

浅论核心素养下单元教学的作业设计

——以“幂、指数与对数”为例

200122 上海市洋泾中学 陈丽达 吴元帅

摘要:依据《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》中关于数学核心素养的说明和要求,以“幂、指数与对数”为例,进行单元教学中的作业设计,探索将高中数学核心素养融入单元教学作业设计的策略。

关键词:数学核心素养;单元教学;作业设计;幂;指数;对数

单元是依据课程标准,围绕主题或活动进行结构化组织的学习单位.单元教学是课程教学的一种基本形式,是根据特定的单元内容来进行的教学活动.单元作业是为某个单元教学所设计的所有作业的总和,是数学日常学习评价不可或缺的有机组成部分.单元作业设计是指教师依据课程标准和教材,根据自己对单元内容的理解以及学生的实际情况,进行系统规划和整体设计,通过分析、整合、重组后形成的作业.

1 单元作业设计的特点

1.1 主体性

单元作业的设计要关注学生的心理特点和认知基础,尽量贴近学生的生活实际,作业设计不能忽视学生的原有经验,而要引导学生从原有的知识经验中“生长”出新的知识经验.

1.2 系列性

从单元的角度整体设计每一课时的作业,作业之间要建立一定的梯度和联系.由浅入深、由易到难、循序渐进、连贯地设置作业,随着学生学习水平的不断提高,同一课时、不同课时的作业要求逐级提高.

1.3 多样性

单元作业注重拓宽学习资源,作业内容丰富、问题形式多变、解决模式多样、获得结论多个,让不同学生都有充分发挥各自才智的空间.

2 单元作业的设计思路和基本框架

“幂、指数与对数”单元是上海教育出版社出版的高一《数学》教材的第三章.本单元主要学习指数幂的拓展——指数与对数的概念、相互关系、基本性质,它将帮助学生提升数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养.

本单元是“幂函数、指数函数与对数函数”的先行单元,将运算从函数中剥离出来,使运算不再作为函数的依附,不少学生觉得本单元涉及的知识不多,以运算性质为主,但不了解单元架构,只见树木,不见森林.根据学生的心理特点、年龄特点和认知基础,单元作业设计时,关注幂、指数与对数的整体处理框架,引导学生先了解指数幂的拓展过程,多从实例入手,从数学文化的层面适当加入对数的起源与其在数学及其他科学领域所起到的作用.笔者尝试在作业的结构、内容、形式等方面作进一步的完善.增加辨析型、阅读型的作业数量,每课时的作业结构保持一定的稳定性,随着知识的增多、课时的增加、问题的挖掘,作业的难度、问题的梯度均有一定层次的提高.通过关注学生的认知特点和认知发展,提高作业的针对性和有效性.

3 关注学生认知发展的单元作业设计

单元作业设计始终关注学生认知发展,依据学生学情和课程标准要求,把单元目标和课时目标转化为具体的作业内容,以真实情境为背景激发学生的学习热情,提供多样化的学习素材促进学生的认知发展,使学生思维的发展和知识的理解协调同步.

3.1 合理设计基础性问题,帮助学生夯实根基

数学知识的学习就如盖一幢高楼,每一层都是不可或缺的,打好基础十分关键,且要体现出累积性与连续性.在核心素养下的数学教学中,需高度重视基础知识的考查,只有学生基础牢固,在后续深入学习中才能够轻松应对,以免出现更多的障碍与困难.对此,教师要设计合理的基础性作业,关注学生对数学公式、概念、定理、定律的掌握和运用情况,帮助他们扎实数学根基,为核心素养的形成奠定基础.

练习1 若将使得 $\sqrt[k]{a^k}=a$ 对任意实数 a 均成立的整数 k 称为“还原数”,则当 n 是正整数时,下列

一定是“还原数”的是()

- A. $2n$ B. n^2
C. n^2+n D. n^2+n-1

参考答案:D.

设计意图:这是一个考查概念的问题.对于学生来说,正面分类去讨论 $\sqrt[n]{a^n}$ 的结果相对简单,容易掌握,但要完全理解根式运算的意义,还有待于对概念的深度挖掘.此题就是基于对根式运算的概念的理解,利用逆向思维,让学生自行体会该等式恒成立的条件,从而判断出“还原数”必为奇数,进一步在选项中进行判断,从而得到正确的答案.这对培养学生的数学抽象、逻辑推理素养有一定的帮助.

练习2 证明:若 $a>1, 0<N\leq 1$,则 $\log_a N\leq 0$.

参考答案:用反证法证明如下,假设 $x=\log_a N>0$,则 $a^x=N$,若 $a>1$,则根据“幂的基本不等式”可得 $a^x>1$,即 $N>1$,与已知 $0<N\leq 1$ 矛盾.所以假设不成立,即 $\log_a N\leq 0$.

设计意图:本题从教材第63页“幂的基本不等式”中得到启发,类比发现并提出数学问题.引导学生遇到较陌生的数学问题时,能够提出不同的假设前提,推断结论,形成数学命题,随后探索论证的途径,解决问题,并会用严谨的数学语言表达论证过程.对于对数性质问题需要联系指数性质问题来思考,充分体现转化与化归思想,也为下一节“对数运算性质”的证明指明了方向与思路.本题突出联系性思想,引导学生善于联系已学的数学概念和性质进行学习,最终促使学生学会研究问题的方法,培养学生主动学习的意识.

以上这些例子都是围绕指数与对数的运算设计一些基础性作业,辅助学生掌握指数与对数的运算法则,使其可以准确进行计算,培养他们的运算能力、符号意识等.

3.2 贯穿设计情境性问题,引导学生形成数学思维

高中数学知识的学习是一种“历史知识”的学习,具有一定的被动性,这会使学生认识不到当前的学习与将来生活实践的联系,对数学的应用价值比较迷茫.数学的抽象性决定了单纯数学题解过程的枯燥无味.

弗赖登塔尔认为,数学来源于现实,存在于现实,并且应用于现实,数学教师的任务之一是帮助学生构造数学现实,并在此基础上发展他们的数学现实.

回到作业设计就需要改变原来过于形式化的习题,取而代之的是更具现实背景的实质问题,主要是指从周围生活中可以找到原型、学生运用已掌握的

数学知识可以分析解决的一类实际问题.这种作业在书本知识和学生的生活实际之间架起了一座桥梁,无形中给作业增添了趣味性,使学生获得运用课堂里学到的数学知识、数学思想去解决生活实际问题的机会,能培养学生用数学眼光观察身边事物的习惯,提高学生的问题意识和数学素养,在真实的生活实践中体会数学,认识到数学的魅力.

练习3 拓展阅读回答:

著名的棋盘问题:在 8×8 的棋盘第一格放1颗麦粒,第二格放2颗麦粒,第三格放 2^2 颗麦粒,第四格放 2^3 颗麦粒……以此类推,放满棋盘需要多少颗麦粒?

中世纪意大利数学家斐波那契在求解此问题时,先算出棋盘第1、2行的麦粒数之和,再加上1颗麦粒,得 $1+2+2^2+2^3+\dots+2^{15}+1=65536$,将这65536颗麦粒装入一个箱子,再将65536个这样的箱子放进一座房子,再将65536个这样的房子放进一座城市,再将65536个这样的城市所含的麦粒数减去1,即为棋盘上所有麦粒数之和.

(1)我们发现: $1+1=2\times 2^0=2^1$,

$1+1+2=2\times 2^1=2^2$,

$1+1+2+2^2=2\times 2^2=2^3$,

$1+1+2+2^2+2^3=2\times 2^3=2^4$,

...

根据以上等式,体会斐波那契在求解棋盘问题时加上1颗麦粒的作用,并将 $1+2+2^2+2^3+\dots+2^{15}+1$ 表示成有理数指数幂的形式.

(2)试求棋盘第3、4行,第5、6行,第7、8行的麦粒数之和分别是第1、2行的麦粒数之和的多少倍.

(3)结合(1)、(2),求出棋盘上所有行的麦粒数之和.如果令 $x=2^{16}$,能否得到更一般的等式并证明?

参考答案:(1) $2^{16}-1$; (2) $2^{16}, 2^{32}, 2^{48}$; (3) $(2^{16}-1)\cdot(1+2^{16}+2^{32}+2^{48})=2^{64}-1$; $(x-1)\cdot(1+x+x^2+x^3)=x^4-1$.

设计意图:学生通过阅读,能够了解运算法则进行正确运算,并能够在熟悉的数学情境中,根据问题的特征形成合适的运算思路,从而解决问题.本题侧重于培养学生的数学阅读能力,能够在关联的数学运算中抽象出一般的数学概念和规则,并能够将已知的数学命题推广到更一般的情形.

练习4 著名数学家纳皮尔花费了毕生的精力造出了历史上第一张解决两个正数的乘、除、乘方以及开方运算的对数表,从而使许许多多从事繁复计算的数学家大大减轻了劳动.对此,法国著名数学家拉普拉斯评价道:“因为省事省力,对数倍增了数学家的寿命.”

表 1

$\ln N$	N
0.0000	1.000000
0.0001	1.000100
...	...
0.9998	2.717736
0.9999	2.718008
1.0000	2.718279
1.0001	2.718551
1.0002	2.718823
...	...
1.9997	7.386828
1.9998	7.387567
1.9999	7.387579
...	...
3.0001	20.08751
...	...

表 1 是一张相邻两个数之间的间隔足够小的对数表,其第一列相邻两个数的差均为 0.0001,第二列相邻两个数的商均为 1.0001,请借助该表,计算下列算式的结果:

(1) 2.718008×2.717736 ; (2) $20.08751 \div 7.387579$.

参考答案:

(1) $\ln(2.718008 \times 2.717736) = \ln 2.718008 + \ln 2.717736 = 1.9997$, 所以查表可得 $2.718008 \times 2.717736 = 7.386828$;

(2) $\ln(20.08751 \div 7.387579) = \ln 20.08751 - \ln 7.387579 = 1.0002$, 所以查表可得 $20.08751 \div 7.387579 = 2.718823$.

设计意图:本题用对数发明者纳皮尔的史料,介绍历史上数学家为“如何进行更一般大数目的乘、除、乘方、开方运算”问题所作的卓越贡献,让学生体验“对数表”蕴含的对数运算性质是如何把更一般大数目的乘除运算化归为简单快捷的加减运算的.使学生再次深刻感受 16 世纪数学家遇到的苦恼,从而使其关于对数运算性质的理解学习真正得以发生,同时也使对数运算性质的证明水到渠成.本题利用

对数表“对来对去”的计算过程,使学生感知“对数”名称中“对”的深刻内涵.并借助编制“对数表”使学生体会其中蕴含的对数运算性质以及其与指数运算性质的内在联系.

3.3 科学设计应用性问题,培养学生数学运算能力

高中阶段的数学运算,远不是加减乘除那样简单,其中涉及数据处理的许多技巧,涉及丰富的逻辑思维的运用.从教材出发,选取、改编或创设贴近生活实际的情境,引导学生观察品味生活,提高学生运用所学知识解决实际问题的能力,进而提高学生的数学运算能力,还让学生了解到数学与社会发展的相互关系,领略数学的应用价值.

练习 5 在化学中,溶液的 pH(用于描述溶液的酸碱性强弱程度的量,通常在 0~14 之间)是基于常用对数来计算的. pH 的 1 个差异表示着溶液中氢离子浓度 $[H^+]$ 的 10 倍变化, pH 与氢离子浓度 $[H^+]$ 间的关系可以用 $pH = -\lg[H^+]$ 表示,其中氢离子浓度 $[H^+]$ 的单位是 mol/L.

(1) 若某溶液中氢离子浓度 $[H^+]$ 为 0.0001 mol/L,求该溶液的 pH;

(2) 若某溶液的 pH 为 2.5,求溶液中氢离子浓度 $[H^+]$;

(3) 若定义溶液的 $bH = -\log_2[H^+]$,求某中性溶液(即 $pH=7$)的 bH . 并通过查找资料,试着解释基于常用对数来描述溶液酸碱性的原因.(结果精确到 0.1, $\lg 2 \approx 0.3$)

参考答案: (1) $pH = -\lg 0.0001 = 4$. (2) $-\lg[H^+] = 2.5 \Rightarrow [H^+] = 10^{-2.5}$. (3) $bH = -\log_2[H^+] = \frac{-\lg[H^+]}{\lg 2} = \frac{pH}{\lg 2} \approx 23.3$, 原因是,日常生活中用的数字是十进制的,大数也常用科学计数法表示,以 10 为底的对数相对较为常用;若基于以 2 为底的对数来计算, bH 在 0~46.6 之间,范围过于宽泛,且中性溶液的 bH 是无理数,不便于计算.

设计意图:结合数学文化,适当加入对数在其他科学领域所起到的作用,感受对数简化运算的作用.通过对题目数据的提取,运用对数的运算性质与换底公式进行计算,培养学生的数学运算能力.而小问(3)的书面开放题,通过对数据的综合分析,推导出与生活相关的结论,让学生充分体会对数在生活中的重要作用,体会对数的应用价值.

练习 6 拓展阅读回答:

你知道一张纸对折 100 次有多厚吗?

假如这是一张非常大的纸,可以无限次对折.以80克胶版纸为比例,它的标准厚度为0.0766毫米.每对折一次,这张纸的厚度都会翻倍.

请问:(1)当这张纸对折多少次时,其厚度超过姚明的身高(2.26米)?

(2)当这张纸对折多少次时,其厚度超过珠穆朗玛峰的高度(8848米)?

(3)当这张纸对折100次时,其厚度约为多少光年?(结果精确到0.1亿)(光年是指光在宇宙真空中沿直线传播了一年的时间所经过的距离,约为 9.4607×10^{12} 千米)

(4)事实上,以上推理是不符合实际的数学推理.因为如果纸是正方形,边长为1米,厚度为 h 米,当折叠一次的时候,折叠边长不变,厚度为 $2h$ 米,折叠两次的时候折叠边长为原来的 $\frac{1}{2}$,厚度变为 $4h$,就这样折叠下去,可以推出:当折叠 n 次时,厚度变为 $2^n h$ 米,当折叠次数 n 为偶数时,折叠边长为 $(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}$ 米,当折叠次数 n 为奇数时,折叠边长为 $(\frac{1}{2})^{\frac{n-1}{2}}$ 米,当 $n > \frac{2}{3}(\log_2 \frac{1}{h} - 1)$ 时无法折叠.那么,一张边长为1米的正方形80克胶版纸最多能够折叠多少次呢?

参考答案:(1)15;(2)27;(3)102.6亿光年;(4)9次.

设计意图:本题小问(1)、小问(2)通过简单的运算,学生能够准确列式计算,找到解决问题的方法.小问(3)培养学生大数据的运算能力和不同计量单位之间的转换能力.小问(4)指出数学理论推理和实际不一定符合,还需要考虑更多的因素,再结合实际,重新考虑,会得到怎样的结果,让学生学会反思、总结和拓展.本题以提出问题的方式,激发学生学习数学的兴趣,尝试用熟悉的数学内容进行正确运算并去思考,从而解决问题.题目既引导学生感悟数学的科学价值和应用价值,又促进学生的实践能力.

3.4 巧妙设计启发性问题,发展学生逻辑推理能力

单元作业中,一定要有能让学生应用数学概念的问题,促进学生的理解,如果没有高质量的问题让学生独立思考、独立解决,学生对概念的理解只能停留在表面,难以达到深刻理解.单元作业还要体现一定的思维量,如果没有一定的思维量,达不到理解本质的目的.只有完成涉及概念本质且有一定思维深

度的问题,才能促进学生对数学概念本质的理解.

练习7 设 $a, x, y \in \mathbf{R}$,定义 $a(x * y) = a^x \cdot a^y$.

(1)求 $2(2 * 3)$ 的值;

(2)判断下列结论是否成立并证明:

结论① $a(x * y) = a(y * x)$;

结论② $a((x * y) * z) = a(x * (y * z))$;

结论③ $a(x * (y + z)) = a(x * y) + a(x * z)$.

参考答案:(1)32.(2)结论①: $a(x * y) = a^x \cdot a^y = a^y \cdot a^x = a(y * x)$,成立.结论②: $a((x * y) * z) = (a^x \cdot a^y) \cdot a^z = a^x \cdot (a^y \cdot a^z) = a(x * (y * z))$,成立.结论③:取 $a = 2, x = 1, y = 2, z = 3$,得 $a(x * (y + z)) = 2(1 * (2 + 3)) = 2^1 \cdot 2^5 = 2^6 = 64$, $a(x * y) + a(x * z) = 2^1 \cdot 2^2 + 2^1 \cdot 2^3 = 24$,不成立.

设计意图:对结论①、结论②的设计,通过定义新的数学符号,学生在原有熟悉的数学内容基础上正确进行运算,通过运算验证简单的数学结论,并进行类比推理,掌握命题的证明方法.对结论③的设计是让学生能够通过举反例说明某些数学结论不成立.本题培养学生的数学阅读能力,借助数学阅读,充分认识数学符号、数学语言的表达形式,锻炼数学语言的理解力和表达力,建立良好的数学语言系统,能够自主地运用数学语言解决一些数学问题.

练习8 简答:(1)已知 $a = 10^p, b = 10^q$,试从幂指数的角度探索 b 是 a 的多少次方.

(2)已知 $a = 10^p, b = 10^q$,试从对数的角度探索 b 是 a 的多少次方.

参考答案:(1) $a^q = (10^p)^q = 10^{pq} = (10^q)^p = b^p \Rightarrow b = a^{\frac{q}{p}}$;(2) $a = 10^p \Rightarrow p = \lg a, b = 10^q \Rightarrow q = \lg b$,设 $b = a^x$,则 $x = \log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{q}{p}$,故 $b = a^{\frac{q}{p}}$.

设计意图:在学习了幂指数与对数的相关概念与运算性质后,可以感受到指数式与对数式的相互转化,以不同的方式解决相同的问题.本题鼓励学生尝试用不同的思路求解,体会转化与化归、对立与统一的数学思想,进一步提升逻辑推理、数学运算等核心素养.

3.5 分层设计人文性问题,促进学生交流与反思

人文就是要关注人的文化,其核心是关心人、尊重人.素养为本的数学个性化作业应以人为本,体现人文关怀,符合学生的认知规律、成长规律,才能促进学生健康成长.作业内容设计中努力挖掘数学教学中的人文资源,渗透文化内涵和生活积淀,让学生在作业中感受数学的价值,领悟数学的基本精神、思想和方法.

新时代交流与合作成为成功的一大要素,也成为教育培养的目标之一. 设置交流型作业项目不仅能够增强学生之间的交流,还能够增强学生之间的关系,营造和谐、团结互助的学习氛围.

练习9 高一新生入校,我们以1表示每一天的努力,1.01表示每天多努力1%,0.99表示每天少努力1%,计算并回答下列问题(结果精确到0.001):

(1)分别计算 1^{365} 、 1.01^{365} 、 0.99^{365} 的数值,并比较三者的大小;

(2)一年后每天多努力2%的结果是每天多努力1%的结果的多少倍?

(3)古人云:“积跬步以至千里,积怠惰以致深渊.”请结合以上两问,谈谈自己的想法.

参考答案:(1) $1^{365}=1$, $1.01^{365}\approx 37.783$, $0.99^{365}\approx 0.026$, $1.01^{365}>1^{365}>0.99^{365}$. (2)每天多努力2%在一年后的结果是 $1.02^{365}\approx 1377.408$, 每天多努力1%的结果是 $1.01^{365}\approx 37.783$, $\frac{1.02^{365}}{1.01^{365}}\approx 36.455$, 一年后每天多努力2%的结果是每天多努力1%的结果的36.455倍. (3)可以从多个方面谈自己的想法,比如,想法1,每天努力一点点,积少成多,一年后成果显著;想法2,从辩证的角度看待学习;想法3,从量变到质变谈努力对学习的影响;想法4:从坚持这个角度谈学习的持久性……

设计意图:设计本题的目的主要有三个. 其一,通过具体的幂指数运算,培养学生的数学运算能力;其二,通过对数据的分析和整合,体会计算结果指数式的级数增长,为后续研究指数函数的单调性做准备;其三,利用题目背景,进行德育渗透,体现数学学科的德育特点. 此题的小问(3)是一个开放性的问题,对于学生的不同答案,首先应该给予肯定,在评价时应根据不同学生的回答进行不同层次的评价. 但是题目主要是想通过对于特殊幂指数的计算,体会结果的指数式级数增长,学生直观感受底数的一点点小的变化可能带来结果的极大差异. 这对学生来说既是一次数学知识的学习,也是一次感受德育教育的极好机会.

练习10 请在以下选项中选出你对“对数的运算性质”作用的认识(可以多选),并解释你选择它的原因(可以举例说明).

A. 可以将高级运算降级为低级运算,从而实现运算的快捷

B. 可以解决真数不是特殊值的对数的计算问题

C. 可以用已知量来表示未知量

D. 我考虑过这个问题,但不清楚它的作用

E. 我从未考虑过这个问题

你的选择是_____,你的理由是_____.

设计意图:大多数学生只是形式化地死记对数运算性质,形式化地套用它解决相关问题,而对其具有的能够“将乘除运算降级为加减运算,将乘方开方降级为乘除运算”的本质却远远认识不够. 大部分学生在对数运算性质的理解上仅停留在表面,即他们能利用对数运算性质解决相关计算,却不会证明性质,也不理解其功能,更不了解其与指数运算性质的内在联系. 设计本题希望学生能够及时反思,明晰学习“对数运算性质”的目的,从而从认知的单一结构水平和多元结构水平,达到关联结构水平和扩展抽象水平.

“学数学而不练,犹如入宝山而空返”. 这句话形象地描述出数学作业的重要性. 作业作为课堂学习的延续和发展,是学生学习反馈和教师教学效果的重要体现. 它能帮助学生开阔视野,活跃思想,发展兴趣,使学生更深刻地理解和掌握课堂所学知识,训练应用数学知识的技能、技巧,发展思维能力,养成良好的数学意识.

在进行单元作业设计时,应着重于单元整体的视角. 设计本单元的核心例题和习题,并阐明这些例题实施过程中要重视的关键要素以及教育教学价值. 通常,课堂例题与教学内容具有一定的对应性,层次合理,以达到巩固和深化理解的效果. 课堂练习则既有巩固检测课堂学习效果的由低到高不同层次的基础性训练问题,也有与前面所学相关内容相关联的具有适当能力要求的综合性问题,还可能对即将学习的内容进行先导的发展性问题. 在进行单元作业设计时,应从单元整体思考并设计层次合理的训练问题,力图突出整个单元主要的数学思想方法,帮助学生整体提升数学核心素养.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准:2017年版 2020年修订[S]. 北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 上海市教育委员会教学研究室. 高中数学单元教学设计指南[M]. 北京:人民教育出版社,2018.
- [3] 吕世虎,杨婷,吴振英. 数学单元教学设计的内涵、特征以及基本操作步骤[J]. 当代教育文化,2016(7).
- [4] 曲全. 布卢姆教育目标分类学指导下的高中数学学科核心素养之数学运算研究:以“对数运算”为例[J]. 中国数学教育(高中版),2019(3):35-40;48.