基于核心素养的概念教学
——《曲线与方程》教学实录

江苏省常州市第一中学 213003 丁春梅 田秀权

【摘 要】“概念重要，惜乎有名无实；概念教学，憾哉有形无质”，这样的概念教学现状，何谈学生数学素养的提升、创新精神的培养、数学兴趣的激发？让学生在概念的生成、应用中提升数学素养、激发学习热情，是一线教师务必重视和亟待解决的问题.

【关键词】核心素养；数形结合；归纳猜想；数学语言

1 基本情况

1.1 教学背景

笔者于2017年11月18日至20日参加了第四届全国“绿色课堂杯”优质课观摩展示活动，执教的《曲线与方程》一课荣获高中数学组一等奖. 学生是昆明云南大学附属中学高二实验班学生，学生的数学基础相对较好，思维活跃，有较强的推理和分析能力.

1.2 教材分析

《普通高中数学课程标准（征求意见稿）》明确指出：数学核心素养是数学课程目标的集中体现，是在数学学习的过程中形成的，数学核心素养是具有数学基本特征的、适应个人终身发展和社会发展需要的思维品质和关键能力.

“曲线与方程”是人教A版《数学》（选修2-1）第二章第1节内容. 本节内容既是学生学习了直线方程与圆方程的基础之上，对曲线与方程对应关系认识的质的飞跃，又对后续的圆锥曲线的学习奠定了基础，更是体现了“解析几何”内容的核心思想：代数和几何的统一，利用数形结合的思想方法解决问题.

教学目标：（1）掌握曲线的方程和方程的曲线的概念；（2）在概念形成过程中，培养数学抽象、归纳素养；（3）在具体曲线方程的证明中，培养逻辑推理素养；（4）在教学过程中，渗透“数形结合”的数学思想方法.

教学重点：曲线的方程和方程的曲线的概念.

教学难点：曲线的方程和方程的曲线的概念的生成和理解.

2 教学过程

2.1 创设情境，问题引入

师：同学们，前面学习的直线方程和圆方程属于数学中的解析几何部分，那你们知道被称之为“解析几何之父”的数学家是谁吗？

生众：笛卡尔.

投影展示：法国数学家笛卡尔创立的解析几何把数学中的两大分支代数和几何很好地结合到一起. 著名数学家拉格朗日曾这样评价：“如果代数和几何分道扬镳，它们的进展将十分缓慢，而且应用范围也很有限. 但若两者相互结合共同发展，就会相互加强，并以快速的步伐向着完美化的方向猛进.”

师：为了纪念笛卡尔为数学作出的贡献，把笛卡尔发明的坐标系称之为“笛卡尔坐标系”，比如：平面直角坐标系就是其中一种.

追问：平面直角坐标系中，点和坐标有怎样的对应关系？

生众：一一对应.

师：那么当点运动形成曲线，是否有方程和它对应，这样的方程又有怎样的要求？

（学生沉思……）

师：这就是本节课要研究的内容.（引入课题）

设计意图 张奠宙先生认为：数学史有助于将数学的“学术形态”转化为“教育形态”. 笛卡尔的介绍，一方面让学生了解了解析几何的相关数学史，从更高的角度感受“数形结合”的意义和魅力，激发学习的兴趣，提升学习的积极性；另一方面自然而然地

引出了平面直角坐标系，让学生初步感知曲线和方程的对应关系是建立在平面直角坐标系上的.

（1）辨一辨

问题 1　用下列方程能表示一三象限的角平分线（如图 1）吗？

为什么？

① $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$，

② $|x|-|y|=0$，

③ $x-y=0$.

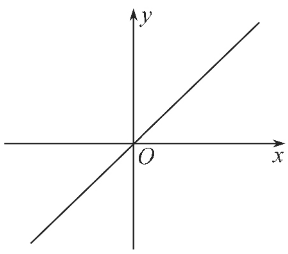
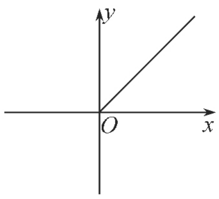


图 1

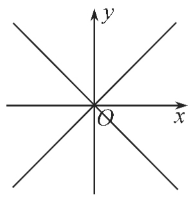
生 1：方程 ①、② 不能，方程 ③ 能.

追问：为什么？

生 1：方程 ① 等价于方程：$y=x(x\geqslant 0)$，对应的图像是如图 ① 所示的射线，比图 1 少了一部分，所以不行；方程 ② 等价于方程：$y=\pm x$，对应的图像是如图 ② 所示的两条直线，比图 1 多了一部分，所以不行；方程 ③ 对应的图像就是一三象限的角平分线.



①



②

师：很好，学生 1 通过图像的直观给出了判定. 请问以上图像的“多了一部分”或“少了一部分”能否用数学符号语言描述呢？

生 2：集合.

追问：怎样的集合？

生 2：点集.

师：太棒了！图 ① 中，射线上的点与方程 ① 的解有怎样的关系？

生 3：射线上的点的坐标是方程的解，点与方程的解一一对应.

师：若把直线上的点构成的集合记为 A，把以方程的解为坐标的点构成的集合记为 B. 请给出集合 A、B 的关系？

生 4：选择项 ① 是 $B\subseteq A$，选择项 ② 是 $A\subseteq B$，选择项 ③ 是 $A=B$.

师：能否再精准一点？

生 5：选择项 ① 是 $B\subsetneqq A$，选择项 ② 是 $A\subsetneqq B$，选择项 ③ 是 $A=B$.

追问：能否从“直线上的点和方程的解的对应关系”的角度，解释集合包含关系的具体含义？

生 5：选择项 ①：以方程 ① 的解为坐标的点全部在直线上，直线上存在点的坐标不是方程的解，比如 $(-1,-1)$；选择项 ②：直线上所有点的坐标都是方程 ② 的解，方程 ② 存在解的坐标对应的点不在直线上，比如 $(-1,1)$；选择项 ③：以方程 ③ 的解为坐标的点全部在直线上，直线上所有点的坐标都是方程 ③ 的解.

师：非常好，精准而全面. 现在，同学们能否归纳“方程能表示直线的条件”？

生 6：方程若能表示直线需满足两方面的要求：（1）以方程的解为坐标的点全部在直线上，（2）直线上所有点的坐标都是方程的解；可简记为两个方向的要求，即方程 → 直线，直线 → 方程.

（学生们小声讨论，频频点头 ……）

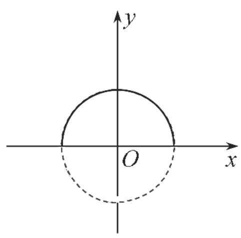
师：这位同学不仅归纳了“方程能表示直线的条件”，而且进行了提炼、简化，真不简单！此处应有掌声！

（教室内响起了热烈的掌声 ……）

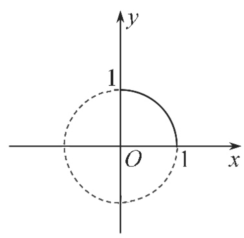
（2）画一画

问题 2　能画出方程 $x=\sqrt{1-y^2}(y\geqslant 0)$ 对应的曲线吗？

学生 7：（板演）图像如图 ③：



③



④

师：请你分析一下为什么是半圆？

学生 7：因为 $x=\sqrt{1-y^2}(y\geqslant 0)$，所以 $x^2+y^2=1(y\geqslant 0)$，故图像是半圆.

师：感觉好像对的（故意拉长语气）！再想想！

（其他学生眉头紧蹙，若有所思 ……）

生 7：哦（恍然大悟）！方程 $x=\sqrt{1-y^2}(y\geqslant 0)$ 隐含了“$x\geqslant 0$”这个条件，故它的等价形式是：$x^2+y^2=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$，所以方程对应的曲线应该是

第一象限的部分，如图 ④.

追问：再请你从“方程的解和圆弧上的点的对应关系”的角度，说说图 ③ 为什么不行？而图 ④ 又为什么行？

生 7：图 ③ 满足了“以方程的解为坐标的点都在圆弧上”，即“方程 → 圆弧”的满足；而不满足“圆弧上的点的坐标都是方程的解”，即“圆弧 → 方程”不满足；图 ④ 保证了“方程和圆弧”两个方向的满足.

（同学们纷纷点头表示认可……）

师：那现在同学们能归纳“圆弧能表示方程的条件”吗？

生 8：圆弧若能表示方程需满足两方面的要求：即“方程 → 圆弧，圆弧 → 方程”的双向满足.

设计意图　问题 1 是由曲线研究方程，问题 2 是由方程研究曲线. 这是解析几何中最基础也是最核心的两个问题，体现了“数”与“形”的统一. 通过这两个具体的、熟悉的问题让学生感知曲线与方程的对应关系，为后续的学习“设梯搭桥”，为概念的生成提供了迁移的“前验性知识”.

前苏联数学教育家斯托利亚尔言：“数学教学也是数学语言的教学”. 数学语言具有精准、简约、形式化等特点，具体分为符号语言、文字语言和图表语言. 问题 1 的探讨，让学生体验了由图形语言的直观感知，到集合语言的本质刻画，再到文字语言的精准表述的学习、转化过程，既培养了学生“用数学的语言表达现实世界”的能力，又培养了学生直观想象和数学抽象的核心素养.

2.2　合作探究，生成概念

（3）想一想

问题 3　根据以上 2 个问题，思考：

① 对给定曲线 C，如果用一个方程 $f(x,y)=0$ 表示，那么该方程应满足哪些条件？

② 对给定方程 $f(x,y)=0$，如果用一条曲线 C 表示，那么该曲线应满足哪些条件？

师：请大家先思考，然后相互讨论一下各自的想法.

（学生们立即进入了思考，随后进行了激烈的讨论……，差不多 5 分钟）

师：哪位同学来回答？

生 9：① 对给定曲线 C，如果用一个方程 $f(x,y)=0$ 表示，则方程应该满足两个条件：以方程的解为坐标的点全部在曲线上，曲线上点的坐标都是方程的解；② 对给定方程 $f(x,y)=0$，如果用一条曲线 C 表示，则曲线应该满足两个条件：以方程的解为坐标的点全部在曲线上，曲线上点的坐标都是方程的解.

师：很好！

投影概念：一般地，在直角坐标系中，如果某曲线 C 上的点与一个二元方程 $f(x,y)=0$ 的实数解建立了如下的关系：

（1）曲线上点的坐标都是这个方程的解；

（2）以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点.

那么，这个方程叫做曲线的方程，这条曲线叫做方程的曲线.

师：概念中的两个条件能少吗？

生 10：不能，缺一不可.

师：概念中的“都”能省略吗？

生 11：不能，“都”保证了所有的，无一例外.

师：若把曲线上的点构成的集合记为 A，把以方程的解为坐标的点构成的集合记为 B. 试说出条件（1），（2）对应的集合 A、B 的关系？

生众：条件（1）表示 $A\subseteq B$，条件（2）表示 $B\subseteq A$.

师：概念中条件（1），（2）同时成立，则表示（声音拉长）？

生众：$A=B$

师：所以方程 $f(x,y)=0$ 与曲线 C 是一一对应的. 一般地，曲线 C 的方程是 $f(x,y)=0$，也可说成曲线 $f(x,y)=0$.

设计意图　《普通高中数学课程标准》指出“高中数学课程应该返璞归真，努力揭示数学概念、法则、结论的发展过程和本质，要讲逻辑推理，更要讲道理，即应将数学视为培养学生理性思维能力的知识载体.”由于“曲线与方程”概念高度抽象的特点，教学中让学生经历了由具体到抽象、由特殊到一般的学习过程后，问题 3 的提出使得概念的生成“水到渠成”、“呼之欲出”；同时培养了学生抽象概括能力和创新精神.

2.3　学以致用，深化概念

例 1　判断下列命题是否正确，并说明理由.

（1）如果“曲线 C 上的点的坐标都是方程 $f(x,y)=0$ 的解”，那么“曲线 C 是方程 $f(x,y)=0$ 的曲线”.

(2) 若曲线 C 上的点的坐标都满足 $F(x,y)=0$,则满足方程 $F(x,y)=0$ 的点都在曲线上.

(3) 点 $A(3,0)$,$B(0,-3)$,$O(0,0)$ 分别是 $\triangle ABO$ 的三个顶点,则边 AB 的中线方程是 $y=-x$.

(4) 方程 $\frac{y-4}{x-3}=1$ 的曲线是直线.

设计意图　通过概念的辨析、熟悉情境中错误的鉴别,引发认知的冲突,在初步运用中逐步加深对概念本质的理解.

例 2　证明:与两条坐标轴的距离的积是常数 $k(k>0)$ 的点的轨迹方程是 $xy=\pm k$.

学生 12:(板演)设轨迹上的任意一点 $P(x,y)$,由题意知:$|x|\cdot|y|=k$,

化简得:$xy=\pm k$.

师:就这么简单?你们都同意?

(有的学生点头同意,有的同学摇头否认,有的同学一脸茫然)

师:请问,问题的目标是什么?

生众:证明曲线的轨迹方程是 $xy=\pm k$.

师:曲线方程的概念是什么?

(哦……,大部分学生会心地点点头,面露微笑)

师:请学生 12 继续上来完成证明!

(老师巡回、点拨、点评……)

师:通过这道题的解决,你有什么感悟?

生 13:证明曲线的方程的方法:① 设曲线上任意一点 (x_0,y_0),证明 $f(x_0,y_0)=0$;② 设 (x_0,y_0) 是方程的任意一组解,证明点 (x_0,y_0) 在曲线上.

生 14:以前在求解直线方程和圆方程时,我习惯性地只考虑"曲线 → 方程"的满足(学生 12 开始的做法),而忽略了"方程 → 曲线"的满足,这样的思维是不严谨的;特别像这道证明题,一定要注意逻辑的严谨性.

设计意图　数学是一门严谨的学科,它对逻辑推理能力的培养起着独特的作用,经过严格的训练,可以使人清晰、有条理地表达自己的思考过程,做到言之有理,落笔有据.正如加里宁所说"数学是思维的体操",通过本例让学生掌握用定义证明的方法,培养学生思维的严谨性,提升逻辑推理的数学素养.

2.4　随堂演练,当堂反馈

1. 若曲线 C 的方程为 $x^2-xy+2y+1=0$,则下列各点中,在曲线 C 上的点是(　　).

A. $(-1,2)$　　B. $(1,-2)$

C. $(2,-3)$　　D. $(3,6)$

2. 请在平面直角坐标系中画出下列方程对应的曲线.

(1) $x=\sqrt{y}$,　(2) $x=|y|$.

3. 写出下面曲线对应的方程.(图 2)

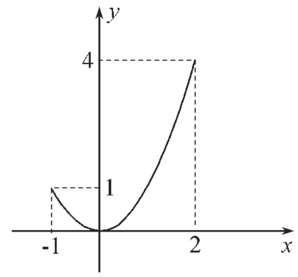


图 2

设计意图　数学离不开解题,但解题并不是教学的目的.解题是为了让学生在问题的引领下激发心智、驱动思想,促进数学思维的发展、数学能力的提升、数学素养的提高.在解题的每个环节,无论是解题策略的形成阶段还是类比、迁移阶段,都需要学生独立的体会和感悟,纸上来得终觉浅,绝知此事要躬行.

2.5　回顾提炼、课堂小结

师:通过本节课的学习,你有哪些收获?

学生回顾、讨论,老师点评后,总结如下:

(一) 知识方面:

(1) 曲线的方程和方程的曲线的概念.

(2) 方程的等价变形.

(3) 用定义证明的方法和步骤.

(二) 思想方法:

(1) 曲线方程中蕴含的"数形结合"的数学思想方法.

(2) 由特殊到一般、由具体到抽象的研究问题的方法.

设计意图　通过学生的回顾、小结,一方面把显性的重难点知识再次呈现,另一方面把隐性的数学思想方法归纳、提炼;让学生从更高的高度俯视本节课,让每一位学生学有所获.

作者简介　丁春梅(1982—),女,江苏省常州市第一中学,中学一级,主要从事教育教学工作.

田秀权(1979—),男,江苏省常州市第一中学,中学高级,主要从事教育教学工作.有多篇论文发表.