} = \lambda \overrightarrow{PA} + \mu \overrightarrow{PN}$, 则 $\lambda = 2t_1 \cos \theta + 2 - 3t_1 \sin \theta, t_1 = \mu t_2$, 所以 $\lambda + \mu = 2t_1 \cos \theta + 2 - 3t_1 \sin \theta + \frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{t_2}(2t_1 t_2 \cos \theta + 2t_2 - 3t_1 t_2 \sin \theta + t_1) = 1$, 所以 A, H, N 三点共线, 即直线 HN 过定点 A .

评注 将直线方程用参数形式也是解决直线与圆锥曲线问题的常用方法. 由本解法的特殊性, 想到借助向量验证 A, H, N 三点共线, 此外还可以借助斜率相等进行证明, 因此产生如下解法.

解法5 设直线 AM 的斜率为 k_1 , 直线 AN 的斜率为 k_2 , 直线 MN 方程为 $x - 1 = m(y + 2)$. 联立 $\begin{cases} x - 1 = m(y + 2), \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases}$ 得 $(4m^2 + 3)(y + 2)^2 + (8m - 12)(y + 2) + 4 = 0$, 设点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $(y_1 + 2) + (y_2 + 2) = \frac{12 - 8m}{4m^2 + 3}, (y_1 + 2)(y_2 + 2) = \frac{4}{4m^2 + 3}, x_2(y_1 + 2) + x_1(y_2 + 2) = \frac{12}{4m^2 + 3}$. 于是 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{x_1}{y_1 + 2} + \frac{x_2}{y_2 + 2} = \frac{x_2(y_1 + 2) + x_1(y_2 + 2)}{(y_1 + 2)(y_2 + 2)} = 3$.

由 MT 平行于 x 轴且 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$, 易得点 $T(\frac{3y_1}{2} + 3, y_1), H(-x_1 + 3y_1 + 6, y_1)$. 故 $k_{AH} = \frac{y_1 + 2}{-x_1 + 3y_1 + 6}, \frac{1}{k_{AH}} + \frac{1}{k_1} = \frac{-x_1 + 3y_1 + 6}{y_1 + 2} + \frac{x_1}{y_1 + 2} = 3$, 可得 $k_{AH} = k_2$, 即 A, H, N 三点共线,

亦即直线 HN 过定点 A .

评注 将三点共线的证明转化为斜率相等进行证明可以适当减少运算步骤. 但由于椭圆方程 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 分母的不同造成联立起来计算较繁, 可尝试将椭圆方程转化为圆 O 的方程达到简化运算, 由此产生如下解法.

解法6 作变换 $x' = \frac{x}{\sqrt{3}}, y' = \frac{y}{2}$, 则椭圆 E 变换成半径为 1 的圆 O , 点 A, B, P 分别变换为 $A'(0, -1), B'(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), P'(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1)$.

设直线 $A'M'$ 的斜率为 k_1 , 直线 $A'N'$ 的斜率为 k_2 , 直线 $M'N'$ 方程为 $x - \frac{\sqrt{3}}{3} = m(y + 1)$, 与 $x^2 + y^2 = 1$ 联立, 可得 $(m^2 + 1)(y + 1)^2 + (\frac{2\sqrt{3}}{3}m - 2)(y + 1) + \frac{1}{3} = 0$, 设点 $M'(x_1, y_1), N'(x_2, y_2)$, 则易知 $(y_1 + 1) + (y_2 + 1) = \frac{6 - 2\sqrt{3}m}{3m^2 + 3}, (y_1 + 1)(y_2 + 1) = \frac{1}{3m^2 + 3}, x_2(y_1 + 1) + x_1(y_2 + 1) = \frac{2\sqrt{3}}{3m^2 + 3}$.

于是有 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{x_1}{y_1 + 1} + \frac{x_2}{y_2 + 1} = \frac{x_2(y_1 + 1) + x_1(y_2 + 1)}{(y_1 + 1)(y_2 + 1)} = 2\sqrt{3}$.

因为直线 $A'B'$ 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$, 依题意, 令 $y = y_1$, 可得点 $T'(\sqrt{3}y_1 + \sqrt{3}, y_1), H'(2\sqrt{3}y_1 + 2\sqrt{3} - x_1, y_1)$. 于是 $k_{A'H'} = \frac{y_1 + 1}{2\sqrt{3}y_1 + 2\sqrt{3} - x_1}$, 计算易得 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_{AH}} = 2\sqrt{3}$, 所以 A', H', N' 三点共线, 即直线 HN 过定点 A .

(上接第4页)

[3] 陈建权. 数学史融入高中解析几何教学[J]. 中学数学教学参考, 2021(7): 36-37.

[4] 肖鹏. 文化视域下数学史融入课堂教学研究

[J]. 数学教学研究, 2017(1): 49-51.

[5] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017. 5.