《解决问题的策略——倒推》评课

**一、萌发策略：教学囿于解题，还是跳出解题？**

浓郁的解题情结，致使很多老师在“解决问题策略”的教学中，存在着认识误区。比如，拒绝日常经验的介入，总觉得解题策略的感悟是建立在规范数学题的解答基础上；又比如，要让学生对策略有深切的体会，必须要解答高难度的数学题，总觉得从简单问题（或经验）中得到的体会是肤浅的。

不过，英国著名数学家M·阿蒂亚爵士说，一个新思想最有意义的部分，常常不在那些最一般的深刻定理之中，而往往寓于最简单的例子、最原始的定义，以及最初的一些结果。最重要的信息却常常包含在容易的部分，甚至在几个简单且深刻的观察之上。荷兰数学教育家弗赖登塔尔更是直白地说，数学的根源在于普通的常识。这些论述在一定程度上揭示了数学教育的一条规律，即经验是提炼数学知识与方法的“富矿”，只要善于挖掘和捕捉，就能为儿童的数学学习提供合适而又重要的感性支撑。

课始“正话倒说”的游戏，通过长句的倒说，让孩子体会到了只有正着写了才能顺利地倒着说。“正着写，倒着说”不就是倒推法解决问题的精髓——“正着摘录，倒着计算”吗？游戏简单，却贴切地蕴含了倒推策略的要点。这些要点，儿童们在游戏中感悟悟，生动有趣，印象深刻。以此类推迁移，倒推前先画箭头图或列表摘录条件，就是源自学生内心需要的事情。可见，数学教师不是要创造新的数学概念，而是要创造儿童对数学概念的理解，数学中越是抽象理性的内涵，越需要我们转化为恰当贴切的直观形象。

**二、引出策略：构造一个操练的问题，还是寻找一个真实的问题？**

策略的学习总离不开问题，而问题大致上可以分为两类：真实的和构造的。在笔者看来，真实的倒推问题，学生从中能体会倒推之于解决问题的作用，更利于感悟价值；而构造的倒推问题，容易给人“为了学习倒推策略而用倒推”的感觉，更具有操练意义。两者对于策略的学习来说，虽然是不可缺少的，但学生初次感知倒推，留给学生“倒推真管用”的第一印象才更具有意义。所以，课始环节中提供的问题，需要考虑这个问题是否真实、充分承载了策略的价值。如果离开了这种策略，解题也是非常顺利的话，那么这个问题就不是教学这种策略的好载体。

粗粗梳理一番，发现人们自觉地运用倒推方法解决的问题主要有三类：外出确定最迟的出发时间；陌生情境中按原路返回；商业活动中根据某商品的市场定价确定购进原料的最高价格。确定原料的最高购进价格，离学生的生活稍远；陌生情境中按原路返回，虽然学生在生活中有所体会，但这似乎是天经地义的事情。而“倒推真管用”的价值，应该是学生自己在多种方法的运用中比较出来的，不是教师硬塞给孩子们的。从这个意思上，原路返回显然不能充分、鲜明地体现倒推的价值与意义。鉴于以上分析，借助世博的题材，在怎样合理地确定最迟起床时间的“逼迫”中，让学生生发出倒推的想法来，便是自然的选择。

**三、探索策略：自主从理解和表征问题开始，还是从列式解答开始？**

细究教材，可以发现教材中的两个例题虽然题材不一，层次不同，但都非常重视解答前对题目的理解和表征（具体见苏教版《数学》五年级下册88页）。例1，倒推前要引导学生先用列表的形式摘录条件；例2，倒推前要引导学生先用箭头图的形式摘录条件。为什么摘录条件的教学是如此突出？

我们知道，适合倒推解决的问题特征是，已知事情发展的过程和结果，求事物的开始状态。即结果是倒推方法的起点，而数量的变化过程是倒着计算的依托。换言之，如果不能合适地“正着摘录”，也就不能顺利地“倒着计算”！既然如此，多数教师的视野里为什么仅仅只有“倒着计算”呢？探索倒推策略，自主体会摘录条件的意义和方法，也是应有之义。在斟酌中，教学决定挤占了运用倒推策略练习的时间，而放手让学生交流摘录条件的方式，体会箭头图的意义。舍得在此花费时间，除了“正着摘录”是倒推策略的固有要素以外，还有其他的重要原因。

其一，箭头图可以作为一种模型去表征倒推问题。策略作为解决问题的谋略，内隐于学习者的心智内部，只可感悟意会。但对于教学活动来说，如果要教的东西都不可言说，那教学便也失去了可能性。因此，策略需要一种可感的外在的表现形式。无疑，箭头图就是倒推问题的合适形式。一个问题，把无关紧要的情节去掉，只留下其数量变化的过程，那便是箭头图。许多倒推问题，只要其数量变化的过程和结果相同，那归结起来便是同一幅箭头图。而依托箭头图，按此逐步进行逆运算，见加的变成减，见乘的变成除，如此按部就班，无须分析数量间的深层次关系，当然也不需要思维方面特殊的技巧，近乎机械操作即可。再难的倒推问题，有了箭头图也就不成为难。历史上，笛卡尔为什么被称为近代最伟大的数学家之一？就在于笛卡尔创造了解析几何，把几何问题转化为同一种形式——可处理的代数形式“为解几何问题提供了一种普遍的方法，而且是一种机械化的方法。”这样的数学发展史实启示我们，近乎机械的数学方法，却能广泛运用，数学不拒绝特殊的思维技巧，但数学并不追求特殊的思维技巧。所以，数学问题的解答可以从灵巧的思维技巧出发，但需要向着一般化的方向努力。教学往那个方向去，自然也就是向着数学本质的有价值的旅行。

其二，箭头图可以直观地包摄倒推问题的其他表达方式与解答方法。摘录条件，还可以用列表的方式；解答倒推问题还可以用方程。这些枝节，教学中如何处理？一个数学教师的智慧，不仅仅在于能把握具体形象中的数学理性，更在于能洞悉多种多样背后的统一性。实际上，例1的列表方法和例2的箭头图并不矛盾。表格不过是箭头图去掉箭头，加上表格的边框罢了。而表格中的数据间加上箭头，去掉表格的边框也就是箭头图。但两者相比，箭头图无疑更为清晰直白地呈现了数量的变化过程。箭头图和方程亦是异曲同工，在画箭头图的过程中，不必需要刻意地要把未知数放在某个特定的位置，赋予了未知数和已知数平等的地位，这和方程的本源意义是完全一致的，因此，箭头图的进一步符号化就是方程。比起表格来，箭头图更为清晰；比起方程来，箭头图更为直观。既然如此，教学中突出箭头图也就不是浪费时间。

**四、形成策略：回避并掩饰解题错误，还是暴露并积极利用解题错误？**

教学是由很多个细节构成的，而且教者对于细节的处理都是劳神费心的。教学中，倒推的方法是在不能顺利地确定“最迟起床时间”中“逼”出来的；最初用倒推解决的题是学生自己编的；倒推的要点是在游戏经验和题目解答的基础上自我概括的；即便运用，也是在“下面的题能不能使用倒推”练习情境下的审慎选择。这一切细节的价值，都指向于——为了策略，而不是为了解题。这些细节的处理，如果从教学法的角度加以概括的话，那就是学生基于生活经验和简单问题正确解答基础上的自我感悟，是其心智生长获取策略的重要方式。但，那是唯一的方式吗？

我相信，不仅仅是我，绝大多数的教师在备课中都会预见到，学生在独立解答“邮票送出一半多一张”的题时，大多数学生会出错。课，马上就要结束了，还出现较多的解题错误！这种窘境逼迫着自己一再拷问教学的本源：为了解题还是为了策略？为了解题，教学更为关注解题的数量以及对错；为了策略，教学更为关注通过解题学生悟到的体会。学生独立解答前，在关键处作出提示，避免了解题出错，但学生们得到了什么？只是解对了此题而已！只是课堂看似顺畅了一些而已！而学生独立思考，解错了题，不正说明了他们对于倒推方法的认识感悟还有缺陷吗？而且这种缺陷，在正确解答时，是不易被察觉的。而错误的解答，才使倒推方法的更深层次意义凸显在了学生的视野之中。学生们“25×2+1”的错解，通过辨析，至少可以获得两点启示：其一，要按照数量变化的顺序有序地倒推；其二，不画箭头图，题目看似简单却容易出错，画出箭头图后，按部就班进行逆运算即可，一切思维技巧皆可忽视。因此，错解的辨析深刻地彰显了倒推前画箭头图的意义，以及箭头图的价值。教师提示下的解答正确，也许只是模仿的结果，并不见得投入了思考，而错误的解答虽然是错的，但却是孩子们投入思考自己创造的结果。这些结果，准确地诉说了他们的认识还不到位之处，为教学步入数学的深处提供了契机。这正是学生心智生长获取策略的另一种重要方式——错中悟理。

总之，为了解题的课堂立意更追求解题的数量，更关乎解题的对错。于是，正在情境中思考的孩子，被急于进入下个环节的教师莽撞地赶着前行，匆忙中思绪全无，被动中回味皆失。多层次、大题量，课堂时间在解题上被用到了极致。但“误用光阴比虚掷光阴损失更大，教育错了的儿童比未受教育的儿童离智慧更远。”课堂的立意失之偏颇，时间花得越多，教学就越可能南辕北辙。

感悟是灵魂的回头，是静心的观照。儿童能够自在思考，才能生成智慧；生命拥有自主时间，才具有意义。这一切所揭示的，正如法国18世纪伟大的启蒙思想家卢梭所言，“最重要的教育原则是不要爱惜时间，要浪费时间。”为了策略的教学，要舍得在必要的地方“浪费”时间，因为教育本就是一种慢的艺术！