

促进学生深度学习的高中数学课堂教学策略研究^{*}

——基于数学高认知水平任务的视角

四川大学附属中学(610061) 罗文力 周祝光

摘要 数学教学任务按认知水平的高低可分为低认知水平类型的任务(记忆型、无联系的程序型)和高认知水平类型的任务(有联系的程序型、做数学).数学高认知水平教学任务的特征是情境性、整合性、表征多样性、深度探究性、适应性和概括性.制定数学高认知水平任务的策略是制定任务前关注学生的“最近发展区”;实施任务中适时提供“脚手架”;完成任务后给予评价和引导.

关键词 高认知;数学教学任务;特征

1 数学教学任务及其认知水平划分

“数学教学是通过影响学生的认知过程或思维来影响学生学习的”,由此,研究数学教与学的专家提出了数学任务这一概念,将它广泛地用于数学课堂研究,并形成了一种“解释学生怎样从教中学的诊断性理论”.数学任务是指将学生的注意力集中于某个数学内容相关的一系列问题或者一个复杂的数学活动^[2].

低认知水平类型的任务	记忆型	只是对以前的知识简单回忆或记住一些数学事实(定义、公式、法则、算法程序等)
	无联系的程序型	提供解决问题的公式、步骤、思路,与意义不相关
高认知水平类型的任务	有联系的程序型	注重选择解决问题的程序,与意义有关
	做数学	需要研究问题内在结构,探索数学概念、数学思想、过程和关系的本质

数学任务可以通过把学生的注意力引向特定的内容来影响学习者,任务不仅决定了学生学习什么,还决定了他们怎样思考、发展、理解和运用数学,数学思维来源于学生解决、完成一系列任务,而不是一步步跟着老师的教学.数学任务的特征有两个因素来描述.一是任务性能,另一个是任务的认知要求.所谓任务性能,指的是对发展学生思维、推理和使数学有意义等能力必须要考虑的那些重要方面;所谓任务的认知要求,指的是学生完成任务需要的思维类型或认知加

工水平.据此,根据学生完成数学任务认知水平的高低,数学任务从低到高可以分为以下水平^[3].

2 数学高认知水平教学任务的特征

2.1 数学高认知水平教学任务具有情境性的特征

徐利治先生指出,凡数学中确立的各种基本概念、定义、公理、定理、模型、推理法则、证明方法等都可称为“数学抽象物”^[5],而数学抽象物都是从现实情境或者纯数学情境进行数学抽象得到了,由此可知数学学习离不开情境,高认知水平数学教学任务的情境能使将情境与数学知识联系起来,使学生知其然更能知其所以然.同时没有情境的任务也难以让学生快速融入于任务的活动过程中.

2.2 数学高认知水平教学任务具有整合性的特征

所谓整合性特征,指构成数学高认知水平教学任务的材料或内容不但要是主体之外的人与事,而且所涉及的自然的或社会的境况,均是教科书重点内容与拓展内容整合后的产物.

数学高认知水平教学任务要将这节课教科书中的重点内容以及关键内容、拓展内容整合.如与相关的自然背景或社会背景材料、学科前沿问题或热点问题、学科现象或学科事实材料、一般思维方法或学科思想方法、学生问题或学生经验等整合.使其本节课应该学习的数学知识、数学方法,能在解决任务的土壤中自然孕育、生长,促使学生在第一次接触新知识时,就能把知识的产生与知识的运用环境、运用条件联系起来认识,就能把知识与方法联系起来认识,进而获得知识与知识、知识与运用情境、知识与思想方法的关联体验,提升学生的认知水平.

例如:求 $\{(n+1) \cdot 3^n\}$ 和 $\left\{\frac{3n-1}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和,并探寻求解过程中的共性.

2.3 数学高认知水平教学任务具有表征多样性的特征

数学内容的表征方式常为文字、符号、图形等,数学高认知水平教学任务应当能够用多种方式进行表征,或者任务的解决需要利用多种表征方式.对同一个数学内容用不同的

^{*}项目资助: 1. 中国教育学会未来教育家培养项目专项课题“高中数学探究式课堂教学中促进学生深度学习的评价研究”;(项目编号:18XM2814017ZB) 2. 四川省成都市 2018 年教育科研规划课题名师专项课题“高中数学探究式课堂教学中促进学生深度学习的策略研究”;(项目编号:CY2018M018) 3. 四川省成都市武侯区 2018 年教育科研规划课题“促进学生深度学习的高中数学课堂教学策略研究”;(项目编号:2018GH028)

方式表征,有利于学生深刻理解数学任务、理解相关数学知识、厘清知识之间的内部联系,从多个维度看清所研究问题的本质.例如在学习函数单调性概念一节课时,生成单调性概念的任务定为请任画一种函数图象,用数学语言描述其函数值随自变量变化的规律.

2.4 数学高认知水平教学任务具有深度探究性的特征

数学教学活动中不缺乏探究,真正缺乏的是能让学生能够进行深度探究、认识问题本质的探究.数学高认知水平教学任务的探究有别于低认知水平教学任务的肤浅而零散探究,它具有深度,能够让学生在深入探究的过程中理解数学概念、过程与关系.学生通过深度探究进行自我反思、自我修正,能逐步认识清楚所探究事物的本质.例如在立体几何“直线与平面位置关系”一课的教学中设置的高认知水平任务为描述直线相对于平面的倾斜程度.

2.5 数学高认知水平教学任务具有适应性的特征

高认知水平教学任务的适应性特征,即任务的设问(或任务呈现方式),既要适应学生问题解决的心理、知识和能力等学习基础,特别是学生已有的体验积淀或者缄默知识,又要适应课堂教学的时空条件.这里的适应,既指要适合,也指要有意识的利用.因而高认知水平教学任务的设问要适应学生的学习基础:是能引起所有学生兴趣的问题,是能使学生内心形成悬而未决又力图解决状态的问题;是能使每个学生都能在活动中发挥自己作用的问题.同时任务的长度不能过长,否则,很难为学生营造深入探究和复杂思考的环境.

2.6 数学高认知水平教学任务具有概括性的特征

数学研究的对象是抽象的形式化的思想材料,这决定了数学具有高度概括性;数学的发展历史也展示了数学理论的形成和发展也是一个不断概括的过程.因此概括是学习数学的一种基本思想方法.从这一角度看,概括在数学学习中成为了发展数学能力的关键,概括水平也成为数学学习水平的标志,所以数学高认知水平教学任务应当具有能进行概括的特征.例如在导数的学习中教师可设立的数学认知高水平的任务为:利用基本初等函数图像,探究函数的单调性与导数的关系.

3 制定数学高认知水平教学任务的策略

3.1 制定高认知水平教学任务前关注学生的“最近发展区”

精心设计的数学高认知水平教学任务应当立足学生的“最近发展区”,关注学生头脑中已有的缄默知识.如果任务难度太大,教师又缺乏及时必要的指引,这样不仅难以培养学生高水平的认知思维,同时也挫伤了学生学习数学的信心

与兴趣,最终得不偿失.

3.2 实施高认知水平教学任务中适时提供“脚手架”

为了防止将高认知水平教学任务简单化、常规化,教师设计的任务往往具备一定的难度.如果教师不能及时引导,学生往往难以自行探究出来,所以常常会出现教师往往代替学生分析问题,甚至把解决任务的过程与思路直接告诉学生,这样的做法只会让高认知水平任务下降为低认知水平教学任务,学生学的只是浅层次的思维和机械的程序性操作.因此在实施高认知水平教学任务中教师应当根据学生的实际探究情况适时提供“脚手架”,不应自问自答,而要准求有启发关键的问题,以促进学生的思维,从而保证了教学任务的高认知水平.

3.3 完成高认知水平教学任务后给予及时评价与引导

完成任务后教师应当及时对学生的成果进行评价与引导,高度重视学生的成果,从学生的成果中提炼数学知识与数学思想方法,引导学生建构良好的数学认知结构,发展积极的高水平数学思维,让学生充分体验成就感,培养学生数学学习的信心!

4 几个典型的教学片段实录与分析

本部分选择几个较为典型的数学教学案例,分析探讨如何设立和执行高认知水平数学教学任务.

4.1 案例一:探究导数的几何意义的教学活动片段

• 教师 A

教师活动 出示探究任务:借助高台跳水运动中的函数 $h(t) = -4.9t^2 + 6.5t + 10$ 的图象,自由选取图象上的一个定点 P 和一个动点 P_n ,作图探究当动点 P_n 沿曲线趋近于点 P 时,割线 PP_n 与割线 PP_n 斜率的变化趋势,阐述其探究过程.

学生活动 1 学生先独立作图并探究几何直观感受割线 PP_n 与割线 PP_n 斜率的变化趋势,同时小组讨论个人探究成果.

学生活动 2 成果交流,陈述小组的解决方法,对他人的思维过程进行评价和修正内化.

教师活动 引导并点评学生所展示的解决方案,同时让学生借助 GeoGebra 软件动态演示,进行几何直观验证.

学生活动 借助 GeoGebra 软件动态演示,通过放大图形,进行几何直观验证,体验三线(割线、切线、曲线)两率(割线斜率、曲线斜率)之间的关联.最后,师生共同得出导数的几何意义.

• 教师 B

教师活动 带领学生回顾导数定义的代数表达

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, 引导学生分析表达式的形式——斜率式.

学生活动 回顾导数定义的代数表达形式, 根据教师的引导发现与斜率的关系.

教师活动 借助几何画板向学生动态展示动点 P_n 沿曲线趋近于点 P 时, 割线 PP_n 与割线 PP_n 斜率的变化趋势, 并作出曲线在点 P 的切线 PT , 给出切线的定义: 当点 P_n 无限逼近点 P 时, 此时直线 PP_n 就是点 P 处的切线 PT . 同时请学生思考导数的几何意义.

学生活动 观察几何画板的动态演示, 理解切线的概念, 思考导数的几何意义.

教师活动 请学生回答, 并完善学生的答案, 展示导数的几何意义.

对比分析 教师 A 的任务是先让学生动手作图, 在探究变化趋势的活动中让学生体验到了无限逼近的思想, 通过 GeoGebra 软件动态演示, 放大图象, 初步体验了曲线、割线、切线之间的关联, 以及割线斜率、切线斜率与导数的关联. 在整个活动过程中学生的体验不是肤浅的记忆体验, 而是进行了复杂思考的数学活动, 体验了无限逼近的思想, 感受了以直代曲的思想, 研究了两率(割线斜率、曲线斜率)与导数内部的关联, 属于高认知水平类型的任务.

教师 B 的任务是回顾导数定义的代数形式, 借助几何画板动态展示逼近过程, 给出切线的概念和导数的几何意义, 在这个任务中, 学生的活动仅仅停留在了观察、记忆的水平, 没有为学生提供太大的思考过程以及研究问题内在结构的机会, 所以教师 B 的任务属于低认知水平类型的任务.

4.2 案例二: 极坐标的教学活动片段

• 教师 A

教师活动 出示探究任务: 用多种方法刻画校园中建筑的位置, 尝试创建新的坐标系.

学生活动 1 每个学生都独立思考独立探究, 正确地描述点的位置.

学生活动 2 继续由学生分析自己处理以上问题时, 是怎样确定出点的位置的, 小组讨论, 学生相互交流并总结方法, 创立一种新的坐标系.

教师活动 引导并点评学生所展示的解决方案, 在学生的方案基础上生成本节课的内容——极坐标.

• 教师 B

教师活动 上一节课我们学习了平面直角坐标系, 请同学们建立平面直角坐标系来描述图中点 A 、 B 的位置.

学生活动 建立直角坐标系并描述 A 、 B 的位置.

教师活动 请同学们思考生活中如何描述 A 点相对于 B 的位置呢?

学生活动 在 B 点的东南方向, 距离 B 点 3cm.

教师活动 这种用一个距离和一个角度表示点位置关系的方法叫做极坐标.

对比分析 教师 A 的任务是创设了一个较为开放生活情境, 情境是学生生活中熟悉的事物, 让学生提取相关的生活经验和缄默知识来自主解决、完成任务. 通过任务的完成学生体会到一个数学概念的创立过程. 意识到了本堂课数学知识的重要性, 体会到创新思维. 获得成功的喜悦, 这种成功带给学生对数学一生的热爱和对创新的渴望. 这种做数学的任务有利于培养学生的高水平认知思维.

教师 B 的任务是先回顾直角坐标系, 利用直角坐标系和点的相对位置关系、学生的生活经验引出极坐标的概念, 在这个任务中, 学生的活动仅仅停留在了观察、记忆、提取已有经验的水平, 经验没有重组; 教师没有为学生提供太大的思考过程以及研究问题内在结构的机会, 所以教师 B 的任务属于低认知水平类型的任务.

5 结束语

数学高认知水平教学任务的实施能够有利于促进学生的深度学习, 在任务解决过程中能够发展学生的数学核心素养. 同时能够让学生在解决问题的活动中积累数学基本活动经验.

参考文献

- [1] 袁志玲, 陆书环. 高认知水平数学教学任务的教学意义与启示 [J]. 数学教育学报, 2008, 17(6):37-40.
- [2] Stein M K, Grover B W, Henningsen M. Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms [J]. American Educational Research Journal, 1996, 33(2):455-488.
- [3] Smith M S, Stein M K. Selecting and Creating Mathematical Tasks: from Research to Practice[J]. Mathematics Teaching in the Middle School, 1998, 3(5):344-350.
- [4] 黄荣, 周超. 基于高认知水平教学视角的两节同课异构课 [J]. 中学数学月刊, 2015, (8):29-31.
- [5] 常磊, 鲍建生. 情境视角下的数学核心素养 [J]. 数学教育学报, 2017, 26(2):24-28.
- [6] 涂荣豹, 陈嫣. 数学学习中的概括 [J]. 数学教育学报, 2004, 13(1):17-22.
- [7] 何小亚. 构建良好数学认知结构的教学策略 [J]. 数学教育学报, 2002, 11(1):24-27.
- [8] 白改平, 韩龙淑, 褚海峰. 基于数学任务框架的“立体几何”课堂教学的个案分析 [J]. 数学通报, 2017, 56(8):31-34.