让数学抽象拾级而上
——数学抽象能力培养的实践研究

侯卫婷
江苏省常州市第三中学　213000

[摘　要] 数学抽象,既是数学科学的一个特点,也是数学核心素养的一个重要组成部分.如何让核心素养从理论走向实践,从顶层设计到基层落地,既需要学习也需要实践,一线数学教师尤其需要在实践中总结如何让普适的理论变成可操作、可重复、可检验的教学环节.

[关键词] 数学抽象;函数的零点;实践研究

问题源起,如何让顶层设计扎实落地

数学核心素养与数学教育的终极目标有关,是对培养的描述:会用数学的眼光观察世界,会用数学的思维思考世界,会用数学的语言表达世界. 数学的眼光是指数学抽象(符号意识、数感)、直观想象(几何直观、空间想象能力),保证数学的一般性;数学的思维是指逻辑推理能力、数学运算能力,保证数学的严谨性;数学的语言是指数学模型(模型思想)、数据分析(数据分析观念),保证数学应用的广泛性.

数学抽象,包括数感和符号意识,是指舍去事物的一切物理属性,得到数学研究对象的思维过程,包括:从数量与数量关系、图形与图形关系中抽象出数学概念及概念之间的关系,从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构,用数学符号或者数学术语予以表征(概念内涵). 数学抽象的具体内容为:获得数学概念和规则;提出数学命题和模型;形成数学方法与思想;认识数学结构与体系.

作为新一期课改的关键词,核心素养正以多种多样的方式走进一线教师的视野. 而作为数学核心素养之一的数学抽象, 对所有一线数学教师来说,既熟悉又陌生.一方面,抽象作为数学学科的一大特点,是所有数学学习者在学习过程中时时刻刻都要面对和经历的一种体验,它已经内化为一种数学学习的"范式", 是数学共同体的一种共识. 另一方面,数学抽象从一种思维方式到一个概念,如何解读;从一种过程体验到一种能力获得,如何培养;从一个顶层设计到基层落地,如何执行. 这些问题由务虚到务实,从感性到理性,从理论到实践,都对一线数学教师提出了挑战.

数学抽象能力,作为培养学生核心素养的总体指向之一,当然不是一节课、一个章节的教学目标,它的培养必然是循序渐进、螺旋上升的. 但同时,这些大目标又必须内化到每一章知识、每一节内容中去,只有以知识为载体,以课堂为抓手,在每一节课中都不断启发、不断渗透、不断训练,才能让学生从朦胧的感觉转向理性的思辨进而走向自觉的批判. 以下,笔者结合教学实践,谈一谈自己对这些问题的思考.

课堂实录

《苏教版普通高中课程标准实验教科书·数学(必修1)》"2.5.1　函数的零点"教学片段.

1. 函数零点的教学

师:求解方程$x^2+4x+3=0$,画出函数$y=x^2+4x+3$的图像,标出该函数与x轴交点的横坐标. (学生操作完后)方程的根是$x_1=-1$,$x_2=-3$,与两个交点的横坐标一样,是偶然吗?

生1:不是. 因为函数与x轴交点的纵坐标是0,(把0)代入$y=x^2+4x+3$得到的就是方程$x^2+4x+3=0$.

师:很好,换个视角,如果把方程$x^2+4x+3=0$的左边看作是函数$y=x^2-4x+3$(板书加上"$y=$"), 那么右边可以看作是——

生1:直线$y=0$,也就是x轴.

师:那你能用它来解释方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0,\Delta\geqslant 0)$的根与函数$y=ax^2+bx+c$

作者简介:侯卫婷(1981—),本科学历,中学高级教师,常州市学科带头人,目前主要研究基于数学抽象核心素养的大单元教学设计.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$(a\neq 0)$在x轴上交点的横坐标之间的关系吗?

生1:方程的根是$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,(函数与$x$轴)交点也是这两个.

师:根是数字啊,点可不是数字,你要不要修正一下?

生1:我的意思是交点的横坐标.

师:数学可来不得半点马虎,与根对应的是交点的横坐标. 二次方程和二次函数我们都很熟悉,所以这个结论不难得到. 可是数学世界里不止二次方程与二次函数,比如方程(在原题上修改次数即可)$x^3+4x+3=0$和函数$y=x^3+4x+3$,方程的根与函数在x轴上的交点的横标也是一致的吗?

生1:我觉得是一致的.虽然这个方程不好解,但令函数的$y=0$得到的方程是一样的.

师:数学世界里有无数的方程,这无法穷尽. 但所有的方程都可以用式子$f(x)=0$来表示;同样的,与之对应的函数也可以写作$y=f(x)$. "方程$f(x)=0$的根(如果有的话)和函数$y=f(x)$在x轴上的交点的横坐标是一致的",这个结论仍然成立吗?

生1:我认为是成立的,因为解释它们的道理是一样的.

师:在方程$f(x)=0$中,我们把解出来的x的值称为方程的根;在函数$y=f(x)$中,我们把对应的横坐标称为"零点". (板书中把横坐标加粗着重)注意,零点是点吗?

生1:不是.

设计意图:由于有了初中二次函数的知识基础,函数的零点对于高中生似乎并不是一个困难的概念,这使得很多教师在教学中往往对概念的生成过程一带而过,把重点放在强调"零点不是点"这个细节上,然后用几个题目进行强化,这其实是本末倒置,效果也不尽如人意. 试想,如果能完善零点概念的生成过程,这种尴尬会不会少一点? 另一方面,数学抽象能力的培养,既不能一蹴而就,也不能是空中楼阁,它只能是聚沙成塔式的训练,进而从量变引发质变. 数学抽象,既要有抽象的结果(概念、定理),也要有抽象的过程(归纳、推理),这两者都是无法在物质世界里找到直接的对应物的,唯有在思维中为其构造情境,才能让学生从被动转向主动,如果没有足够的量的积累,那么质的飞跃也就无从谈起.

2. "零点存在"定理的归纳(数学实验)

师:(问题1)回到二次函数$y=x^2+4x+3$,如何确定它在区间$(-2,0)$上是否有零点呢?

生2:它的一个零点是-1,所以是有的.

师:(问题2)那把函数变成$y=x^3+4x+3$呢?

生2:(沉默)

师:为了回答这个问题,我们来做一个简单的实验.这里有一条绳子(两端系有磁铁,可以吸附在黑板上),如果我们把它看作一个函数的图像,把这个函数图像的起点放在这里(x轴上方),那么如何放置终点,可以保证这个函数一定有零点呢? 请一位同学上来摆一摆.

生3:把终点放在x轴下方.

师:很直观,这个函数确实有零点. 那如果我把起点放在x轴下方呢?

生3:那就把终点放到x轴上方.

师:回到问题1,也用这个绳子来摆一摆. 起点在$(-2,-1)$,终点在$(0,3)$. 这能说明二次函数$y=x^2+4x+3$在区间$(-2,0)$上有零点吗?

生3:可以.

师:那问题2呢?

生3:类似的,起点在$(-2,-13)$,终点在$(0,3)$,所以函数$y=x^3+4x+3$在区间$(-2,0)$上是有零点的.

师:能把这个判断方法推广到所有函数吗?

生3:如果一个函数在起点处的函数值和终点处的函数值一正一负,这个函数就有零点.

师:很好,但太口语化了,我们还需要更精准的数学语言. 主体结构已经搭建出来了,我们一起来进一步地优化它.

设计意图:在问题1中直接提出"零点存在"定理是困难的,根据认知理论,学生在这里没有发展新方法的需求. 这种需求只存在于从已知到未知的问题之中,也就是问题2. "零点存在"定理在高中教学中,只能是一种归纳的结果,原因有二:一是限于高中数学知识的广度和深度,"零点存在"定理中所涉及的"连续"只能是一种感性直觉;二是教学过程是从几个特殊的例子中直接给出了一般性结论而没有证明过程,就高中生的学习水平而言,这样的抽象已经足够了.

一些思考,实践优位仍是不二法门

一线数学教师的教育理论必须紧跟实践. 现在是信息大爆炸的时代,各种各样的教育理论被大量引进国内,教师在最近十年里一定被培训过、学习过多种教育理论,而且常常是"你方唱罢我登场",让人目不暇接;课堂教学改革的呼声也日渐高涨,诸如"在家看视频,在课上答疑""课上只允许讲15分钟",等等. 这一切都让教师无所适从,觉得自己不会教书了;又或者产生了一种撕裂感,"理论学习,教学改革"最终和常规课堂教学完全脱节了,一切又回到了起点. 如何处理好理论与实践的关系? 尤其是新一期课改中关于核心素养这样的顶层设计如何在教学实践中落地? 怎么把学生关键能力的培养转化成基本的教学单元? 怎么理解多次课程改革中前后相继的关系和层层递进的培养目标的宏旨? 一线数学教师应该把握好理论与实践的关系,充分发挥自己的实践优势,在实践中感悟理论,检验理论,最终为理论打上自己个性化理解和实践的标签. 郑毓信教授在其著作《科学哲学十讲》中介绍了科学哲学发展的三阶段,从一开始的元理论阶段,到现代的范式阶段,再到后现代的理论源于实践. 如果类比这个过程,那么我们的科学教育显然也走到了后现代. 理论应该是实践的服务者和总结者,教师应该用实践来检验自己理论学习中的同与异.同时,教师的实践也存在弱点,那就是从实践中我们首先获得的只能是经验,而这些经验往往是个性化的,甚至在这个班能用,另一个班就用不了;这节课(这个知识点)能用,下节课(另一个知识点)就不能用了. 这类经验的重复积累不能让我们得到一般化的教学能力,所以才要学习、借鉴理论,从理论中找到提升自身教学能力的法则和依据.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

以数学抽象为例，难道是从本次课改我们才开始教数学抽象的吗？显然不是. 那么此前教师对数学抽象是怎么理解的，又是如何进行教学实践的？对于顶层设计中的表述，教师理解吗？认同吗？与自己的实践相对照，哪些做对了，哪些做错了？哪些做多了，哪些做少了？哪些做好了，哪些做坏了？只有通过实践，教师对于理论的认识才能深入. 史宁中教授关于数学抽象有这样的表述：“数学抽象有两次抽象的过程，第一次是从感性具体到理性具体，第二次是从理性具体到理性抽象.”如何在实践中让学生有序地感受这两次抽象的过程？以本课为例，为了抽象出函数零点的概念，首先要让学生在具体的方程与函数之间产生对应，所以使用学生最熟悉的二次方程与二次函数为例，让学生解出方程的根，在图上写出函数与x轴的交点的横坐标. 这种对应是显然的，两个具体的例子就能让学生抽象出这么一个结论：所有二次方程的根（如果有的话）与二次函数在x轴上的交点的横坐标是对应的. 这就是从感性具体到了理性具体. 既然二次方程与二次函数有这样的对应关系，那么其他类型的方程与函数呢？于是再次通过具体的例子，学生又能进行

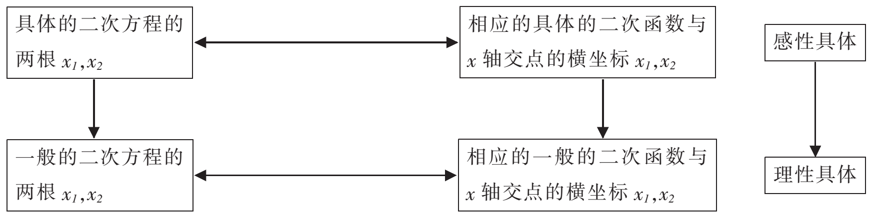

图1

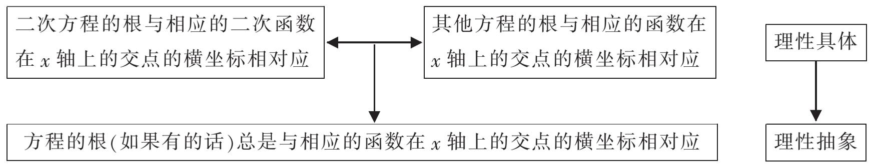

图2

一次抽象：所有方程的根（如果有的话）与相应的函数在x轴上的交点的横坐标是对应的. 这就是从理性具体到了理性抽象.思维导图如图1、图2所示.

在方程中，这个数（函数与x轴交点的横坐标）叫作方程的根；在函数中，这个数（函数与x轴交点的横坐标）叫作函数的零点.（新定义）这就是笔者对两次抽象的理解，是否正确，效果如何，这些都需要在实践中进一步地去确认. 实践给了我们解读理论的绝佳素材.

弗赖登塔尔认为，数学学习有这么一个渐进的过程：常识—数学知识—新常识—新数学知识……迁移到数学抽象，就与史宁中教授所说的两次抽象有了相似之处. 他们都表达了对数学抽象方式的“抽象”——拾级而上.基于这样的理解，我们就要去收集大量的教学资源，对资源分“级”，对每一级资源基于抽象的定位进行教学方式的设计、实践和反思. 简而言之，培养数学抽象是一个系统的建构过程，既要把它放在数学素养这个大系统中，也要凸显数学抽象这个子系统的特点.

（上接第11页）

变式3是立体几何教学中不可忽视的重要问题，是学生学习的难点，也是近几年高考的热点. 解决问题(1)的关键在于转化，将求斜线上的点到平面的距离问题，运用等体积思想转化为求三棱锥的体积. 由$V_{A-A_1D_1E}=V_{D_1-A_1AE}$得$\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1D_1E}\times d=\frac{1}{6}$（$d$是点$A$到平面$A_1D_1E$的距离），进而求得相应的距离$d$. 解决问题(2)的难点在于找到二面角的平面角. 因为点$A\in$平面DEG，连接AE，易知$\angle AEB$（角θ）为该二面角的一个平面角. 在直角三角形AEB中，根据已知条件可得$\tan\theta=2$. 当然，变式3如果通过建立空间直角坐标系，利用向量法将几何问题代数化，则直接运用相关公式进行求解而无需具体找出相应的角或线段，这也是向量法的优势所在.

回顾和反思

解题后的回顾和反思有助于教师对问题的深刻认识，也有助于增强学生的数学学习能力、思辨能力及数学思维.教师引导学生回顾解题过程，反思解题方法，进而优化过程与解法，对题目与方法进行归类，理解通性通法的重要性，使之强化对问题的深入理解和知识体系的整体把握，做到“既见树木又见森林”.

从对这道立体几何基本问题的多种解法探究、解题思想及其价值梳理、变式拓展等可以发现：特殊解法简洁，但具有一定的技巧性和适用范围；通性通法具有一般性，可以处理同一类问题.通过“一题多解”将与问题相关的知识点和方法紧密联系在一起，有助于学生形成灵活的知识结构并运用其解决其他相关问题. 因此，在数学解题教学中重视“一题多解”“一题多变”“多题一解”，从多个角度和程度思考问题，可以实现“由一题通一类”“由点带面”的教学效果，促进数学的高效教学和学生的学习迁移能力.

参考文献：

[1] 波利亚.怎样解题[M]. 上海：上海科技教育出版社，2007.

[2] 章建跃. 注重课堂生成才是好数学教学[J]. 中小学数学(高中版)，2011(12).

[3] 黄良云. 实施变式教学，促进课堂优效发展[J]. 福建中学数学，2020(04).

[4] 人民教育出版社课程教材研究所. 普通高中课程标准实验教科书A版·数学(必修2)[M]. 北京：人民教育出版社，2015.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net