

常州市教育学会学业水平监测

高三数学（参考答案）

一、选择题：

1. A 2. D 3. C 4. B 5. D 6. B 7. A 8. C

二、选择题：

9. ACD 10. BCD 11. ABD 12. AC

三、填空题：

13. $\frac{4}{5}$ 14. $\frac{\sqrt{11}}{5}$ 15. $\frac{2}{3}, \sqrt{2}$ 16. 0

四、解答题：

17. 解：（1）2×2 列联表

性别	非球迷	球迷	合计
男	60	30	90
女	90	20	110
合计	150	50	200

..... 4 分

$$\text{（2）因为 } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200(60 \times 20 - 30 \times 90)^2}{90 \times 110 \times 150 \times 50} = \frac{200}{33} = 6\frac{2}{33} > 3.841,$$

所以，有 95% 的把握认为“球迷”与性别有关. 10 分

18. 解：（1）因为 $b \sin 2A + a \sin B = 0$ ，所以 $2b \sin A \cos A + a \sin B = 0$ ，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 得， $2ba \cos A + ab = 0$ 3 分

因为 $ab \neq 0$ ，所以 $2 \cos A + 1 = 0$ ，即 $\cos A = -\frac{1}{2}$ ，

又因为 $A \in (0, \pi)$ ，所以 $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ 5 分

$$\text{（2）因为 } AD \perp AC, \text{ 所以 } \angle CAD = \frac{\pi}{2}, \text{ 又因为 } \angle BAC = \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } \angle BAD = \frac{\pi}{6},$$

在直角 $\triangle ACD$ 中， $AC = 4$ ， $AD = 3$ ，所以 $CD = 5$ ，

所以 $\sin \angle ADB = \sin(\pi - \angle ADB) = \sin \angle ADC = \frac{4}{5}$ 7 分

在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理 $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$,

得 $BD = \frac{AB}{\sin \angle ADB} \times \sin \angle BAD = \frac{5}{4}c \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}c$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle BAC$,

得 $(5 + \frac{5}{8}c)^2 = 4^2 + c^2 - 8c \times (-\frac{1}{2})$ 10 分

解得 $c = \frac{24 + 32\sqrt{3}}{13}$ 或 $\frac{24 - 32\sqrt{3}}{13}$ (舍), 所以 $AB = \frac{24 + 32\sqrt{3}}{13}$ 12 分

19. 解: (1) 四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $BC \perp AB$ 1 分

又因为平面 $A_1B_1BA \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $A_1B_1BA \cap$ 平面 $ABCD = AB$,

$BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BC \perp$ 平面 A_1B_1BA 3 分

又因为 $AA_1 \subset$ 平面 A_1B_1BA , 所以 $BC \perp AA_1$ 4 分

同理可得 $DC \perp AA_1$.

又因为 $BC, CD \subset$ 平面 $ABCD$, $BC \cap CD = C$, 所以 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$ 6 分

(2) 在四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 由 (1) 知 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 AA_1 是四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的高, 设 $AA_1 = h$.

$AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $\angle BAD = 90^\circ$, 以 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}\}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系 $A - xyz$, 则点 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $B_1(1,0,h)$, $D(0,1,0)$, 从而 $\overrightarrow{BB_1} = (-1,0,h)$, $\overrightarrow{BD} = (-2,1,0)$.

设平面 BB_1D 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x + hz = 0, \\ -2x + y = 0, \end{cases}$

可得平面 BB_1D 的一个法向量为 $\vec{n} = (h, 2h, 1)$ 9 分

由 (1) 中 $BC \perp$ 平面 A_1B_1BA 知平面 ABB_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{BC} = (0,1,0)$,

所以 $|\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{BC} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC}|}{\|\vec{n}\| \|\overrightarrow{BC}\|} = \cos \frac{\pi}{6}$, 即 $\frac{2h}{\sqrt{5h^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

解得 $h = \sqrt{3}$, 则四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的高为 $\sqrt{3}$ 12 分

20. 解：（1）当 $n \geq 2$ 时，

$$b_n - b_{n-1} = \frac{a_n + \lambda}{2^n} - \frac{a_{n-1} + \lambda}{2^{n-1}} = \frac{a_n + \lambda - 2(a_{n-1} + \lambda)}{2^n} = \frac{a_n - 2a_{n-1} - \lambda}{2^n} = \frac{2^n - 1 - \lambda}{2^n} = 1 - \frac{\lambda + 1}{2^n},$$

当且仅当 $\lambda = -1$ 时， $b_n - b_{n-1} = 1$ 为常数，

所以，存在实数 $\lambda = -1$ ，使得 $\{b_n\}$ 是等差数列. 4 分

（2）由（1）中 $\{b_n\}$ 是公差为 1 的等差数列， $b_1 = \frac{a_1 - 1}{2} = 2$ ，所以 $b_n = n + 1$.

所以 $a_n = (n + 1) \cdot 2^n + 1$ 6 分

$$\begin{aligned} S_n &= (2 \times 2^1 + 1) + (3 \times 2^2 + 1) + (4 \times 2^3 + 1) + \cdots + [(n + 1) \cdot 2^n + 1] \\ &= 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \cdots + (n + 1) \cdot 2^n + n, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{令 } T_n = 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \cdots + (n + 1) \cdot 2^n,$$

$$\text{则 } 2T_n = 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 4 \times 2^4 + \cdots + (n + 1) \cdot 2^{n+1},$$

两式相减得，

$$-T_n = 2 \times 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - (n + 1) \cdot 2^{n+1} = 4 + \frac{2 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} - (n + 1) \cdot 2^{n+1} = -n \cdot 2^{n+1}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } T_n = n \cdot 2^{n+1},$$

$$\text{所以 } S_n = T_n + n = n(2^{n+1} + 1). \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解：（1）记“甲的成绩高于乙的成绩”为事件 A，从 5 次训练中随机选取 1 次，有 5 个等可能基本事件，其中甲的成绩高于乙的成绩的有 2 个，所以 $P(A) = \frac{2}{5}$ ，

答：“甲的成绩高于乙的成绩”的概率为 $\frac{2}{5}$ 3 分

（2）X 的所有可能取值为 0, 1, 2，

$$P(X = 0) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}, \quad P(X = 1) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}, \quad P(X = 2) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$\text{答： } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(3) 同学甲 5 次训练成绩的均值为 $\overline{x_{\text{甲}}} = \frac{1}{5}(86+92+87+89+86) = 88$,

方差为 $s_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{5}[(86-88)^2 + (92-88)^2 + (87-88)^2 + (89-88)^2 + (86-88)^2] = \frac{26}{5}$ 8 分

同学乙 5 次训练成绩的均值为 $\overline{x_{\text{乙}}} = \frac{1}{5}(90+86+89+88+87) = 88$,

方差为 $s_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{5}[(90-88)^2 + (86-88)^2 + (89-88)^2 + (88-88)^2 + (87-88)^2] = 2$ 10 分

因为 $\overline{x_{\text{甲}}} = \overline{x_{\text{乙}}}$, $s_{\text{甲}}^2 > s_{\text{乙}}^2$, 所以同学乙在选拔中更具竞争力. 12 分

22. 解 (1) $f'(x) = \frac{1-x}{e^{x-1}} = 0$, $x=1$, 列表如下,

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	增	极大值	减

所以, 当 $x=1$ 时, 函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=1$4 分

(2) 因为 $ae^b - be^a = e^a - e^b$,

两边同除以 e^{a+b} 得: $\frac{a+1}{e^a} = \frac{b+1}{e^b}$.

令 $a+1=x_1$, $b+1=x_2$, $x_1 < x_2$, 转化成 $\frac{x_1}{e^{x_1-1}} = \frac{x_2}{e^{x_2-1}}$5 分

由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 递增, 递减, 当 $(1, +\infty)$ $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) \leq 0$,

不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 令 $t = \frac{x_2}{x_1} > 1$, 则 $x_2 = tx_1$, 代入 $\frac{x_1}{e^{x_1-1}} = \frac{x_2}{e^{x_2-1}}$.

解得, $x_1 = \frac{\ln t}{t-1}$, $x_2 = \frac{t \ln t}{t-1}$.

令 $s(t) = \ln t - \frac{t-1}{\sqrt{t}}$, 有 $s'(t) = \frac{1}{t} - \frac{\sqrt{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}}(t-1)}{t} = \frac{2 - \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}}{2t} < 0$,

所以 $s(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 递减. 10 分

$s(t)_{\max} = s(1) = 0$, 因为 $t > 1$, 所以 $s(t) < 0$, 所以 $t(\ln t)^2 < (t-1)^2$,

所以 $x_1 x_2 < 1$, 即 $(a+1)(b+1) < 1$, 从而 $ab + a + b < 0$ 12 分