**《同角三角函数关系》大单元教学案例分析**

**常州市第三中学 王 苑**

**一、教学内容分析**

《同角三角函数关系》这一节内容选自苏教版高中数学必修第一册第7章第2节第2小结，是学生学习了任意角、弧度制、任意角的三角函数后继续深入学习的内容。同角三角函数的这两个关系是三角函数求值、化简以及证明三角恒等式的基本工具，是整个三角函数的基础，在教材中起着承上启下的作用，这当中体现的数学思想方法贯穿整个高中阶段的学习。

本节课的教学目标是掌握同角三角函数的基本关系式和，并会运用它们进行简单的三角函数式的化简、求值及恒等式证明。本节课的重点是同角三角函数关系的推导及其应用。公式的主要应用有：（1）已知角的正弦、余弦、正切值中的一个，求出其余两个；（2）化简三角函数式；（3）证明简单的三角恒等式。由一个角的三角函数值求出其他三角函数值，有时结果不唯一，故需要讨论，这是本节的一个难点，而掌握三角函数值在各象限的符号是解决这一难点的关键。在证明恒等式时选择适当的推理途径是本小节的另一个难点，为此应引导学生掌握公式特点，观察题目特征，进而学会分析，让学生在解题过程中自己去体会。

**二、教学过程设计**

**1. 课题引入**

师：上一节我们一起探究了任意角的三角函数，请同学们回忆一下，任意角的三角函数是如何定义的？

（板书：任意角的三角函数定义，投影展示）

**定义：**对任意角α，设α的终边上异于原点的任意一点，

它与原点的距离，规定：

α的正弦（）；

α的余弦（）；

α的正切（）．

师：这样规定之后，我们就可以求除锐角外任意角的三角函数值，并且能很快判断出三角函数值在各象限的符号。（回顾三角函数值在各象限的符号）

师：既然、、都由确定，那么它们之间有怎样的联系呢？这就是本节课要研究的内容。

师：给出什么条件可以求三角函数值呢？

**（1）给出角的度数或弧度数**

（生：结合定义快速说出0°~180°范围内特殊角的三角函数值）

（靠右侧板书：特殊角的三角函数值）

师：除了给出角的度数或弧度数以外，还可以给出其他条件求三角函数值吗？

**（2）给出角的终边**

（投影）问题：已知角α的终边是，求、、的值．

（请学生谈谈想法）

**分析：**用射线的形式给出终边，而不以终边过某个点的形式给出，让学生在终边上“任取一点”求解。通过自己做才能理解什么是“任取”，定义中是任意的，应用时是具体的。

师：还有其他条件能求三角函数值吗？

（视情况给出进一步提示：如果要求，可以给出什么条件？）

问题：若，能否求出的值？

**分析：**这是一个特殊角的三角函数值，学生可能会先求角（特殊角），再求余弦值。

这时可追问：若呢？（求不出角，但学生可能根据会经验得出结果）

再问：若呢？

师：可见求角并不是解决该问题的一般方法，有时还会把简单的问题复杂化，不符合数学中简洁性的原则。因此我们需要探究和之间更直接的关系。

**2. 概念建构**

师：任意角的正弦值和余弦值之间满足怎样的关系？

（如果学生通过预习直接说出平方关系式，则问：那怎么证明呢？如果学生表现迷茫，则继续引导。）

师：这么问大家可能有些迷茫，不知从何入手，但我相信同学们应该都掌握了探究一般规律或结论的一种方法，叫做——“**由特殊到一般**”。看看这几个角的正弦和余弦值，在数量上有什么关系？

**分析：**此时板书中有特殊角的三角函数值表，没有单位圆和三角函数线，是为了让学生在探究时将注意力集中在三角函数值之间的数量关系上。观察之前板书的特殊角的三角函数值，归纳结论，板书：。

师：能继续求出的值吗？和正余弦值之间又有怎样的关系？

（板书：）

师：猜想得出的式子还需要更严谨的证明，如何证明？

**分析：**由学生回答，根据三角函数的定义可证，不强行引入单位圆中的三角函数线来证明。

证明：在角α的终边上任取一点，．

根据三角函数的定义可知，，．

可得；

．

师：这两个式子就称为同角三角函数关系，它们对任意角α都成立吗？

（学生回答等式成立的条件）

师：（投影）等于1吗？（等于）

**设计意图：**强调“同角”。

师：下面这些式子成立吗？

（投影），，．

**设计意图：**进一步理解“同角”——只要角一样，不管角的形式如何。

师：这两个关系式能用来解决什么问题？有什么作用？

给定一个角的三角函数值，求这个角的其他三角函数值。

求值问题是同角三角函数关系的一个重要应用，此外还应用于三角式的化简和证明。

**3. 典例分析**

**题型一 求值问题**

例1（1）已知=，且是第四象限角，求，的值．

变式：①如果将条件是第四象限角换成第三象限角，结果有什么变化？

②如果将条件是第四象限角去掉，结果又有什么变化？

师：由能否求和？（方法一样，不赘述）

（2）已知，求和的值．

**方法小结：**、和三者之间是“知一求二”的关系，先由一个三角函数值确定角所在象限，再确定所求三角函数值的符号。

例2 已知，则

① 　 ； ② 　 ；

③\_\_\_\_\_．

**方法小结：**关于，的齐次式就是式子中的每一项都是关于，的式子且它们的次数之和相同，设为n次，将分子、分母同除以的n次幂，其式子可化为关于的式子，再代入求值。若无分母时，把分母看作1，并将1用来代换，将分子、分母同除以，可化为关于的式子，再代入求值。解决本题的过程中运用了“弦化切”的方法。

**题型二 证明三角恒等式**

例3 证明恒等式：．

常用方法：

①从左到右或从右到左（由繁到简）；

②从两边到中间，即证明等式的左右两边都等于同一个式子；

③作差法，证明等式两边之差为零；

④分析法，寻找等式成立的充分条件．

**设计意图：**例2运用了“弦化切”的思想方法，而本例的证明也围绕这一思想展开，从左往右是“弦化切”，从右往左是“切化弦”，体现思想方法的统一性。

**题型三 化简问题**

例4化简，其中是第三象限角．

练习：化简，其中是第四象限角．

化简三角函数式的原则：

①降低次数；②减少项数；③减少角的个数及三角函数的种类（化同角，化同名）

④分母尽量不含三角函数；⑤尽量不含根号和绝对值符号．

设计意图：化简问题仍然选择了正切与正、余弦之间的相互转化，体现“弦化切”、“切化弦”思想贯穿始终。

**4. 课堂小结**

同角三角函数关系：

内容：平方关系 商数关系

应用：求值、化简、证明

思想方法：归纳——猜想——验证；由特殊到一般；转化思想：“切化弦”、“弦化切”

**三、教学反思**

本节课开始的课堂回顾，联系上节内容，回到三角函数定义本身，提醒学生不忘记定义的来源。列出特殊角的三角函数值，一方面是回顾前面所学，另一方面是从学生熟悉的内容入手，为后面探究同角三角函数关系做铺垫。如果根据特殊角的三角函数值直接问学生有何发现，这一问题太大，学生无从入手，因此在提问时更明确地指出探究与两者的数量关系，并有意识地引向“由特殊到一般”这一探究事物规律的一般方法上。在证明两个关系时回归定义，能帮助学生找到思维的方向。

数学学科的概念相对而言更具系统性，但每一块又可以独立。数学学科单元教学主要需要突破设置完整的单元教学活动和开展有利于学生认识和掌握数学思想方法的教学活动两个方面。针对这两个问题，在教学中一方面要结合数学中的一般研究路线形成单元教学主线，从而整体把握单元教学内容以及设计单元教学活动；另一方面要帮助学生结合教学主线掌握整个教学过程，从而帮助学生逐步将数学思想方法过程对象化。