**重视建模过程 促进学生理解**

 **——“一元二次方程”的教学实录及反思**

常州市滨江中学

笔者有幸参加了区评优课比赛，并获得了一等奖，上课内容是苏科版教材九年级上册第一章第一节的“一元二次方程”，经历备课、上课与反思后感受颇深，现将教学实录整理成文，与同行交流.

**环节1. 建立方程模型——从生活现实到数学现实**

师：笛卡尔说过“一切问题都可以化为数学问题，一切数学问题都可以化为代数问题，一切代数问题都可以化为方程”，由此可见方程的重要地位，今天我们将学习一种新的方程.

（通过PPT展示问题情境）

问题情境：为创建新优质学校，XX中学准备对校园进行修建，使得学校设施更加齐全，计划对会议室购置两种桌子：一是长方形桌面，另一种是正方形的桌面

师：长方形桌面的面积为2m2，已知长为1.5米，求它的宽？

生1：2÷1.5

生2：也可以列方程，解：设宽为*x* m， 由题意得：1.5*x*=2

师：两位同学讲的非常好.若已知正方形桌面的面积是2m²，求它的边长？

生3：解：设边长为*x* m，由题意得：*x*²=2

生4：根据我们最近学习的平方根知识，知道，那么正方形的边长就是

师：两位同学分别从方程的角度和平方根的知识出发，都能很好的解决本题

为了让校园更加美观，我校计划在校园内修建一个矩形花圃，如图，矩形花圃一面靠墙，另外三面所围的栅栏的总长度是19 m，花圃的面积是24 m2，求花圃的长和宽.

生5：解：设花圃的宽CD是*x* m，则花圃的长BC是（19－2*x*）m，可得：*x*(19－2*x*)＝24．

为了体现校园文化氛围，我校计划在一面墙上挂上学生优秀作品.如图，长5米的梯子斜靠在墙上，梯子的底端与墙的距离比梯子的顶端到地面的距离多1m，设梯子的底端到墙面的距离是*x* m，怎样用方程来描述其中的数量关系？

生6：设梯子的底端到墙面的距离是*x* m，则梯子的顶端到地面的距离是（ *x -*1）m，则列方程为***x* 2＋（*x* －1）2** **＝25**

为了丰富学生知识，计划扩大我校图书馆，使得图书馆的藏书在两年内从5万册增加到9.8万册，平均每年增长的百分率是多少？(学生思考后仍一片安静)

师：我们一起来分析这道题，题中“两年内”指的是几年？

众生：两年，三年

师：好的.假设第一年是2021年，那么一年后就是2022年，两年后就是2023年.那么2022年藏书量怎样表示？

生7：解：设平均每年增长的百分率是*x*， 2022年藏书量是在2021年5万册的基础上再加上增加的5*x*万册，即（5＋5*x*）万册.

师：2023年的藏书量有多少册呢？

生8：2023年藏书量是在2022年（5＋5*x*）万册的基础上，再加上增加的5*x*万册.

师：此时是在2021年还是2022年的基础上增加的？

众生：2022年的基础上.

师：那么方程应该怎样列呢？

众生：（5＋5*x*）+（5＋5*x*）*x*万册，可以得出方程（5＋5*x*）+（5＋5*x*）*x* = 9.8

生9：这个方程看上去有点复杂，可以整理为（5＋5*x*）（1＋*x*）=5（1＋*x*）2 ，即5（1＋*x*）2 ＝9.8

师：大家说的都非常好！我们一起来看一下，2022年藏书（5＋5*x*）万册，其中（5＋5*x*）=5（1＋*x*），那么2023年藏书量就是在2022年的基础上再增加5（1＋*x*）*x*万册，则列方程为5（1＋*x*）+5（1＋*x*）*x*=9.8

众生：可以提出5（1＋*x*），则方程为5（1＋*x*）2 ＝9.8

师：通过上述5个问题，我们不难发现，有些问题既可以通过算术法来解决，也可以通过方程思想解决，但随着问题越来越复杂，我们发现算术法很难去解决我们的问题，从而都一致地选择了方程，这也充分体现了学习方程的重要性以及必要性.

**教学分析：**“数学教学活动必须建立在学生的认知发展水平和已有的知识经验上”，本环节通过设置学生熟悉的问题情境，让学生感悟“一元二次方程”的存在，并且在已有经验的帮助下对一元二次方程的认识逐渐清晰明了，让原本抽象的定义生动形象.

**环节2. 类比抽象，形成一元二次方程概念**

师：上述方程1.5*x*=2，*x*2＝2， *x*(19-2*x*)＝24， *x* 2 ＋（*x* －1 ）2 ＝25， 5（1 ＋*x* ）2 ＝9.8都是学过的方程吗？

众生：不是， 1.5*x*=2是一元一次方程.

师：对.上述方程从形式上看显得杂乱无章，我们可以先对它们进行整理，使得等号左边按照未知数的降幂排列，等号右边为0.比如：1.5x-2=0，其他四个方程你会整理吗？

生10：*x*2-2=0；-2*x*2+19x-24=0

生11：2*x*2-2x-24=0

生12： 5*x*2+10x-4.8=0

师：大家做的既快又准.请你再来观察这些方程 *x*2＝2，*x*(19－2*x*)＝24，*x* 2 ＋（*x* －1 ）2 ＝25，5（1 ＋*x* ）2 ＝9.8 有哪些共同的特征？（小组讨论交流）

生13：它们都只含有一个未知数，未知数的次数是2.

生14：未知数的次数不都是2次，应该是未知数的最高次数是2.

师：还有同学补充吗？到目前为止，我们学过整式方程和分式方程，那这些到底是什么方程呢？

众生：整式方程

生15：上述方程的共同特征有3个.1.只含有一个未知数；2. 未知数的最高次数是2；3. 整式方程.

师：我们把含有一个未知数，且未知数的次数为1的整式方程叫做一元一次方程.那么你可以类比一元一次方程的定义，给这类新的方程命名吗？

众生：一元二次方程

教师板书：像这样，只含有一个未知数(一元)，并且未知数的最高次数是2(二次)的整式方程叫做一元二次方程.

例1.辨析：判断下列方程是否为一元二次方程（是的打√，否的打×）.

(1)  (2)  (3) 

(4)  (5)  (6) 

(1-4)过程略

生16：（5）是一元二次方程

生17：我不同意，首先它是分式方程，所以不是一元二次方程.

师：说的非常好！我们要判断一个方程是否是一元二次方程，首先先看是不是整式方程，然后进行整理，看是否符合另外两个条件（一元和二次）.

生18：（6）不是一元二次方程，首先形式上是整式方程，再进行整理后，发现没有项了，不满足二次，所以不是一元二次方程.

师：通过上述辨析题，老师发现大家对于概念掌握的还是到位的.接下来请大家再来思考，既然黑板上的一元二次方程都有共同特征，那么能否用一个含字母的式子来表示它们呢？你能类比一元一次方程的一般式（*ax+b=*0(*a≠*0*，a，b*是常数)）写出一元二次方程的一般式吗？

生19：

生20：我不同意，有些方程中是有*x*项的，所以显然是错误的.

师：那你认为一般式是什么呢？

生21：(*a、b、c*为常数且*a* ≠0).比如*x*2-2=0，可以把它补成*x*2+0x-2=0（如图），这样就能用一般式来表示了.

师：我认为他讲的非常细致，通过他的讲述，我们能够清晰看出一元二次方程的一般式了.我们发现等号左边是一个二次三项式，你还记得各部分的名称吗？

生22：*ax 2* 叫二次项，*a*叫二次项系数*；bx*叫一次项*，b*叫一次项系数*；c*常数项

师：这些名称在一元二次方程中依然是适用的，但写的时候一定要带上前面的符合.接下来我们一起来说一说黑板上五个方程的各部分名称吧（过程略）.

师：有同学认为一般式中*a* ≠0，你能说说为什么吗？

生23：如果*a* =0，那么方程中就没有二次项了，也就不满足定义中的二次.

师：你说的非常准确！既然*a* ≠0，那么*b、c*有可能为0吗？

生24：可以，如果$b=0，一般式为ax²+c=0$ ，如果$c=0，一般式为ax²+bx=0$ .

生25：我认为b和c还可以同时为0，则一般式就为$ax²=0$.

师：你们总结的非常全面.以上三种情况就是一般式中的三种特殊形式.值得我们注意的是：方程化为一般式后才能确定二次项、一次项、常数项.

例2.将下列方程化为一般形式，并分别指出它们的二次项、一次项和常数项及它们的系数

(1)  (2) 

学生板书，并由学生讲解（过程略）

**教学分析：**上一环节中，学生从实际问题中感悟一元二次方程的存在，但是由于学生抽象能力的欠缺，还不能直接给出定义，因此为了让学生由浅入深的感悟概念，教师首先设置了3个层层递进的问题，让原本抽象的概念具体化.再引导学生将文字语言数学化，用好学生意外生成的资源，激发学生的学习兴趣.

**环节3. 一元二次方程的简单应用**

问题1：小组组长写一个一元二次方程，其他组员指出它的二次项、一次项和常数项及它们的系数（教师找出典型资源，全班共同说出它的二次项、一次项和常数项及它们的系数）.

问题2：按要求写一元二次方程

1、二次项系数为-7，一次项系数为5，常数项为1

2、二次项系数为3，一次项系数为2

问题3. 已知关于*x*的方程，

（1）它是一元二次方程，求*k*的值； （2）它是一元一次方程，求*k*的值

问题4.用方程描述下列问题中数量之间的相等关系

(1) 一个正方体的表面积是150cm².设这个正方体的棱长为*x* cm，可得方程

(2) 两个连续奇数的积为323，设其中的一个奇数为*x*，可得方程

(3) 由于疫情原因，某口罩生产厂生产的口罩1月份平均日产量为20000，1月底因突然爆发新冠肺炎疫情，市场对口罩需求量大增，为满足市场需求，工厂决定从2月份起扩大产能，3月份平均日产量达到24200个.设口罩日产量的月平均增长率为为*x*，可得方程

(4)书法是中国及深受中国文化影响过的周边国家和地区特有的一种文字美的艺术表现形式.某地区有*x*名书法爱好者，他们组建了一个微信群方便学习交流，若每个好友都分别给其他好友发了一条消息，这样一共产生了420条消息，可得方程

拓展： 猜想（1）的解（学生回答，过程略）

**教学分析：**本环节是考查学生新知识的接受程度，同时也是对新知识的延伸.学生在思考的过程中再次感受和体会一元二次方程的客观存在和形成过程，较好地发展了学生的推理能力和模型思想.对方程的解的猜想，是对知识的展望，为后续学习一元二次方程的解作铺垫，也是学生认知能力不断完善的过程.

**环节4. 课堂小结**

从现实生活情境中抽象出数学问题，类比一元一次方程，定义了一元二次方程，经历了数学建模的过程，加深了对定义的认识，提炼了数学思想方法，最后又将一元二次方程回归现实生活.处处体现了数学从生活中来，最终回到生活中去.

**教学反思**

**1．情境引入，积极思考，感悟数学知识的本质属性**

一元二次方程是指只含有一个未知数(一元)，并且未知数的最高次数是2(二次)的整式方程，学生只要抓住三个重要特征“一元、二次和整式方程”就能判断一个方程是否为一元二次方程，但是抽象的一元二次方程从何而来？有何用？怎样建模？这就是一元二次方程的内涵.为了让学生感知数学知识的本质，我们用“数学的眼光从现实情境中抽象出数学问题—用数学思维观点解释问题—转化为数学符号语言（一般式）--形成知识体系的环节”[1]呈现概念.在获得概念的同时，让学生经历思考的过程，帮助学生积累直接的数学活动经验，提高学生的数学抽象能力和逻辑推理能力.

**2．问题驱动，合理建模，体会数学知识的形成过程**

情景问题解决后，教师提出“你能找出上述方程的共同特征吗？”，学生在已有的数学经验的基础上，类比一元一次方程的特征，很快就能找出共同特征，虽然可能说不全面，但是教师引导学生一元一次方程，二元一次方程都是整式方程，学生自然就会找到第三特征.由学生根据特征总结定义，教师板书.紧接着教师又设置了问题“你能找到上述方程的一般式（符号语言）吗？”，由小组探究得出二元一次方程的一般式.在此过程中，学生可能会出错，但是教师并不急于给出一般式，而是让学生自己来纠错，发现第一个方程*x*2-2=0显然不能用来表示，经历错误之后，学生能快速得出一般式了.教学过程中，教师将学生放在主体地位，借助问题驱动，引导学生充分经历推理和归纳的过程，培养学生的建模能力.

**3．注重抽象，迁移应用，促进学生探究能力的提升**

很多教师在讲一元二次方程这节课时，大多是给出一系列方程，直接告诉学生一元二次方程的定义和一般式，再强化练习.这就导致后续学生在学习二次函数，三角函数时总是似懂非懂，究其根源是没有注重培养学生的抽象能力.本节课从问题情境到课堂小结，问题设置层层递进，鼓励学生积极思考，从而抽象出一元二次方程的定义和一般式，再通过习题训练，突出知识的应用和概念的深化，提高学生的思辨力，大大提高了学生的数学探究能力.

**参考文献：**

[1] 吴海宁. 反比例函数第（1）课时[J]. 中学数学教学参考（中旬）2018（7）：2-5.