

多元表征： 建构概念的思维路径 ——二年级『倍数和因数』教学实践与思考

□ 施娇娥 执教 吴恢奎 评析

【摘要】纵向异构“倍数和因数”一课的旨意在于,在不同学段学习“倍数和因数”,从时间轴上建立起学习“倍数和因数”的合理时序,从而真正降低其学习难度,探寻学生学习的可能性。本文主要以二年级学习“倍数和因数”为例,基于“倍”的知识,探索“倍”“倍数”“因数”之间的联系,通过多元表征,初步认识倍数和因数的含义,理解倍数与因数的相互关系;积累多元表征与自主构建概念的经验,以及探寻概念之间关联性的思维路径。

【关键词】倍数与因数 多元表征 思维路径

课 前 慎 思

“倍数和因数”这节课一般安排在四、五年级教学,如果给二、三年级的学生上这节课,这两个概念的生长点在哪里?学生能自我建构起这两个抽象的概念吗?下移到二、三年级学

习“倍数和因数”,有何独特价值和意义?

不久前,我们“一课研究”团队选择“倍数和因数”开展了“同课纵向异构”研究。所谓“纵向异构”,就是同一个学习主题内容针对不同年级的学生,设计不同的学与教的路径,以探寻学生学习可能性的行动研究。

国内现有的教材体系一般把“倍数与因数”安排在小学中高段,其知识逻辑起点在整数范围内。由于整除性的概念繁多,而且彼此联系紧密,有些概念非常容易混淆,如倍与倍数,因数、素数与素因数等。正因如此,2001年后试行的人教版教材将整除性的概念分散到两个单元进行学习,把倍数和因数、2、3和5的倍数的特征,奇数和偶数,合数和素数安排在一个单元内学习,而公因数和最大公因数、公倍数和最小公倍数安排在“分数的意义”这一单元学习,一定程度上分散了难点,降低了学习的难度。但是,由于整除性的概念相对抽象,学生又缺少前期直观活动经验的有效积累,学生在单位时间内高密度学习这么多数论概念,困难仍然很大。

纵向异构“倍数和因数”一课的旨意在于,在不同学段学习“倍数和因数”,从时间轴上建立起学习“倍数和因数”的“合理时序”,从而真正降低其学习难度。那么,每个时间段学习“倍数和因数”的教学价值与意义的“异构性”也就显现出来——

一年级学习“倍数和因数”:在学生学习了“乘法口诀”的基础上进行,旨在探索基于学生直观性的图式经验,通过动手操作与观察,自主实验小正方形可否摆成长方形。在此基础上,认识倍数与因数这两个“名字”,初步感受倍数与因数的含义,积累直观与操作的可视性学习经验。

二年级或三年级学习“倍数和因数”:基于“倍”的知识,旨在探索“倍”“倍数”“因数”之间的联系。通过多元表征,初步认识倍数和因数的含义,理解倍数与因数的相互关系,积累多

元表征与自主构建概念的经验,以及探寻概念之间关联性的思维路径。

四年级或五年级学习“倍数与因数”:从“整除性”范围出发,通过想象拼长方形的活动,认识和理解因数和倍数,发现并掌握寻找一个数的因数和倍数的方法及个数特征,体会一个数的倍数与因数之间相互依存的关系。经历“想象拼摆”和“自主探索”的概念形成过程,发展学生的数感、思维的概括性与推理性。

“倍数和因数”同课纵向研究的价值,一方面在于探寻学生学习的可能性,另一方面可能为今后教材的编写带来一定的启示。据文献查阅,国外的一些教材确实把“倍数与因数”安排在二、三年级进行学习。

课堂回放

一、多元表征,认识倍数

1. 多元表征:为什么6是2的3倍

(1) 师:6是2的几倍? 6是3的几倍? 8是2的几倍? 15是5的几倍? 12是6的几倍?(根据学生的回答板贴,如图1)

6是2的3倍
6是3的2倍
8是2的4倍
15是5的3倍
12是6的2倍

图1

(2) 师:为什么6是2的3倍?

要求:请独立思考,并用你喜欢的方式记录下来。

(3) 学生多元表征并说理。



图2

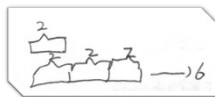


图3

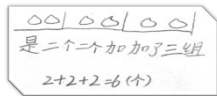


图4

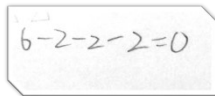


图5

生1:我一共画了6个圆,每2个圈一份,圈了3次,正好圈完,所以6是2的3倍。(图2)

生2:我用线段图来表示,上面的一段表示

2,下面有这样的3段,就是6,所以6是2的3倍。(图3)

生3:因为3个2相加正好等于6,所以6是2的3倍。(图4)

生4:因为 $6-2-2-2=0$,减3次刚好减完,所以6是2的3倍。(图5)

生5:我用小方格拼长方形,2个2个地拼,拼3次正好拼成一个长方形,所以6是2的3倍。

生6:因为 $2 \times 3 = 6$,所以6是2的3倍。

生7:因为 $6 \div 2 = 3$,所以6是2的3倍。

【评析:二年级的学生刚学过“倍的认识”,对“6是2的3倍”这一事实是清楚的,但没有“系统地说理表征概念”的思维活动经验。该环节鼓励学生多元表征“为什么6是2的3倍”,就是让学生用自己的思维路径把抽象的“概念定义”具象化,以达到个性化的理解,构建起丰盈的“概念意象”,使学生真正理解“谁是谁的几倍”。同时,通过图式与算式构建概念的思维方式,也为下一环节抽象出“倍数”的概念做好铺垫。】

2. 分类整理:构建知识网络

(1) 整理学生作品(逐一呈现学生(1)~(9)方法,如图6)。

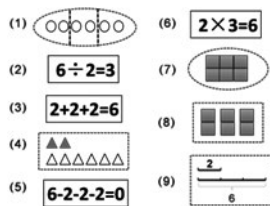


图6

(2) 师:这么多方法都能说明6是2的3倍,你能将这些方法分分类?

(3) 学生自主分类,并汇报如下。

生1:分成3类,算式为一类,图形为一类,线段为一类。

师:你为什么把线段另外归为一类呢?

生1:线段图和图形不是一种的,图形是指

长方形、圆形、正方形等。

师:其实,线段图也是图形中的一种,在你的基础上我们就可以分成两大类,图形和算式。(出示图7)

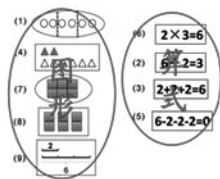


图7

生2:我分成了3类,但我的理由不一样。我认为(1)(2)(3)为一类;(4)(5)为一类;(6)(7)(8)(9)为一类。因为图(1)可以用算式(2)(3)来表示。如果把图(4)中的空白三角形2个2个地划掉,就可以用减法算式(5)来表示。而算式(6)也都可以用图(7)(8)(9)来说明。

师:你真能干,能将算式和图结合起来看,图可以说明算式,算式也能解释图。

(4) 小结:通过分类我们知道,这些图和算式都可以说明为什么6是2的3倍。看来,遇到问题从多个角度思考,可以更好地帮助我们理解。老师也把这些图和算式进行了整理,请看——(整理成知识网络图,如图8)

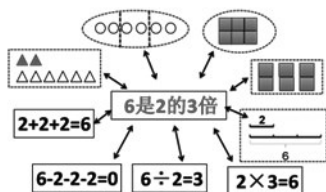


图8

【评析:通过分类思维活动,厘清个性化材料之间的关系,由学生作品(图6)—集合图(图7)—网络图(图8),学生在脑海中建立起多元化又相互关联的“概念意象”,为下面抽象出“6是2的倍数”埋下了优良种子。同时,也使学生初步领悟到表征概念可以从“算式”和“图式”两方面入手。】

3. 交流说理:建构倍数概念

(1) 师:6是2的3倍,还可以这样说:6是2的倍数。像这样,你能说说其他几个算式吗?(板贴如图9)

6是2的3倍	——	6是2的倍数
6是3的2倍	——	6是3的倍数
8是2的4倍	——	8是2的倍数
15是5的3倍	——	15是5的倍数
12是6的2倍	——	12是6的倍数

图9

(2) 师:为什么15是5的倍数?你能从不同的角度来说一说吗?

生1:有15个桃子,5个5个地圈,圈了3次,刚好圈完,所以15是5的倍数。

生2:用加法算式表示是 $5+5+5=15$,正好加到15,所以15是5的倍数。

生3:用除法算式表示是 $15\div5=3$,所以15是5的倍数。

生4:用乘法算式表示是 $5\times3=15$,所以15是5的倍数。

生5:因为15是5的3倍,所以15是5的倍数。

……

【评析:该环节,学生通过思维路径的正迁移学习,多元说理“因为谁是谁的几倍,所以谁是谁的倍数”,完成对“倍”概念更高层次的抽象。由“几倍数”到“倍数”的概念抽象过程能水到渠成,归功于“多元表征”的数学思维活动。】

二、比较交流,探索因数

1. 表征说理:谁是谁的因数

(1) 师:15是5的倍数,在数学上,我们还可以说5是15的因数。其他的几个你也能说说吗?(板贴如图10)

6是2的3倍	——	6是2的倍数	——	2是6的因数
6是3的2倍	——	6是3的倍数	——	3是6的因数
8是2的4倍	——	8是2的倍数	——	2是8的因数
15是5的3倍	——	15是5的倍数	——	5是15的因数
12是6的2倍	——	12是6的倍数	——	6是12的因数

图10

(2) 师:为什么说6是12的因数,2是8的

因数,5是15的因数呢?(课件出示要求如下)

- ① 任选一题说一说道理;
 - ② 先完成一种说理方法,再想其他方法;
 - ③ 小组交流并汇总。
- (3) 汇报交流。

生1:我们小组共选定了三种方法,我先挑一种来说。我是通过图来说明的。例如,有12个同样的球,每6个为1份,可以平均分成2份,没有剩余,所以6是12的因数。其他两种方法由另外两位同学来说。

生2:12里面有2个6,所以6是12的因数。

生3:因为12是6的倍数,所以6是12的因数。

师:是的,如果知道12是6的倍数,那么我们就可以得出6是12的因数。你能这样想问题,确实了不起。

【评析:“因数”的学习,主要也是突出说理过程,并再次进行多元表征,但在学习方式上与“倍数”有所不同。该环节,先通过孩子们自主学习和小组合作学习相结合,有选择性地对“为什么谁是谁的因数”加以说明,再组织汇报展示。实践表明,学生能多角度地解释说明,并产生了“因为12是6的倍数,所以6是12的因数”这样的逻辑说理方式。在学法指导上,教师强调让孩子说明采用的是哪一类说理方式(图式或算式)。有效的学法指导,让学生把孤立的知识串联成有关联的知识链条,将学习赋予自主构建与内化理解相结合的意义。】

2. 知识求联:建构概念网络图式

师:同学们,请你仔细回顾一下,今天我们学习了倍数和因数(板书),不仅知道了谁是谁的倍数与因数,而且重点研究了为什么会这样,还学会了用这样的图式和算式(图11)来说明。

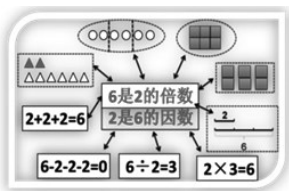


图11

【评析:从图8到图11,学生经历了二次抽象和知识求联过程。第一次从“6是2的3倍”到“6是2的倍数”,第二次从“6是2的倍数”到“2是6的因数”。借助于“多元表征”,从具体的“倍”到抽象的“倍数”,再到“倍数与因数”的互逆依存关系,学生顺利完成了思维的抽象过程,并构建了概念网络图式,将形式的“定义”赋予丰富的“意象”。】

三、数形结合,理解关系

(1) 看图说说谁是谁的倍数或因数(图12)。

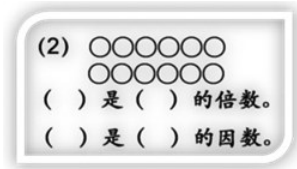


图12

生1:12是6的倍数,6是12的因数。

师:如果在图上圈出来,可以怎样圈?你能想到几种?

生1:上一行6个圈一个圈,下一行6个也圈一个圈。

生2:12是2的倍数,2是12的因数,竖着2个2个地圈。

生3:12是4的倍数,4是12的因数。

.....

根据学生的回答,课件随即呈现各种方案。(图13)

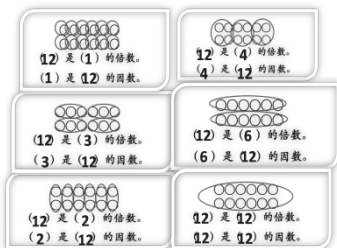


图13

师:想一想,怎样思考才会有序呢?

生:从小的数开始想,可以1个1个地圈,2个2个地圈,3个3个地圈,这样就慢慢找出来了。

师:再想一想,最小的因数是几?最大的

因数又是几呢?

生:最小的因数是1,最大的因数是12。

师:看来,可以从小到大地想,也可从大到小地想,这样就能有顺序地写出每一种情况了。

(2)你能有顺序地写出谁是谁的倍数,谁是谁的因数吗?(图14)

18÷()=()
()是()的倍数,()是()的因数。
()是()的倍数,()是()的因数。
()是()的倍数,()是()的因数。
()是()的倍数,()是()的因数。
()是()的倍数,()是()的因数。
()是()的倍数,()是()的因数。

图14

① 学生独立完成。

② 反馈:先无序、再有序。(先判断是否正确,再比较有什么不一样)

【评析:两道开放题练习,可以让不同思维层次的学生都能参与。开放题(1),借助直观,数形结合,充分感知因数与倍数的相互关系。教师设计了两个启发性的问题“你能想到几种”“怎样思考才会有序”,让学生经历从“无序”到“有序”、从“不全”到“全”的思维发展过程,弄清楚12是1、2、3、4、6、12的倍数;反过来,1、2、3、4、6、12都是12的因数。开放题(2)脱离“形”的支撑,让学生有序地寻找18的因数,寻找策略可以多角度,从小到大地找因数,这样设计为四年级进一步学习找因数做好“方法策略”的准备。】

(3)用倍数和因数造句。

① ★★

☆☆☆☆☆☆

师:你能用倍数和因数造句子,说说2和6的关系吗?

生:2是6的因数,6是2的倍数。

师:如果再增加一个白色的五角星,你还能说说2和7的关系吗?(出示第②题)

② ★★

☆☆☆☆☆☆

生:2个2个地圈,会多出1个。所以,7是

2的倍数多1。

生:我不赞同7是2的倍数,你明明都知道2个2个圈会多出1个,怎么还可以说7是2的倍数呢?更不能说2是7的因数了。

……

教师引导学生说理:2个2个圈,多出1个,所以7不是2的倍数,2不是7的因数。7比2的3倍多(或多1),7比2的4倍少(或少1)。

【评析:第①小题,通过数量之间存在倍数关系,让学生巩固因数和倍数之间的相互关系,学会说两句话:谁是谁的倍数,谁是谁的因数。第②小题在原有6个白色五角星的基础上增加1个,通过直观感知,7除以2有余数,巧妙地让学生领悟到7不是2的倍数,并试着说出7比2的3倍多1或7比2的4倍少1等结论。此题作为反例,扩充学生对判断一个数是否是另一个数的倍数或因数的新认识,使学生知道在说一个数是另一个数的倍数或因数时须刚好分完,没有剩余。为后续“倍数和因数”这一概念在整除范围内学习做好铺垫。】

四、回顾整理,提升方法(略)

课后再思

数学概念的形成有两种,一种是同化,一种是顺应。对小学生来说,更多的是经历概念的顺应过程。现有教材一般把“倍数和因数”安排在四、五年级学习,是从整数的整除性出发构建概念的,孩子们更多的是依靠模仿与记忆构建“谁是谁的倍数,谁是谁的因数”,缺乏“概念意象”上的多元理解,概念以“定义”的方式形式化地存储于学生的脑海里,这样的“概念定义”缺乏生长性与同化性。我们思考:在二年级学习了“倍”之后,能否安排一节“倍数和因数”课,一方面可以巩固“倍”的概念,另一方面把“倍数与因数”嫁接到“倍”上,顺其生长,不仅可以建立起“概念串”,也可以有效区分概念之间的差异。本节课,我们主要通过以下两方面,让孩子经历有意义的概念学习之旅。

(下转第6页)

鳄鱼嘴巴张得小。然后问学生:哪条鳄鱼嘴巴张得开?学生说小鳄鱼的嘴巴张得开。我又问:大鳄鱼嘴巴是那么的长,小鳄鱼的嘴巴才那么小,你怎么能说小鳄鱼的嘴巴张得开呢?学生马上会反驳:问题是要讨论张开度,跟边的长短没有关系。我觉得角的概念要这样引进,突出研究张开度的问题。

巩子坤:这就抓住角的本质了,很好。事实上,欧几里得的《几何原本》中,角的本质说得很清楚:两条直线相交,如果不重合的话,一条直线相对于另一条直线的倾斜程度叫角。我们用一点引出的两条线段构成的图形叫角,并没有揭示角的本质;一条直线相对于另一条直线的倾斜度,才是角的本质。

我们再来谈谈等价类。

张奠宙:等价类,就是指同一个东西有很多种表示方式。一个事物可以有多种表示,对小学生来说难不难?一旦把分数多种表示的问题点穿了,再辅以现实生活中的例子,也就不难了。推而广之,一个角也有多种表示,一条直线也有多种表示,道理都是一样的。尤其是对优秀生来说,更重要的是数学方法的学习。

巩子坤:张先生的意思是,要通过讲分数,或者是讲角的概念,让小学生潜移默化地体会

到等价类的思想。

张奠宙:“等价类”这个名词不一定要说出来,但是对小学生来说,必须知道一个事物可以有多种表示。举例来说,一个人可以穿各种各样的衣服,外表不同,本质都是同一个人。这个思想我希望在教材中要体现出来。分数的相等性质讲完以后,接下来可以告诉学生:你在春夏秋冬所穿的衣服各种各样,但都是你本人。一句话就点透了。这种潜移默化的数学思想方法我们做得太少。现在提倡“四基教学”,要在数学思想方法上下功夫。这类比较深刻的高观点,学生不懂不影响做题,不影响考试。但是从培养数学素养的角度看,其思想境界就大不相同了。

巩子坤:老师首先要意识到这种思想方法,然后才能在教学中适时渗透进去。有时候,专家教师上课的点睛之笔,上课的味道,正是来自他对数学的感悟,与普通教师的区别就在于此。当然,这个等价类思想,可以写在教师用书上,供大家参考。

张奠宙:最后问问张园老师,分数的基本性质,改称“分数的相等性质”,你会不会反对?

张园:改了当然好。但教材要改。教材不改,我一个人改也没有用。

(上接第41页)

首先,让孩子充分经历多元表征。对于表征,孩子们一般有两种方式,一种用直观图示去表征,一种用算式去表征。通过这两种不同思维形式的多元表征,让孩子们充分理解“6是2的3倍”的道理。在此基础上生成:6是2的3倍,我们也可以说6是2的倍数。从精确地说“6是2的3倍”,到模糊地说“6是2的倍数”,这样的嫁接顺其自然,符合孩子的认知规律。我们在想:这是不是在寻找概念形成的最有意义的过程呢?

其次,夯实“谁是谁的倍数”之后,再次引领孩子们经历因数学习的表征过程,而这里的学习方式略有变化,突出在独立思考的基础上进行小组合作。通过小组合作学习,让孩子们

有选择性地再次表征:6是12的因数,5是15的因数,2是8的因数……这种表征又进一步地巩固了这种有意义的学习。

实践证明,只要好好培育“倍”这颗种子,哪怕是二年级的孩子,也可以健康茁壮地生长出“倍数和因数”的枝丫。

由此可见,有意义的概念学习,必定是基于儿童的原有“种子”之上,以及多元丰富的概念表征之上。

(浙江省杭州市崇文实验学校,
浙江省杭州市天长小学)