利用三射线定理巧求空间角

姚素娟　蔡建华

(江苏省常州市第三中学,213000)

一直以来,学生求解空间角的大小一般有两种方案:一是利用综合法求解,二是利用空间向量求解. 前者偏纯几何,利用线面、面面、线线间的判定定理、性质定理,利用线面角,二面角的平面角等概念的定义,通过“一作、二证、三求”得出相关空间角的大小,对空间想象能力要求较高;而后者偏纯代数,建立空间直角坐标系,利用空间向量研究线面、线线、面面间的大小与关系,对计算能力要求较高. 本文介绍求解空间角大小的第三种途径,即利用三射线定理(也称为三面角的余弦定理),这是一种介于几何与代数之间的一种解题方式,相较前两种方式,过程较为简单便捷.

一、三射线定理及其证明

三射线定理　如图1,PA,PB,PC是从点P出发的三条射线,$\angle APC$,$\angle BPC$,$\angle APB$分别为α,β,θ,则二面角$A-PC-B$的大小φ满足

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi,$$

即
$$\cos\varphi=\frac{\cos\theta-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

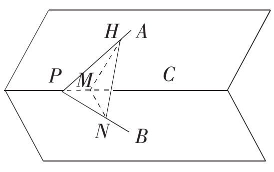

图 1

证明　如图1,过PC上一点M作二面角$A-PC-B$的平面角$\angle HMN$,点H,N分别在射线PA,PB上.

证法1　利用空间向量

由于$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MH})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MN})=PM^2+\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MN}=PM^2+MH\cdot MN\cos\varphi$,又$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PN}=PH\cdot PN\cos\theta$,所以$PH\cdot PN\cos\theta=PM^2+MH\cdot MN\cos\varphi$,两边同除以$PH\cdot PN$,得$\cos\theta=\frac{PM}{PH}\cdot\frac{PM}{PN}+\frac{MH}{PH}\cdot\frac{MN}{PN}\cos\varphi$,即$\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi$.

证法2　利用余弦定理

在$\triangle MNH$和$\triangle PNH$中分别用余弦定理,得$NH^2=PN^2+PH^2-2PN\cdot PH\cos\theta$,$NH^2=MN^2+MH^2-2MN\cdot MH\cos\varphi$. 两式相减,并利用勾股定理,可得$0=2PM^2-2PN\cdot PH\cos\theta+2MN\cdot MH\cos\varphi$,即$\cos\theta=\frac{PM}{PH}\cdot\frac{PM}{PN}+\frac{MH}{PH}\cdot\frac{MN}{PN}\cos\varphi$,亦即

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi.$$

评注　(1)为了进一步区分不同的面角以及叙述的方便,可将有公共边的两个角$\angle APC$,$\angle BPC$称为陪角,公共边PC所对的角$\angle BPA$称为斜角,二面角$A-PC-B$所成的平面角称为正角. 三射线定理描述的便是空间陪角、斜角、正角之间的数量关系.(2)随着空间角φ取不同的特殊值,该定理可以退化为不同的定理或公式. 例如,当$\varphi=0$时,退化为两角差的余弦公式;当$\varphi=\frac{\pi}{2}$时,退化为著名的三余弦定理$\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta$;当$\varphi=\pi$时,退化为两角和的余弦公式. 这些特殊情形有助于我们更好地理解与记忆三射线定理.

二、应用举例

例 1 (1982 年美国数学会试题) 一个正四面体和一个正四棱锥的所有棱长都相等，将正四面体的一个面和正四棱锥的一个侧面紧贴重合在一起，得到一个新的几何体. 试问该新的几何体有几个面?

分析 如图 2，探索新的几何体有几个面，实际上就是探索新的组合体中面 FCA 与面 DAC 是否在同一个平面，也就是证明二面角 $F-AC-B$ 与二面角 $B-AC-D$ 的平面角之和是否为 π. 若其和为 π，则点 F,A,D,C 共面.

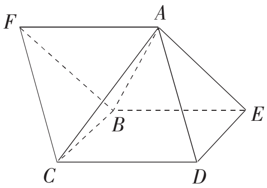

图 2

解 设二面角 $F-AC-B$ 的平面角为 φ_1，$\angle FCB=\theta_1$，$\angle FCA=\alpha_1$，$\angle BCA=\beta_1$，由题意知 $\alpha_1=\beta_1=\theta_1=\frac{\pi}{3}$. 由三射线定理，得 $\cos\theta_1=\cos\alpha_1\cos\beta_1+\sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\varphi_1$，即 $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi_1$，故 $\cos\varphi_1=\frac{1}{3}$.

设二面角 $B-AC-D$ 的平面角为 φ_2，设 $\angle BCD=\theta_2$，$\angle BCA=\alpha_2$，$\angle DCA=\beta_2$，由题意知 $\theta_2=\frac{\pi}{2}$，$\alpha_2=\frac{\pi}{3}$，$\beta_2=\frac{\pi}{3}$. 由三射线定理，得 $\cos\theta_2=\cos\alpha_2\cos\beta_2+\sin\alpha_2\sin\beta_2\cos\varphi_2$，即 $0=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi_2$，得 $\cos\varphi_2=-\frac{1}{3}$.

因为 $\cos\varphi_1+\cos\varphi_2=0$，所以 $\varphi_1+\varphi_2=\pi$，即 F,A,D,C 四点共面. 同理 F,A,E,B 四点共面，故新的几何体共有 5 个面.

评注 利用三射线定理求解本题，既不用为如何作出二面角的平面角煞费苦心，也不用为求平面的法向量而穷苦计算，需要的仅仅是找准相关的角，代入公式进行计算并不繁琐.

例 2 (2020 年全国高考题) 如图 3，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别在棱 DD_1,BB_1 上，且 $2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$.

(1) 证明: 点 C_1 在平面 AEF 内;

(2) 若 $AB=2$，$AD=1$，$AA_1=3$，求二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值.

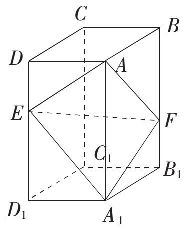

图 3

分析 第(2) 问若利用三射线定理，需求出斜角 $\angle AEA_1$ 的余弦值，陪角 $\angle AEF$，$\angle A_1EF$ 的正余弦值，便可求出正角 $A-EF-A_1$ 的大小.

解 (1) 略.

(2) 易知 $AE=\sqrt{2}$，$A_1E=\sqrt{5}$，$A_1F=\sqrt{5}$，$AF=2\sqrt{2}$，$EF=\sqrt{6}$.

于是，在 $\triangle AEA_1$ 中，由余弦定理，可得 $\cos\angle AEA_1=\frac{2+5-9}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$. 在 $\triangle AEF$ 中，$AE^2+EF^2=AF^2$，可得 $\angle AEF=90^\circ$，$\cos\angle AEF=0$，$\sin\angle AEF=1$. 在 $\triangle AEF$ 中，由余弦定理，可得 $\cos\angle A_1EF=\frac{5+6-5}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$，从而 $\sin\angle A_1EF=\frac{\sqrt{70}}{10}$.

设二面角 $A-EF-A_1$ 的大小为 θ，由三射线定理得 $-\frac{\sqrt{10}}{10}=0\times\frac{\sqrt{30}}{10}+1\times\frac{\sqrt{70}}{10}\cos\theta$，解得 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{7}}{7}$. 所以 $\sin\theta=\frac{\sqrt{42}}{7}$，所求正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

评注 本题中的空间图形是长方体，建立空间直角坐标系并利用空间向量解决也不复杂，需要的就是耐心计算两个平面的法向量. 考试时可利用空间向量书写，在草稿纸上

用三射线定理来验证，这样既避免丢分也能做个检验.

例3 （2017年全国高考题）已知 a，b 为空间中两条互相垂直的直线，等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在直线与 a，b 都垂直，斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转. 现有下列结论：① 当直线 AB 与 a 成 $60°$ 角时，AB 与 b 成 $30°$ 角；② 当直线 AB 与 a 成 $60°$ 角时，AB 与 b 成 $60°$ 角；③ 直线 AB 与 a 所成角的最小值为 $45°$；④ 直线 AB 与 a 所成角的最大值为 $60°$. 其中正确的是______.（填写所有正确结论的编号）

分析　平移 a，b 与 AC 交于点 C（平移直线记为 a'，b'），由题意可构建以 a'，b'，AC 分别为 x，y，z 轴的空间直角坐标系，设 a'，b' 与 AB 所成角为 α，β，两次利用三射线定理，找到 α，β 之间关系，从而对相关选项作出判断.

解　如图4，过点 C 作直线 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$，作 $BN \perp a'$，$BM \perp b'$，点 N，M 为垂足. 分别连结 AN，AM，设 $\angle ABM = \alpha$，$\angle ABN = \beta$，则由异面直线所成角的定义，可知 AB 与 a 所成角即为 α，AB 与 b 所成角即为 β.

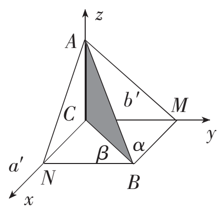

图4

以 $\angle ABM$ 为斜角，$\angle ABC$，$\angle MBC$ 为陪角，二面角 $M-BC-A$ 所成角为正角 φ_1，则 $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$. 利用三射线定理，得

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{4}\cos\angle CBM.$$

以 $\angle ABN$ 为斜角，$\angle ABC$，$\angle NBC$ 为陪角，二面角 $N-BC-A$ 所成角为正角 φ_2，则 $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. 利用三射线定理，得

$$\cos\beta = \cos\frac{\pi}{4}\cos\angle CBN.$$

又 $\angle CBN + \angle CBM = \frac{\pi}{2}$，故

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{1}{2}.$$

当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时，$\beta = \frac{\pi}{3}$，故 ① 错误，② 正确；又由 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{1}{2}$，可知 $\cos\alpha$ 最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时 α 取最大值 $\frac{\pi}{4}$，故 ③ 正确，④ 错误. 于是所有正确结论编号为 ②，③.

评注　本题中三射线定理实则是退化的三余弦定理，采用该解法能方便地找到 α，β 之间的内在关系. 如果该题采用常规几何方法，因为线段 AB 在旋转，一些数量，角度不便求出，相对来说更考验空间想象能力，有较大难度.

三射线定理虽好，使用时却有两点提醒：一是定理涉及的角较多，且兼有正弦与余弦函数，记忆起来有一定的难度，使用时一定要将公式记牢，不同的角加以命名区分；二是该定理属于课外补充知识，在高考解答题中切不可直接使用，可利用该定理解决选择与填空等客观题，或用来验证解答题答案的正确与否. 求解解答题的过程中在避免不了使用时可先证明再使用. 学生了解此法在解题时便会多一种路径，有利于求异思维与创新思维的培养.

（上接第56页）

$\frac{Sh}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) < V < \frac{Sh}{n^3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$. 两边取极限，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) = 1$ 及结论2，可得四面体的体积 $V = \frac{1}{3}Sh$.