# 一道解析几何题的解法探究和反思

江苏省常州市第三中学 范 云

## 一、试题的解法探究

给定椭圆 $C$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，称圆心在原点 $O$，半径为 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的圆是椭圆 $C$ 的"卫星圆"。若椭圆 $C$ 的离心率 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，点 $(2,\sqrt{2})$ 在 $C$ 上.

(1) 求椭圆 $C$ 的方程和其"卫星圆"方程;

(2) 点 $P$ 是椭圆 $C$ 的"卫星圆"上的一个动点，过点 $P$ 作直线 $l_1$，$l_2$，使得 $l_1$，$l_2$ 与椭圆 $C$ 都只有一个交点，且 $l_1$，$l_2$ 分别交"卫星圆"于点 $M$，$N$，证明: 弦长 $|MN|$ 为定值。

分析: 第一问中涉及求椭圆的方程和"卫星圆"的方程，其中椭圆方程的解法比较常规，通过解方程组的方法可以解决; "卫星圆"的方程是一个新定义，比较容易理解，学生处理起来也比较轻松。解答如下:

解: (1) 由条件可得: $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1\end{cases}$

解得 $a=2\sqrt{2}$，$b=2$

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，卫星圆的方程为 $x^2+y^2=12$。

分析: 第二问中涉及证明定值问题，难度较大，学生的正确率普遍较低。可以先采用特殊值法，即分析特殊情况，这样可以先得到结果，本题中的特殊情况就是其中一条直线斜率不存在，解答如下:

解: 当直线 $l_1$，$l_2$ 中有一条无斜率时，不妨设直线 $l_1$ 无斜率，

因为 $l_1$ 与椭圆只有一个公共点，则其方程为 $x=2\sqrt{2}$ 或 $x=-2\sqrt{2}$，

当 $l_1$ 方程为 $x=2\sqrt{2}$ 时，此时 $l_1$ 与"卫星圆"交于点 $(2\sqrt{2},2)$ 和 $(2\sqrt{2},-2)$，

此时经过点 $(2\sqrt{2},2)$ $(2\sqrt{2},-2)$ 且与椭圆只有一个公共点的直线是

$y=2$ 或 $y=-2$，即 $l_2$ 为 $y=2$ 或 $y=-2$，

$\therefore l_1\perp l_2$

$\therefore$ 线段 $MN$ 应为"卫星圆"的直径，$\therefore |MN|=4\sqrt{3}$。

分析: 接着，从特殊到一般，探究一般情况。可以先设出点 $P$ 的坐标，随即设出直线的方程，这里我们要注意，可以把两条直线方程设成同一个形式，这个形式对于两条直线都通用。由于直线和椭圆只有一个交点，所以将二者联立方程组后判别式为 0。此时需要进行思维的转化，需要把判别式为 0 的方程看成关于切线斜率的方程，两条直线的斜率是该方程的两个解。接下来可以探究两条直线斜率的关系，之前探究的特殊位置给了我们启发，容易猜想到两条直线是垂直的关系，然后加以证明，这样 $MN$ 为"卫星圆"的直径，长度也就迎刃而解了。

但是，在处理具体运算过程时，我们发现该题的运算量很大，这就需要我们在运算时分析运算的对象，不能一味地对式子进行展开，因为一旦展开，在展开项非常多的情况下再进行整合是极其困难的。如果我们先分析等式的结构，看是否有一些有关联的项，是否可以因式分解，那么运算的复杂程度会降低很多。下面是两种运算方法的对比，具体解法如下:

法一: 解: 当 $l_1$，$l_2$ 都有斜率时，设点 $P(x_0,y_0)$，其中 $x_0^2+y_0^2=12$，

设经过点 $P(x_0,y_0)$ 与椭圆只有一个公共点的直线为 $y=t(x-x_0)+y_0$，

则，$\begin{cases}y=tx+(y_0-tx_0)\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 消去 $y$ 得到 $x^2+2(tx-tx_0$

作者简介: 范云(1988-)，常州市第三中学，高中一级教师。



(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$+y_0)^2=8$。

即$(1+2t^2)x^2+(4ty_0-4t^2x_0)x+2t^2x_0^2+2y_0^2-4tx_0y_0-8=0$。

$\Delta=(4ty_0-4t^2x_0)^2-4(1+2t^2)(2t^2x_0^2+2y_0^2-4tx_0y_08)=0$。

即 $16t^2y_0^2-32t^3x_0y_0+16t^4x_0^2-4(2t^2x_0^2+2y_0^2-4tx_0y_0-8+4t^4x_0^2+4t^2y_0^2-8t^3x_0y_0-16t^2)=16t^2y_0^2-32t^3x_0y_0+16t^4x_0^2-8t^2x_0^2-8y_0^2+16tx_0y_0+32-16t^4x_0^2-16t^2y_0^2+32t^3x_0y_0+64t^2=0$。

即 $t^2x_0^2+y_0^2-2tx_0y_0-4-8t^2=0$，

$(x_0^2-8)t^2-2tx_0y_0+y_0^2-4=0$。

$\therefore t_1\cdot t_2=\dfrac{y_0^2-4}{x_0^2-8}=\dfrac{12-x_0^2-4}{x_0^2-8}=-1$ 所以 $t_1-t_2=-1$，满足条件的两直线 $l_1$，$l_2$ 垂直。

$\therefore$ 线段 $MN$ 应为“卫星圆”的直径，$\therefore |MN|=4\sqrt{3}$。

法二：解：当 $l_1$，$l_2$ 都有斜率时，设点 $P(x_0,y_0)$，其中 $x_0^2+y_0^2=12$，

设经过点 $P(x_0,y_0)$ 与椭圆只有一个公共点的直线为 $y=t(x-x_0)+y_0$，

则，$\begin{cases}y=tx+(y_0-tx_0)\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 消去 $y$ 得到 $x^2+2[tx+(y_0-tx_0)]^2=8$。

即$(1+2t^2)x^2+4t(y_0-tx_0)x+2(y_0-tx_0)^2-8=0$，

$\Delta=16t^2(y_0-tx_0)^2-4(1+2t^2)[2(y_0-tx_0)^2-8]=0$。

即 $-8(y_0-tx_0)^2+32(1+2t^2)=0$，

$(x_0^2-8)t^2-2tx_0y_0+y_0^2-4=0$。

$\therefore t_1\cdot t_2=\dfrac{y_0^2-4}{x_0^2-8}=\dfrac{12-x_0^2-4}{x_0^2-8}=-1$ 所以 $t_1\cdot t_2=-1$，满足条件的两直线 $l_1$，$l_2$ 垂直。

$\therefore$ 线段 $MN$ 应为“卫星圆”的直径，$\therefore |MN|=4\sqrt{3}$。

综上，因为 $l_1$，$l_2$ 经过点 $P(x_0,y_0)$，又分别交其准圆于点 $MN$，且 $l_1$，$l_2$ 垂直，

所以线段 $MN$ 为准圆 $x_0^2+y_0^2=12$ 的直径，$\therefore |MN|=4\sqrt{3}$ 为定值。

法一是直接展开运算，我们发现展开后的项非常多，要在有限的时间内运算正确着实不容易。法二并没有将所有项都展开到极致，而是在运算过程中不断地观察式子中项与项之间的关系，具备整体意识，我们发现有些项是可以整体抵消的，运算的复杂性降低了很多。

二、反思

解析几何题的第一问一般难度不大，但是运算的正确率至关重要，如果计算错误，那么第二问即使花大量的时间运算，也得不到正确结果。

本题第二问中涉及证明定值问题，在难度较大的情况下，我们可以先采用特殊值法，本题是分析其中一条直线斜率不存在的特殊位置，这样就可以得到结果。接着，从特殊到一般来处理一般情况下的定值问题，我们也可以从特殊情况中得到一些启发。

解答本题第二问时有相当一部分学生将两条直线方程分别设成 $y=k_1x+m_1$ 和 $y=k_2x+m_2$ 的形式，以这个形式往下做会比较困难，因为漏用了条件，即直线 $l_1$，$l_2$ 过点 $P$，换言之 $k_1$ 与 $m_1$，$k_2$ 与 $m_2$ 是有关联的。因此，当条件没有被充分利用时，解题也是比较困难的。在解题时我们还是需要把所有条件都用到极致才行。

解析几何在很大程度上体现了学生的数学运算素养，数学运算是解决数学问题的基本手段。数学运算主要表现为：理解运算对象、掌握运算法则、探究运算思路、求得运算结果。这里的每一步都至关重要，需要我们带着数学思维去运算，对整个运算的过程有个规划，这样才能少走弯路，在有限的时间内提高运算的正确率，也能促进数学思维的发展。




(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net