

高中数学可视化教学：原则、途径与策略^①

——基于 GeoGebra 平台

张志勇

(江苏省常州市第五中学 213001)

直击当下数学依然难教、难学的痛点,可视化无疑是一重要选项和可行策略.这自然得益于现代科学技术特别是计算机科学、人工智能的迅猛发展,为改进“一支笔一块黑板一张嘴”的教与学现状提供极大可能;而数学所以高冷,恰在于其固有的高度抽象概括性(难以被感官直接感知),使得学数学的人往往不知数学如何去意会,教数学的人往往不知数学如何去言传.于是,挖掘技术于数学的表征优势,建立“可见形式”与“抽象形式”之间的直接联系,使数学的关联性变得可见并且可操作,可以突破“意会”与“言传”间的交流障碍,为学生理解概念创设背景,为学生探索规律启发思路,为学生解决问题提供直观.

1 可视化与 GeoGebra

所谓可视化(Visualization),是指将抽象的事物、过程转化为图形图像等形象化、可看得见的呈现.数学可视化(Mathematics visualization),就是将抽象的数学学习对象(概念原理、结构关系、思想方法等)用可看见的表征形式(图形、图像、动画等)清楚直白的呈现出来,使人们对数学学习对象有一个形象、直观、整体的认识和理解^[1].如,对于 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$,我们固然可以应用等比数列求和或采用错位相减法加以证明,但若呈现图示的“无字证明”,恰可以引发“原来如此”的会心一笑.简而言之,可视化就是“看见不可见”.

应用丰富多样的视觉表征手段(图形、图像、动画等)和视觉认知辅助工具(思维导图、知识地

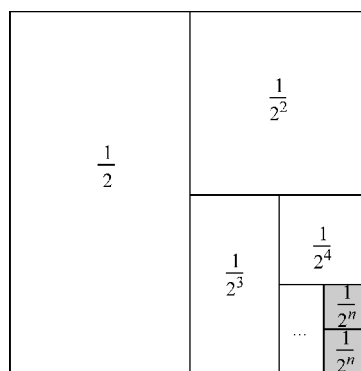


图 1 数学公式的可视化表达

图等),以形象直观的方式呈现数学对象的本质属性、基本特征及数学对象间的关系网络,构建新知识与已有知识网络间的多元联系“通道”,可以保证符合学生认知经验的教学内容经由相应的教学活动内化为学生认知结构,帮助学习者更好的理解数学、发现数学、建构数学.一图胜千文,可视化教学的关键在于如何以可视化技术创设直观情境,不仅需要沟通新旧知识间的内在联系,更重要的任务在于以可视引导思维、以互动交流思维.

让数学的关联性变得可见、可操作,离不开数学可视化技术这一“云梯”的支持. GeoGebra 作为一款集几何作图、代数运算和数据处理等于一体的动态数学学科软件,可以为我们带来更方便快捷的数学教学:通过图形与代数(方程或坐标等)的同步变化,使得对图形的研究更加精细和科学化,实现“形”(几何 Geometry)与“数”(代数 Algebra)的完美融合;计算代数系统和指令输入可提供更为丰富的教学素材、更为生动的动态演示过

^① 项目资助:江苏省教育科学“十二五”规划 2015 年度重点课题《高中数学可视化教学的实践研究(B-a/2015/02/010)》,江苏省教育科学“十二五”规划 2015 年度重点课题《基于核心素养的普通高中学校课程开发研究(B-a/2015/02/009)》.

程,如,直接在命令框里输入方程式、点坐标或其它命令来实现图形的更改,也可进行向量复数运算、函数的微分积分、方程不等式求解等各种代数运算;而代数区、工作表、运算区、3D绘图区、绘图区、绘图区II等多个模块区域间的关联互动,保证其可视化应用几乎覆盖整个高中数学教学领域。一句话,“懂得 GeoGebra,她就给你独到眼光,让你洞悉数学世界”。

2 可视化教学的实施原则

可视化教学的要义在于对抽象概念的具象化呈现,以启迪学习者认识数学本质特性、主动构建知识框架、激活探究思维意识,如何开展可视化教学,离不开一些基本原则的遵循。

2.1 信息组块原则:避免冗余效应

可视化教学依托视觉表征优势,借助于图像、影像和动画等视觉符号对数学对象进行有意义封装,相比文字符号等更具体、更直观、更富有表现力,可以在有限时间内获取尽可能多的数学信息(这也是“读图时代”产生的真实背景),当然过于繁杂的图象恰会引发视觉疲劳。如何降低认知负荷,一方面要注重可视化效果,如曲线的动与静、色彩的宁静与和谐、构图元素的疏密相间和错落有致等;更为重要的恰是对可视化内容进行“信息组块”设计,要结合具体内容的分析,将多元表征方式进行合理的调配组合^[3]。

如在探究导数几何意义的过程中(图2),几何操作区域的图象呈现,表格数据区域的代数数值显示,形成两个相互关联的“信息块”,有助于学习者实现从代数到几何的过渡、从动态到静态的转译,不仅可以认识“切线的存在性”,更可形成“局部以直代曲”的数学观念。

2.2 多元联系原则:促进深度学习

由于数学学习内容的复杂性,单一表征往往难以充分揭示数学本质,于是对问题不能做出适宜的表征、不能在多种表征之间进行转换,便是造成学生数学学习困难的一个重要原因。综合图形、符号、语言、情境等多种形式的表征,有利于学生加深对数学知识的理解、构建良好的知识结构、形成最优化的解题策略;当然表征系统间的转换与转译并不容易发生,要想发挥多元表征的优势,需要建立各种表征间的有意义联系,使得外在的数学符号系统内化为内在数学符号系统。

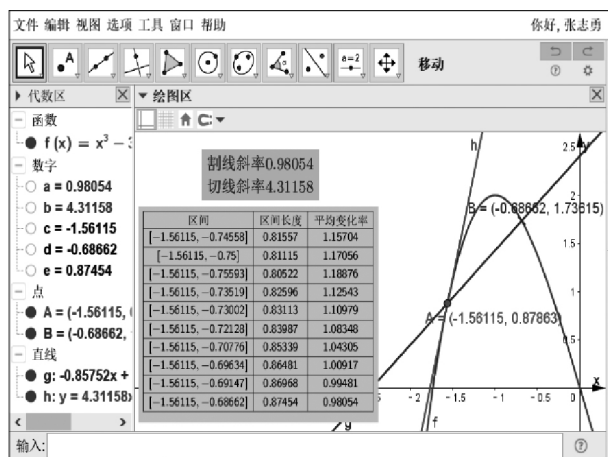


图2 导数的几何意义探究

如在对祖暅原理进行可视化呈现时(图3),3D绘图区的立体图形可帮助学生整体把握,平面视图中的数值刻画恰可让我们的观察细致入微,两者间的联系互动可有效推进“幂势相同,则积不容异”深度学习。

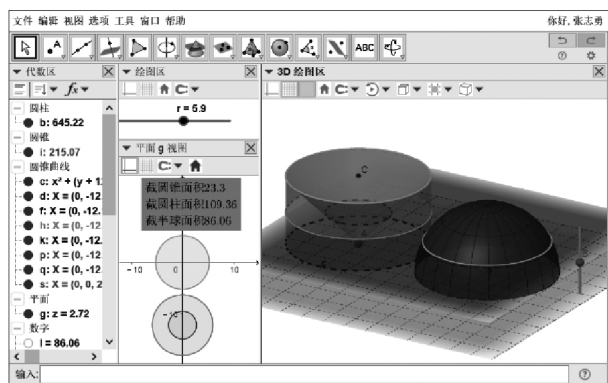


图3 祖暅原理的可视化演示

2.3 动态探究原则:推动思维深化

复杂的数形关系和多变的几何位置关系是数学学习的一大难点,因此需要构建动态联系的视觉化情境,让学生在动态演示中找寻规律。事实上,动态联系的表征,精细描绘了表征的信息元素与整体的关系,使信息元素的交互及其结构关系凸显,在引发学生选择性注意的同时,促进表征系统的相互转换与转译,实现思维的跳跃性和缜密性的完美结合。动态探究原则要求建立形与数的动态联系,在数学问题的直观模型的构建中探索问题解决的思路 and 方案,从数量与数量关系、图形与图形关系中抽象出数学概念及概念之间的关系。

系,从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构,核心素养正是在问题情境中借助问题解决的实践培育起来的.

3 可视化教学的实施途径

数学学习离不开概念生成、命题发现和问题解决,而可视化教学通过这三个途径的实施恰能体现信息组块、多元联系、动态探究原则的应用.

3.1 概念生成中的可视化

概念是数学思维方式建构或转变的基石,核心概念更是数学教学的重大关切.数学概念往往有多种表征方式,不同的表征将导致不同的思维方式,概念多元表征可以促进学生的多角度理解,在不同的表征系统中建立概念的不同表征形式,并在不同表征系统之间进行转换训练,可以强化学生对概念联系性的认识,建立概念不同表征间的广泛联系,并学会选择、使用与转化各种数学表征,这是有效使用概念解决复杂、综合问题的前提.

如高中阶段的任意角的三角函数,一方面要突破初中概念中已有的锐角三角函数的认知障碍(思维定势),同时还要构建与角的终边上任意一点的联系;于是创设图4所示的可视化实验情境,从任意角与锐角三角函数的冲突入手,在角的动态变化中形成以点的坐标来定义三角函数的基本思路,并通过坐标度量结果来考察验证定义的合理性和可行性,继而改变点在终边上的相对位置以求达成“用点来定义却与点的位置无关”的认同,而三角函数线的表征刻画恰可“晓之以理”.

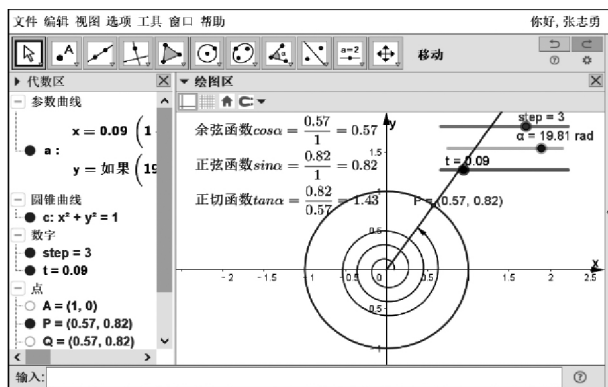


图4 三角函数的概念生成

从上例可以发现,数学概念的掌握要经过一个由生动的直观到抽象的思维,再从抽象的思维

到实际的应用的过程,甚至要有几个反复才能实现.借助概念的直观背景,对抽象概念进行可视化表征,用丰富的样例使概念获得“原型”支持,形成概念的“模式直观”,经历概念形成的“原始”过程,因概念的充分加工而保证理解的深刻.

3.2 命题发现中的可视化

数学命题是表示数学对象性质或关系的判断语句,其独特的“条件—结论”式语言结构,是一种逻辑刻画数学对象的形式或方法,将命题置于数学发生发展的背景下,有助于学生知晓数学的来龙去脉、数学思想的变迁原委.命题的学习过程就是命题的逻辑意义向个体心理意义转化的过程,以符号表征学习和概念学习为前提;于是需要“析理以辞,解体用图”,要对命题进行言语和意象双重编码,要尽可能编织成网络状,形成一定的结构图式,树立整体结构观,从而有利于知识的有序检索和综合融会贯通,这正是命题关联性特征的体现.

如,笔者从2016年四川卷20题的解法分析入手,借助GeoGebra揭示其清晰的几何直观、动态的变换方式和深刻的数学背景,并以仿射变换的方式,实现圆的几何性质在圆锥曲线中的自然引申推广,在试题源与流的探寻中构建了一个命题网络,在这个命题网络中,既有横向的类比推理(从圆的切割线定理探索圆锥曲线中的定值规律),也有纵向的归纳思考(从椭圆切割线定理、相交弦定理探索定值背后蕴涵的幂定理,整合得到圆锥曲线幂定理);既有从试题解读到圆中定理的联想,也有定向约束条件的猜测修正;既有强抽象(从幂定理到切割线定理),也有弱抽象(将椭圆幂、抛物线幂中的定向参照弱化得到圆锥曲线幂).这种高难度的数学探寻,离开可视化技术的支持显然是很难想象的,所谓“有图有真相”,技术在帮助我们“插上想象的翅膀”的同时,也在刻画数学发生、发展的完整过程中,促成学生完整的认知图式的形成.

3.3 问题解决中的可视化

问题解决(解题教学)是数学课堂教学的重要环节,一方面学生对数学概念的理解和掌握往往通过解题来表达和完善,另一方面数学问题也是展现数学方法和能力、锤炼数学思维的重要载体,而解题策略的获取、解题观点的提升、思维层次的

量极低的问题牵引的操作,被认为是探究的误区.

其次,以课本内容为基础,在学生最近发展区内适度扩展学习的边界,创设校本课程,不仅巩固了课本内容,也拓宽了学生的视野,提升了学习能力. 上述的四边形全等条件的探索就是三角形全等条件的探索方法的迁移,学生探究的过程及结果证明了我们的研究假设:学生可以完成四边形全等条件的探索. 在这个过程中,学生不仅加深了对三角形全等条件的整体理解,同时提升了学生探究的能力. 需要澄清的是,课程标准和考试大纲是针对国家课程的,地方课程和校本课程在学生学有余力及最近发展区内,是可以适度突破的.

第三,为教学整体设计带来了更多的可能,为学生系统思考提供了抓手. 前述的“三角形全等条件的探索”就是教材整体设计的示范,这样的学习不仅可以使学生系统掌握相关的知识技能,而且可以让学生亲身体验一下数学创造与发现的过程,以提高学生发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的能力及创新意识,这对于深化教育改革,全面落实核心素养培养目标,将具有重要的促进作用和十分重要的现实意义. 需要指出的是,并列结构的学习内容,“线性”、“并联”方式设计各有利弊,但从思维水平和学习能力的相应提升,以及建立良好的认知结构而言,后者利大于前者.

3 建议

国务院 2017 年 1 月颁布了《国家教育事业发展规划“十三五”规划》,明确提出将大力在全国推进信息技术与教育教学深度融合. 作为数学学科,欲形成“课堂用、经常用、普遍用”的信息化教学新常态,需要强化信息技术与数学教学融合的四个

意识:

第一,工具意识. 信息技术是教师教的工具,也是学生学的工具;是呈现、获取数学知识的便捷手段,也是探究、解决问题的有力工具.

第二,学习意识. 信息技术频繁迭代,共享、便捷、功能强大是方向,但作为教学手段也需要学习研磨和与时俱进. 选择易得、易学,突出数学本质的动态数学软件作为日常教与学的手段,是有效且持久开展信息技术与数学教学融合的基础.

第三,课程意识. 信息技术不仅带来的是教与学方式的改变,而且也带来了学习内容的改变,固守显见的考试内容而不顾学生核心素养培养的教学观是不可取的. 在技术极速变化的时代,作为教师应该借助信息技术,适度延拓已有的教学内容,开发校本课程.

第四,发展意识. 信息技术除了可以让学习知识技能变得更直观简单,而且可以提供数学实验的平台,促进学生探究意识和能力的提升. 因此,基于信息技术的探究学习,更需要教师从学生发展的角度,不仅是牵引学生爬上教师精心设计的脚手架操作,还需要从创设发现、提出问题的时机,以及体验分析问题的角度,经历解决问题的全过程.

参考文献

- [1]左晓明,田艳丽,负超. 基于 GeoGebra 的数学教学全过程优化研究[J]. 数学教育学报,2010(1):99-102
- [2]中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011 年版)[S]. 北京:北京师范大学出版社,2014:4
- [3]林群主编. 义务教育教科书数学八年级(上册)[M]. 北京:人民教育出版社,2013:6

(上接第 24 页)

情境得出规律后,需要有严格的数学证明跟进,我们需要在直观和抽象间、可视化的认知情境与纸笔运算、逻辑推理间建立一种适度的平衡,可视化教学提倡“返璞”但更要“归真”.

开展可视化教学,让学生有机会经历从具体到抽象的过程,可以既“看到”背后的“数据”、更“看透”其中的数学“内容”,而数学的眼光、数学的语言、数学的思维恰可蕴涵其中;可视化教学,不仅仅是技术和数学内容的整合,更是数学内容表

达传递方式的变革;不仅是解决问题,更是让学生将更多的精力集中在高层次的数学思考和问题解决上.

参考文献

- [1]唐慧荣. 中学数学可视化教学研究[D]. 金华:浙江师范大学,2010:6
- [2]杨凯. 中学数学可视化教学若干案例研究[D]. 上海:上海师范大学,2015:17
- [3]张维忠,唐慧荣. 可视化教学内容设计的五大原则[J]. 电化教育研究,2010(10):99-102