邮编：213000

电话：13701597175

邮箱：34231941@qq.com

循史探源，借古法为今知

——HPM教学课例《等比数列的前项和》

常州市第三中学 侯卫婷

常州市第一中学 殷孝锋

摘要：HPM理论对于教师的教和学生的学都有巨大的指导作用，在数学史中既可以找到答案，也可以找到方法。但“不走进课堂，人们永远无法获得完整而深刻的HPM知识”。

关键字：HPM 等比数列的前项和

1.HPM简介

HPM意指“历史和教育学的数学”，早在二十世纪七十年代，数学史与数学教育之间的关系（HPM）就已经成为数学教育的一个学术研究领域。2005年， HPM开始进入我国数学史研究者和数学教育工作者的视野。笔者在对HPM的学习中，深感其强大之功用。现将一节实验课记录如下，请同行指正。

2.课例：《等比数列的前项和》

2.1史料收集与分析

人类很早就发现了等比数列及其求和问题，莱茵德纸草书上的问题79，塞琉斯时期（约公元前300年）的泥版AO6484上记载有两个特殊等比数列求和，欧几里得在《几何原本》中给出了等比数列求和的全新推导方法：比例法。18世纪，欧拉在其《代数学基础》中使用了我们今天熟知的错位相减法，19世纪开始该法统治了代数教科书并延续至今。

分析以上材料我们可以看出，等比数列在人类的文明史上出现的很早。这说明其基础性、自然性和实用性，也说明学生对等比数列的概念、通项公式和性质的学习不会存在太大困难。而等比数列求和的方法多样，思维各异，有些方法极具创造性，当我们等来错位相消法时文明史已经走过了两千多年，又告诫我们不要妄图在短短40分钟内就能“毕其功于一役”。错位相消法作为等比数列求和这一课的重点和难点，重点在于技巧性和操作性，难点在于思想性和联系性。

2.2 教学设计与实录片段

引入：今天我们要来学习等比数列的求和。在公元前300年塞琉斯时期的泥版AO6484上，有这样的记载：

。

可以想象，祭司们应该是通过观察和归纳得出来的：



进而得到：。这种方法具有一般性吗？

生：试过了，不成立。

师：确实，猜测的难度有点大，适用性不广。莱茵德纸草书上有这么一个问题：，祭司们发现：，同学们，我们能站在“祭司的肩膀上”，找到等比数列的和吗？

生：因为，所以。对于一般等比数列,，

所以。

师：非常好，虽然没有考虑是一个小小的缺憾，但瑕不掩瑜。但是，人类对等比数列求和方法的探索并没有止步。欧几里得打算从等比数列的定义，也就是上做点文章。同学们能在这个定义式中，找到吗？

生：，后面的和前面的方法一样。

师：很好，当然欧几里得处理的更巧妙一点：



即。

师：欧几里得把这个方法写在了他的巨著《几何原本》里，时间就这样走过了1500多年，一直到18世纪，大数学家欧拉为我们带来了新方法。观察欧拉的推导过程，应该也是从祭司的递推关系式里得到的灵感，对于：，欧拉没有像祭司那样对右边提出，而是选择两边同时乘以，这就有了：

，观察这两个式子，你能做些什么？

生：两式一减，后面的操作就又和前面一样了。

师：正确。19世纪以后的大多数代数教科书作者都采用了欧拉的方法，我们称之为“错位相消法”，这个名字起的也很棒，把两个核心操作都概括进去了。尤其是“相消”这个想法，把一个无限式减成了一个有限式。今天我们沿着历史的轨迹，学习了数学史上多种对于等比数列求和的思考和方法。我们本课要掌握的，不仅是公式本身，更应该是公式背后的思考方式。下面，我们利用公式，来解决一些历史上的名题。（后略）

3 课后反思

根据以往的教学经验，直接讲授错位相消法，其教学难度是巨大的。学生既惊叹于其技巧性，又局限于其机械操作性。教师也往往把重点放在训练学生掌握错位相消法的算法特征。这是另一种形式上的“一个定义，三项注意”，而对于这个方法背后的思想性的教学投入是不够的。借助hpm，能让学生广泛而深入的联系等比数列的定义，有助于学生对概念的理解，此之谓“知识之谐”。对比古今方法有助于解释今天学生的学习困难，为学生提供探究的机会，更能进一步确立现代方法的价值所在，此之谓“方法之美”。而经历了上千年几十代数学家的努力才得到的这个成果，更能让学生明白数学结论并不只是教科书上冰冷的文字，而是努力与创造的结果。此之谓“文化之魅”。

[1] 汪晓勤，沈中宇.数学史与高中数学教学[M].上海：华东师范大学出版社，2020：12