HPM视域下的高中数学教学策略探析

米秀旭（江苏省清江中学）

摘　要：HPM作为一门学科，它的价值主要体现在数学史为数学教学改革提供重要借鉴。本文基于HPM进行了椭圆定义的探究教学。

关键词：HPM；数学教育；教学价值；椭圆定义

文章编号：1002-2171(2021)5-0018-04

1972年国际数学教育大会成立了数学史与数学教学关系国际研究小组，标志着数学史与数学教育关系作为一个学术研究领域（我们也称之为HPM）出现在公众面前。公元前4世纪，古希腊教育家欧德摩斯开始系统地研究数学的历史，他著有《算术史》《几何史》《天文学史》。18世纪，法国著名数学史学家蒙蒂克拉尝试描绘人类文明的发展史，于1758年出版了《数学史》，此书成为历史上第一部数学史经典著作。德国数学史学家康托1880年出版的《数学史讲义》，成为当时最具有影响力的数学史专著，对数学史学科的建立起着极其重要的作用。1904年在德国海德堡召开的第三届国际数学家大会上，美国著名数学史学家和数学教育学家史密斯等提出数学史教学的必要性，认为在公众教育中应该予以重视和完善。

法国数学家泰尔凯、英国数学家德摩根等在19世纪初就开始研究数学史对数学教育的意义。20世纪初，欧美大批数学教育家，如卡约黎、庞加莱、史密斯等都倡导数学史要应用到数学教育中。20世纪70年代，HPM正式成为独立的学科被研究和教学，与此同时，我国各大高校纷纷开始重视HPM对教学的指导意义，部分中学教师开始尝试应用数学史料来丰富课堂教学。

1　HPM的学科价值

数学史展现了数学知识发现发展的全过程，体现了人们在此研究中遇到的困难和挫折，以及如何解决这些难题的过程。使后人可以从中汲取研究方法和策略，学会用数学的眼光观察世界，用数学语言描述世界，用数学的方法解释世界，获取最佳的教育教学方法，这也正是数学史能成为一门学科的主要原因[1]。笔者认为，HPM的研究意义可以归纳为以下两点：

第一，数学史为数学教学改革发展提供重要的素材和经验。若要研究数学学科的教育改革问题，就不可不知道几何与代数是如何演变发展的，数学知识产生、发展的历程及方式；若要理解现今提倡的教育教学策略，就不可不理解诸如函数的内涵及其表现形式，如何使教学更加流畅自然，采取怎样的教学方式方法才能使学生更易于理解和接受，进而实现数学知识的融会贯通。具体地，若要将微积分引入高中数学教学中，就必须知道微积分产生的来龙去脉，从历史角度和现实应用角度使学生明确微积分是解决瞬时变化率的有力工具，可以有效解释很多物理现象，用它可以研究许多非初等函数的性质及图像变换等问题。然而，在如今的教育研究中，许多教师

似乎已经忽略了数学史的存在，仅仅是教数学，而忽视了数学史对教学的借鉴意义和对教学活动的指导意义。

第二，学生学习知识时遇到的困难和疑惑，数学家们或许也曾遇到，他们解决这些问题的方法和研究策略同样可以成为教学素材。在课堂教学中，当学生遇到疑问或者很难解决问题时，教师引入数学史料，使学生体会到自己的困惑也是伟大的数学家们遇到的问题，这样也从侧面帮助学生树立了自信心，激发了他们学习数学的热情和好奇心。

比如，在苏教版高中数学教材中，分数指数幂作为指数函数学习的预备知识，从把$\sqrt[3]{2}$表示为 2 的 m 次幂出发，首先由 2 的任意整数次幂都是有理数判断$\sqrt[3]{2}$是一个无理数，进而指出，必须将指数的范围扩大，才有可能把$\sqrt[3]{2}$表示为 2^m 的形式。随后规定 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$（$a>0$，$m$，$n$ 均为正整数）。

虽然教材编写者的意图是说明分数指数幂的合理性，但是其出发点是“$\sqrt[3]{2}$表示为 2 的 m 次幂”，而这个出发点本身并不自然。如果按照教材的编写顺序应用讲授式法教学，可能学生无法理解这种规定的合理性和针对性，只是单纯地学习数学知识，不能从中理解其要义，很难明确“用数学眼光观察世界，用数学语言描述世界，用数学方法解释世界”的内涵。况且，这样的教育教学方式似乎与“培养学生必备的学科素养”背道而驰。

为此，从数学史中寻找相应问题的解决路径，结合新课程标准，构建适当的发现教学法，帮助学生更加自然、顺畅地引入和发现知识，更好地理解分数指数幂规定的合理性和自然性。笔者拟定的教学目标如下：

（1）了解根式的概念、方根的概念及二者之间的关系，理解分数指数幂的概念，掌握有理数指数幂的运算性质；

（2）能将方根转化成幂的形式；

（3）在本节知识的学习与运用中，要注意培养学生分析、观察、计算的能力，注重类比思想的应用，进一步培养学生合作学习的方法，体验学习数学的乐趣。

为此，笔者引入如下数学史材料，使学生“穿越历史”，领略数学家的风采。

（1）14 世纪法国数学家奥雷姆在其著作《比列算法》一书中，分别用$\boxed{\frac{1}{2}\frac{p}{2}}$和$\boxed{\frac{1}{4}\frac{p}{2}\frac{1}{2}}$来表示$\sqrt{2}$和$\sqrt[4]{2\frac{1}{2}}$；

（2）16 世纪德国数学家施蒂费尔在其著作《整数算术》中将指数从非负整数推广到负整数，建立了指数和幂之间的对应关系；

（3）17 世纪英国数学家沃利斯在《无穷算术》一书中给出了负指数幂和分数指数幂的运算，从而将指数幂推广到任意有理数指数幂。

（4）18 世纪，欧拉在《代数学基础》一书中用类比的方法来引入分数指数幂，并能考虑更高次方根。

本文笔者利用一个简图表示指数幂的发展历程：

$$\boxed{\frac{1}{4}\frac{p}{2}\frac{1}{2}}\left(\sqrt[4]{2\frac{1}{2}}\right)\Rightarrow\left(2\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4}\Rightarrow\left(2\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2\frac{1}{2}}.$$

从上面的分析不难看出，HPM 无论对于教育者还是学习者都具有非常重要的意义。数学史为教学改革和知识传授提供了不可或缺的可供借鉴的实施策略，为学生的学习提供了必要的素材和探究知识的路径。

2 HPM 对数学教学的价值

HPM 用历史轶事点缀枯燥的数学知识传授和问题解决，帮助学生树立坚毅的治学素养，增强学习的积极性和兴趣。教师可以让学生感受到原来数学也是很有趣味的，也是很美的学科，有诗情画意，有柳暗花明。

第一，从专业知识角度看，数学史让数学变得富有情趣，让教学变得人性化。

例如，中学数学教学中，概念教学所占的比重较大，其中负数、无理数、数轴、函数、导数等，都有其源头，概念教学如果能从概念产生的源头出发，探究背

景，则对教学有很好的借鉴价值[2]。苏教版高中数学教材中“数系的扩充和复数的概念”一节是这样引入虚数 i 的：为了解决方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内的解的问题，设想引入一个新数 i，使得 i 是方程 $x^2+1=0$ 的根，即使 $i^2=-1$，再把这个新数添加到实数集中，得到了一个新的数集，记为 $\mathbf{C}$，这样，方程 $x^2+1=0$ 在 $\boldsymbol{C}$ 中就有解 $x=\mathrm{i}$。事实上，教材上虚数的引入方式全然不同于历史上虚数的诞生过程。意大利数学家卡丹提出了如下问题：将 10 分成两部分，使其乘积为 40。他将 10 分成 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$，得到 $(5+\sqrt{-15})\times(5-\sqrt{-15})=40$，可是在实数范围内，$5+\sqrt{-15}$ 是没有意义的，这样的数字并不能在纯负数情形中进行运算。这是数学史上第一个使用负数平方根的人，但是他显然并不理解这个数。之后意大利数学家邦贝利对三次方程的解法进行探讨，给出了“负数平方根”的运算法则：$(+\sqrt{-1})\cdot(+\sqrt{-1})=-1$，$(+\sqrt{-1})\cdot(-\sqrt{-1})=+1$，$(-\sqrt{-1})\cdot(-\sqrt{-1})=-1$。

笛卡尔在《几何学》一书中为“负数平方根”取了一个“消极”的名字——“虚数”，至此，虚数开始进入数学家的视野。

第二，从教学内容看，数学史提供了新课引入的话题，为数学教学改革提供借鉴。

数学史是自然的、科学的教学方法（发生教学法）的基础，它提供了引导学生“发现”新概念的方法。教师可以从数学史中汲取经验，获取最佳的教学方法，数学史丰富和活跃了教师的课堂教学。

例如，勾股定理最早可能是在等腰直角三角形中被发现的（史称毕达哥拉斯从地砖中发现勾股定理），如图 1 所示，两腰上的正方形各含四个小等腰直角三角形，而斜边上的正方形含有八个这样的三角形。

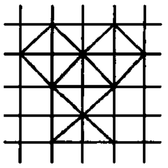
图 1

再如，以负数为例，当学生了解到负数的概念被人们接受、使用和理解经历了漫长的时间，学生就能体会到抽象和难懂的新概念是需要细细品味的。我们现在看到的习以为常的数学概念是前人花费了大量时间研究整理出来的精华。

3 HPM 视域下椭圆的定义探究

历史上，古希腊人先从圆柱或圆锥被平面截得的截口上发现了椭圆。公元前 3 世纪，阿波罗尼斯创作的经典巨著《圆锥曲线论》，可以说代表了当时希腊几何的最高水平。直到 17 世纪帕斯卡和笛卡尔的研究才有了新的突破。阿波罗尼斯写的这本书被后世译者称为“大几何学家”，这本书中给出了“椭圆的焦半径之和等于常数”这一性质。公元 6 世纪，数学家安提慕斯利用该性质给出了椭圆的“两钉一线”画法（今称“园艺师画法”）。直到 1822 年，比利时数学家旦德林利用圆锥的两个内切球，推理出圆柱面的截面是椭圆的定义[3]。

苏教版高中数学教材中，“椭圆及其标准方程”一节先直接给出了椭圆的画法，再给出椭圆的定义。调查表明，学生对此心存疑惑：椭圆是如何产生的？为什么定点是 2 个？为什么是距离之和而不是距离之积等？这些疑惑在教学中往往容易被教师忽略了。为此，笔者总结整理出如表 1 所示的椭圆概念的发展史，供学生参考。

表 1 椭圆概念的发展

定义编号	定义时间	定义者	书名	椭圆的概念界定
定义 1	公元前 3 世纪	阿波罗尼斯	《圆锥曲线论》	椭圆是一个圆锥与不过其顶点且与所有母线交于同一叶上的一个平面相截而得到的平面曲线
定义 2	公元前 3 世纪	欧几里得	《几何原本》	平面上到一个定点的距离与到一条定直线距离之比等于常数（小于 1）的点的轨迹是椭圆
	4 世纪	帕波斯	《数学汇编》	

续表

定义编号	定义时间	定义者	书名	椭圆的概念界定
定义 3	17 世纪	洛必达	《圆锥曲线分析》	平面上到两个定点的距离之和为定值的点的轨迹是椭圆
定义 4	20 世纪	Hansen	《中国数学教学》	椭圆是圆沿任意直径方向均匀压缩后得到的曲线

为了解决学生的这些疑惑，笔者设计了如下数学实验活动，帮助学生理解椭圆的定义。用平行光束照射球的过程中，球在平面上出现的轮廓是什么？

平行光束可以看成是一个与球相切的圆柱面，这时，影子的椭圆形轮廓可以看成圆柱面与平面的交线，如图 2。在平面中的椭圆轮廓上，动点 P 运动到哪里，线段 PQ 与线段 PF 的长度始终相等，而线段 PQ 是圆柱面上的平行线，研究起来比较方便。为了更直观地研究线段 PQ 长度的变化规律，可以把圆柱面竖直放置如图 3。

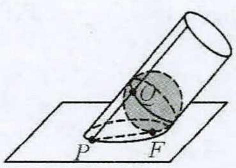

图 2

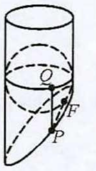

图 3

在上述实验中，球在斜射阳光的照射下，影子是椭圆这个事实学生是认同的，但从中抽象出旦德林双球模型学生很难想到。我们知道，球与地面的切点就是椭圆的焦点，在本节课中，这个切点至关重要。为了更好地理解这个切点的作用，应将圆柱竖直起来，凸显切点的位置。通过对竖直的圆柱面与球面相切关系的探究，我们可以知道图 4 中 PQ 与 PF 的距离之和始终不变。为帮助学生找到另一个切点（焦点），根据圆柱面和球面的对称性，自然而然地想到给下方补一个圆柱面和一个对称的球面，如图 5。

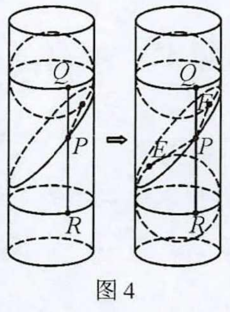

图 4

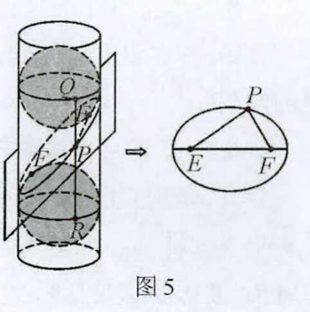

图 5

这时，学生不难发现，两个球面分别和椭圆轮廓相切于 E，F 两点，并且有 $PF=PQ$，$PE=PR$。

又因为 $PQ+PR=QR$（定值），所以 $PF+PE=QR$（定值）。

这个性质对椭圆上任意一点 P 都是成立的。旦德林双球模型用了立体几何的方法，而教材上呈现的是椭圆的平面画法。椭圆毕竟是平面图形，因此有必要将二者统一起来，有必要证实一下任意椭圆都满足轨迹定义。基于这个分析，笔者先利用“几何画板”将圆柱面上的截面直观图通过一个动态的变化变成平面图形；再在平面图形上制作一个动画，通过度量工具证实椭圆上一点到两定点的距离之和是定值这个事实，这就实现了旦德林双球实验和教材内容的统一；最后通过改变截面的倾斜角度，得到形状不同的椭圆，再重复上述动态的度量过程，证实了椭圆定义的普适性。

4 结论

教育家第斯多慧说：“一个不称职的教师强迫学生接受真知，一个优秀的教师则教学生主动寻求真知。”《普通高中数学课程标准（2017 年版）》也指出，“教学要体现数学知识的发生发展过程，促进学生的自主探索。”素养的培养并非是一朝一夕就能实现的，它要求社会、学校和家庭齐心协力，经过长期不懈的努力才能有所收获。

在此，希望数学教师能深刻地认识到数学文化的功能，并能采取一些切实有效的措施，将数学文化与数学教学巧妙的融合，使学生能够在学习生动有趣的数学史的过程中，提高自己的综合学科素养。

参考文献：

[1] 燕学敏. 数学史融入数学教育的有效途径与实施建议[J]. 数学通报，2009，48(8)：22-25.

[2] 汪晓勤. HPM 视角下的二元一次方程组概念的教学设计[J]. 中学数学教学参考（下半月），2007(5)：48-51.

[3] 汪晓勤. HPM 视角下的椭圆概念教学的意义[J]. 中学数学月刊，2012(4)：57-60.