**2021-2022学年度第二学期高三数学周末检测（15）**

学校:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_姓名：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_班级：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_考号：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**一、单选题**

1．已知集合，，则（       ）

A．{0} B．{0，1} C．{1，2} D．{0，1，2}

【答案】D

2．若复数满足，则（       ）

A． B． C． D．

【答案】C

3．设*x*，，则“且”是“”的（       ）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

【答案】A

4．若非零向量，满足，，则向量与的夹角为（       ）

A． B． C． D．

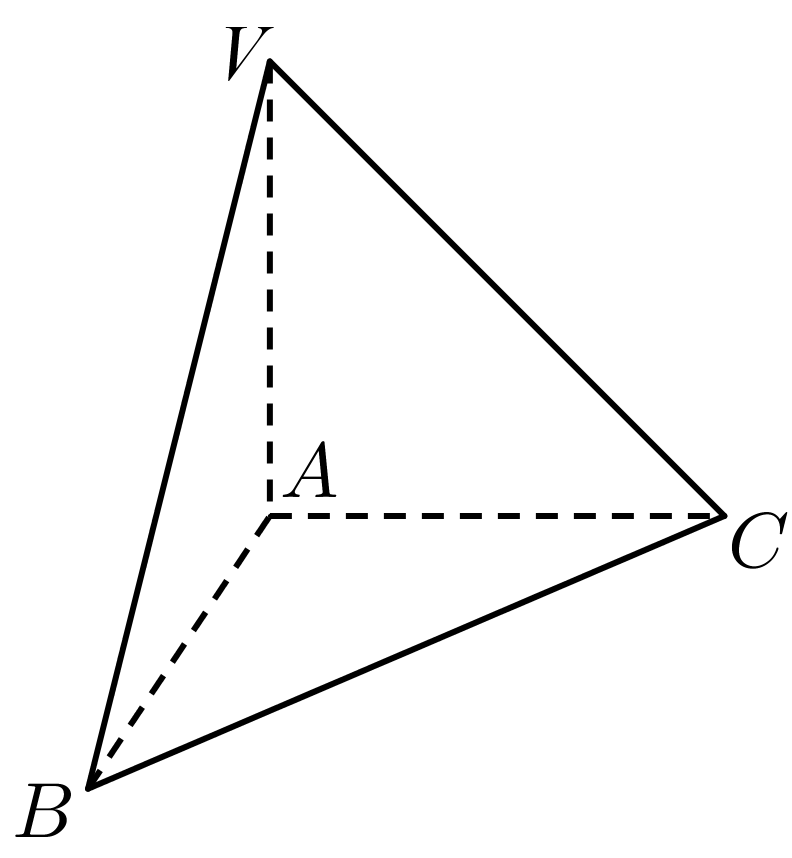
【答案】B

5．已知点*F*为抛物线的焦点，点*P*在抛物线上且横坐标为8，*O*为坐标原点，若△*OFP*的面积为，则该抛物线的准线方程为（       ）

A． B． C． D．

【答案】B

6．如图，三棱锥*V－ABC*中，*VA*⊥底面*ABC*，，，则该三棱锥的内切球和外接球的半径之比为（       ）



A． B．

C． D．

【答案】C

因为*VA*⊥底面*ABC*，底面*ABC*，所以，

又因为，所以，而，

所以三条互相垂直且共顶点的棱，可以看成正方体中，共顶点的长、宽、高，

因此该三棱锥外接球的半径，设该三棱锥的内切球的半径为，

因为，所以，

因为，，所以

，

由三棱锥的体积公式可得：

，

所以

7．“碳中和”是指企业、团体或个人等测算在一定时间内直接或间接产生的温室气体排放总量，通过植树造林、节能减排等形式，以抵消自身产生的二氧化碳排放量，实现二氧化碳“零排放”．某“碳中和”研究中心计划派5名专家分别到*A*，*B*，*C*三地指导“碳中和”工作，每位专家只去一个地方，且每地至少派驻1名专家，则分派方法的种数为（       ）

A．90 B．150 C．180 D．300

【答案】B

第一种方式，有一个地方去3个专家，剩下的2个专家各去一个地方，

共有种方法，

第二种方式，有一个地方去1个专家，另二个地方各去2个专家，

共有，

所以分派方法的种数为

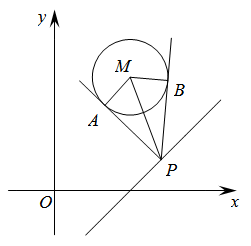
8．过直线上一点*P*作圆*M*：的两条切线，切点分别为*A*，*B*，若使得四边形*PAMB*的面积为的点*P*有两个，则实数*m*的取值范围为（       ）

A． B． C．或 D．或

【答案】A

由圆*M*：可知，圆心，半径为1，

∴，



∴四边形*PAMB*的面积为，

∴，

要使四边形*PAMB*的面积为的点*P*有两个，则，解得.

**二、多选题**

9．将函数的图象向右平移个单位长度得到函数的图象，则（       ）

A． B．是图象的一个对称中心

C．当时，取得最大值 D．函数在区间上单调递增

【答案】BD

选项A：将函数的图象向右平移个单位长度得到函数.判断错误；

选项B：，则是图象的一个对称中心.判断正确；

选项C：，当时，取得最小值.判断错误；

选项D：由，可得

则函数在区间上单调递增.判断正确.

10．甲罐中有3个红球、2个黑球，乙罐中有2个红球、2个黑球，先从甲罐中随机取出一球放入乙罐，以*A*表示事件“由甲罐取出的球是红球”，再从乙罐中随机取出一球，以*B*表示事件“由乙罐取出的球是红球”，则（       ）

A． B． C． D．

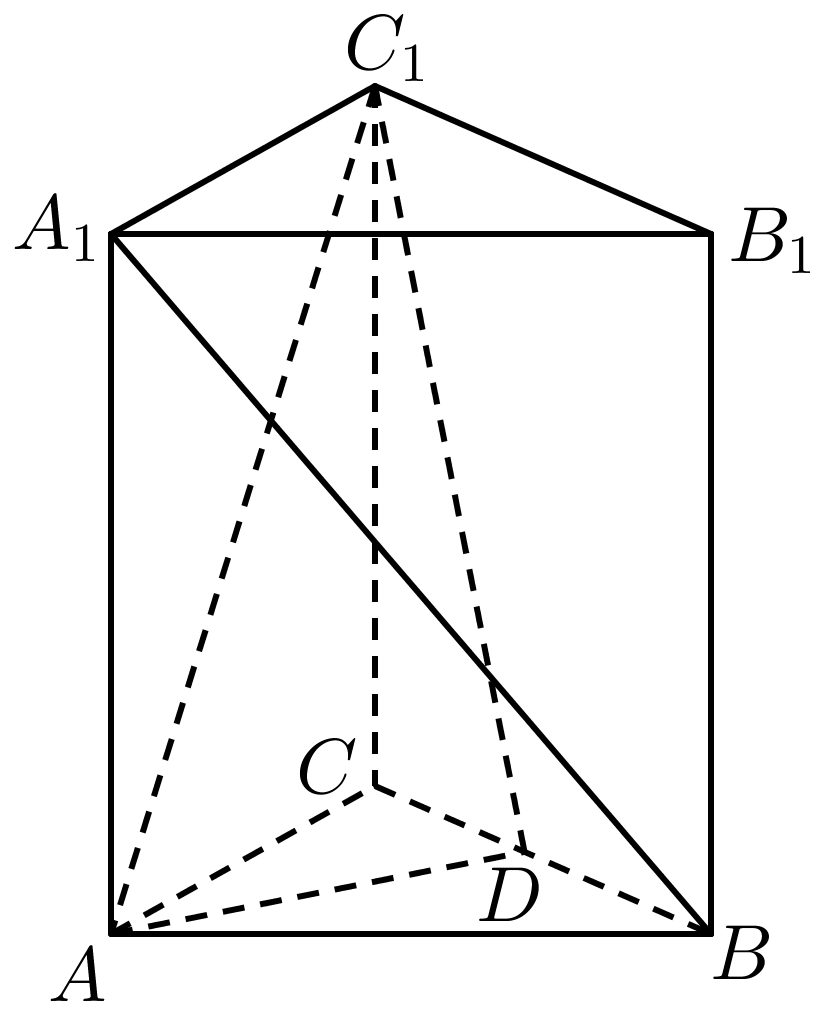
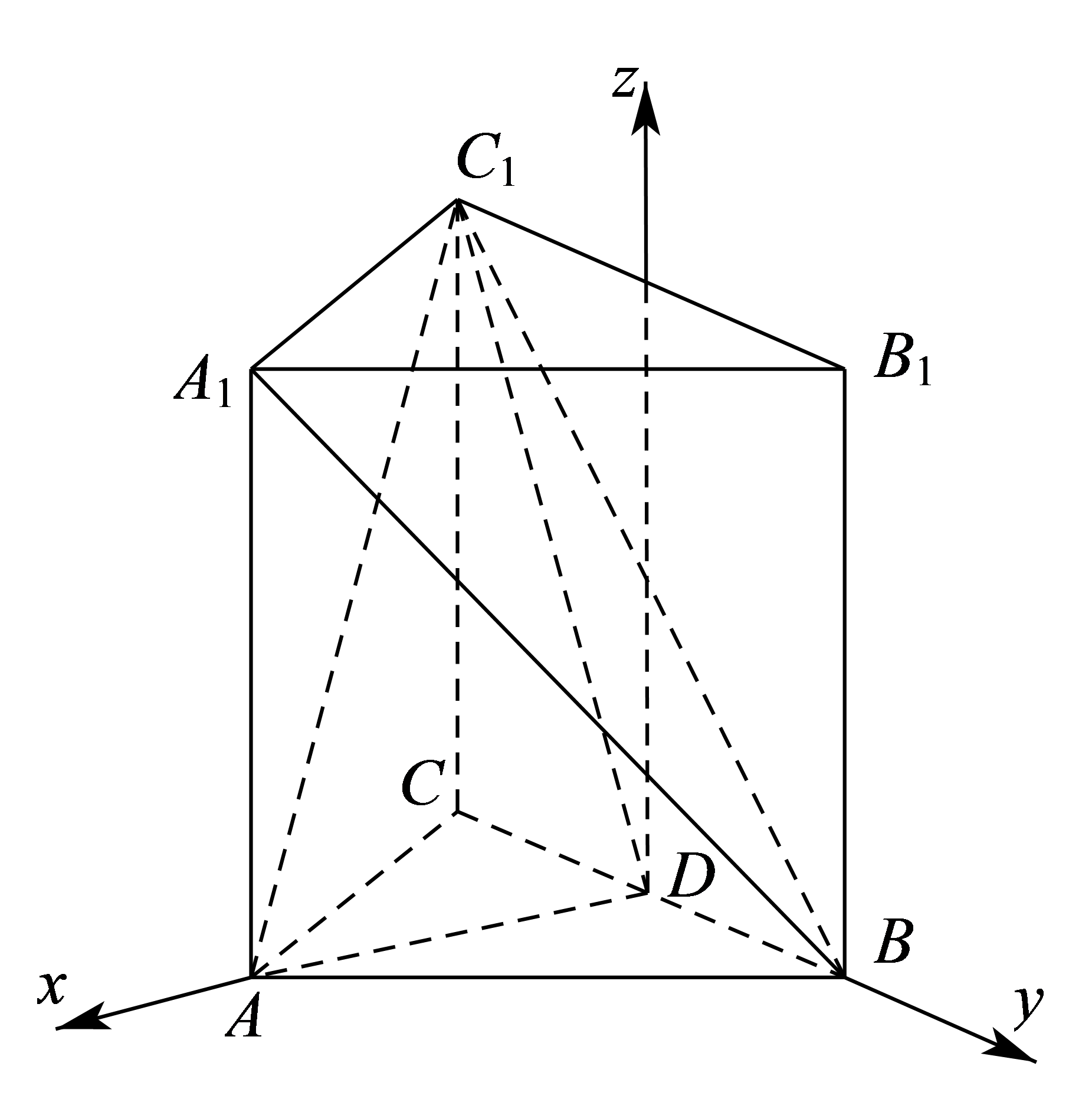
【答案】ACD

因为甲罐中有3个红球、2个黑球，所以，故选项A正确；

因为，所以选项C正确；

因为，所以，因此选项D正确；

因为，所以选项B不正确，

11．如图，正三棱柱中，底面*ABC*是边长为2的等边三角形，，*D*为*BC*中点，则（       ）

A．直线平面

B．点到平面的距离为

C．异面直线与所成角的余弦值为

D．设*P*，*Q*分别在线段，上，且，则*PQ*的最小值为

【答案】ABD

解：在正三棱柱中，为的中点，所以，

如图建立空间直角坐标系，则，，，，，，，所以，，，设平面的法向量为，则，令，则，，所以，因为，即，又平面，所以平面，故A正确；

因为，所以，则点到平面的距离为，故B正确；

因为，，设直线与所成角为，则，所以异面直线与所成角的余弦值为，故C错误；

设，则、，因为，，所以，，则，，所以，所以当时有最小值，所以，所以，故D正确；

12．已知双曲线*C*：，，为*C*的左、右焦点，则（       ）

A．双曲线和*C*的离心率相等

B．若*P*为*C*上一点，且，则的周长为

C．若直线与*C*没有公共点，则或

D．在*C*的左、右两支上分别存在点*M*，*N*使得

【答案】BC

选项A：双曲线*C*：的离心率

双曲线的离心率

则双曲线和*C*的离心率不一定相等.判断错误；

选项B：*P*为*C*：上一点，且,则有，整理得,则的周长为.判断正确；

选项C：由，可得,由题意可知，方程无解.

当时，方程有解；

当时，则有，解之得或

故若直线与*C*没有公共点，则或.判断正确；

选项D：根据题意，过双曲线*C*的左焦点的直线方程可设为

令，由，可得

由，可得

则有，则有，整理得，显然不成立.

当过双曲线*C*的左焦点的直线为水平直线时，方程为

则，，即.

综上可知，不存在分别在*C*的左、右两支上*M*，*N*使得.判断错误.

**三、填空题**

13．若，则的值为\_\_\_\_\_\_．

【答案】

由，可得

则，

14．若的展开式中项的系数为－160，则正整数*n*的值为\_\_\_\_\_\_．

【答案】6

二项式的通项公式为：，

令，所以，

令，所以



，或，因为，

所以方程无实数根，故，即

15．己知为R上的奇函数，且，当时，，则的值为\_\_\_\_\_\_．

【答案】

由题设，，故，即的周期为2，

所以，且，

所以.

16．在空间直角坐标系*O－xyz*中，三元二次方程所对应的曲面统称为二次曲面．比如方程表示球面，就是一种常见的二次曲面．二次曲而在工业、农业、建筑等众多领域应用广泛．已知点*P*(*x*，*y*，*z*)是二次曲面上的任意一点，且，，，则当取得最小值时，的最大值为\_\_\_\_\_\_．

【答案】

由题设，，故，当且仅当时等号成立，

所以，此时，

令，则，故，

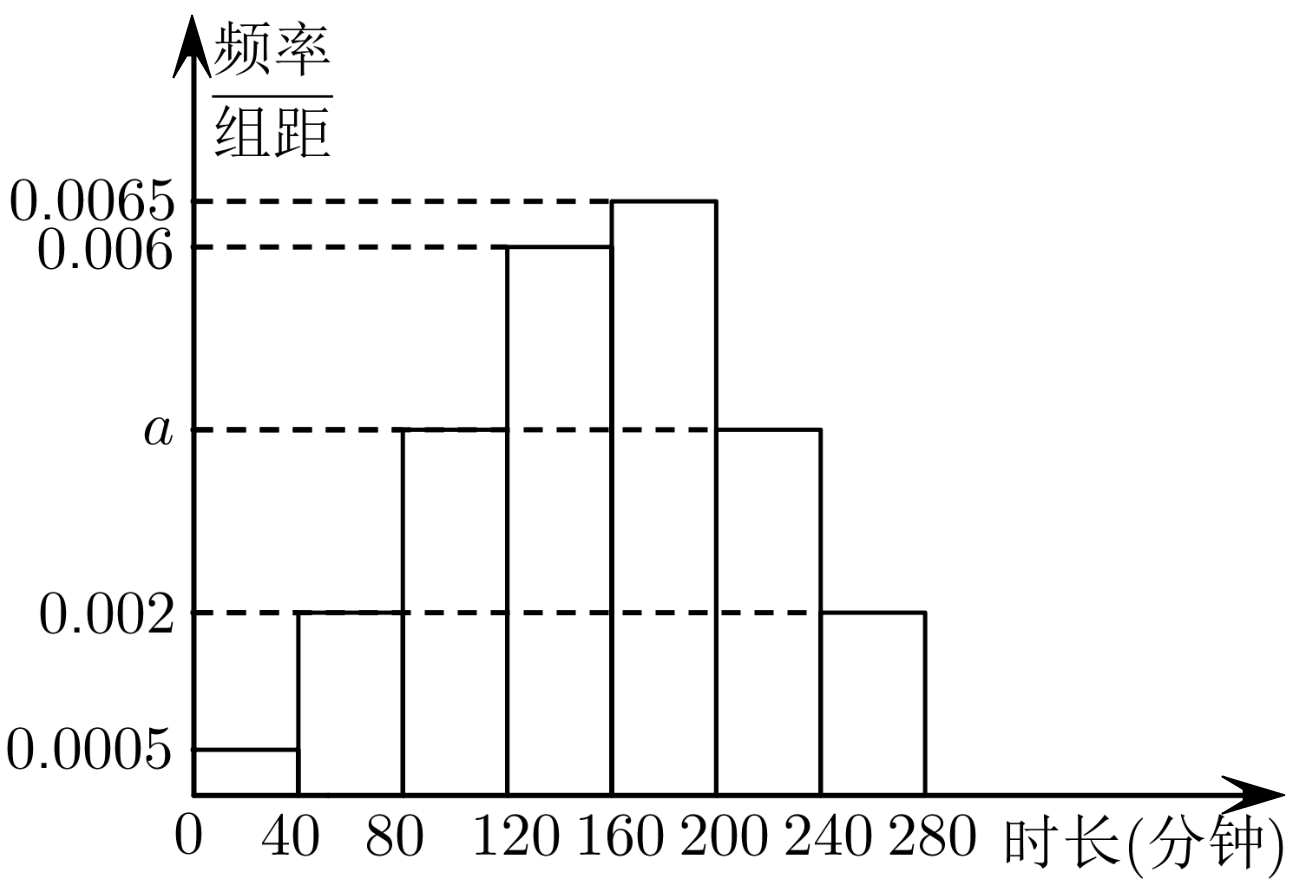
所以，当时，当时，即在上递增，在上递减.

故，且时等号成立，

综上，的最大值为.

**四、解答题**

17．2022年2月4日至20日，第24届冬季奥林匹克运动会在北京成功举办．这场冰雪盛会是运动健儿奋力拼搏的舞台，也是中外文明交流互鉴的舞台，折射出我国更加坚实的文化自信，诠释着新时代中国的从容姿态，传递出中华儿女与世界人民“一起向未来”的共同心声．某学校统计了全校学生观看北京冬奥会开幕式和闭幕式的时长情况（单位：分钟），并根据样本数据绘制得到下图所示的频率分布直方图．



(1)求频率分布直方图中*a*的值，并估计样本数据的85%分位数；

(2)采用样本量比例分配的分层随机抽样方式，从观看时长在[200，280]的学生中抽取6人．若从这6人中随机抽取3人在全校交流观看体会，设抽取的3人中观费时长在[200，240）的人数为*X*，求*X*的分布列和数学期望．

(1)由题意，40×(0.0005＋0.002×2＋2*a*＋0.006＋0.0065)＝1，解得*a*＝0.004．

由频率分布直方图知，观看时长在200分钟以下占比为40×(0.0005＋0.002＋0.004＋0.006＋0.0065)＝0.76．

观看时长在240分钟以下占比为0.76＋40×0.004＝0.92．

所以85%分位数位于[200,240)内， 85%分位数为．

(2)由题意，观看时长[200,240)、[240,280]对应的频率分别为0.16和0.08，

所以采用分层随机抽样的方式在两个区间中应分别抽取4人和2人．

于是抽取的3人中现看时长在[200,240)中的人数*X*的所有可能取值为1，2，3．

所以，，，．

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 2 | 3 |
| *P* |  |  |  |

所以，．

18．己知等差数列的前*n*项和为，，．

(1)求的通项公式；

(2)保持数列中各项先后顺序不变，在与之间插入个1，使它们和原数列的项构成一个新的数列，记的前*n*项和为，求的值．

(1)设的公差为*d*，由已知，．

解得，*d*＝2．所以；

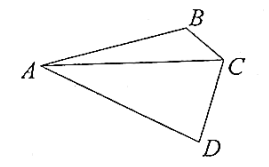
(2)因为与之间插入个1，

所以在中对应的项数为，

当*k*＝6时，，当*k*＝7时，，

所以，，且．

因此.

19．如图，四边形*ABCD*中，．

(1)若，求△*ABC*的面积；

(2)若，，，求∠*ACB*的值．

(1)在△*ABC*中，，

因为，所以．

．

(2)设，则，，．

在△*ACD*中，由，得．

在△*ABC*中，由，得．

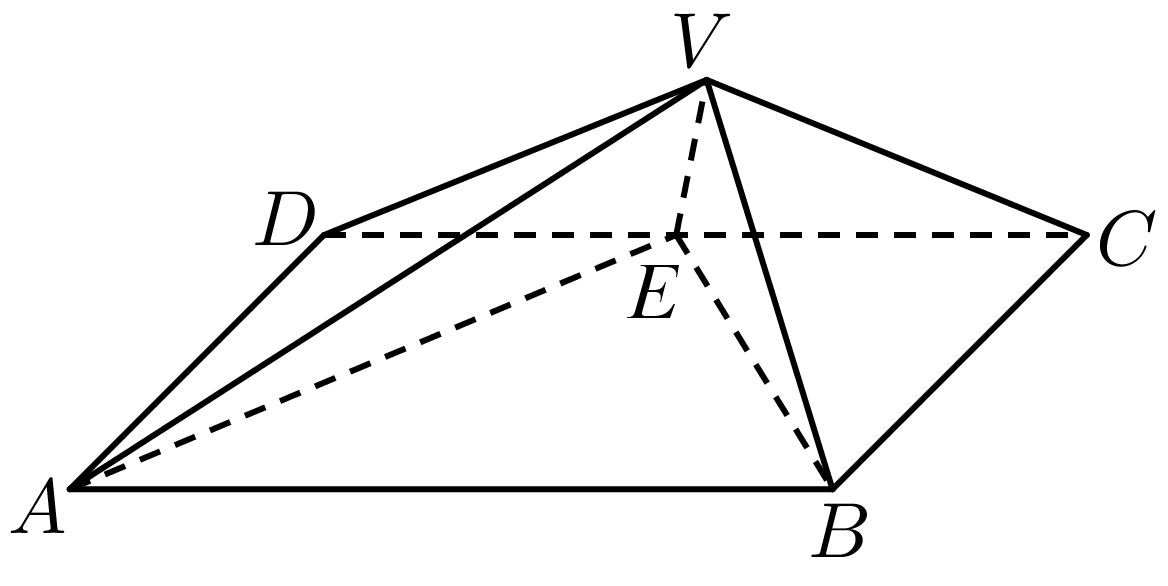
联立上式，并由得，

整理得，所以，

因为，所以，

所以，解得，即∠*ACB*的值为．

20．如图，在四棱锥*V－ABCD*中，底面*ABCD*为矩形，，*E*为*CD*的中点，且△*VBC*为等边三角形．



(1)若*VB*⊥*AE*，求证：*AE*⊥*VE*；

(2)若二面角*A－BC－V*的大小为，求直线*AV*与平面*VCD*所成角的正弦值．

(1)因为*E*为*CD*的中点，所以，所以△*ADE*为等腰直角三角形，

所以．同理，．所以*AE*⊥*BE*．

又因为*VB*⊥*AE*，且，面*VBE*，面*VBE*，

所以*AE*⊥面*VBE*．

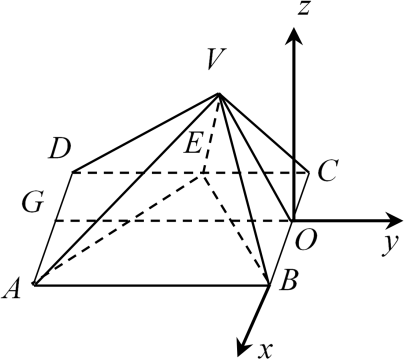
因为面*VBE*，所以*AE*⊥*VE*．

(2)取*BC*中点*O*，*AD*中点*G*、连接*OG*，*VO*，则*OG*⊥*BC*．

又△*VBC*为等边三角形，所以*VO*⊥*BC*，

所以∠*GOV*为二面角*A－BC－V*的平面角．所以

以，方向分别作为*x*，*y*轴正方向，建立空间直角坐标系*O*－*xyz*．



于是*A*（1，－4，0），*C*（－1，0，0），D（－1，－4，0），，

，，．

令为平面*VCD*的一个法向量，

则，即，令*z*＝2，得．

设直线*AV*与平面*VCD*所成的角为，则， 故直线*AV*与平面*VCD*所成角的正弦值为．

21．已知椭圆*C*：的离心率为，依次连接*C*四个顶点所得菱形的面积为4．

(1)求椭圆*C*的标准方程；

(2)若*A*（－2，0），直线*l*：与*C*交于 两点，且*AP*⊥*AQ*，试判断直线*l*是否过定点？若是，求出此定点的坐标；若不是，说明理由．

(1)由已知，连接*C*的顶点所得四边形面积，

又，解得：，，

所以椭圆*C*的方程为．

(2)设，，联立，

消*y*可得，

则有，即，

，，

因为*AP*⊥*AQ*，所以，而，，

故，



，

故

，

解得或，

当时，直线*l*方程为，过点*A*，不满足题意，

当时，代入，

故直线*l*方程为，过定点．

22．己知函数．

(1)讨论的单调性；

(2)当，，求*a*的取值范围；

(3)证明：．

(1)定义域为（0，＋∞），．

记．

当时，，即，所以在（0，＋∞）上单调递减．

当时，令，得，（舍去）．当时，，即，所以单调递减；当时，，即，所以单调递增，

综上，当时，在（0，＋∞）上单调递减；当时，在上单调递减，在单调递增．

(2)由（1）知，当时，在[1，＋∞）单调递减，所以．

此时．令，解得．

当时，若，即，由（1），设的正根为，则必有，且当，，即，

所以在[1，＋∞）单调递增．此时，．

令，解得．

若，即，则当时，，单调递减，当时，，单调递增，注意到，

知．

又当时，，由零点存在定理，使，此时，不满足题意．

综上，*a*的取值范围是或．

(3)由（2）知，当时，对，有，即．

又时，，，所以．

令，得．

所以，，，…，．

故，即．

【点睛】

关键点睛：构造不等式，利用裂项相消法是解题的关键.