从古希腊几何难题引出的数学问题①

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院 200062）

1 引言

随着HPM视角下的数学教学实践的不断开展和教学案例的不断开发，越来越多的数学教师开始关注HPM，并希望通过HPM来改善自己的课堂教学．要在课堂中运用数学史，教师需要处理数学(M)、历史(H)和教育(P)两两之间的关系，然而，这并非易事．教师所遇到的障碍主要有：

•历史资源匮乏．对于没有受过数学史专业训练的大多数教师而言，史料的获取并非易事，史料的真伪也无法判断．俗话说得好："巧妇难为无米之炊"，一个教师即使很认同HPM的教学理念，如果没有合适的素材，HPM视角下的数学教学就是一句空话．所以，笔者在一些论著中多次强调教育取向的历史研究的重要性[1][2].

•运用方式单一．课堂上运用数学史的方式有附加式、复制式、顺应式和重构式四种，而有些教师往往误以为讲一个数学家的故事或者用一道古代数学问题，就是HPM的全部了．实际上，讲故事属于附加式，运用古代数学问题属于复制式．如果教师仅仅是讲了点故事，他的课还不能称为"HPM的视角"；而"原汁原味"的数学史材料往往并不适合于课堂教学，需要教师对其进行裁剪、加工、改编、拓展，即采用顺应式．

另一方面，根据数学史料编制而成的高考题，引发了人们对"基于数学史的问题提出"这一课题的浓厚兴趣．笔者在文[3]中将"基于数学史的问题提出"策略分成了复制式、情境式、条件式、目标式、对称式、链接式和自由式七类，并对每一类方式作了界定．除了复制式外，其他六类策略都属于顺应式．可以说，根据数学史料编制数学问题，是一线教师学习和掌握顺应式的主要途径．

鉴于此，本文从古希腊数学家解决三等分角和倍立方问题的若干方法出发，运用"基于数学史料的问题提出"的策略，编制一系列数学问题，以期为HPM视角下的高中数学教学以及教育取向的数学史研究提供参考．

2 从梅内克缪斯螺线中产生的问题

众所周知，化圆为方、三等分角和倍立方是古希腊三大几何难题．尽管尺规作图的尝试都以失败而告终，但古希腊数学家找到了其他各种各样的方法，深刻地影响了几何学的发展．公元前5世纪，希波克拉底(Hipporates，471B. C.? — 410 B. C.?)将倍立方问题(作一个立方体使其体积等于已知立方体的两倍)归结为求两条已知线段的比例中项问题：已知长为a的线段，要求长为x和y的线段，使得

$$a:x=x:y=y:2a,$$

这个转化为后来的数学家指明了方向．为了解决两个比例中项问题，公元前4世纪，柏拉图学派数学家梅内克缪斯(Menaechmus，380B. C. — 320 B. C.)发现了三种圆锥曲线，从而开辟了数学的新天地，具有划时代的意义．

梅内克缪斯的第一种方法利用了抛物线和双曲线的交点[4]．为了便于阅读，我们采用今日数学语言来描述梅氏的方法．如图1，已知$OA=2OB=2a$，作以O为顶点，OM为对称轴、OB为通径的抛物线$x^2=ay$和以点O为心、OM和ON为渐近线的双曲线$xy=2a^2$，其交点确定了OA和OB之间的两个比例中项$OM=\sqrt[3]{2}a$和$ON=$

① "上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地"之数学教育教学研究基地项目"数学课程与教学中如何落实立德树人研究"(A8)系列论文之一．

$\sqrt[3]{4}a$.

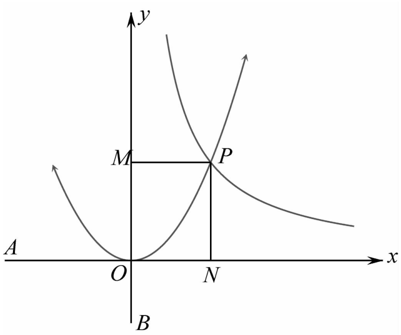


图 1　利用抛物线和双曲线交点来解倍立方问题

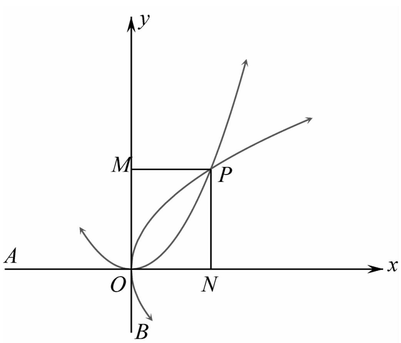


图 2　利用两条抛物线交点来解倍立方问题

梅内克缪斯的第二种方法利用了两条抛物线的交点．如图 2，$OA=2OB=2a$，分别作以 O 为顶点、OA 和 OB 为通径、ON 和 OM 为对称轴的两条抛物线 $y^2=2ax$ 和 $x^2=ay$，则它们的交点确定了 OA 和 OB 之间的两个比例中项 $OM=\sqrt[3]{4}a$ 和 $ON=\sqrt[3]{2}a$.

以上述史料为素材，我们可以设计以下问题串.

如图 3 所示，P 为抛物线 $x^2=y$ 和 $y^2=2x$ 的异于原点的交点．过 P 分别作 x 轴和 y 轴的垂线，垂足分别为 A_1 和 A_2．联结 A_1A_2，过 A_1 和 A_2 作 A_1A_2 的垂线，分别交 y 轴和 x 轴于点 A_0 和 A_3．过 A_3 作 A_2A_3 的垂线，交 y 轴于点 A_4，过 A_4 作 A_3A_4 的垂线，交 x 轴于点 A_5，等等，我们将所得到的折线 $A_0A_1A_2A_3\cdots$ 称为“梅内克缪斯螺线”.

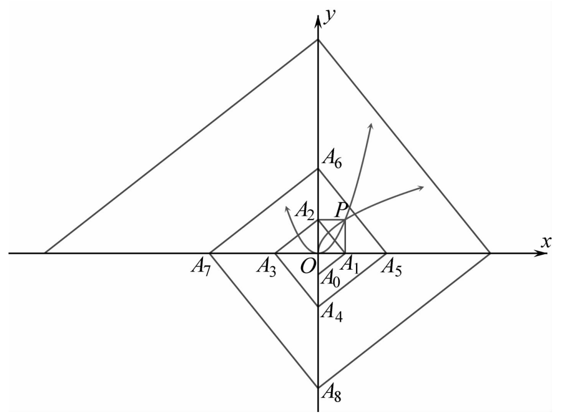


图 3　梅内克缪斯螺线问题

问题 1：证明 $(OA_1)^3=2(OA_0)^3$；

问题 2：证明 $OA_0, OA_1, OA_3, \cdots, OA_n, \cdots$ 构成等比数列；

问题 3：将折线 $A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2}$ 称为梅内克缪斯螺线的第 n 圈，记第 n 圈的长度为 C_n，求数列 $\{C_n\}$ 的前 n 项之和；

问题 4：记第 n 圈与 y 轴所围成的封闭图形的面积为 S_n，试证明数列 $\{S_n\}$ 为等比数列，并写出其通项；

问题 5：如图 4 所示，过 A_5 和 A_9、分别作 x 轴的垂线，交抛物线 $y^2=2x$ 于点 Q 和 R，分别过 Q 和 R 作 y 轴的垂线，垂足为 D 和 E，试比较 $\dfrac{S_{矩形PA_5}}{S_{矩形PD}}$ 和 $\dfrac{S_{矩形QA_9}}{S_{矩形QE}}$ 的大小关系.

实际上，要解决前四个问题，首先需要根据已知条件求得 $OA_{n-1}=(\sqrt[3]{2})^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

令 $q=\sqrt[3]{2}$，则有

$$C_n=q^{4n-4}(1+q)(1+q^2)\sqrt{1+q^2}\,(n\in\mathbf{N}^*),$$

$$S_n=\frac{1}{2}q^{8n-7}(1+q^2)(1+q^4)(n\in\mathbf{N}^*).$$

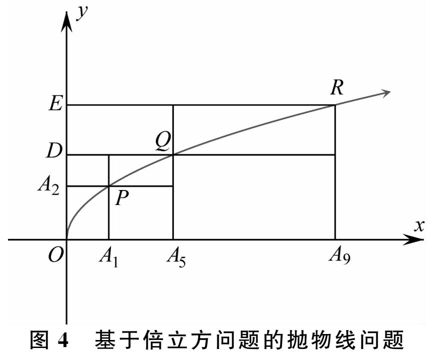


图 4　基于倍立方问题的抛物线问题

此外,当抛物线上的点(均在第一象限)的纵坐标构成公比为 r 的等比数列时,抛物线内部长方形和相应的外部长方形的面积之比为 $1+r$. 事实上,若 $(x_i,y_i)(y_i>0(i=1,2,3)$ 是抛物线 $y^2=2px$ 上的三点,其中 y_1,y_2,y_3 构成等比数列,则有

$$\frac{(x_2-x_1)y_1}{(y_2-y_1)x_1}=\frac{\frac{1}{2p}(y_2^2-y_1^2)y_1}{\frac{1}{2p}(y_2-y_1)y_1^2}=\frac{y_2+y_1}{y_1}=1+r,$$

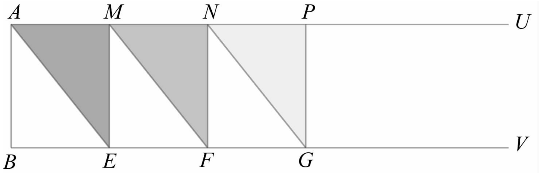
$$\frac{(x_3-x_2)y_2}{(y_3-y_2)x_2}=\frac{\frac{1}{2p}(y_3^2-y_2^2)y_2}{\frac{1}{2p}(y_3-y_2)y_2^2}=\frac{y_3+y_2}{y_2}=1+r.$$

少数美英早期解析几何教科书就是运用上述结果来推求抛物线弓形面积的.

上述问题中,问题1是梅内克缪斯所得到的结果,故属于复制式. 问题2—5在历史素材的基础上,增加了条件,设置了新目标,故均属于自由式问题.

3 从埃拉托色尼滑动框中产生的数列问题

古希腊数学家埃拉托色尼发明了一种机械工具来解决倍立方问题[4]. 如图5,AU 和 BV 是两条平行线,与垂线段 AB 构成了一个固定的长框. 直角三角形 AME、MNF 和 NPG 的直角边 AM、MN 和 NP 可以沿着 AU 上的凹槽滑动,相应地,它们的顶点 E、F 和 G 可以沿 BV 上的凹槽滑动. 现设 R 是 PG 的中点,保持△AME 不动,分别向左滑动△NPG 和△MNF,到△$N'PG$ 和△$M'NF$ 的位置,使得 $N'G$ 与 NF 的交点 S、$M'F$ 与 ME 的交点 T 与点 A、R 共线. 于是



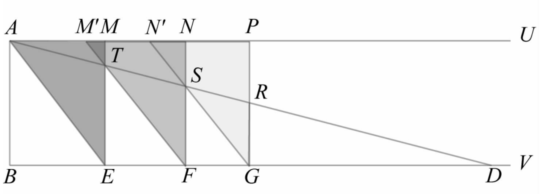


图5 埃拉托色尼的倍立方机械解法

$$AB:TE=AD:TD=ED:FD$$
$$=TE:SF=TD:SD=FD:GD=SF:RG,$$

因此,TE 和 SF 是 AB 和 RG 之间的两个比例中项,换言之,AB、TE、SF、RG 构成等比数列,因 $AB=2RG$,故 $SF^3=2RG^3$.

由上可见,利用埃拉托色尼的机械工具,可以构造一系列线段,使其长度构成一个等比数列. 据此,我们可以编制一系列有关等比数列的问题. 图6所示为一埃拉托色尼长框,AC_1B_1 为一直角三角形,$AB=a$,$AC_1=1$. 过点 A 作一条直线,交 BV 于 T,交 B_1C_1 于 A_1;沿 AU 向右滑动 Rt△AC_1B_1,使斜边经过点 A_1,B_1C_1 相应移到 B_2C_2,B_2C_2 与 AT 交于 A_2;以同样的方式向右滑动直角三角形,依次得到交点 $A_3,A_4,\cdots,A_n$.

问题1:证明 AB,A_1B_1,A_2B_2,$\cdots$,$A_{n-1}B_{n-1}$ 构成等比数列.

问题2:设∠$ATB=\theta$,用 θ 表示上述数列的公比.

问题3:写出数列 $BB_1,B_1B_2,B_2B_3,\cdots,B_{n-1}B_n$ 的通项公式.

问题4:用几何方法求出 BB_n,你能据此推导出等比数列的前 n 项和公式吗?

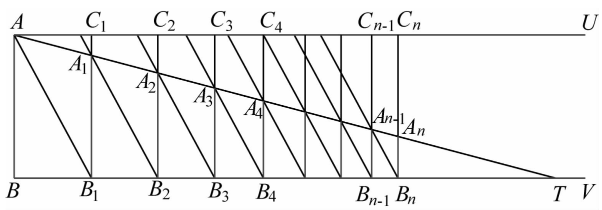


图6 基于埃拉托色尼活动框的等比数列列问题

问题5:求 $\lim\limits_{n\to\infty}[AB+A_1B_1+\cdots+A_{n-1}B_{n-1}]$.

实际上,设数列 AB,A_1B_1,A_2B_2,$\cdots$,$A_{n-1}B_{n-1}$ 的公比为 $q(0<q<1)$,则数列 BB_1,$B_1B_2,B_2B_3,\cdots,B_{n-1}B_n$ 是首项为1,公比为 q 的等比数列,因

$$AC_n:A_nC_n=AC_1:A_1C_1,$$

故得

$$BB_n=AC_n=\frac{A_nC_n\times AC_1}{A_1C_1}=\frac{B_nC_n-A_nB_n}{B_1C_1-A_1B_1}$$
$$=\frac{a-aq^n}{a-aq}=\frac{1-q^n}{1-q},$$

即

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q},$$

由此可得一般等比数列前 n 项和公式

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

又因$\triangle ABT \backsim \triangle AC_1A_1$，故得

$$BT=\frac{AC_1\times AB}{A_1C_1}=\frac{a}{a-aq}=\frac{1}{1-q},$$

此即

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}.$$

上述问题将埃拉托色尼的三个直角三角形改为一个，将两个直角三角形的滑动改为一个直角三角形的任意多次滑动，将两个比例中项的构造改为含任意多项等比数列的构造，既改变了条件，也改变了目标，故均属于自由式问题.

4 斜向问题中的三角学内涵

公元 3 世纪末 4 世纪初，古希腊数学家帕普斯(Pappus)将三等分角问题转化成所谓的“斜向问题”[4]：如图 7 所示，$\angle AOB$ 是待三等分的锐角，在 OB 上取点 B，过 B 作 OB 的垂线，交 OA 于点 A，设 $OA=1$. 作矩形 $COBA$，在 CA 的延长线与 AB 之间插入长度为 2(即 OA 的两倍)的线段 DE，点 D 在 CA 延长线上，点 E 在 AB 上，并且 DE 的延长线经过$\angle AOB$ 的顶点 O. 易证：OD 是$\angle AOB$ 的三等分线．事实上，取 DE 的中点 F，联结 AF，则 $OA=AF=FD$，故$\angle AOF=\angle AFO=2\angle D=2\angle EOB$.

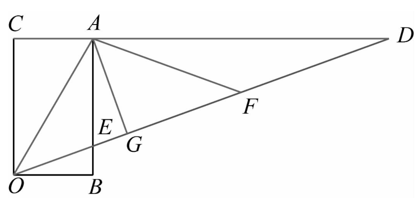


图 7 帕普斯的斜向问题

我们可以从“斜向问题”中挖掘出丰富的三角学内涵，并编制一系列问题．设$\angle EOB=\alpha$，则$\angle AOB=3\alpha$，$\angle AOE=2\alpha$. 作 AG 上 ED，垂足为 G.

问题 1：用 α 的三角函数来表示 AE、AD、AG、EG 和 GD. 在锐角情形中，你能得到哪些三角公式？

在 Rt$\triangle AED$ 中，$AE=2\sin\alpha$，$AD=2\cos\alpha$，$AG=2\sin\alpha\cos\alpha$，$EG=2\sin^2\alpha$，$GD=2\cos^2\alpha$. 但在 Rt$\triangle AOG$ 中，$AG=\sin2\alpha$；Rt$\triangle AGF$ 中，$GF=\cos2\alpha=EF-EG=GD-FD$，故得二倍角公式

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha,$$
$$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1.$$

问题 2：用 2α 的三角函数来表示 OE 和 OD. 在锐角情形中，你能得到哪些三角公式？

在$\triangle AOD$ 中，$OD=OF+FD=2\cos2\alpha+1$，$OE=OF-EF=2\cos2\alpha-1$. 在 Rt$\triangle DCO$ 和 Rt$\triangle OBE$ 中，$OC=\sin3\alpha$，$OB=\cos3\alpha$，故得

$$\sin3\alpha=(2\cos2\alpha+1)\sin\alpha,$$
$$\cos3\alpha=(2\cos2\alpha-1)\cos\alpha.$$

问题 3：如图 8 所示，在 DE 上取点 H，使得 $OH=OA=1$，易知 $EG=GH$，$OE=HF$. 证明 $DH=OF$，并据此写出一个相应的三角公式.

因 $DH=DG-GH=DG-GE$，故有

$$2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha=2\cos2\alpha.$$

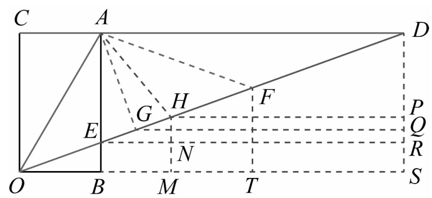


图 8 斜向问题的进一步拓展

问题 4：如图 8 所示，过 D 作 OB 延长线的垂线，垂足为 S. 过 H、G、E 作 DS 的垂线，垂足分别为 P、Q 和 R. 又过 H 和 F 作 BS 的垂线，垂足分别为 M 和 T，HM 与 ER 交于点 N. 根据 AB、AE 和 HM 之间的关系以及 HP、GQ 和 ER 之间的关系，分别写一个三角公式.

事实上，由 $AB=AE+EB=AE+MN=AE+HM-HN$ 可得

$$\sin3\alpha=2\sin\alpha+\sin\alpha-(4\sin^2\alpha)\sin\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$$

又由 $HP+ER=OT+ER=OB+BT+ER=2GR$ 可得

$$\cos3\alpha+\cos\alpha+2\cos\alpha=2(2\cos^2\alpha)\cos\alpha,$$

即

$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

问题 5：类比“斜向问题”，设计一个五等分角的方案.

如图9所示，以 OA 为第一个等腰三角形的腰，依次构造四个等腰三角形，使得第一个和第三个三角形的底边所在直线与 CA 的延长线交于第四个三角形的一个顶点．类似于三等分角的情形，可以得出若干三角公式.

问题1－4以帕普斯的“斜向问题”为出发点，提出全新的目标，且对条件进行特殊化处理，将 OA 设为单位线段，故属于自由式问题，而问题5是一道开放题，也属于自由式.

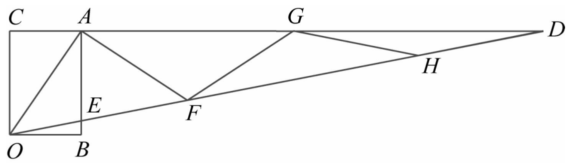


图9 一种五等分角的方案

5 基于三等分角的双曲线问题

公元3世纪末4世纪初，古希腊数学家帕普斯(Pappus)利用双曲线解决了三等分角问题[4]. 如图10，设圆心角 ACB 是待三等分的角．将弦 AB 三等分，E 为分点之一，$AE=2EB$. 以 AE 为实轴，$\sqrt{3}AE$ 为虚轴作双曲线，交圆弧于点 D，则 $\angle ACD=2\angle DCB$，即 CD 为 $\angle ACB$ 的三等分线.

上述方法可以改编成一系列解析几何问题．已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 左、右顶点为 A 和 E，右焦点为 B，C 为双曲线右准线上一点.

问题1：证明 $CA=CB$.

问题2：以 C 为圆心、CB 为半径的圆交双曲线右半支于 D，试证明 $\angle ACD=2\angle DCB$.

问题3：当圆 C 的面积最小时，求点 C 的坐标以及直线 CD 的方程.

问题4：当 CD 经过点 A 时，求点 C 的坐标以及 CD 的方程.

问题5：已知点 C 不在 x 轴上，若扇形 CAB 的面积为 $\dfrac{9\pi}{8}$，求 $\dfrac{BH}{CH}$ 的值.

问题6：是否存在一点 C，使得 CD 与双曲线的一条渐近线垂直？若存在，求出点 C 的坐标；若不存在，说明理由.

问题7：已知 $\triangle DAB$ 的底边 $AB=3$，$\angle DBA=2\angle DAB$，求顶点 A 的轨迹.

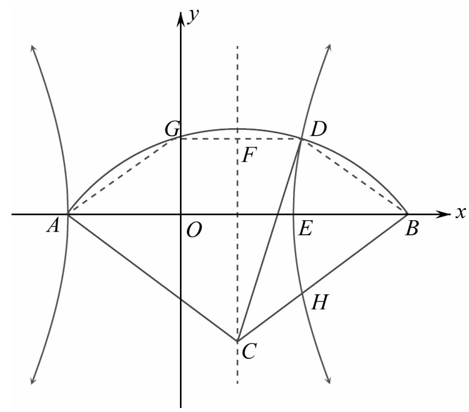


图10 帕普斯的三等分角方法

问题1涉及的知识点是双曲线的顶点、焦点和准线方程．问题2涉及的知识点是双曲线的第二定义、垂径定理等．问题3－6涉及直线方程、直线与圆的交点、直线与双曲线的交点、扇形面积公式、双曲线第二定义、直角三角形边角关系等．可以证明，当 $AC\perp BC$ 时，即 $\overset{\frown}{ADB}$ 为四分之一圆弧时，直线 CD 的倾斜角为 $75°$；当点 C 位于 x 轴上时，CD 的倾斜角为 $60°$；当 CD 经过左顶点 A 时，它的倾斜角为 $45°$. 最后一个问题涉及勾股定理、倍角正切公式等.

帕普斯在解三等分角时，所用的双曲线只要满足实轴是虚轴的 $\sqrt{3}$ 倍，或离心率为2，我们将该条件特殊化，因此，问题2为条件式问题，问题1、3－6的目标均为新设，故均为自由式问题．问题7虽将帕普斯的条件和结论进行互换，但对 AB 所满足的条件作了特殊化处理，因而仍属自由式问题.

6 结语

以上我们看到，根据古希腊数学家解决“三等分角问题”和“倍立方问题”的方法所编制的一系列数学问题大多属于自由式问题．翻开历史的画卷，与今日数学课程中特定内容相关的文献浩如烟海；但我们应该清醒地认识到，每一则历史材料都有其特定的背景和目标，它们很少能天然地服务于今日的课堂教学，这就是为什么我们需要频繁运用自由式的原因.

另一方面，当我们以教学为目的去看数学史文献、并通过顺应式将其转化为教学素材时，一个逝去时代所留下的原本冷冰冰的 (下转第17页)

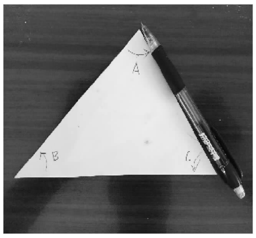


图 20

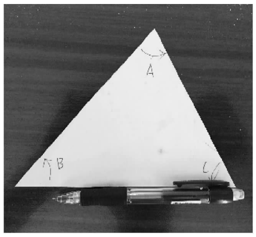


图 21

(2)分析证明:用演绎推理的方式证明“三角形的内角和等于 180°”.

通过度量、计算,学生大致可以知道三角形三个内角的和是一个定值 180°,但因为有测量误差,所得结论只能是一个猜想,学生就会主动寻找验证猜想的方法.验证猜想是科学精神、思想以及方法不可或缺的关键环节,但操作验证是依靠观察进行的直觉判断,是感性的认识,只有经过理论证明得出的结论才是可信的.拼角是验证猜想的手段,但因为拼图会有缝隙或重叠,所以拼出来的结果也会有一定的误差,这样还是不能断定多边形外角和就是 180°,因此必须用演绎推理方法去证明猜想的正确性.回顾拼角的过程,经过观察、思考、抽象,学生可获得启发,通过添加不同的平行线,根据平行线的性质,就可以用多种方法证明“三角形的内角和等于 180°”,如图 22,图 23,图 24.进而对这些方法的比较,体悟到这些方法蕴含的原理是一致的——拼角的本质是“角的转移”的过程,因此添画的辅助线与位置并无关系,可以在任意位置添画平行线,证明猜想的正确性,获得结论.如图 25,图 26.

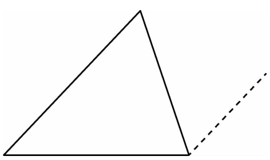


图 22

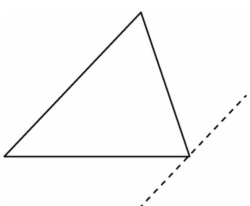


图 23

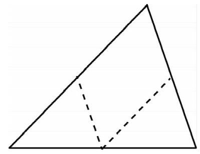


图 24

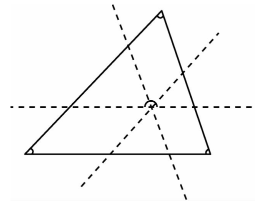


图 25

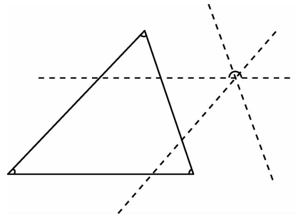


图 26

逻辑推理是理性思维的基础,在数学中具有重要的地位,培养学生的逻辑推理能力应当作为数学教学的中心任务.逻辑推理能力不是与生俱来的,逻辑推理能力的培养应贯穿于整个数学课程的各个内容,贯穿于数学课堂教学的各种活动过程,贯穿于整个数学学习的环节.数学实验能将过程与结果、操作与思维、实验与论证、证伪与证实有机融合,实现合情推理与演绎推理的融通,是培养、发展逻辑推理能力的重要学习方式.

参考文献

[1]中华人民共和国教育部制定.义务教育数学课程标准(2011年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2012

[2]教育部基础教育课程教材专家工作委员会.义务教育数学课程标准(2011 年版)解读[M].北京:北京师范大学出版社,2012

[3]王晓峰,蒋妍兮.数学实验是形成学科核心素养的有效途径[J].数学通报,2018,57(10):18-21

[4]李清,王晓峰.借助数学实验工具 发展学生空间观念[J].数学通报,2019,58(5):45-49

[5]董林伟,朱飞飞.在数学实验中引导学生发现和探索[J].数学通报,2015,54(3):30-32

[6]喻平,董林伟,魏玉华.数学实验教学:静态数学观与动态数学观的融通[J].数学教育学报,2015(2):26-28

(上接第 12 页)

语言文字和思想方法就焕发出勃勃的生机.教育取向的数学史研究的功能就是赋予历史以生命力,并为今日数学课堂注入新的生命力创造良好的条件.

参考文献

[1] 汪晓勤. HPM:数学史与数学教育[M]. 北京:科学出版社, 2017

[2] 汪晓勤,栗小妮. 数学史与初中数学教学:理论、实践与案例[M]. 上海:华东师范大学出版社, 2019

[3] 汪晓勤. 基于数学史料的高中数学问题编制策略[J]. 数学通报, 2020,59(5)

[4] Heath, T. L. A History of Greek Mathematics [M]. Cambridge: The University Press, 1921