精心设计教学环节，提升数学抽象素养

 ——“数列求和复习课”第一课时的设计与思考

范 云

（常州市第三中学 213000）

 数学抽象是数学的基本思想，是形成理性思维的重要基础，反映了数学的本质特征，贯穿在数学产生、发展应用的过程中。数学抽象使得数学成为高度概括、表达准确、有序多级的系$统^{\left[1\right]}$。凡是重要的数学概念，重要的模型，重要的定理，数学的通性通法等都需要经历抽象的过程，在产生、发展、应用中不断拓展它们的内涵，同时不断加深对它们的认识和理解。笔者开设了一节“数列求和”的市级公开课，精心设计教学环节，在课堂探究的过程中注意提升学生的数学抽象素养。

1 内容分析

数列是高中数学的重要内容，也是高考的必考内容。数列求和是数列的重要内容之一，其方法具有较强的技巧性，本堂课主要探究了公式求和法、分组求和法、倒序相加法、错位相减求和法以及裂项相消求和法。旨在为学生构建数列求和的知识方法网络，提升学生的数学抽象素养。

2 教学设计

2.1热身小练

1、问题“今有女子不善织布，逐日所织的布以同数递减，初日织五尺，末日织一尺，计织三十日，问共织几何？”源自南北朝张邱建所著的《张邱建算经》，该问题的答案是（ ）

A、90尺 B、93尺 C、95尺 D、97尺

设计意图：将一个具体的实际应用问题抽象成为一个等差数列问题，利用等差数列的求和方法来解决该问题。既回顾了等差数列的求和方法，同时提升了学生的数学抽象素养。

2.一个球从100米高处自由下落，每次着地后又跳回到原高度的一半再落下，当它第10次着地时，经过的路程是（ ）

A、$100+200\left(1-2^{-9}\right)$ B、$100+100\left(1-2^{-9}\right)$ C、$200\left(1-2^{-9}\right)$ D、$100\left(1-2^{-9}\right)$

设计意图：将一个具体的实际应用问题抽象成为一个等比数列问题，利用等比数列的求和方法来解决该问题。既回顾了等比数列的求和方法，同时提升了学生的数学抽象素养。

3.数列$1\frac{1}{2},3\frac{1}{4},5\frac{1}{8},7\frac{1}{16},……\left(2n-1\right)+\frac{1}{2^{n}},……$的前$n$项和$S\_{n}$等于（ ）

 A、$n^{2}+1-\frac{1}{2^{n}}$ B、$2n^{2}-n+1-\frac{1}{2^{n}}$ C、$n^{2}+1-\frac{1}{2^{n-1}}$ D、$n^{2}-n+1-\frac{1}{2^{n}}$

设计意图：通过一个具体的数学问题抽象提炼出数列求和的一个重要的方法：分组求和法。即当一个数列的通项公式是由若干个等差数列或等比数列相加（减）组成时，可以分别求和后再相加（减）．

4.$Sin^{2}1^{°}+Sin^{2}2^{°}+Sin^{2}3^{°}+…+Sin^{2}89^{°}=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_.$

设计意图：通过一个具体的数学问题抽象提炼出数列求和的一个重要的方法：倒序相加法。即如果一个数列{*an*}中，与首末两端等“距离”的两项的和相等或等于同一个常数，那么求这个数列的前*n*项和可用倒序相加法求解．

5.数列$\left\{n∙2^{n}\right\}$的前$n$项和$S\_{n}$=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

设计意图：通过一个具体的数学问题抽象提炼出数列求和的一个重要的方法：错位相减法。适用题型：形如$\left\{a\_{n}b\_{n}\right\}$的数列可采用此方法，其中$\left\{a\_{n}\right\}$为等差数列，$\left\{b\_{n}\right\}$为等比数列；基本步骤：列出$S\_{n}$的表达式$\rightarrow $乘公比$\rightarrow $错位相减$\rightarrow $求和化简.

2.2例题导析

 例1.已知$\left\{a\_{n}\right\}$是各项均为正数的等比数列，且$a\_{1}+a\_{2}=3,a\_{3}-a\_{2}=2$，等差数列$\left\{b\_{n}\right\}$的前$n$项和为$S\_{n}$，且$b\_{3}=5,S\_{4}=16.$

(1)求数列$\left\{a\_{n}\right\}$，$\left\{b\_{n}\right\}$的通项公式；

(2)如图，在平面直角坐标系中，有点 $ P\_{1}\left(a\_{1},0\right),P\_{2}\left(a\_{2},0\right),…,P\_{n}\left(a\_{n},0\right),P\_{n+1}\left(a\_{n+1},0\right),$

$ Q\_{1}\left(a\_{1},b\_{1}\right),Q\_{2}\left(a\_{2},b\_{2}\right),…,Q\_{n}\left(a\_{n},b\_{n}\right)$,若记$∆P\_{n}Q\_{n}P\_{n+1}$

的面积为$c\_{n}$，求数列$\left\{c\_{n}\right\}$的前$n$项和$T\_{n}$.

设计意图：数列中新情境问题是考试热点问题，需要将其转化为具体的数列问题。这类问题求解的关键：一是观察新情境的特征，如本题中的各个直角三角形的两直角边长的特征；二是会转化，如本题，把$\left\{c\_{n}\right\}$的通项公式的探求转化为直角三角形两直角边长的探求；三是活用数列求和的方法，如本题，活用错位相减法，即可得到数列$\left\{c\_{n}\right\}$的前$n$项和.

例2.已知正项数列$\left\{a\_{n}\right\}$的前$n$项和为$S\_{n}$，$n\in N^{\*}$,已知$S\_{n+1}=S\_{n}+a\_{n}+2$,\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

请在（1）$a\_{1},a\_{2},a\_{5}$成等比数列；（2）$4a\_{3}-1,2a\_{4}+3,a\_{8}$成等差数列；（3）$a\_{3}^{2}=S\_{1}S\_{5}$,这三个条件中任选一个补充在上面题干中，并解答下列问题.注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

(1)求数列$\left\{a\_{n}\right\}$的通项公式；

(2)若$b\_{n}=\frac{1}{a\_{n}a\_{n+1}}$,记数列$\left\{b\_{n}\right\}$的前$n$项和为$T\_{n}$,求$T\_{n}$.

设计意图：结构不良题是高考的新题型，因此本节课选取了一道结构不良题作为例题探究，让学生在平时的学习中掌握这类题型的一般处理方法。本题通过一个具体的数学问题抽象提炼出数列求和的一个重要的方法：裂项想消法。用裂项相消法进行求和时，要对通项进行变换，可以拆成两项的差，在求和时中间的一些项可以相互抵消，从而得到和；将通项裂开后，有时需要调整前面的系数，确保裂项后的式子和原式相等；裂项求和的结果不一定只剩下第一项和最后一项，也可能是前面剩两项，后面剩两项；也可能是前面剩几项，后面剩几项。

探究活动：常见数列的裂项形式

1、$a\_{n}=\frac{1}{n\left(n+1\right)}$ $=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 2、$a\_{n}=\frac{1}{n\left(n+2\right)}$ $=\frac{1}{2}\left（\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right）$

3、$a\_{n}=\frac{1}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}$ $=\frac{1}{2}\left（\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right）$ 4、$a\_{n}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ $=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

5、$a\_{n}=\frac{2^{n}}{\left(2^{n}-1\right)\left(2^{n+1}-1\right)}$ $=\frac{1}{2^{n}-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$

设计意图：通过探究常见数列的裂项形式，使学生掌握裂项求和的基本方法，拓宽学生的抽象思维，提升学生的解题能力。

2.3 课堂小结

3 思考感悟

数学学科的核心素养要求我们能用数学的眼光去观察世界，能用数学的思维去分析世界，能用数学的语言去描述世$界^{\left[2\right]}$。从数学抽象的角度而言，它是对数学知识体系的融会贯通，是对数学方法的提炼，更是对数学思维的活化。因此，培养学生的数学抽象素养至关重要。

本堂课通过探究数列求和的几种方法，让学生能在具体的情境中抽象提炼出数列求和的方法，积累从具体到抽象的活动经验，养成在日常生活和实践中一般思考问题的习惯，把握事物的本质，运用数学抽象的思维方式思考并解决问题。

参考文献：【1】王尚志，吕世虎，胡凤娟.教师指导数学$\left[M\right]$.上海：上海教育出版社，2020.

【2】王慧玲.基于发展数学抽象素养的课堂教学策略探究$\left[J\right]$.考试周刊，2020(95):77-78.