

中小学数学教学论著译丛

# 数学教与学研究手册

[美] D.A. 格劳斯 主编

上海教育出版社



责任编辑 韩希塘

中小学数学教学论著译丛

中小学数学能力心理学

[苏]克鲁捷茨基

儿童怎样学习数学

[美]柯普兰

数学课程发展

[英]豪森 [德]凯特尔 [美]基尔帕特里克

作为教育任务的数学

[荷兰]弗赖登塔尔

数学教育哲学

[英]Paul Ernest

数学教学理论是一门科学

[德]Rolf Biehler 等主编

数学教与学研究手册

[美]D.A. 格劳斯 主编

数学教育再探 —— 在中国的讲学

[荷兰]弗赖登塔尔



ISBN 7-5320-6147-7 / G · 6302

定 价：（软精）27.00 元

# 数学教与学研究手册

[美] D.A. 格劳斯 主编

中小学数学教学论著译丛

陈昌平 王继延 陈美廉  
赵小平 毛力熊 张远增  
陆 林 译

上海教育出版社

**Handbook of Research on  
Mathematics Teaching and Learning**

Edited by Douglas A. Grouws

Copyright © 1992 by National Council of Teachers of Mathematics  
Macmillan Publishing Company

中小学数学教学论著译丛

**数学教与学研究手册**

[美] D. A. 格劳斯 主编

陈昌平 王继延 陈美康

赵小平 毛力能 张远增

陆 林 译

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

(邮政编码: 200031)

各地 新华书店 经销 上海市印刷十二厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 33.25 插页 4 字数 573,000

1999 年 4 月第 1 版 1999 年 4 月第 1 次印刷

印数 1-2150 本

ISBN 7-5320-6147-7/G·0302 定价: (软精) 27.00 元



## 原书主编为中译本写的序

我们关于数学的教与学的研究知识,在过去的二十多年间,有了实质性的进展。由于研究的增加,我们现在对于任课教师在培养学生对重要思想和概念的学习中所起的重要作用,有了较深入的认识。对于学生怎样掌握基本的思想和技能,并会在学校里、在个人生活中和在工作中把它们拿来应用,这样的学习过程,我们也已经有了较好的理解。

《数学教与学研究手册》-书中各章的作者,都是他们工作领域里的专家。他们对我们的研究知识作了令人钦佩的综合处理,使得它们能为将来的研究指出方向,并成为在各级教育中如何对学生施行数学教育这问题进行决策的一种基础。作为《手册》的主编,我对本书中的许多章由英文翻译成为中文,感到特别的高兴。这样,就会使更多的学者、教师和学生能从各章的作者关于数学教育研究的见解中得到好处。

最后,我要对使这翻译成为可能的所有中国同事们表示感谢。我特别要感谢华东师范大学的陈昌平教授,是他的不懈努力,使这项翻译工作得以开始和臻于完成。

道格拉斯·阿·格劳斯

于衣阿华州,衣阿华市

# 前 言

在过去的二十年间关于数学教学的研究蓬勃地发展了起来。现在已经存在着一个公认的研究团体,它不仅是在数学的领域内进行运作,而且在工作的所有方面也考虑到数学领域的性质,其中包括了研究问题的形成,研讨方式的选定,工具的设计,数据的收集,结果的解释,以及对其涵义的建议。诚然,不是所有归类为数学教育研究的课题都给予所涉及的数学以同样的注意,而且也不是每个课题对上面所提到的研讨的各个方面给予同样的对待,然而,在这个方向已有足够多的进展来规定数学教育的研究是一个研究领域,以及认定哪些进行这些课题的人们是数学教育研究的团体。因而,这本手册的诞生就成为完全合适的。手册的主要目标是把过去的研究综合起来并使之重新概念化,提出对此领域进步最有益的研究范围,并在适当的地方,提供研究对课堂实践的影响。

## 读 者

有大量的学者认为他们的研究兴趣是数学教育。他们的丰饶的研究成果需要有论坛来分享各种想法和研究的成果,以便使这个领域能在集体的智慧和已有的成果的基础上向前发展,不致由于信息不灵或多余的研究而造成浪费。本手册的主要读者为数学

教育研究人员和在数学教育中作学术工作的人员。这一个群体包括了学院和大学教员、研究生、研究和发展中心的研究人员,以及在数学学科内进行和应用科研的联邦、州和地方机构的工作人员。本书作者们的原意是从过去的工作中,提供对进行研究有益的观点和有关的信息,手册也应该成为研究生讨论班的一本有用的教科书。

各章的作者并不是专门为了课程建设者、教职工培训者或教师而写,但是本手册应该对这三类人员都是有用的,因为是他们对学校的数学教育的课程和讲授制订政策和作出决策。许多研究人员都认为各种水平的数学教师都会和科研有关,因为它对领域内的积累有益处,因为教师所具有的敏锐的直觉和经验,也因为所涉及的反映和所获得的经验将都会改进教学。我并没有期望本书会使许多教师转到这个方向上来,然而,我希望阅读本手册可以激发一些教师在他们的课堂内进行研究,本手册能成为他们的一个有用的工具。

## 范 围

这本手册的设计是使其成为在数学教育内的研究和研究成果的一个全面的报道。虽说本书的范围是广泛的,但是它肯定会对某些方面注意得更多些。这样的方面会随着数学教育研究的进展而变得更为明显。各章之间的覆盖面会有一些重叠。这种重叠有助于更集中地注意到当前研究的前沿中的想法和问题,提供对某一问题多个作者的各种观点,以及阐明在本领域内科研的相互关系。手册中的一些章节强调学习数学的问题,而另一些则强调其教学的方面。有趣的是大多数作者对两种观点都作了一定程度的阐述(多数是在没有编辑许多诱导的情况下做的)。过去,这两个方面往往确定了两个不同的科学探讨的学科。由于在教和学之间

的重要的关系,对这两种功能的兼有的关注是重要的。

## 结 构

在手册的许多章节中考虑了教学与学习,但是在形成手册的结构中也运用了其他自然地分成章节的方法。本手册共有 29 章,分为五个部分。第一部分“总论”,由 4 章构成,它包含有数学教育的研究历史;历来对数学学科的性质分析以及它又曾如何影响了数学教育的研究;在数学教育中的学术观点,包括了研究方法的演进以及理论的作用;以及在数学教育中最为关键的问题之一——在学和教的方面中理解的性质。第二部分,“数学教学”,它的各章顾及到数学课堂文化,教学上的常规做法以及它们的效果,教师的信念和概念,教师的学识,小组教学,职业特性和数学教学,以及成为一名数学教师的过程——从职前教师教育直到教师在任职后的成长。第三部分,“从讲授中学习”,它的组成各章是关系到那些曾是相当多研究活动焦点的重要的数学领域。这些章节涉及到加法结构、乘法结构、有理数、数学中的问题求解和言之有理、估算和数字的意识、代数、几何和空间推理、概率和统计以及高一级的数学思想包括函数、极限、无限大和证明。尽管本部分的作者着重于学习方面的问题,反映了在这些领域内过去的许多研究的性质,他们还是周到地考虑到将教的问题作为他们讨论的一个重要部分。第四部分,“热点问题”,包括了教、学和内容问题,也处理了研究和今日在此领域中的一些最重要和最普遍的问题:技术、校外的数学学习、情感、性别、人种和种族,以及评估。最后的一部分,“展望”,提供了关于三个有趣的和重要的领域中有远识的观点。有一章探讨了数学成就的跨国研究以及它们的涵义。另一章考察了从国际的观点来看数学教育的研究,注意到它们的共同点和不同点。最后一章提出了一个关于我们目前状态,所面临的问题以

及关于我们应该怎样前进的一些想法的哲学的看法。

## 手册的形成

本手册是 NCTM(全美数学教师理事会)的一个项目。麦克米伦的执行编辑 L. 恰尔顿曾建议,编写关于数学的教和学的综合手册将对这个领域是一本有价值的书籍。NCTM 的主席 J. 多塞热情地认可了这个想法,并把它提到理事会上以取得同意。到 1986 年后期,他们同意了这个想法,其后不久他们就让我来作编辑。我接受了这个任务,因为我相信是需要这样一本书,也因为它提供了一个机会去推动数学教育的研究。我预见到编辑的工作是大量的,不过从未感到失望。我首先的任务是召集一个编委来协助提出手册的方向和结构,并且帮我物色作者。编委的成员有 T. P. 卡彭特,威斯康星大学;J. 多塞,伊利诺州立大学;J. 希伯脱,特拉华大学;C. 基兰,魁北克大学(蒙特利尔);J. 基尔帕特里克,乔治亚大学;D. B. 麦克芬德,圣地亚哥州立大学。他们都是数学教育方面的著名学者,我很高兴他们各人虽有许多其他工作,却都毫不犹豫地接受了这个任务。由于编委的协助,我们认定了各章的题目和可能的作者。我们想邀请的作者是在他们的专长领域内的优秀的、活跃的和有成就的研究人员。我们很高兴,几乎每位我们约请的可能作者(除了一位以外)都接受了邀请,并完成了他们的职责。要计算出完成手册所必需的漫长的形成时间只是简单的数学。每一章是由 2 位外部的专家来审稿,他们提供的反馈是批评和评论,编辑又复审了每一章,在许多情况下编委的一位成员也这样做。

由于每位作者的认真负责,使得手册和它的每一章的价值都得到了提高。他们仔细地 and 综合地回顾他(或她)那领域内的研究文献,并把它重新理性化以增强理解,并为将来的更丰富的研究提供基础。对我来说值得注意的是作者们对其他领域工作的重要性

的敏感程度,诸如认知心理学、哲学、社会学以及其他的方面,如科学教育、阅读和写作。他们对数学教育中许多思想的历史根源以及变得流行起来的正在发展中的方法,提供了一个所需要的展望以及感兴趣的元素。这些见识以及其他的许多见识都为本书的质量作出了贡献。

## 致 谢(节译)

写成一本手册需要有许多人的孜孜不倦的帮助,对本手册确实也是如此。作者们的工作和工作作风的品质是完成一本有价值的手册的最重要的因素。本书的 40 位作者都高质量地并尽了最大的努力去如期完成各自的工作,我对他们中每一位都深表感谢。编辑小组始终为我提供所需的学术方面的指导以及详尽的帮助,我为此表示感激。审稿人在每一章的形成上都起了很大的作用,他们慷慨地给予时间以及专业上的评价,我感谢他们所起的极其重要的作用。

最后,我还要感谢,从我的妻子 Carol 处得到的理解和支持,特别是当事情遇到了困难和进行得缓慢的时候。我也要谢谢我们的儿子,David 和 Michael,他们时常问到:“爸,手册进行得怎样了?”这种提醒有时是为了推动,有时也是为了鼓励,但是总归是为了帮助。

主 编

道格拉斯·阿·格劳斯

哥伦比亚,密苏里

# 目 录

原书主编为中译本写的序

前言

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 一、一份数学教育研究的历史·····                   | 1   |
| 二、数学的性质;其任务及影响·····                  | 79  |
| 三、关于学术和研究方法的观点·····                  | 97  |
| 四、具有理解的教和学·····                      | 131 |
| 五、数学教学实践及其效果·····                    | 195 |
| 六、教师的知识及其影响·····                     | 219 |
| 七、成为一名数学教师·····                      | 260 |
| 八、学会数学地思维;数学中的问题解决、超认知<br>和数学意识····· | 334 |
| 九、学校代数的学习和教学·····                    | 422 |
| 十、几何和空间推理·····                       | 482 |
| 十一、概率统计的研究;反思与展望·····                | 577 |
| 十二、朝着高等数学思维的转变:函数,极限,无限<br>和论证·····  | 640 |
| 十三、数学教育研究的一些国际观点·····                | 676 |
| 十四、关于数学教育的现状和发展方向的思考·····            | 705 |
| 选译后记·····                            | 730 |
| 附:原书目录·····                          | 732 |



# 一、一份数学教育研究的历史

Jeremy Kilpatrick \*

数学教育研究的历史是数学教育领域历史的一个组成部分。数学教育领域是在过去的两百年间发展起来的,在那期间,数学家和教育家把他们的注意力转到了以下的问题:在学校里,应该教和学哪些数学?是怎样教的和怎样学的?从一开始,数学教育研究的走向就受着教育研究这个范围更广的活动场所中的各种力量所支配,而教育研究在大约一个世纪前就放弃了哲学的思辨,而倾向于用更为科学的方法。但是,数学教育研究和数学教育本身一样,曾为自己的被认可而奋斗着。它企图提出自己的问题和形成解决这些问题的自己独有的方法;它企图为自己进行界说,并造就一群可以把自己称为数学教育研究工作者的核心人物。

在过去的二十年间,这个自行界说的任务大体上得到了完成。有了国际范围内的研究工作者团体的存在,它搞集会,出版杂志和业务通讯,在学科之内和学科之间都开展了研究工作及其评论以促进协作,企图在有研究团体的成员参与的各种数学教育组织的讨论会上,保持着一种活跃的研究意识。对于把形式、方向和内容给予了数学教育研究领域的一些人和事作一番回顾,这将是合适的。

---

\* 作者基尔帕特里克(J. Kilpatrick)是乔治亚大学数学教育教授,又是国际数学教育委员会(ICMI)的副主席。

任何回顾都会因为难于判断什么才算得上是本领域的研究工作这个问题而被搞得含混不清。在先前的数学教育研究工作中,有些项目在今天看来可算是一些范例,但研究者本人和他们同时代的人却可以有着不同的看法,把那些项目看作譬如说是心理调查,或是历史论文,或是教育实践的概括研究等等。反过来,像数学教科书的编写活动,在今天大多数人的眼里都不认为是研究工作了,但是,我们的数学教育的先辈们却可把它当作是本领域研究工作的集中体现。我们不知道在数学教育这个领域的形成过程中,人们究竟把什么看作是研究;那时的研究工作者可以并不用“数学教育研究”这个字眼去称呼他们的工作的,因此,我们在检阅过去的工作时,尽量要做到兼容并蓄。

研究这个词有一个有用的广泛定义,那就是“学科性调查”。“调查”一词意味着工作的目的在于要回答某一特定的问题;而不是自为的空洞思辨或学究式的钻研。“学科性”一词则不仅意味着研究工作要受到诸如心理学、历史学、哲学或人类学等学科的概念与方法的指导,而且也意味着它可以被公开显示出来,使得调查的线索可以被检查和核验。学科性调查不需要在“要以经验检验过的假设为基础”的意义下是“科学的”,但它和任何优良的科学工作一样,应该有学术性、公开性、甘心情愿地经受评论与可能的反驳。这样说来,数学教育研究就是对数学的教和学的学术性调查。

数学教育研究的目的是多方面的。如果我们把这样的研究看作和自然科学所遵循的“经验-分析”的传统相类似,那么我们就要采纳科学的传统目的,那就是:去说明、去预测或去控制。倘若我们把数学教育研究看作更像人类学家的所为——去对某一种文化作解释性的理解——那样,那么我们所企图的就是去理解:数学的教和学对于那些参与这个活动的人们说来,它的意义究竟何在。如果我们采用批判社会学的处理方法,并从事于“行动研究”以帮助教师和学生,使他们在自己的工作中能获得更大的自由和自主,

那么我们所做的研究就是为了改进实践,并使参与者投入到改进工作中去。在过去的大约十年间,数学教育研究的一场运动使它抛弃了经验-分析的传统,而走向(尽管是显得犹豫不决也罢)采用解释的和评论的方法。虽然方法上的“经验-分析”传统在本世纪的大部分时间里支配了数学教育研究的工作,但是,那种“解释、预测、控制”的科学精神使得以下的企图,从未显得如此高涨,即:去理解,而且特别地,去改进数学的教和学。然而,虽说有着上述企图,但所谓理解和改进,通常都并不采用参与者的观点,或从教学的来龙去脉中去看问题;数学教育研究所处理的,主要地却是研究者自己所理解的教与学的问题。他们之所以要从事研究工作,是因为他们知道实践有待改进,并对如何改进有着自己的看法;他们企图去做应用性的研究而不是纯粹性的研究。

当然,理解与改进这个高尚的目的会掩盖从事研究工作的另一些原因。人们知道,有过一些教育部长曾委托别人去做一些数学教育的研究工作,其唯一目的是要对由于某些原因而已经作出的或将要作出的决定,去论证其合理性。此外,谁也不能否认,在某些国家里,不少的数学教育工作者之所以做研究工作,其目的是要在高等院校里获取职位和升等升级,否则他们是不会去做这种工作的。做研究工作的动机通常是复杂的,它远不是非营利性的。

对在本世纪里积聚起来的规模宏大的数学教育研究工作者队伍,其个人动机或政治动机的多样性,是不易描述的。然而,从关于研究工作做了些什么、它该如何做、以及它对实践有着什么样的重要性等事项的论战中,我们可以看到,一个领域在进行着自我界说中。换言之,无论一个研究工作者在从事一定研究时具有何种私自的目的,他的研究都可能有助于明确:什么是数学教育研究。

### 在大学里的一席之地

和数学教育一样,数学教育研究首先发生在大学里。19世纪

初,在普鲁士新教派的大学里,对高等教育发起了一场改革运动,它终于蔓延到了别的国家,并引起了现代科学学科的分化和专业化。改革带来了以下的希望:大学教师不应只搞教学,而且也要搞科研。在欧洲,教育开始被当作一门单独的大学学科去被研究,但其进展是缓慢的。教育学的第一个讲座教授职位是于1779年在哈列(Halle)大学里创立的,但到了1910年,在德国的大学里担任教育学教学工作的教师不过13人。教育学的新教授多数来自哲学与历史学。在瑞典,乌普萨拉(Uppsala)大学早在1804年就由一位哲学教授讲授了教育学的课程,但直至1910年该大学才设立了教育学讲座教授的职位。在大不列颠,第一批教育学讲座教授职位之一是于1876年在爱丁堡(Edinburgh)大学设立的,命名为“教育理论、历史与实践”教授。在美国,虽然纽约大学(在1832年)、布朗大学(从1850年到1855年)以及密执安大学(于1860年)开始间歇地开设了教育学课,但一直到1873年才在衣阿华大学设立了第一个教育学终身教授的职位;在美国直到1890年,教育学讲座教授的职位还不多于十二个。

贯串于整个19世纪,各个大学都培养了中学的数学教师,但是在教师培训中,数学教学法课的教学充其量只是孤立地占了一小部分。在德国,19世纪初,为培养大学生将来去教完全中学而开设了教学法讨论班;这些讨论班教导学生去做独创性的数学研究工作;只是到了19世纪末,由于企图把教学法建设成为专门从事于学校知识研究的课程,以区别于一般的教育学课,德国的大学生才开始接受数学教学实习的训练。克莱茵(Felix Klein)是把方法课程引入大学教育中去的首领人物之一,他不仅在几所大学里建立了这样的课程,而且是指导了第一个数学教育博士学位,这学位的获得者是1911年哥廷根大学的施马克(Rudolf Schimmack)。

在别的国家里,那些准备将来去教数学的大学生学习数学课程,结合着零星地听些有关教室管理或职业道德的课。例如,在法

国,巴黎高等师范大学,自拿破仑于 1810 年建立起至第二次世界大战止,几乎连续不变,它对未来高中数学教师的训练,其课程主要在数学方面。(法国对于缺乏受过良好训练的教师的问題,其主要对策在于编写教科书,使它成为控制教学的一种机制。)在这些国家里,小学教师是由一些分散的教育机构培养的,这些机构或称为学院,或称为学校,或称为讲习班,或称为师范学校,它们是中等教育机构而不是高等教育院校。又例如,在日本,它采纳了美国的师范学校的模式,在 1908 年前后,日本办了 75 所师范学校(师范一词来自法文字“Normal”,意为规范或法则——教未来的教师学一些教学的法则)。与此同时,在美国兴起了一场运动,开始把师范学校发展成为教师学院,这场运动在 1920 年以后,加快了速度。许多国家由于开始建立了国民教育的制度,它们发现需要大量的接受过职业教育的合格教师。过去那种专业课的特殊训练,对于培养重点学校——如德国的完全中学(Gymnasium)、法国的高中(Lycée)、英国的公立学校——的师资也许是合适的,现在对于要培养骨干教师以配备到新建的中等学校里去,那种做法显然是不够的了。此外,对质量更高的小学教师的需要也使得许多国家把原先培养小学教师的学校从中等教育的品格提高到高等教育的品格。

19 世纪末,在一些国家的大学里,为了满足对更多的有良好训练的教师的需求而开始扩大了它们的教师教育纲要时,数学教育作为一个学术领域就逐渐地发展了起来。在 1912 年前后,国际数学教育委员会的一份报告报导说,在美国、大不列颠、德国和比利时,大学里开设了数学教育课(以补充数学课程)。在某些国家里,建立了新的培养师资的高等教育机构(例如 20 年代在德国建立的师范学校(pädagogische Hochschulen)),在其中,强调的重点放在怎样教的实践培养上面。在这些机构中,研究工作并不发达。在另外的一些地方(例如在美国,以及其后在德国、英国和日本),

某些培养小学或中学教师的专门学校,被吸收进大学或被扩充为大学。一个早期的例子,且其后为世界各地广泛摹仿的例子是纽约教师训练学院,它成立于1887年,其后在1890年被吸收进哥伦比亚大学,成为它的教师学院。费尔(Henri Fehr)在阅读了该学院1904—1905的一览表后,说该学院不是一所职业学校,即不是要尽快地培养一些去教“数学ABC”的教师,而是要造就未来的数学教师,除了给他们以职业上的实践指示外,同时也给他们以一种卓越的一般数学文化教育,使他们获得一种去从事专门研究的机会;也向他们介绍他们学科的历史发展知识。

逐渐地,或迟或早,在不同的国家里,数学教育终于被承认为一门大学的学科。从事于数学教育的大学教师不仅要教书,而且要做研究工作的这种要求,引导着他们中的许多人开展了数学教育的研究工作。

### 来自一些学科的影响

两门学科对数学教育研究有过根本性的影响。第一门是数学。数学家对他们学科的教与学的研究兴趣有着虽说是零星的、但是长期的历史。纯粹数学家和应用数学家之间关于对这门学科的高等研究要有怎样的准备才算合适的争论,不仅间发性地引出了修改中小学的和高等院校的课程的尝试,而且有时也引到对修改范围的研究,和对学生对那些修改作出何种反映进行调查。由于对低一级学校的训练不足、高等课程选修人数的下降、中小学数学课程变质的潜在可能性以及国家地位的受威胁等问题的关注,不时地推动着数学家们去考察中小学的所作所为,和考虑它们可以怎样地改进。关于数学是怎样地被创造出来的这个的好奇心,也不时地引导数学家们对他们自己的思考过程进行回顾,并企图把那种思考过程教给别人。一些数学家在观察了他们的几辈或孙辈的数学思维结果之后,受到鼓舞去对那种思维作出详细的分

析,或对它们的改进订出计划。虽然上述这些数学教育的偶然性工作并不都是站得住脚,但部分地是由于那些数学家在社会上的地位,它们通常都很受重视。

当数学教育在大学里发展起来的时候,它造成一种吸引一些原先兴趣是在数学上的、以及一些甚至自视为数学家的人们的趋势。这些数学教育工作者开展了历史的和哲学的研究、调查,并终于开展了一些经验主义类型的研究工作。他们的工作以及数学家们的工作,提出了许多的问题,它们仍为今天的研究工作者所研究着。

影响数学教育研究的第二门主要的学科是心理学。根据舒布林(Schubring)的研究,数学教育发展的先决条件之一是按年龄分班的学校的出现,它使教师能把一个班级当作一个群体来处理,并开始考察认知发展的模式。接近20世纪之交,在德国的一些心理研究所和在美国的一些心理学系开始进行了有关教育的经验主义的研究。心理学成了中小学的“驾驭科学”,从而成为师范学校课程的核心部分。心理学作为一门科学的学科,它是在大学里发生和发展起来的,它给教育院校与系科的教授们以一种科学,可藉以提高他们在院校里的地位,也给他们提供了一组方法,使他们在要求他们去开展的那些研究工作中可以采用。另一方面,心理学内部的人力过剩的压力也推动着研究工作者走向教育研究。从教育心理学的初期起,数学就是用来研究学习的一种流行的载体,这也许是由于看到了它在中小学课程中的重要地位;它的不受学派影响的相对独立性;它作为学校课目所具有的集中的而又有层次性的结构;它的抽象性和随意性;以及它在学习任务中所能提供的复杂性与困难性的范围;等等。数学教育工作者对心理学的研究工作通常都抱有一种保留的态度,这是由于他们看到心理学的研究对大学的数学课程毫不涉及或甚至于无知的缘故,但是他们对心理学的思想和方法,却是从不迟疑地加以随意借用的。

这样,追溯数学教育研究的根源,它首先联系于数学,其次联系于心理学。笼统而言之,可以说:数学方面的根源主要地是对教与学的数学内容所进行的研究,而心理学方面的根源主要地是对那些内容应该怎样教和怎样学所进行的研究。可作另一种笼统的说法是:数学家倾向于对中学的和大学的数学发生兴趣,而心理学家倾向于对小学的数学发生兴趣。这两种笼统说法都有足够的真实性,它使我们做综述时可以作出有用的分类;但另一方面它们也有足够的例外,使历史显得引人入胜。

后面,在概述了两种根源之后,我们将介绍数学教育作为一个研究领域的兴起的历史轮廓,其中将讨论在本世纪最初的三分之二时间内由那些被称为数学教育工作者的人们所做的研究工作。然后,将谈及在其后大约十年间国际数学教育研究团体的形成,并一直谈到 1980 年代初的历史;关于本领域中近年来的一些挑战与反响,也将作一概要的阐述。

## 数学方面的根源

克莱茵于 1872 年 23 岁时,在获得了爱尔朗根(Erlangen)大学数学教授职位之际,发表了他的著名的爱尔朗根纲领,在其中,他给出了如何利用一种变换群的不变量去刻划一种几何学的论述,这对几何学的研究给予了富有成效的新的推动力量。与此同时,他也发表了一篇技术性较小的有关数学教育的就职演说,他在那里提出了一种宁可称之为传统普鲁士新人文主义的数学观。他虽然论述了要更多地注意把数学应用到别的科学中去,但他强调最多的却是数学所能有的形式教育的价值。他号召更为活跃的教学,要求在完全中学里和在大学里,数学的处理要更有生气。他提倡未来的教师要有那样多的数学知识,使得他们能够从事独立的研究工作(普鲁士 1866 年的教学章程规定,应聘者要在他们所选



择的领域里发表一篇独创性的研究工作)。在那时,克莱茵对于未来教师所从事的研究究竟是怎样的一种特殊研究,他是不予关注的——数学的形式教育价值使得任何论题都是一样地好。但是在他的后半生中,他改变了他原有的看法,认为教师应该集中精力于那些对他们的职业说来有着根本重要性的论题上。

在他的爱尔朗根演说中,克莱茵哀叹人文教育和科学教育的分离。他认为数学是处在它们二者之间,而占据着一种中心的位置。克莱茵本人的教育使他普遍地接触了数学内部的各个领域,也接触了数学和科学之间的种种联系。在1885年他到了哥廷根(Göttingen)之后,他就把哥廷根建立成了应用数学与技术的研究中心。在1888年,他建议普鲁士的各工程学院和大学合并。但是这种合并并没有实现。接近1900年,克莱茵提出,来自三类中等学校(即完全中学、实用中学、高级职业学校)中任何一类学校的学生,在数学上都要达到这样的程度,以致有能力进入高等教育中的任何类型的院校中去学习。根据舒布林的报导,克莱茵关于高等教育改革的建议从未被接受,这促使克莱茵从事于一种范围更为广泛的改革,即一种从中学开始的改革。他认为,解析几何和微积分应该下放到中学去,函数的概念应该成为改革的旗帜。克莱茵和他以后的许多数学家一样,相信:想要使现代高等教育的要求得到满足,那么中小学数学课程必须作实质性的变化,他认为这是其中的关键。

## 国际委员会

在1908年罗马第四次国际数学家代表大会(ICM)上,成立了一个新的组织,叫做国际数学教育委员会。哥伦比亚大学教师学院的史密斯(David Eugene Smith)在1905年就第一次提出了建立国际委员会以研究数学教学的思想。他好像相信,一个广泛的跨国研究能够帮助各国认识数学课程的各种不同组织途径的价值,但

是他没有提出改革的议事日程。克莱茵虽然没有出席罗马的代表大会,但他却能利用这个新的委员会去推进他的改革目标。克莱茵被选为委员会的主席(任职到1925年他逝世时为止),日内瓦大学的费尔为秘书长。由费尔和巴黎多艺大学的莱桑(Charles Laisant)在1899年创办的杂志《数学教学》(*L'Enseignement Mathématique*)成了委员会的官方杂志。

国际委员会的公开目的是报导世界各国各类学校的数学教学的状况。各国按它们此前在国际数学家大会上的活跃程度而被邀请去参加委员会的活动。国家级的子委员会也被建立,并被邀请到1912年在英国剑桥召开的ICM上去汇报。接着的活动有如风起云涌,17个子委员会在ICM上作了国情汇报。比较长的报告有:美国的11卷,德国的6卷,法国的6卷和英国的两大卷。根据舒布林的报导,在20个国家级子委员会中,于1914年前,有9个不仅提出了国情汇报,而且也进行了“重大的改革活动”。这9个国家是:奥地利、比利时、丹麦、法国、德国、匈牙利、瑞典、英国和美国。

在上面所说的汇报中,涉及国际比较的,只有由匈牙利所作的关于各种改革的努力的综合论述,以及由美国所作的关于课程与教师培训的国际比较的四份报告。这些比较是描述性的而不是分析性的;例如,主要的课程比较只包括一些教学大纲的罗列和一点简单的论述,去说明美国的课程和欧洲的一般实际区别何在。一些企图对跨国间的类同与差别作比较深入调查的报告是由委员会自己作出的。例如,在1912的ICM上,选作研究的论题之一是关于中学数学教学中的直观与实验。史密斯报告了委员会的研究结果,这些结果是以德国巴门(Barmen)高等职业学校的利兹曼(Walther Lietzmann)所作问卷调查的数据为基础的。史密斯发现画法几何在几个国家里受到了更大的重视,但他无法断定函数概念是否更广泛地得到了直观的处理。但是必须指出,对问卷作答的只

是被查的六个国家中每国一两所学院或大学的教授们,所以报告对当时实际情况所作的描述,其充分性是有限的。

国际数学教育委员会所作的报告(根据舒布林 1988 年的调查,这样的报告在 1920 年前,发表了 294 份),标记着数学家和数学教育工作者们不仅开始努力于改革中小学的数学,而且也努力于收集对改革可能有用的信息。到了 20 世纪初,克莱茵已远不是对中小学改革感兴趣的唯一的数学家了。法国在 1902 年通过政府的法令改革了它的几何教学,像波莱尔(Emile Borel)、阿达玛(Jaques Hadamard)和勒贝格(Henri Lebesgue)等数学家都写了文章和教科书。在英国,皇家科学学院的佩里(John Perry)制订了实用数学的新大纲,并在 1901 年上书大不列颠科学协会,对当时的数学教学提出了严厉的批评,主张采用更加直观的和以实验为基础的方法。哥伦比亚大学的摩尔(Eliakim Hastings Moore)于 1902 年从美国数学会主席的位置上退休,他附和佩里的批评,并提倡一种课程,在其中数学的不同分支融合为一。他还号召职业数学家们投身到中小学的数学改革中去。但是投入——经常是采取编写教材的方式——是一回事,而精心的研究是另一回事。国际委员会的数据收集活动是一种丰功伟绩,它在政策上有明确的目的,但在方法上却不精练,在概念上也薄弱。由它们所产生的报告多数是数据的堆砌,而不是有分析有说明。然而,它毕竟是为对中小学数学该教什么和怎样教的问题进行研究开了个好头。

## 数学思维的研究

数学家们对数学创造的神秘过程经常地感到兴趣。当他们做数学时,他们所做的工作究竟是怎样做出来的?他们习惯于用“顿悟”或“直观”这样的一些字眼,企图抓住这过程的某些方面。庞加莱(Henri Poincaré)(1899)在《数学教学》(L'Enseignement Mathématique)的创刊号上提出:在数学教学中除注意逻辑外,要更多地注

意直观。他写道：“我们是通过逻辑去证明的，但我们是通过直观去创造”。庞加莱认为数学创造是一种洞察的过程，他强调了在高度专心一段时间后会突然地出现的顿悟的火花。他在后来的一篇论述数学发现的文章里，叙述了他怎样把他工作过的一道难题放在一边，然后在一次远足里，当他把脚踏上车蹬时突然地对答案得到了顿悟的故事。他说，这样的一种顿悟是有着明确的和必然的特性的。

《数学教学》的编辑费尔和莱桑曾对 100 位数学家发出了问卷，调查他们是怎样做数学的；其后，数学家麦利特(E. Maillet)做了一个平行的调查，他特别对数学梦的调查有兴趣。在麦利特的联系者中，很少有人说做过数学梦。费尔和莱桑的调查得到了日内瓦的心理学家克拉帕雷德(Edouard Claparède)和弗卢努亚(Theodore Flournoy)的协助。他们的调查包含着广泛的论题，从关于早期的学习和兴趣的回忆(你记得何时在何种情况下你开始对数学科学有了兴趣?)到工作习惯(怎样会工作得好些，是站着，坐着，或躺着?)到灵感过程(你认为你的主要发现是来自对某一确定方向的刻意追求，或是譬如说，它们是偶然地萌生在你心中的?)等。庞加莱认为《数学教学》的调查在本质上证实了他自己的结论；但阿达玛对调查感到不满意，因为它只问及了成功者的发现，而没有问及失败者的情况，同时也因为他觉得大多数答案是来自一些“所谓的数学家，他们的名字现在已完全不为人所知了”。《数学教学》的最后报告，基本上就是对每组问题逐字地罗列出它们的答案，并附加了一些一般性的评论。

阿达玛以后(1945/1954)向美国的一些数学家做了他自己的非形式的调查，向诸如伯科夫(George Birkhoff)、维纳(Norbert Wiener)、波利亚(George Pólya)和爱因斯坦(Albert Einstein)这样的一些数学家询问了他们在做数学时用到的心智表象(mental image)的问题。戴维斯和赫什(Davis and Hersh)(在他们 1981 年所著的

《数学经验》第 308 页上)用“数学的认知类型”一词去刻划阿达玛所说的问题解决途径上的差异。的确,阿达玛的随随便便的研究和其不完整的报导却带来了其后关于认知类型及其数学思维的关系的大量研究,虽然这里所说的思维指的是普通做数学的人的思维。

阿达玛在他的书(《数学领域中的发明心理学》第 1 页~2 页)上谈及心理研究中的主观法(内省法)和客观法(行为法)。他提倡在对数学创造的研究中使用主观法,认为在这种现象中,例外情况众多,使观察者所要做的情况比较无法进行。他把行为主义者拒绝对思想与意识的重视看作是“一种非科学的态度”。在本世纪早期兴起的行为主义理论,无论它是不是非科学的,它对数学思维的研究都起了极大的妨碍作用。

## 心理学方面的根源

在《数学教学》第一期上,除了登载了庞加莱论数学教学的文章外,也登载了比耐(Alfred Binet)的“论科学的心理学”一文。比耐是那十年前在索尔波纳(Sorbonne)\*建立起来的法国的第一个心理实验室的主任。他在文章里叙述了发生在几个国家里的心理学运动,这运动要求用以数据为基础的准确结果去代替先验地做结论的做法。实验心理不可能在个人的书房里或实验室里做,它必须在学校里直接地面向儿童,从而主要地要由教师们去做。比耐接着提出了研究的三种主要方法:问卷、观察与实验。(他评论说,问卷对于初步的调查虽然是好的,但它应该围绕着一一定的主题,这主题的重要性是和问卷需要花费的力气相当的。他指出了“美国人的问卷漫无边际”。)他主张给小学教师以科学的训练。比

---

\* 译注:即巴黎大学所在地。

耐意识到他的读者群多是中学的教学力量,所以他也要要求他们的关心和理解。

## 关于思维的研究

**心智能力的测量** 今天,比耐是因为他对思维心理学的贡献和作为智力测量的创始人而被推崇的。在他的生涯的早期,他曾追随过盛极一时的从颅骨测量去断定智力大小的爱好风尚。高尔(Franz Josef Gall)是颅相学“科学”的创始人(企图由颅骨的形状,特别是它的“凸块”数,去断定特殊的心智能力);布罗卡(Paul Broca)则把颅相学发展成为头盖测定学(测量颅骨及其容量)。神经病学家保罗·默比乌斯(Paul Möbius,他是数学家 August Möbius 的孙子)研究了一些大数学家的头颅——以及其他特征——后,宣称数学才能是可以由颅骨的形状去断定的。虽然他所说的测量方式要比高尔所提出的方式要复杂得多。然而,比耐自己对儿童和青少年做了审慎的考查以后认为:体格的测量不可能给出心智杰出能力的有力证据;要研究心智能力,就必须到能力得以显示的那些工作中去考察。

在英国,高尔顿(Francis Galton)(他是达尔文的第二位表兄弟)尝试着把达尔文的进化论应用到心理学的研究中去。他利用了一系列生理的与心理的测量,想要找到心智能力遗传的实验证据。虽然高尔顿在企图把物理现象与心理现象结合起来,把它们都当作“官能”(faculties)对待,并使用了统计学去维护他所作的各种解释的做法中,有着“循环解释”和“逻辑上自我论证”的毛病,但他的这些做法却开创了心理测试的科学。他的继承人皮尔逊(Karl Pearson)、伯特(Cyril Burt)和斯皮尔曼(Charles Spearman)推进了他的工作,终于把差别心理学(differential psychology)建设成为心理学的一个主要分支。高尔顿的测试局限于记下对测试的反应(反应时间,字的联想,感觉辨别等)。而是比耐,他发现了使用更接近于

日常生活中所见到的“复合的”工作去评估心智能力的方法。

倘使在比耐的智力测试方法传过大西洋之际,他的测试的思想——即:记分是用于诊断而不是用于划分等级;他不承认有所谓“智力”的那样一种天生的固定的气质——也被保留下来的话,那么“我们原会免除本世纪中一项主要的科学的误用”(摘自古尔德(Gould)1981年的文章)。但与此相反,美国的心理学家,诸如戈达德(Henry Goddard)、特曼(Lewis Terman)和约克斯(Robert Yerkes)等把比耐的测试发展成为一种智商(IQ)遗传的理论,这种理论不仅在社会政策上产生了一些灾难性的后果,而且也使美国的一代数学教育研究工作者在期待改进数学能力的观点上受到了毒害。

**心理发展的探索** 比耐设计他的智商(IQ)标度时,抱着有限的目的,即为了确定出那样的一些学生来:他们的成绩说明了他们需要受到一些特殊的教育。他对分数所能标记的意义是什么这问题的兴趣小,而对具有一定成绩模式的学生应给以何种帮助这问题的兴趣大。1920年在比耐的实验里,一位来自纽沙特(Neuchâtel)的新近的自然科学博士学位的获得者,接受了一个任务:将遗传学家伯特在英国发展起来的推理测试方法用到巴黎的儿童身上去并加以标准化。这位新博士的名字就是皮亚杰(Jean Piaget)。他对孩子们如何获得答案的过程深感兴趣——特别是当答案不正确的时候。皮亚杰将精神病的试验步骤用于对推理过程进行评估,并由此发展起以后成为他的标记的“临床法”。他的思想比比耐的用了更长的时间才跨出了欧洲的法语地区,但——当它终于传到了国外的時候,它获得了重大的影响,这不仅表现在数学教育研究的内容上,而且也表现在它的方法论上。

自1875年旺德(Wilhelm Wundt)在莱比锡(Leipzig)和詹姆斯(William James)在哈佛建立了心理实验室以后,到了19世纪末,在欧洲、亚洲和北美建立起了十来个这样的实验室,比耐的实验室是

其中的一个。其中的另一个是由霍尔(G. Stanley Hall)于 1883 年在霍普金斯大学(Johns Hopkins University)建立起来的。霍尔是旺德的学生,他把实验教育带回了美国,并在美国掀起了一场研究儿童的运动。霍尔和当时美国的许多心理学家一样,受到了达尔文学说的强烈影响。他竭力主张:儿童的发展方式和人类的发展方式大致相同,因此,企图在儿童期去影响智力的发展是没有多大意义的。它把小学数学的教学看成是为了养成习惯,从而在他的小学课程中,分配给算术的时间很少。在第一次世界大战以后,霍尔的思想成为美国反智力运动的一个组成部分。那个运动对数学在学校课程中的地位造成了威胁,并对数学教育研究施加了影响,强调了算术的困难,强调了要把儿童的兴趣放在首位,强调了学习动机的需要。在法国,实验教育在比耐的实验室以外并不兴旺发达。但是,根据克拉帕雷德在 1911 年发表的调查报告,在欧洲的其他部分和在美国以及在俄国和日本,活动是十分活跃的。

**激发建设性的思维** 旺德的另一个学生库尔普(Oswald Külpe)于 1896 年在符茨堡(Würzburg)建立了心理实验室。这个实验室的心理学家偏离了旺德关于通过内省可以研究意识结构的观点。他们(符茨堡学派)宣称:不带有任何意象(image)的抽象思维是存在的,思维的研究不是通过它的内容而是通过它的作用去作出。库尔普的一个学生名叫沃特海姆(Max Wertheimer),他创立了完形心理学(Gestalt psychology),这种心理学虽然主要地是研究知觉(perception),但是对创造的过程和问题解决也给以了一定程度的注意。沃特海姆后来发表了一本论建设性思维的书,其中含有许多数学的例子。在符茨堡学派中,还有一人叫塞尔兹(Otto Selz),他的论问题解决的著作影响了整整一代的心理学家,其中包括邓克尔(Karl Duncker),他是一本很有影响的专著的作者,这本专著分析了问题解决的过程,其中包含了一些复杂的数学问题。



当美国的心理学研究受到了行为主义的支配时,这个国家的数学教育工作者对符茨堡和完形心理学家关于思维与推理的著作表现了特殊的兴趣(可参阅费尔 1953 年登载在《数学学习:其理论与实践》一书中的文章,该文企图对这里所说的各不相同的观点作了一种和谐的阐述;至于完形心理学应用于数学教学的介绍,可见雷斯尼克和福特(Resnick and Font)1981 年所著的书《数学教学心理学》)。

受到塞尔兹影响的另一位心理学家是维果茨基(Semenovich Vygotsky),虽然他对塞尔兹未注意到思维与语言间的关系而表示了惋惜。维果茨基建立了一种心理成长的理论,在其中他主张:教育应该指导发展而不是跟随发展。他使用了一种动态的研究方法,即在教学的条件下去观察思维发展的过程。他的这种方法为西方的研究工作者所接受;他的邻近发展域的概念——即个人能独立地解决的问题与在别人帮助下可能解决的问题在困难程度上的差别——受到那些从事于认知变化的社会传递问题的研究者们所使用。维果茨基是苏联的能力论的创建人之一,这种理论由克鲁捷茨基(Andreovich Krutetskii)用到了数学能力的研究上去。

由高尔顿开始的,并由比耐、皮亚杰、沃特海姆、塞尔兹、维果茨基等人通过各种途径加以继承的思维研究常常涉及到做数学的心智能力的问题。在这些研究中所引用的许多工作,从性质上说是属于数学的工作,而且,即使有些不是,但由于这些心理学家所界定的复杂思维的类型,在一些数学教育工作者看来,总是和数学操作相联系着的。数学思维的心理研究对数学家们关于他们是怎样工作的见解提供了补充和推广。然而,它对数学教育研究的影响,并不及教与学的研究那样广泛。

思维研究通常是要测验个体或群体在“典型的”条件下在操作上的差别,虽然有时候它也企图通过暗示或特殊的指导来使操作优化。它经常地是在一段时间里观察操作上的变化的。在由高尔

顿开始的思维研究中,其主流是考察那些被认为是反映着恒稳的心智特征的“因子”之间的联系。在许多这类研究中,一个积极的表现是它们乐意于测验那些自然地出现的各种关系,并把这些关系当作有待检验的假设的一种根源。而它的一个负面的表现是过多地使用了复杂的统计程序——诸如相关分析,回归分析,因素分析等,其中通常都要求假定:所出现的关系是线性的,效果是可加的,而这些假定都是成问题的。这种负面的表现因为受到了维果茨基和皮亚杰的影响而有所纠正。此外,一直到了最近,这些研究都把社会与文化对思维的影响实际上忽视了。

### 教与学的研究

**处理与效应** 心理学的第二个传统是更加直接地处理教与学的问题,这对数学教育研究的构思无疑地有着更大的影响。在这种传统中,研究工作从事于检验教学“处理”所产生的“效应”。教被看作一种处理,学被看作一种效应。就像做农业或药理学的研究一样,系统地将处理加以变化,接着对预料的效应作出仔细的测量,这样去考察各种不同处理的效应。构造物\*,诸如关于数学某一论题的知识等,在操作上被定义为自变量,并尽可能地加以量化。控制——诸如将“被试”随机地送去处理——使研究人员可以推断:一种处理产生了怎样的一种效应。(关于这种处理方法的更详细的阐述,可见坎贝尔和斯坦利(Campbell and Stanley)1963年出版的书《Experimental and quasi-experimental designs for research》。)

搞试验是“处理-效应”研究的一种范例。在单独一项研究的范围内,对效应进行分析的基本技术是方差分析,把处理之间的变

---

\* 译注:“构造物”原文是“Construct”。它是心理学的专门术语,代表可观察事实之间存在的关系。心理学中的习惯、智力、图式等概念,都可视为构造物的例子。

异拿来同诸处理内部的变异进行比较。方差分析最早是由费希尔(Ronald A. Fisher)在 20 年代结合着农业研究而发展起来的。费希尔没有把他的技巧应用到生物科学的外部,但是这种技巧,逐渐地进入了教育的研究,特别是在第二次世界大战以后。费希尔的思想之被接受,也得力于那种喜好把人类行为作生物学解释的倾向,这种倾向也曾引起行为主义的产生和把高尔顿心智测试的思想普及于教育界。

**联结论者对迁移的攻击** 在方差分析这种精致的方法被引进试验数据分析之前,研究者只简单地对给予不同处理的群体表现加以比较。这时的一个关键概念是“控制组”,这是因为如果连一个参照点或比较点都没有的话,那么对试验群体表现的描述就将受到很大的限制。在教育研究中使用控制组的这种做法,是因桑代克(Edward L. Thorndike)而得到普及。桑代克从 1900 年起便和伍德沃思(Robert S. Woodworth)一起做了一系列的试验,想要证明训练的迁移的局限性。例如,他们发现了:判断大小不同正方形面积的练习,对一个人判断三角形面积大小的能力,没有改进的作用。

桑代克把他的心理学称为联结论,它和巴甫洛夫(Ivan Pavlov)的条件反射论一起,成为行为主义的先驱。行为主义统治着美国的心理学直到 1930 年前后,在那以后它分化为托尔曼(Edward Tolman)和赫尔(Clark L. Hull)的新行为主义和斯金纳(B. F. Skinner)的激烈行为主义。桑代克强调了由于满意反应而引起的主动的和有选择的学习。他认为刺激与反应之间的联结可以通过成功便获得报偿的练习而得到加强。他在 1917 年编写的一系列算术课本中,及其后写的书《算术心理学》(1922)和《代数心理学》(1923)中都把上述原则应用到数学中去。这些书,除了对美国的算术教学给予了深入的影响外,也引起了大量的关于练习在算术学习中的

效果的研究。

那些认为数学对逻辑思维训练是至关重要的教育工作者,把桑代克和伍德沃思关于训练之迁移的研究工作看成是对他们学科的一种致命的打击。训练迁移说是一种支撑着精神训练理论的心理机制,这种理论即以下的古老观念:认为思维可以通过特殊科目的教学而得到一般性的训练。这种精神训练论同形式训练论(即认为一门学科的形式——如难度、抽象等——比它的内容更为重要)和官能心理学(即认为心灵是一组特殊的官能,为了发展,它需要锻炼)两者都有联系。

千百年来,数学作为一种自由艺术,在学校课程中有着巩固的地位。此外,它在16世纪末成了机械学以及随之而来的科学与技术革命的基础。但是到了19世纪末,它在中学与大学课程中须同一些新的科目诸如历史、自然科学、现代外语等争夺位置。面对一些认为数学在日常生活中并无太大用处的说法,羽毛未丰的数学教育领域中的一些成员起而为他们学科的训练价值辩护。例如,芝加哥大学的杨(Jacob W. A. Young)争辩说,“比数学内容更为重要的是以下事实,即它最典型、最清晰、最简单地给出了一些思维模式的范例,它们对任何人都有着极大的重要性。”许多数学家也认为数学的学习能培养创造能力:“数学教育的主要目的在发展心灵的官能”(见庞加莱《科学与方法》第128页)。于是,认为数学学习中的所得并不能迁移到其他领域中去说法引发了两方面的事,一方而是对数学教学的必要性作再考察,另一方而是引发了关于迁移的大量研究。

实际上,桑代克并没有说迁移不可能,“只是,一、不能认为迁移必然发生;二、它极少自动地发生;三、通过直接的教学以达到所要的结果通常比起期望波及的效果要更有效、更经济。”即桑代克的迁移论是有高度的限制性的,他认为只当迁移情况含有与训练情况“全等因素”的条件下,迁移才会发生。后来的研究对这种假

定义提出了异议。桑代克的全等因素论以后发展成为新行为主义的累积学习论,在其中,教学是以把复杂技巧分割为所谓学习层次的分析为基础。

贾德(Charles H. Judd)的一项早期研究成了对桑代克理论的特别有力的反驳。在贾德的研究中,他让五年级与六年级的学生练习用标枪射击水底下的目标。那些学过折射定律的学生比起那些未学过这条定律的学生来,对目标深度的变化显得更能适应。贾德议论说,迁移是通过一般化而实现的。他争辩说,一般化虽然在低级心理活动中可以不发生,但对于学校应予开发的高级思维而论,它却是典型的。他写道:

“那种认为迁移并不普遍发生或只轻度地发生的心理学是动物意识心理学。高等心理过程的心理学则教导我们:一切教育的目的和目标都是在发展系统的思想,这种思想能从它被获得的情景中迁移到别的情景中去。一般化思想的体系把人类的经验提到抽象、一般化、概念性理解的高度去加以阐明和澄清。”

虽然贾德的研究在方法上显得有些漏洞(小的不等价群体),并且只是提出了轮廓性的报告,但是以后有过几份报告宣称证实了他的发现。然而美国的心理学家们宁愿追随桑代克的迁移论而不是贾德的。可是数学教育工作者好像觉得贾德的观点更为意气相投,虽然他们批评两个人的观点都过份机械,都不符合教育作为经验的重建的要求。

**学校科目心理学** 贾德在芝加哥大学努力于建立学校科目心理学的事,也为数学教育工作者们所熟悉。“在学校的科目中,没有哪一门在研究的水平上和频率上,能比得上算术。”贾德企图把复杂事物的学习联系于基本的心理过程,以避免桑代克的还原论。

贾德认为,每门科目都有它自己的事实和其一般化,它们在知识能被利用之前,就需要被理解。贾德争辩说,桑代克以为算术是工具科目这种观点是错误的。相反,算术是“思维的一般模式”,“学校的任务就在于把整理这种智力的方法传授给学生,这种方法使世界的复杂性得以揭开,以及使由经验组成的新模式得以形成”。虽然贾德常常强调研究和学习中学科目而不只是小学科目的重要性,但是他本人的研究却集中于讨论来自算术的简单概念。类似地,他的学生伯斯威尔(Guy T. Buswell)和他与伯斯威尔的学生布劳内尔(William A. Brownell)——算术“意义”论的建立者——两人,在他们的数学研究中大致都限于算术学习。

贾德(1927)论数的概念的工作——他研究儿童与成年人在数——列音响或——列闪光时的速度与错误——是处于麦克莱伦(James A. Mclellan)、杜威(John Dewey)和菲利普斯(D. E. Phillips)诸人的先驱工作和几年后皮亚杰的成就之间。他们的研究都是企图说明数的概念如何产生自儿童的活动。麦克莱伦和杜威议论说儿童需要把部分联系于整体,需要测量也需要计数。菲利普斯在霍尔手下工作,他取得了大量的问卷数据之后,宣称他发现,计数的基础性比麦克莱伦和杜威所相信的要重要得多(杜威在1898年反驳说菲利普斯误解了他们的工作)。相反,皮亚杰企图把数概念的构建嵌入于逻辑思维的发展之中,而不在于计数的操作上。对他说来,数是个人行动反思的结果。他宣称,在现代数学基本结构和心理结构之间有着——对应的关系,而心理结构是由他称之为的反省抽象(reflective abstraction)所形成(他的一些解释以后受到了一些数学家的指责;例如,见弗赖登塔尔著《作为教育任务的数学》的附录\*)。贾德采取了中间的立场。他认为计数是根本的,但又强调了它的复杂性和对心理发展的依赖关系。后来布劳内尔(1928)把

---

\* 译注:有中译本,上海教育出版社1995年版。

贾德的工作推进到“点模式领域”(realm of dot patterns)\*,说明了在数的理解上由具体到一般的缓慢过程。在本世纪的后半叶,数的概念,包括计数和数运算的作用,成了数学教育研究中最活跃的所在。

**迁移作为试金石与催化剂** 然而,贾德的原则迁移而不是元素迁移的理论,可能是他对数学教育的最为持久的贡献。对许多心理学家和一般教育工作者而论,桑代克推翻了心智训练的概念——从而使数学教学的合理性受到了压抑;但是有着人文主义看法的数学教育工作者却不能袖手旁观,睁着眼看着他们的科目被排挤出课程表外。史密斯(D. E. Smith)、奥苏古德(W. F. Osgood)、杨等这些国际数学教育委员会的美国委员们对桑代克的以下说法表示了不能信服。桑代克说:“凡对至今已做过的那些实验的结果有所熟悉,并对它们的精神表示同情的数学家中,很少有人认为,要求他们改变关于数学学习价值的看法的东西,什么也不曾建立过。”1923年,纽约市霍勒斯曼学校(Horace Mann School)的布莱尔(Vivia Blair)想要做出有利于迁移论、从而也有利于数学的“训练价值”说的结论,她查阅了研究文献,也向数十位教育心理学家包括桑代克和贾德二人进行了调查,向国家数学大纲委员会作了报告,说她发现下面的观点得到了人们的支持,即实质性的迁移可以发生,但这依赖于教学方法(虽然桑代克向来回避对实质性一词的使用)。二十年后,争论再起。美国数学会和全美教师理事会的联合委员会在“论数学在中学的地位”一文中引证了支持迁移论的论据,斥责了那些宣称心智训练为无效的实验研究为不科学和误导。贾德的研究及由它引出的一些研究,使赞同迁移的议论保持活跃。

---

\* 译注:关于布劳内尔的工作介绍,可参考《中国大百科全书》心理学卷“数学教学心理学”条目。

这种议论逐渐地取得以下形式：迁移大量地可能，但我们的教学必须做得有利于迁移。贾德的论述如下：

“迁移的实际问题是一种训练的组织问题，它必须能把学生的心智引到别的领域中去。在学科的教学，有的方法使它迁移，而另外的一些教学方法则使迁移只会很小。数学作为一门学科，在我的判断里，并不能认为它一定能够迁移的。一切依赖于学科的处理方法。”

训练的迁移，这个论题在心理学家和数学教育工作者的关系问题中，占据一种突出的位置。它对数学在课程中的位置的讨论起着关键的作用，这种讨论有时使心理学家和数学教育工作者处于对立的阵营。它“作为任何与教育有关的学习理论里的最为重要的突出概念”（引自舒尔曼（L. S. Shulman）“心理学与数学教育”1970一文），引出了大量的研究工作，其中许多是关于数学教育的。例如，对于发现学习法，心理学家们的看法互相分歧，而数学教育工作者们则倾向于抱正面的和乐观的态度（即使有些数学教育工作者对发现与迁移的可能性作出了悲观的估价，发现与迁移这种现象的实在性和可求性也从未受到过怀疑）。而至少在北美，这个论题集中地表现了上半个世纪里的数学教育工作者所常有的一种矛盾心理：他们乐于借用行为心理学的研究方法，而对行为主义者关于学校数学的看法则表示了普遍的蔑视。20世纪50年代和60年代，皮亚杰的著作的英译本大量出现，并由布鲁纳（Jerome Bruner）对这些著作做了重新解释，这些都标志着认知心理学的到来。这时，数学教育研究工作者才开始对心理学理论有了比较审慎的敬意，并更加频繁地同心理学家进行了合作。

## 一个行业的兴起

数学教育作为人类活动的一个领域，其根源可追溯到几千年



前。公元前 3000 年的苏美尔族文字工作者便将学校里的应用数学作了系统化,并建立了位值制、六十进位小数、算法表使用等的教学方法。根据柏拉图(Plato)所著《美诺》(Meno)中的记载,在公元前 5 世纪,苏格拉底(Socrates)就曾用巧妙的提问去引导一个小奴隶发现以一个方形的对角线为底的方形,其面积是原方形面积的两倍。16 世纪的学者雷科德(Robert Recorde)不仅教数学,而且也写了教科书,在其中使用了苏格拉底的对话法去处理证明、定义和理解。19 世纪初的教育家如裴斯泰洛齐(Johann Pestalozzi)、福禄贝尔(Fredrich Froebel)和赫尔巴特(Johann F. Herbart)等人,提出了要把教学方法建立在具体经验和发展心智官能的教学目的上,这些提法影响了从幼儿园到中学的数学教学。在美国,1821 年,科尔伯恩(Warren Colburn)印行了——本算术改革课本,它采用了裴斯泰洛齐的教学原理;让学生由例题出发通过归纳去发现法则。在德国,由 1816 年到 1822 年,马丁·欧姆(Martin Ohm,他是物理学家欧姆的兄弟)发表过几本论数学教育的著作,提出了数学是运算间关系的一套体系的观点;后来,他编写过几本很有影响的教科书,在其中,数的概念被组成为一个由自然数到有理数、负数、实数与复数的逐步的扩充,和当今所用的组织原则相同。人们从事数学教育,以及对数学教育进行反思,这已是许多个世纪的事了。

## 早期的数学教育家和他们的研究工作

然而,正如在引言中所提到过,只是到了 19 世纪末,当国民教育体系建立了起来,并且在高等教育里开始了培养数学教师的制度后,数学教育才以一个行业的面目出现,然后有人自称为数学教育家。在英国,数学教育作为一个研究领域,是由一些教育家诸如戈弗雷(Charles Godfrey)、布兰福德(Benchara Branford)、卡森(George Carson)、纳恩(Percy Nunn)等人奠定基础的。在美国,主要的奠基人是史密斯和杨。

这些数学教育家,他们本人没有做过很多当今意义下的数学教育研究工作。史密斯的多数研究工作是关于数学史的(当然,其中有些是关于数学教育史的);戈弗雷所写的是论测验体系的文章;他们的主要著作都是关于如何教数学的;他们中多数人是著名的教科书的编者,包括史密斯和卡森,他们是代数与几何教科书的合编者。

当史密斯(1895)在密执安州伊普西兰蒂(Ypsilanti)州立师范学校教数学时,他确实做过一个小小的实验研究。(几年以后,史密斯就转到了哥伦比亚教师学院,他在那里因为在数学史方面的工作而著名。虽然他终于做了美国数学会的主席,但他只学习过大学的数学。他获得了艺术史的博士学位,在开始他的教师生涯之前他是当律师的。)史密斯的这项研究成为第一批研究论题之一,这论题——在学数学与做数学中的性别差异——以后成为研究工作中的一个主要焦点。史密斯引用了霍尔(1891)的代表作“儿童入学时的心理内容”。霍尔在其代表作中除了论述其他许多事情外,还报告说,女孩在空间概念方面擅长,而男孩则在数概念方面领先。(从霍尔在波士顿的研究和他从柏林方面提供的数据看来,其结果远比霍尔和史密斯所提出的结论含糊和不确定。)史密斯考察了他在科特兰(Cortland——在纽约州)州立师范学校自己班上学生(多为女生)的考试成绩,也考察了他在伊普西兰蒂所教班级的学校记录,他发现男学生的成绩稍好,特别是在算术和几何上,但差别仍然很小,所得结果的模式含糊。史密斯虽公开表示接受批评指正,但他对他辨认出了成绩差异的一些可能原因(包括选择因子和主考人的性别等)表现得趾高气扬。然而,他的结果并不总为后来的研究者所承认。

关于早期数学教育家怎样做研究工作的问題,布兰福德(1908)所著《数学教育的一项研究》中的一章,论“教育童学几何的一些试验”,可能是一个更有代表性的例子。该章所含的内容;比

关于两堂课的描述多不了很多东西,那两堂课一堂是由布兰福德对八个盲童组成的班上的;另一堂是由盲童的平时教师上的。正如豪森(Howson)所指出的(1988):“所描述的‘试验’,远不满足今天的最佳研究工作的标准。”布兰福德在他的序言和书中其他各处所作的评论似乎表明了,他本人也把自己的试验看作是一些未经很好组织的尝试,其目的是想要找出或说明教师想要作的那些活动,其结果表现如何。

虽然如此,无论我们在他们的工作中见到了多少局限性,这些数学教育家和他们的同事们,在我们这个领域中开始了系统调查的过程。通过他们自己的和他们的学生们的活动,他们奠定了研究工作的基础,这种研究工作既不是由于数学家们一时的好奇,也不为心理学家们的出于学科的需要而服务,而是为一个行业的实践问题去寻求答案。

### 教育作为一门科学

教育的科学化运动可追溯到贝恩(Alexander Bain)的书《教育作为一门科学》在1879年的出版。从这运动中产生出了一种兴趣:使用科学的方法去研究学校中各种科目的教学技巧。在英国,第一篇为获得大学学位而写的数学教育的论文是麦克利兰德(W. McClelland)1910年在爱丁堡大学写的教育学士论文,题为“减法的一些不同方法的实验研究”。数学教学方法的比较研究,作为一种研究工作,长久以来就已流行了。在20世纪的前三分之一时间里,在科学化运动高峰期所作的关于方法的研究,虽号称为实验,却极少采取对教学效果进行控制比较的形式,其中学生应随机地分配到不同的组中去。苏伊旦(Marilyn Suydam)对1900年到1965年间小学数学方面发表过的研究工作做了估计,她指出,在1951年—1965年间发表的研究工作中有三分之一可以归类为是一个实验,但在1900年—1928年间的研究工作中则只有八分之一可作

这样的归类。据苏伊旦所说,那时至少有四分之一以上的研究工作没有包含一个控制组;此外,样本量也比较小,同时也很少同某种强有力的理论学说相联系。布列斯里奇(Ernst R. Breslich)指出:“在这些研究中,比较方法或比较条件间的区分度极低。”伯斯威尔在结束他关于 1938 年间算术研究工作的贡献调查时,在作出他的有信心的结论之前,讲了一句沉闷的令人气馁的话:“在考察个别的一些关于算术的研究工作时,会使人经常地感到互相矛盾和混乱;但对整个课题所作的调查,却清楚地表明,研究的总体结果是对算术的整个教学大纲施加了一种合理的,有指导性的影响。”

### 对儿童的研究

科学化运动是带着普遍的乐观情绪开始的,但它早期的努力并不在教学方法的比较上,而是在另外的一些方面。关于儿童研究的领域,如果我们把德国的蒂德曼(Dieterich Tiedemann)看作为它的奠基人,那么它是启动于 18 世纪后期;而如果我们把达尔文对他的儿子的行为所作的观察看作是它的起点,那么它的开始就稍为迟些。但是不管怎么说,儿童研究长期处于休眠状态,一直到接近 19 世纪末,它才在德国和美国被重新拿了起来,并成为“科学教育学家的第一关注”和被系统地开展了起来。我们在前面已经提到过,是霍尔在美国开创了儿童研究。20 世纪早期,在克拉克(Clark)大学(霍尔是其创办人)和哥伦比亚大学以及哈佛大学里,少量的心理学博士论文中的几篇,研究了数概念或空间概念,其精神和儿童研究运动中所强调的自然主义的、描述性的学习相一致。斯迈勒(Helen B. Smiler)对美国 1880 至 1963 年间的数学教育研究工作做过一次调查,她发现一直到 1910 年所做的 37 项研究工作中,有 13 项可归类为概念发展的心理研究,其中包含关于准备就绪问题的研究;另有 4 项是教学方法问题的研究,其中对个体间的差异给予了关注。苏伊旦的调查指出:在 1925 年前的 53 个关于

小学数学的研究工作中,有 24 个(据我所计)是关于基本概念的,有 6 个是关于个体间差异的。这些研究中的许多个,显然是受到了霍尔和他的追随者的鼓舞的。1910 年以后,其他范畴的研究变得更为突出。从斯迈勒的资料中可以看出:从 1880 年到大约 1925 年,概念发展的研究明显衰落;威廉斯(Elisabeth Williams)于 1934 年在英国发表了她的论几何学习之基础的先驱性工作,但那时她没有追随者。关于数学概念的成长与发展的研究,其再度强烈地兴起是在 1960 年代,当时,按皮亚杰的蓝图谱写的智力发展变成了一项主要的研究兴趣。

霍尔的影响,以及 20 世纪初的教育家蒙台梭利(Maria Montessori)关于将活动与材料应用于教导儿童学数学的论述的影响,都不可低估。那些儿童研究倡导者们发展起来的计数活动、猜谜、及模式辨认仪器,直到今天还被使用着。然而,儿童研究本身在数学教育的耗费精力的研究上面收获很小。儿童研究倡导者们倾向于对学前儿童做出他们的最好工作,而在那些工作中,数学很少处于核心地位。此外,许多研究工作是属于低质量的。儿童研究运动“几乎不分轻重地研究着大量的问题,有时不去过问那些问题是否值得提出;它的调查技巧是呆板的,它的观察控制是松散的,它对问卷方法的使用,野心过大而又幼稚。”(摘自塞莱克(R. J. W. Sell-  
eck)1968 年的书《新教育:1870—1914》。)

作为一项运动,儿童研究是 19 世纪 90 年代开始在美国出现的一种普遍的不安现象的一个部分的表现,这种不安就是对当时所有学校科目中使用的形式的教学方法所感到的不满,这种方法在小学数学中表现尤甚,而小学数学课有时占去半天的课时,而且“它又是小学里留级的主要根源”(引自伯斯威尔和贾德 1925 年写的文章)。霍尔主张:“在学校教学计划中,应把所有算术的形式教学推到比通常迟得多的年份;在学校的低年级里,应坚持地致力于累积具体经验。”霍尔对数学教育的这种看法是有影响的。但在儿

十年间,那些要推迟算术形式教学的努力,比起美国教育界的另外两种现象,就相形见绌了。这两种现象都是科学化运动的一部分,它们是:测试运动,和要把学校课程限于有社会效益的科目范围内的企图。伯斯威尔和贾德在对 1925 年以前的算术研究所作的调查中指出:

“目前,数学的再组织工作在许多不同的方面通过许多实验工作者的努力在进行着,它是被当作当前众多科学研究的一种直接的成果来看待的……。当前运动的主要特征可以说是在于:它要求以下列一些工作作为改革的依据,即:对学校的工作成绩作出缜密的测量;对社会的要求,以及对学生的智力过程作出分析研究。”

## 测试运动

**笔试的出现** 测试运动有着深刻的根源。1845 年,波士顿学校委员会因对它们的学校工作感到骄傲,在马萨诸塞州教育委员会的秘书长霍勒斯·曼(Horace Mann)的压力下,为证明它们的学校所做的工作无负于州政府的期望以及给它们的慷慨的拨款,而举行了一场综合性的学校调查。学校委员会属下的一个委员会认为要对全市所有的学生(年龄大约从 7 岁到 14 岁)进行口试,那是不可能的事。虽然委员会后来的任务限于对各校的最高年级的学生进行测验,但他们还是决定了使用一组笔试。每次测验都在一天内由委员会的委员们监督下进行。算术测验含 10 个题目,要求在 70 分钟内做完,委员们认为对大多数学生来说,70 分钟的时间是不够的,但这是为了使他们在全部时间内都投入工作。其他科目,诸如历史、地理、文法等测验,则每个科目考一个小时。算术测验是在 18 所学校、每校 4 至 26 个学生中举行的。

主考们,以及曼本人,对成绩的普遍低落感到沮丧。例如,算术,学生的平均合格率低于 35%,这使得曼抱怨说:“对这样

的结果，完全不值得评论。没有任何好心的掩饰能使它变得好些；也没有任何苛刻的指责能使它变得坏些。”有几道题，没有一人做得出；答对了其他题目的学生也寥寥可数。比较难的题目之如下：

“波士顿有 120 000 居民，半数男性。全市的资产中有责任上税的为 1 亿元。男性居民中的一半每人要缴人头税  $2/3$  元。全市征得的税款为 770 000 元，其中含收入所得税 50 000 元。问一个人要为自己 100 000 元的资产付多少元的税。”

对于这个题目，在 308 个受试的学生中，只有霍威士学校 (Hawes School) 的拉斯洛甫小姐 (Miss Lathrop) 一个人做对了。对此，曼挖苦说：

“在波士顿所有的文法与写作学校中的全部男孩，竟无一人能在必需的条件都已完全准确而清楚地给出了的情况下，说出十万元的资产该纳多少钱的税，那么，将来的市税务员该由谁去充当呢？”

波士顿的主考官们，想要提供一些鼓励，从而指出了那些最好的学校所获得的成绩，并劝告其他的学校去以它们的实践为榜样。他们对教学方法和学校组织作出了某些特殊改变的提议。他们公布了一份表格，把学校按成绩的优劣排成了等级，并且同时说，这个等级的排列只是智力成绩的一种近似的度量，远不是学校优劣的标准。虽说如此，按考试成绩来排列学校名次的做法从此开始。

曼对于用印好的试题并要求作书面回答作为一种考试方法十分热心，他说：这将“在我们学校的历史中开创一个新的纪元。”他指出这种考试方式在欧洲是普遍的，他认为它比由学校视察员进行口试的那种传统做法有着许多优点。的确，笔试在欧洲已经使

用了一段时间了。在中国,公职考试开始于公元前 2200 年以前,并在公元前 1115 年以前就形成了制度:要求考生表明他们精通乐、射、御、书、数五艺。中国通过逐级的笔墨竞试(县试,省试,殿试)以选拔国家官员的体系,后来以多种不同的形式传入了欧洲和美国。法国的公职考试开始于 1791 年,但后来被拿破仑取消了。当英国人于 1853 年通过考试选拔去印度任公职的人员时,他们就是以中国的体系为榜样的。在英国,为进入军事学院而进行的竞争考试,以及为进学校而举行的校外考试也都是在 1850 年代开始的(据豪森 1982 的书:《英国数学教育史》)。这样用竞争性笔试来录用公职人员,确定学校成绩,授与大学学位和评判学校优劣,就开始提出了确切性和公正性的问题,豪森对埃奇沃思(Francis Y. Edgeworth)在 1888 和 1890 年关于竞争考试的评判偏差的来源,以及如何使误差得以控制的研究进行评论时说:“我们可以认为,这是第一份教育研究的工作。”无论目的是在于衡量学生学到了多少东西(从而确定他或她有无升级的资格),或是在于判断学校计划的有效性,笔试,特别是简短问答的笔试,在美国,越来越多地变成了选择的手段。这种(简短问答的)考试,在别的一些国家里,发展不快,虽然像英国的巴拉德(Philip B. Ballard)在 1923 年作的研究中所宣称的那样:证明了多题快答的考试比题目少而费时的考试,更为优越。

**测试以建立标准** 改革家赖斯(Joseph M. Rice)在 1890 年访问了欧洲的学校和心理实验室后,回到美国,用了两年的时间,去调查了美国一些大城市的公立学校的制度。他对那种僵化的、机械的、不人道的教学方法,和对他所见到的教师表现出来的粗鲁和刻薄的态度,以及学生表现出的被动的反应等,感到震惊。他写了揭发性的文章,却没有燃起改革的火焰,于是他决定去收集一些资料,以支持他的主张。他当时是论坛报教育研究部的编辑,他做了



一个关于算术的调查,这是最早的企图运用实验数据去处理教育问题的作品之一。赖斯在 1902 年写道:“这些小学的所作所为都以一定的理论为根据,……不同的学校由于遵循的理论不同,它们的途径与方法也各不相同,……直到现在,还未做过任何尝试,以便从结果的比较中去发现不同处理方法的相对价值。”

赖斯(1902 年)相信,教学指导应以事实为基础,而不是以理论为基础。他对四到八的各个年级拟定了一份八题测试卷,其中相邻年级的题目有部分的重复。(六,七,八年级的样本题如下:“一位先生把他所有图书的  $\frac{1}{7}$  抛弃了,然后把剩下的  $\frac{1}{6}$  借了出去,最后把余下的  $\frac{1}{5}$  卖掉,这样他余下的书是 420 本。问他原有书几本?”)他对七个城市中 18 所学校的 6000 个学生进行了测试(测试事务由他管理)。他的最令人瞩目的发现是,城市之间成绩差别悬殊,虽然各城市内各校的成绩之间也有一些大的差别。各校所得平均成绩由 25 分到 80 分(100 分制);在某些年级,这种差别甚至更大。赖斯不认为学校间差别的原因是在于班级的大小,或学生的平均年龄,或地区与城市的社会经济水平。有些贫民窟里的学校得分比一些“贵族”学校高。赖斯不仅记录了学生做得全对的题目个数,而且也记录了如果不犯机械性错误就做得全对的题目个数。他发现,犯机械性错误的,相对地比较少。那些获得原则上做对了的题目最多的学校,它所犯的机械性错误也最少,这种情况促使他作出以下结论:“算术的机械性方面同它的思维性方面,紧密地联系着。”

赖斯以为,建立起一些标准,使学校有所遵循,那是重要的。在他为四到八年级举行的测试中,将分数的尾数作四舍五入处理后,学校的平均成绩是 60,70,60,40,50 分(100 分制)。据此,赖斯认为,一个学校,如果总的平均成绩能达到 60 分,并且有五分之四的年级能达到这个平均分数,那么它就算及格了。他认识到,如果要举行另一次测试的话,那么,难度将会不同,但是他对通过研究

去断定：一群指定的学生在一道指定的题目上，应该得到几分这件事，是表示乐观的。他说：“在适当的时间内，像数学一样准确地建立起算术的成绩标准，应该是没有困难的。”赖斯不想对算术的机械方面提出什么标准，但是他对分配多少时间给算术教学的事，却有自己的主张。他发现在他调查过的学校里，平均每日上算术课的时间，由30分钟到60分钟，各校不同。他断定说：虽然时间和成绩之间，没有清楚的关系，但45分钟可能是够了。

赖斯在(1903年)第二篇文章里，检查了可能造成学校间算术成绩差别的其他原因。他发现了在他的测试中，成绩最差的学校，布置的课外作业也最多，从而排除了各校在课外作业布置上差别的因素。他也排除了教法上差别的因素，因为，没有哪一种特殊的教法在他的测试中显得起过了更好的作用。其他的因素，诸如辅导的次数和教师的资格等，好像和成绩的差别之间，也没有多少关系。赖斯的方法，是基于对高分的和低分的学校的特征进行观察，这种方法使他对某些假设因素同成绩高低间关系的强度和形式，都未能作出估计；它只使他讲出了以下的话：不是所有的高分学校具有某种特征为那些低分学校所不具备，或者相反，所以其间不会有什么关系。但他惊奇地发现了他所称的控制因素：即关于估计教师成绩所用的检查制度。赖斯发现，凡是督学们合理地提出的要求，教师们都给予满足。在他所考察的学校中，凡是由教师采取自行考试的制度的学校，所得分数的水平都相对地低；而凡是由校长组织考试、并由督学给以设计良好的补充考试的学校，所得分数的水平就相对地高。赖斯在他的文章末了说，自从他由国外访问回国后，他的目的不在于研究教学的结果，而在于研究他所说的“学校的精神”。经过了十年的调查和资料收集，他作出了以下的结论：学校的精神是由学区的监督人和督学机构塑造的；他们可以通过设置标准和组织考试，来达到他们所要的结果。就这样，这位煽动者和研究者提出了对教育加强管理的倡议。

**测量运动的开始** 伯斯威尔和贾德在 1925 年指出,虽然赖斯对其资料所作的解释以及他所作的结论,为许多教育工作者所拒绝接受,但他的客观测量的方法却受到了重视。他们继续指出:“然而,直到 1908 年,当斯通(C. W. Stone)发表了他的研究成果以后,算术的测量运动才可以说是得到了支持。”斯通在哥伦比亚大学的教师学院所作的博士论文,是在包括桑代克和史密斯在内的一个委员会的指导下进行的。他调查了 26 个学区里大约 3000 名六年级学生的算术成绩,他亲自主持了那场考试。斯通对赖斯没有考虑到研究的过程可以影响到学校间成绩差异的这种疏忽,抱着批评的态度。(例如,赖斯曾宣称,学生没有学过为解某些题目所必需的某种运算,这种情况对学校平均成绩的影响不超过 2%,但他没有说明这个百分数是怎样得来的。)斯通想要测量的成绩,既包含推理方面(类似于赖斯使用过的文字题),也包含基础方面(整数的加、减、乘、除);他想要把管理和评分加以标准化;也想要把得分与诸多因素间的关系用相关系数表达出来。

斯通(1908)把他的发现“归结为一个词:多样性。”他发现各学区之间在测试的平均成绩、犯错误的多少、每周用在算术上的学时(无论课外作业时间计入与否)以及“时间相对于能力的平均比”等方面,都有很大的差别。他观察到“在学习程度上的差别,实在难于用语言形容。”斯通不愿使用赖斯的用削足适履的技巧去排除一些可能与成绩有关的因素的那种做法,他终于找出了一堆与各个方面有关的相关系数。斯通和赖斯不同,他找到了课外作业能改进成绩的一些证据。而教学所费时间和成绩之间,好像关系很小,因此他断定,许多学区一定在算术上浪费了时间。

斯通(1908)看到,没有哪一种因素可以用来说明他所观察到的成绩之间的差别,因此,他设想:“学习过程可能是最重要的唯一因素,但它并不产生能力,能力只有通过施教而获得。”学区之间在

成绩上的巨大差别,显然使他感到困惑。他议论说:“研究表明,最大的需要是要制订成绩的标准。”这种标准将使学习过程更加均匀,也会减少平均考试成绩之间的差别。斯通把他自己搞的测试推荐为制订这种标准的开端。他还建议各个学区或各个学校去检查时间消费率,即计算“以周分钟为单位计算的时间总值”(即每周用在算术上的总时间)比于平均测试成绩所得的比率,并把它拿来同他的报告中所求得的比率相比较。斯通的比率是把成绩(产品)拿来比于学习所费的时间(价值),这是后来被称为教学效率的一种基本测量单位。

底特律市的家庭与白日学校(一所私立的女子学校)的库蒂斯(Stuart A. Curtis)受到了斯通的研究工作的启发,想要了解自己学校的学生程度如何,于是想做同样的测试。他发觉有些试题为三年级学生的能力所及,但测试的份量却足以使十三年级的学生感觉是受到挑战。他把测试布置给从三年级直到十三年级的全体学生,他既发现了每个年级内的分数差别显著,又发现了逐年级分数的增加具有一定的模式。为了对此增加模式获得更好的了解,他设计了他自己的、焦点更为集中的测试(包括速度和推理以及基础的测试),并在学年的开始和学年的结尾时进行了测试。库蒂斯认为他的努力的价值在于证明了:

“不仅能力与效率如何逐年地增长,或每个年级或每个人的缺憾与需要是怎样的,这些事项可以实际地测量出来,而且方法与过程的变化效果怎样,也同样可以实际地测量出来的。经过一定年数的一系列的测试,应该能够建立起一种真正的教学科学,并能用严格的实验方法去确定任何教育假设的真与伪。”

库蒂斯把他的测试继续精细化,仔细地分成了各种年级系列,包括了年级数码的一切组合;并从许多学区收集资料,把测试标准

化。他想要的是像他所说的“标准成绩,及每个年级的标准增长”。他的测试受到了许多学区的广泛使用(例如,纽约市 1913 年第一次组织的对 33 000 个以上的学生实施的标准测试,用的就是库蒂斯的测试),并且对后来的测试结构,和诸如可靠性、正确性、速度等项目的测量研究,都施加了影响。

库蒂斯(1913)在他对纽约市的学校所作的研究中,把密执安一所学校(和家庭与白日学校很相像的学校)中逐年级的测试的分数曲线同纽约一所学校的曲线作了比较。密执安的那所学校使用了他的标准测试已经有好几年了,而纽约的那一所以前没有用过。他发现密执安那所学校的曲线比较光滑。这使库蒂斯认为,可能是纽约的那所学校的某些年级的教师水平较差,而使得它的曲线表现不光滑。他观察到,在纽约市,同年级的不同班级之间,或学校之间,平均成绩的差别很大,“比有效条件所能保证的要大”,他把问题归因于“水平差的教师”。他争辩说:虽然可以把低分归罪于各种原因,诸如发生了流行病等,但了解了教学的条件后,是能够“找出真实的原因的”,并由此而知道要对教师进行比较。库蒂斯还利用了纽约的资料去研究了在他的测试中所估计的诸种能力之间的关系,男孩与女孩在学业上的差异,以及外国人口的百分比(“美国人”相对于“犹太人”,“意大利人”,“德国人”等)的影响。(在 1915 年,库蒂斯变成了底特律学校效能新办公室的主任,他把一些学区的七位研究主任组织成一个会议,命名为“国家教育研究主任协会”,这个组织在 1930 年变成为美国教育研究协会。)

**测试以改进实践** 厄普顿(Clifford B. Upton)在 1923 年为美国数学会的“数学要求全国委员会”所做的一份调查报告中,阐述了几十个以后供中学使用的算术、代数、几何的试卷,也阐述了由罗杰斯(Agnes L. Rogers)在 1918 年发表的数学能力预测考试,以及由瑟斯通(Lewis Thurstone)在 1922 年发表的职业指导考试。厄普

顿在报告的末了大段地引述了罗杰斯的话。罗杰斯说：“对于在教育中引入科学的测量这件事的全部重要性，我们还远未认识到。”她（罗杰斯）把测试看成是一种控制“人机器”的方法，使它变得更有效；而在这过程中，数学应该是走得最快的学科。

在 1925 年以前，伯斯威尔和贾德就指出：像库蒂斯所构建的那种测试的大量使用，不仅对教学实践的改进有帮助，而且对教育科学的发展也有用处。通过测试以建立和运用标准，可以“对不同的教法作批判性的比较，同时……为完整的科学测量提供最好的可能材料”。

同年，考德威尔（Caldwell）和库蒂斯，根据他们在 1919 年将 1845 年波士顿学校调查报告中的一些题目加以改编，并分发给全美国的各个学区，他们所作的调查宣称：1923 年的教育比上世纪的四分之三个世纪的教育要好。然而，正如特拉弗斯（Travers）在 1983 年指出的：“那些资料是经不起深入的检查的”；各组儿童之间并不真正可以比较，各项测试和评分过程也都不是真正可以比较的。在 1919 年 40,000 名儿童所参加的测试中，有些试卷做得好些，特别是在地理和历史方面，但其他的试卷则做得差些，特别在算术上；只是所有试题的平均分数，是 1919 年的比 1845 年的略高一点。

考德威尔和库蒂斯，是重复地选用了以前的五个最容易的算术题，并提供了一些附加的信息。（例如说明了“丈量土地的单位路得（rood），现在已经不再使用。一个路得等于 40 平方杆（rod），一英亩（acre）等于 4 个路得”。）但是，例如对于像“63 英亩 2 路得 7 平方杆是 100 英亩的几分之几”这样的题目，在 1919 年的测试中，只有 16% 的学生做对了；而在 1845 年的测试中，在没有说明一个路得是什么的情况下，也有 92% 的波士顿学生都做对了。考德威尔和库蒂斯议论说，在以前的测试题中，有一些所处理的情况是孩子们不大可能经历过，且已从现代的教科书中删除了的，所以为了

比较的目的,它们是没有多少价值的。这个问题——基于测试题目的比较的合适性问题,即测试题可能对一组学生比较合适,而对另一组学生不合适的问题——在几十年后国内或国际上举行数学成绩调查时,也一再地被提了出来。

### 社会效益运动

在美国教育科学化运动中,另一个有影响的部分是:要调整学校的课程,使它围绕着对社会有益的论题来开展的那种努力。这种努力在考德威尔和库蒂斯 1925 年的著作中便已提及,他们当时表扬了以下的做法:既然现在的儿童没有机会到校外去把英亩分割成路得和平方杆,就不应要求他们在校内去做这种工作了。在考德威尔和库蒂斯看来,像“9 个小时零 18 分钟的  $\frac{1}{3}$  的  $\frac{1}{2}$  是多少”这样的题目是没有多少“生活价值”的。把 1845 年的英亩算术题重新放到 1919 年的调查中去,其主要理由只是在于提醒公众:“今天,算术课的内容要不断地修改,要把儿童生活中很少直接用到的一切东西清除出去。”

**商业界需要些什么?** 在 1900 年 6 月于南卡罗来纳州的查尔斯顿(Charleston)召开的国家教育协会(NEA)的年会上,纽约市第 89 公立学校的校长史蒂特(Edward W. Stitt)报告了他关于全国 30 个最大城市中算术学习过程的调查结果,他发现有些论题诸如 12 进小数、复利、外币兑换等已被删除,或被降低其重要性,他为此而感到高兴;但他又发现了一些他称之为“过分的要求”的一些项目,包括复合合股、部分支付、复比与真实折扣等,并为此而感到惊奇和气馁。他听到了他的学生的家长们埋怨说,孩子们所用的方法和他们自己用的方法并不相同,为了回答这些问题,他开始调查了商业活动和学校里的活动之间,究竟有什么差异;也研究了算

术课程可以作何种程度的精简,使它限于教“商业界人士感到最必需的那些内容”。史蒂特向纽约商界的 600 个各类企业寄出了问卷,并附有带邮票的复件信封;他学校里的教师和学生也散发了一些复印件和登载有他的问卷的各种报纸,其中包括纽约时报。史迪特没有说出他发出问卷的总份数,也没有说出回收到的总份数,但他说了:他从他指定的 57 类企业中的大多数,都收到了回答。据他所说,回答者中的 44% 宣称:

“除了基本法则和普通分数与十进小数以外的任何算术,都是绝对地没有需要的。最要紧的事是准确性和速度,并应重点地强调以下事实:学生对运算过程中所涉及的每一步的重要性及其逻辑后果,都应有充分的理解。”

他把他收集到的信息用下面的标题加以分类:“机械性的辅助”(通过  $20 \times 20$  来教乘法表;只需要易读的数字;对诸如  $8/9$  或  $19/23$  之类的分数,不要多加注意),与“解题的步骤”(利息计算限于找出利率总量;教学生“用百分数去想”;坚持先估计结果的近似值,然后进行计算)。史蒂特把他所见到的儿童作业中的不准确性,归因于基本法则训练的缺乏。他指出:“许多商人强烈地主张心算的重要,认为它是商业成功的一个因素。”他宣称,商业界中的算术,至少有 60% 是不用钢笔或铅笔做出来的。他责备许多算术教学缺乏多样性,过份强调了他所称的“灌输过程”,说“有些时候,教师应该休息,而给孩子们以机会去消化教学。”

**合理化课程** 史蒂特好像是把商界所需的算术和学校所做的算术进行比较的第一个人,但却不是把算术看作是塞满了种种神秘过程和无用概念的课程的唯一的人。五年前,威·哈里斯 (William T. Harris) 代表“小学教育十五人委员会”在向“国家教育协会”(NEA) 提出的报告中,曾要求基础算术教学从二年级开始,



并在六年级前结束,使得在七和八年级可以教一些代数,并要求减少每天用在数学上的课时,特别是要求取消每天 2 小时的算术练习课,其中一小时用于“心算”,另一小时用于“笔算”。据哈里斯说,过多地把时间用于算术,会给儿童以“一种数量思维方向上的癖好,而相应地,在观察能力、思索能力、定性的和因果的思考方面,却加以忽视。”其结果是“抑制了发展”。

在国家教育委员会的教育家之间,开始产生了一种舆论,认为学校在一些无建设性的教学上浪费了时间,认为需要仔细调查一下,在涉及各门课程、包括数学课程的概念中,学校外部的世界究竟在做些什么。1904 年,教师学院的麦克默里(Frank M. McMurry)在国家教育协会的大会上,竭力主张取消无用的学科内容。他为课程内容的选择制订了原则,并对算术突出地要求应用。他提出了删减内容的一览表,其中不仅包括了长期贴现率和开立方之类,而且也包括“一切普通分数,除了分母很小的,以及商界习惯了的那些;……(以及)所有的代数,除非是对算术有直接帮助的那些方程的简单应用。”国家教育协会没有数学部门的组织,但其他领域的几个教育家愿意承担调查小学算术课程的任务。

**人们用到哪些算术?** 埃姆波利亚市(Emporia)的堪萨斯州立师范学校的教育管理教授门罗(Walter S. Monroe),在 1917 年把四套广泛使用的算术教科书里的题目,按它们所描写的人类活动加以分类。然后把其中的职业活动拿来同联邦调查局所提供的职业分布作比较。他发现,在那 1 073 种联系实际的题目中,有 71% 可能出现在某一职业中。这些题目中的大多数联系于贸易,也有大量题目来自制造业和农业。门罗注意到:劳动人口的职业中,有 55% 的职业没有得到反映。他认为这使算术作为一种职业性学科,其价值受到了限制。他对不同的教科书里所有的题目在类型上有很大的差别,也感到了不安。门罗对自己的工作的阐述是登

载在国家教育协会高级管理部关于普通教育中时间经济调查委员会的第二份报告里。这份报告也登载了威尔逊(Guy M. Wilson) 1917 年关于算术的社会用途与商业用途的调查报告。

威尔逊是衣阿华州立农业与机械技术学院的教授,曾在印第安纳州康纳斯维尔市(Connorsville)和一群教师一起工作了好几年,他想要去确定哪些算术在现实生活中确实有用。康纳斯维尔市的教师在向商界做了调查之后,曾建议从算术课中取消近 14 项内容,其中包括从求最大公因数的冗长方法到立方根的计算。衣阿华州教师协会曾经做过一项调查,它向全州的几百位居民发出请求,请他们考察从课程中摘出的包含 16 个项目的一览表,结果发现,其中有 42% 的内容对他们中的任何人都无用。威尔逊觉得:想要调查成年人真的怎样使用算术而收集资料,较好的方法是动员学生去收集数据。他通过衣阿华州内的 16 个城镇和明尼苏达州的一个城市里的学校领导和教师,请他们的六、七、八年级的学生去收集他们的父母在两周内解过的每一道算术题目(数学教育家肖尔林(R. Schorling)把它称为一种“误入歧途”的做法)。威尔逊(1917)收集到的数据是:1 457 人解了 5 036 道题。毫不奇怪,大多数题目是涉及数字小于 1 000 的简单算术题。用钱作买卖的计算是最经常出现的题目。以 1 以外的数为分子的分数几乎没有;最常用的分数是  $1/2$ 。他下结论说:“在实际应用中,抽象的问题极少见到;那些题目都是具体的,和商业情景相联系的,它们只需简单的推理;决定用什么计算步骤也很简单。”显然,“必需的算术可以在比现在分配给它的要少得多的时间内,就可以掌握”。威尔逊在 1919 年他的博士论文中,使用了上述的数据,并且还把他的样本扩充到 4 068 人去解 14 583 道题。他对问题作了更为详细的分析,对做结论也更为谨慎。但是,他还是下了结论说:“许多传统的算术过程应予以全部删除,”他争辩说:“现在的低年级里,分配给算术的大量时间,是否值得,这是令人怀疑的。”

其后,继续出现了一些别的调查,在其中,调查者翻阅了广告、菜谱、账本和现代社会中种种人工制品,以便找到日常生活中哪些数字被用到和怎样被使用的证据(威尔逊在 1925 年对其中的 19 个调查报告做了总结)。他们重复地发现“主要地只需要小的数字和非常简单的分数”。伯斯威尔在 1938 年对他所说的“减缩主义者”作回顾时,他评论说,社会效益的思想最初就是从负的方式被利用的——为要确定从课程中删除些什么。起初,造成的损害是微小的,不足道的。但是,随着研究工作的累积,

“教科书的编者删去了多位数的加法、大分母的分数、多于一定位数的小数、以及被发现为并不常用的整套过程。当这类研究造成的影响达到登峰造极之时,一位大胆的研究生竟然在他的博士论文中提出:在学校里所教的算术中,有百分之八十五,都是一无用处”(引自伯斯威尔 1938 年的文章)。

在伯斯威尔看来,1930 年代的研究工作对社会效益问题采取了比较正面的观点,并且它超越了计算而考察有何种途径使数量思维的教学可以把在学校里学习的算术,变得更为有用些。

### 对减缩主义的一种反应

研究工作由志在整顿课程而转向一种更有建设性的探讨,以研究算术可能进行的组织和教学,其分水岭的工作是“全国教育研究团”的算术研究六人委员会在 1930 年提出的报告。委员会的半数成员是教育心理学教授;其余的三人,一位是教育学讲师,一位是一市区的研究主任,一位是州政府的教师培训主任。这些人,比起在国家教育协会(NEA)里提出课程社会效益运动的那些学校行政人员和课程理论家们来,被认为对心理学和学校科目更为内行。报告的第一部分主要地是要保卫算术作为一门学校科目,为反对减缩主义者的批判而进行的辩护,它是由哈佛大学的白金汉(Bur-

dette R. Buckingham)对算术的社会效益所作的强有力的论述所组成的。在众多论点之中,白金汉特别指出了把成年人使用的频率调查来作为课程基础的愚蠢性。他说:“难道语文与拼音课的百分之六十的时间都应该用来教最常用的——诸如‘那,与,但,去,是’等一百个字么?”报告的第二部分含有布朗尼尔(1930)对算术研究使用的研究技巧所作的分类,和伯斯威尔(1930)关于那些研究的性质与收获所作的调查,以及 11 份独创性的研究工作,它们被选为当时工作的最佳代表作。

那份报告是作为全国教育研究团的第 29 年的年鉴而发行的,它含有一个附录,是由 15 位评论员组成的小组所作的评论。明尼苏达大学的布吕克纳(Leo J. Brueckner)在评论中指出,年鉴虽然对这领域做出了重大贡献,但它的作者们却显露了一种不幸的偏颇:只顾及算术的计算方面,而忽视了它的其他的方面。推测起来,这大概是由于减缩主义者的攻击而迫使许多研究者处于防御地位,只在计算的问题上去争论,而没有对算术的非形式的、社会学上的和心理学上的功能,给以更多的注意。委员会的主席是衣阿华州立大学的奈特(Frederic B. Knight),他在报告的序言中指出:委员会采用的学习心理学是“行为主义的,它把技巧和习惯看成是联结的产物。”布吕克纳在为评论员们辩护时,指责委员会忽视了完形心理学。对于完形心理学,奈特曾宣称还不能把它拿来作为小学教育的基础。

然而,在奈特的序言(1930)中,最引人注目的也许是:它坦率地相信科学的(心理学的)研究能为教学提供本质的支持。他认为心理学能在教学方法上给我们提供帮助:“在讨论中,怎样教儿童的问题和教什么的问题是可以分离的;从根本上说,怎样教的问题是以研究为基础的心理学的,而不是指学的事。”而且,要以“迫切需要”和儿童兴趣作为课程基础的意图是错误的。在内容问题上,心理学也能给我们提供帮助,“教什么的问题,应由从事于这工

作的明智的成年人们来决定,这些人将尽可能地把可得到的客观的科学数据拿来作为他们作决定的依据。”这些观点集中地表现了教育科学化运动高峰期中许多研究工作者所共有的理想看法。

后来(1938年),伯斯威尔宣称,第29年的年鉴“标记着算术处理的转折点”。这部分地是由于他所说的“卓越的”评论。评论除了谈及其他的许多问题外,它“强调了算术中解题工作的地位。自1930年起,算术的操练论受到了一些量化研究工作者的批判,而对问题解决的研究以及非计算方面的量化性思维,给予了更多的注意”。

### 准备就绪论和附带学习论

操练论和附带学习论——它主张儿童学算术不要系统地去教,这样他们会学得好些——都曾受到了严厉的攻击。附带学习论是布朗尼尔在1935年一篇论述他的意义论的文章中提出来的。贯串于30年代,以至于进入40年代,倡导者们开展了研究,以支持他们在附带学习论或它的较为婉转的伴侣:准备就绪论上的立场。所谓准备就绪论是说,一种概念或技巧,在儿童尚未成熟得足以学习它之前,至少是不应该去教的。这种研究受到了其他的研究工作者所反对,后者企图把话题从单纯的计算熟练或儿童对算术的需要上,转移到高层次的数学理解上面来。

**学科内容的年级定位** 为倡导准备就绪论而开第一枪的是沃什伯恩(Carleton W. Washburne),他是伊利诺斯州温内特卡市(Winnetka)学校的督学。他于1930年在全国教育研究团第29年年鉴上为北伊利诺州会议中关于督学问题研究的七人委员会写了一篇文章。那个委员会,在沃什伯恩的领导下,自1926年以来就对问题解决的教学进行着实验,但这是他们关于算术课年级定位问题的第一个主要报告。沃什伯恩宣称,他们(通过将学科内容向

高于和向低于习惯的年级进行施教,然后对智力年龄、学习与记忆进行了测试)发现了各项内容应该施教的最低智力年龄。七人委员会在那十年内余下的时间里,继续着他们的研究,并“对算术课程的组织施加了无可置疑的影响”(引自德沃尔特(DeVault)和韦弗(Weaver)1970年的文章),其中包括课程制订者把一些内容移到较高年级,以及把一些数学上联系着的内容分离开来等。沃什伯恩至少是对促进他在温内特卡市搞的改革和对开展严格的研究工作都好像有兴趣,但不久,他便在技术和仪器使用的合适与否的问题上,同他的研究主持人拉思(Lewis Rath)发生了齟齬(拉思在温内特卡市逗留了几年后,就转入了俄亥俄州立大学,并在那里的“八年研究”课题中起了主要的作用)。然后是,在1938年,布朗尼尔介入,对委员会的工作提出了强烈的批评,不仅对成熟的概念、对教学以及对研究中使用的仪器等,提出了指责,而且还责怪委员会把研究工作的方向从更为根本的问题上偏离了出去。

七人委员会并不是研究推迟形式算术教学的效果问题的唯一机构。早在1912年,巴拉德(Ballard)就发现,把算术教学推迟到7岁以后,并无任何坏的效果。其他继起的研究工作都提高了教学开始的年级。这方面的研究工作一直延续到了50年代,并且不限于只在北美。内容的推迟问题是苏格兰高级教师的苏格兰教育研究委员会在1937年所作调查的主题。1957年,弗里德和斯科内尔(Fred and Eleanor Schonell)所作的总结中称:“精简教学大纲——使儿童做得少些,但对剩下的内容理解得好些”——从英国的和澳大利亚的学校为响应美国的研究工作而实施的情况看来,这并不降低“标准”。1953年,莫顿(Robert L. Morton)写文章,讨论在算术教学中,研究工作向第一线教师说了些什么的问题时,宣称:所谓的后移大纲应予贯彻。这种大纲要求把内容推迟到较高的年级中去。他说:

“前些时的关于年级定位的问题所得到的一些结论,受到了挑战,其理由是:更好地组织大纲和使用不同的教学技巧很可能会产生非常不同的结果。就算是这样吧,但内容的向后推移和内容的分段施教,看来是已成定局。”

对年级定位问题的最引人注目的研究,是开始于 1929 年。当时,新罕布什尔州曼彻斯特市学校督学本尼蔡特(Louis P. Benezet)作出了以下的安排:在七年级以前,任何超出估值和社交上用到的数字以外的算术,都不予施教;而经过一年的教学后,学生的考试成绩达到了相比较的学生的同样水平,后者(相比较的学生)是经受了常规的教学训练的。本尼蔡特把他的功绩骄傲地总结在他为名人录(Who's Who)所写的自述中去:“课程改革的先驱;1930 年在中学课程中,用社会科学和自然科学代替了数学和古代语言;1929 年在较低的五六个年级中引入了健康学习、科学阅读、公民、分段组织的算术等课。”显然,在本尼蔡特看来,问题是在于要把数学的学习压缩到最少的时间中去。

**取消形式教学** 最极端的附带学习论者主张:数学的形式教学不是应简单地推迟,而是应予以全部取消。这些教育工作者中的许多人是受了杜威和基尔帕特里克(William H. Kilpatrick)的进步教育思想的影响,而认为人人所需的数学是可以通过经验而学得的。他们的集中要求通常是要把作为一门专门科目的算术从小学课程中排除出去。例如,他们认为在一些活动中,数字的结合是自然地出现的,儿童就可以通过这些活动来学习数的知识。哈拉普(H. Harap)和马普斯(C. E. Mapes)在 1934 年和 1936 年的研究工作常被人们引用。这两个人是对五六年级的一班学生进行了研究,让学生参与诸如组织一次糖果买卖,或缝一条被子,或磨光家具等活动去学习分数与小数的运算。但是,布朗尼尔(1935 年)却坚持认为:附带学习论虽有助于取消数学作为一门独立的科目去

教,然而,它并不提供一种有组织的活动,使构成数学能力所不可或缺的那些有意义的概念和有智力的技能得到培养。

## 有意义的算术

从 1935 年到 1949 年,布朗尼尔进行了一系列的研究工作,以支持他的“意义理论”,其中有一些在以后被编印入了“杜克(Duke)大学教育研究论文集”丛书中,其中的最后一篇(是布朗尼尔和莫泽(Moser)1949 年的工作)后来被称誉为“一切教育实验中做得最好中的一个”;同时布朗尼尔对算术教学的研究被认为是“卓越的”。产生这种称誉的一个主要原因可能是由于布朗尼尔拒绝了在实验室的局限条件下去从事工作,那些实验室的工作通常是要找出一个单变项的效应,并为此而对此单变项作各种处理,而同时企图保持其他的一切因素不予变动。布朗尼尔认为用这种方式去研究学校里的学习状况,是无济于事的。他说:

“如果像某些人那样,相信任何研究,只要它称得上是研究的话,就必须遵照这种经典的实验模式,否则,所作的研究实在是不可信的和无价值的,那么,这种信念实在是一种错误。因为,倘使采取这种极端的立场的话,那至少会否定了生物学和天文学(只举此二例就够)这两个研究领域的确实性。在这两个领域里(其他许多领域也一样),系统的观察,深入的分析 and 数据的严格分类,极大地取代了那种遵循‘单变项律’的研究。”

布朗尼尔因他运用多种收集数据的技巧、包括广泛地同个别儿童和教师的交谈,以及因他对数据的仔细、广泛和透彻的分析而著名。

根据一项评估,“有意义的算术”大纲“发轫于 20 世纪 30 年代,流行于 40 年代,而在 50 年代得到了普遍的接受”(引自德沃尔特和韦弗(DeVault & Weaver)1970 年的文章)。虽然这份大纲究竟



被接受到何种程度很难判断,但它毕竟没有因早期有人批评说它没有顾及儿童的兴趣、也没有顾及成年人的需要就遭到失败而存活了下来。在布朗尼尔的理论中,“意义”这个字有多少是指数学意义,或有多少是指社会意义,不总是很清楚的,但从布朗尼尔所举的例子看来,他所强调的是在数学关系上面。可以说,在一定意义上,“有意义的算术”是开始于 20 世纪 50 年代的现代数学运动的先驱。

### 关于课程问题的研究

20 世纪上半叶美国小学的算术课程,可以比作一个战场,在其中,督学、校长、教育心理学工作者、教师、课程专家、教育学教授等各类人,纵横捭阖,拉党结派,对应该教什么和怎样教的问题,进行了反复的争论。他们当中的大多数人在他们的写作中,反复地表达了一种巨大的信念,即认为科学研究工作会提供一种方法,用以解决他们之间的分歧,或至少可以证明他们自己的立场的优越性。他们之间的连续不断的论争,产生出了大量的研究工作。

**中学的数学** 和算术的教与学相关的某些问题牵涉到了中等学校,而中学实验研究的份量却小得多(虽然,关于中学数学教学的学术写作,其份量至少是同样地大)。本兹(H. E. Benz)在 1933 年的一份总结中,在埋怨高中数学教学研究的缺乏同时,引述了几项关于学校数学的用途、练习的效果、教科书的特征、测验的效果等的研究工作。其后,在 1938 年,布列斯里奇所作的总结中,也谈及有关上述一些问题的某些研究工作。但是,在这两篇文章中所引述的多数研究工作,只反映了关于中学课程的某些争论的特殊性质。

小学算术课程,虽然反复地受到过一些著名教育家的质疑,但他们当中,没有人提出过要把这为人人所学的算术课程取消(虽然

作为一门独立开设的科目,被人要求取消过)。人们承认懂得算术的重要性,即使他们认为最好是非形式地加以学习,而不是形式地去学习也罢。而中学的课程就两样了。那里的首要问题是:谁该学数学;部分的问题才是:数学该取何种形式。在 20 世纪 20 年代和 30 年代,高中学生人人读数学这种要求,受到了严厉的挑战;那时,人们谈论着“危机”,它使数学作为必修课的存在受到了威胁。对于这个危机,数学教育工作者们做出了多种方式的回答,包括在 1920 年成立了全美数学教师理事会(NCTM)。另一种回答就是:开展研究工作。

数学在高中课程的地位受到了攻击,这引起了一些数学教育工作者对高中数学教学的目标进行了再考察。布列斯里奇在 1938 年指出:这些目标,长久以来已由数学专家们所确定,即要为学生将来在大学里读高等数学做准备。但还可能其他的目标的,于是像肖尔林那样的一些研究工作者在 1925 年通过考察学习过程、教科书、专业文献、学生考试成绩以及专家们的意见,以明确那些目标。有的研究人员请教师们罗列出教学目标;另一些人则从课堂实践中去找出目标来。其间,对高中数学学习的“训练价值”或“迁移效果”的讨论,做了大量的研究。福西特(H. Fawcett)的博士论文(1938 年)后来成了 NCTM 的年鉴,并被广为引述。他在其中报导了他企图怎样把高中的论证几何课建立在非数学的情景之上,通过术语、定义、假设的建立去促进学生的发展,使这门课成为一种促进反省思维的课。

另一类研究工作研究了各人数学能力的差别问题。倘使不是所有的学生都读数学,或至少不是读同样的数学,那么就要找出一定的方法来,以便确定哪些学生学习某一种特殊的课较为有利。其中的一个主要的事项是确定谁有资格学习代数。此外,学生更多地被按能力分班,这是基于以下的假定:学生在能力上“均匀”,比起能力上“不均匀”来,教学上会更实在、更有效。测试运动提供

了一种工具,用以探讨学生按能力分班的效果与成功预测的究竟;这两者都成了普及的研究课题。一个例子是奥斯汀(C.M. Austin)的一项研究,他发现:对于预测代数课的成绩说来,一份智力测验比一份算术思考测验能更说明问题。于是,一些特殊的测验被设计了出来,用以研究学生在代数与几何上所犯的误差,以及研究数学能力与其他智力间的相关关系。也有人企图详细分析在代数与几何中所需的特殊技能与概念。

关于中学阶段的最后一类研究工作,是研讨:诸如代数,几何,三角这样的一些科目,是应该分科进行教学,抑或作为一门统一的数学——也称为一般的数学,或相关的数学(虽然这三个术语的含义稍有差别)的课。把不同的数学分支合并成一门单一课程这种思想最初见于19世纪的法国和普鲁士。在英国,这种单一化运动进展缓慢。1907年,梅尔(D. Mair)设计了一门统一数学的课,但直到1921年才有统一的测验,并且一直到60年代,大多数大学入学考试的考生才考统一测验。在美国,这个运动就不只是缓慢,而是走入了歧途。摩尔早期关于统一课程的号召,在芝加哥大学的实验学校里得到了极为热烈的响应,在那里,迈尔斯(G. W. Myers)和布列斯里奇从1903至1923年间,编写了教科书并试验了统一的课程。和史密斯关于极端的形式主义和不可接受性的批评相反,迈尔斯和布列斯里奇显示了:学生是学得很好的。其后,人们做了更加多的控制性的研究,将接受统一课程的学生们的成绩同接受传统课程的学生们的成绩做了比较。虽然,占多数的研究工作找到了有利于统一课程的证据,但那些证据毕竟是薄弱的(据森克(Senk)1981年的著作)。对传统的欧氏几何,支持的人数众多,他们坚信:这门科目能够无可比拟地为学生提供一种公理化思想的人门,和给他们一个机会去欣赏美妙的数学。这样,一年的欧氏几何依旧成为美国高中的一门主课;而一般数学课则退化为一门代替代数的课,供不一定升大学的学生学习。

**支持变革的迹象** 和桑代克在美国数学会所作的报告“论中等教育中数学的再组织”中关于代数的讨论大不相同,鲁格(H. Rugg)在 1924 年的一篇尖锐的报告中,为学校数学教学的必要性缺乏坚定的理由而深为哀叹(虽然鲁格通常并不被人认为是一位数学教育学家,但他却主持了制订 NCIM 第一份章程的会议,并成为它的第一任副主席)。他议论说:在将来,任何第一流的会议都不应该在“对儿童的能力、社会的需要和学习过程做过科学研究”的情况下就提出报告。他阐述了各种教育基金会应赞助这类研究的理由:

试问在今日的美国有没有科学地控制着的数学课堂实验?我的充满信心的判断是:没有。然而,竟然有多于五十所公立学校,它们中的每一所都有一个“研究办公室”处于工作状态,它由一位接受过测量技术训练、并多数地受过实验训练的人士所主持。而实际上一个杂志的编辑是不可能找到受控课堂实验的材料去发表的。进一步说,在我们的教育学院里,实际上也不可能劝导一位研究生去以实验作为自己的学位论文课题。为什么会这样呢?主要地是因为代价太高了:要完成一项受控实验需要两三年的时间。我们现在的主要研究精力依然只是放在进行测试和提出“规范”上面。

一项主要的研究开始于 1932 年,它得到了充分的资助(由卡内基(Carnegie)公司和一般教育委员会提供),并从事于对课程变革的长期效应作出估计。这项研究就是“八年研究”,其目的是允许中等学校试验革新课程,而它们的毕业生升入高等院校的机会同时得到保证。为此,进步教育协会在 30 所选出的高级中学和一大批高等院校之间经磋商而达成了一项协议,规定从 1936 年开始的五年内,对这些中学免除以下的通常要求,即高等院校的入学申请人必须在某几门科目中获得一定的学分。这些高级中学的学生将不依据年级与学分,而是由校长推荐及持有活动与考试成绩的

记录表升入高等院校。有一项比较研究考察了来自参与改革的 30 所中学的 1475 位大学生和来自常规的中学的同样多的大学生,考察了他们在大学里的经历,发现来自 30 所中学的大学生比他们的比较者在多种指标上,从大学的考试成绩,到荣誉的获得,到参加组织活动的毕业率,以及社会关系的评价等各方面,都“表现得出色一些”。

“八年研究”项目由于第二次世界大战的发生而终止。进步主义作为一项运动也在美国的学校里衰退(进步教育协会在 1955 年解散;而进步主义,在它的一些发起人看来,是在那时以前很久便已消亡了)。虽然这项研究的一些细小的发现并没有产生多大的影响,但是它却提供了场所,训练了一批教育研究骨干,他们后来都成了著名人士(如贝特海姆(B. Bettelheim),布罗斯(O. K. Buros),彻·哈里斯(C. W. Harris),塔巴(H. Taba)等等);它并且为今后的几十年建立了评价研究工作的模式。在那 30 所中学里,数学当然是得到革新的科目之一,然而,极为奇怪的是,学校科目中各种特殊变革的效果究竟如何,竟然未得到研究。该研究项目所用的评价模型是由它的负责人泰勒(R. W. Tyler)所制订的,并以目标的操作定义和用以测量诸目标所达到程度的手段结构为依据的。虽然从那些定义在其后被使用的方式看来,我们会期望所论的手段应集中在一些特殊的技能与方法的获得上面,然而,处于中心地位的,却是关于社会评定和思维的一般问题的研究。大量的精力被放在思维技巧的评价上面,而且终结测试“比整个方案中所制订的其他各种手段都给出了更多的令当时的人感到兴趣的结果”(引自特拉弗斯 1983 年的书)。在该研究项目的工作人员中,有一些是数学教育工作者;在负责思维技巧测试的小组中有哈通(M. L. Hartung)和特林布尔(H. C. Trimble);该小组制作的测试之一是关于非数学情景下的证明的性质,它被福西特在自己讨论证明的学位论文中所引用。这些数学教育工作者虽然也参与了研究,但他们并未从

中知道他们的学科所有的课程变革对学生的学习究竟会产生怎样的影响。八年研究委员会的委员们虽然也在进步教育协会里的一个最高委员会中担任了职务,该最高委员会的任务是讨论普通教育中数学的作用,但在该委员会企图阐明数学课程的一些原理的报告“普通教育中的数学”中,研究的结果并没有按鲁格所设想的那样去进行报导。就数学教育而论,“八年研究”的最大成果无疑是来自其后国内的与国际的关于数学成绩的评估上面,这些评估工作受到了泰勒的影响,并且是依照了他的评价模型去作出的。

回顾 20 世纪的上半页中,数学教育研究(大量是实验性的)在分量上的增长,人们不禁对下述情况大感惊奇,即课程问题——数学应教什么和怎样教——从一开始就支配了研究的进程。一些流行的课题,诸如学生能否将他们的数学知识从一种场所迁移到另一种场所;不同年龄的学生是怎样学习同样的数学技能的等等,它们之所以被研究,并不单纯地出自理智上的好奇心,而首先是因为改革者们想要在学校数学课程中提出一些实质性的变革来。课程的问题最终地是目的和价值的问题;它们所关心的不是现在已经有了些什么,而是应该有些什么。许多研究工作者持续地相信:科学研究是能够解决这些问题的。即使在苏联,那里的数学教育研究是从理论性较强的教学心理学逐渐地产生出来的,像学生是应通过典型解题研究,抑或应通过学习课题分析的步骤去学习数学问题解决这样的一些问题,大致从 20 世纪 30 年代中期开始,就被研究了;虽然许多研究工作显示出是由于受到了门辛斯卡亚(N. A. Menchinskaya)与加尔普宁(P. Y. Galperin)在知识如何获得的问题上观点不同的推动,但其中有许多显得是要回答教师们的一种诉苦,那种诉苦就是:学生对数学课程中的习题感到困难。

### 为身份而奋斗

当数学教育工作者们在企图确定他们的领域是什么的时候,

他们发现,对于什么是学术工作的问题,他们得要听从数学家和心理学家们的指导。他们对于数学这门有权威性的学科虽然怀有一种强烈的忠诚之感——的确,教育学院里的许多做法都是由这种忠诚引伸出来的——,但是这些数学教育工作者对数学家在教育问题上的指手划脚,却怀着一种既爱又恨的复杂感情。早在1905年,史密斯就哀叹地指出过:前一年在海得堡(Heidelberg)召开的第三国际数学大会上,在讨论数学教育的会议里,与会者耗费时间去争论一些数学上的微枝末节,而不是考察数学教育中的许多普遍性的课题。1929年,里夫(William David Reeve)在报导美国数学教学的变化与倾向时,指出了高等学校里的纯粹数学教授们的支配作用,他说,在世纪之交,在中北部高校与中学联会上,“无论对什么问题,他们(纯粹数学的教授们)的意见就是法律和福音”。里夫虽然也承认那些教授们对于数学教学的改进有着真诚的兴趣,但他总好像是说,其他的教育工作者必须俯首恭听。在20世纪30年代间,人们呼吁了数学家与“教育家”之间实行休战(这种紧张关系,多年以来,并未完全消失。在ICMI(国际数学教育委员会)的理事会上,ICMI的前身国际数学联合会(International Mathematical Union)的秘书长认为“数学教学太重要了,它必须由数学家们操纵”,他把这看作是理所当然的。

与此同时,心理学家们的工作又往往显得对数学教育工作者所面临的问题无关痛痒。里夫(1929年)在赞扬心理学家们帮助了数学教育工作者们采取正确的学习观点时,情不自禁地对他们对待所教材料的质量漠不关心的态度,进行了挖苦:

说实在的,心理学家们给我们指出了怎样去把一些本来不必教的东西教得更好。但他们也帮助了我们去把我们的基本材料按照心理学的线索而不是按照逻辑的线索,组织起来……[他们]对于儿童怎样才能学得最好,最经济;习惯是怎样形成的;能力是怎样发展的;它们怎样可以保存下来等问题,

发现了许多有用的事实和规律。

里夫指出数学教学研究所产生的影响很小,他把曾经出现过的变革归因于“外在的社会力量”。在 1953 年前,费尔调查过相当大量的心理学的文献后,主张数学教育工作者们应采取实用主义的态度。他说:

这些[学习]理论,在许多地方互相冲突,对于这种情况我们不必过于费心。如果在一定情景下运用这些互相冲突的理论之一,证明了它对我们的目的更为有用;而在另一情景下用另一种理论更好,那么我们就应该随机应变,根据情况,选择使用。在心理学发展成为一种更为显著地统一的科学理论之前,我们只能这样做。

丹麦的心理学家马德森(K. B. Madsen)把 1933 年到 1960 年前后的一段时间,看作为心理学界互相融合的时期;他称这完全是由美国的心理学支配的时期。心理学家的国际合作因第二次世界大战而全被破坏,而且恢复得很缓慢。在这期间里出现了一股“心理学主流”(引自马德森 1988 年的书),它对许多国家的学校数学产生了最大影响的分支是皮亚杰和布鲁纳的认知心理学。然而,并非所有的心理学家都支持这种融合的。在 1960 年前后,另有一些学派在兴旺发展。其中特别是,人本主义心理学、马克思主义心理学和当代行为主义等开始在传播,这部分地也是对 20 世纪 60 年代社会动乱引起的价值危机的一种反映;而同时也是对心理学家企图将他们的学科融合为一种科学时所遵循的范例的某些方面所表示的不满。

20 世纪 60 年代也是这样的一段时期,在其中,数学家们“重新发现了学校”。50 年代末,由于大学里所教的数学和中小学里所教的数学脱节增大,也由于对选读大学数学课程人数下降的担



心,在一些国家里掀起了一股课程改革的潮流,它总体地被称为“新数学”。由于 ICM 在 1952 年的重新建立,和其后一系列的特殊会议,以及 1969 年 8 月第一届数学教育国际会议的召开,数学教育工作者的国际合作重新开始。这时,学校数学课程的问题再一次地引发了研究工作,人们为他们所提的革新建议找寻证据。在这一段时间里,数学家和心理学家却在课程发展研究上互相携手合作。对诸如发现学习法、为学习做好准备、学习过程、学习能力等问题的兴趣的复苏,使来自不同学科的人们看到了一些共同点。60 年代有关课程和心理学本身的研究,使得数学教育研究团体的形成在那个年代的末了加速地得到了实现。

## 一个团体的联合

1950 年 12 月,《数学教师》杂志(Mathematics Teacher)设立了一个新的栏目,叫做“数学教育研究”,它由纽约大学的金塞拉(John J. Kinsella)负责编辑,其目的是要将研究的发展状况报导给读者。金塞拉在 1952 年指出,数学教育研究工作的大量增加,使得人们要及时地掌握文献的事,做起来越来越困难。第一线教师想要把研究结果应用到数学教育的问题上去,而不是单纯地注重研究工作本身,这样的愿望显得日益强烈。1953 年,美国教育部的布朗(Kenneth E. Brown)和当时由衣阿华州立大学教师学院的范恩根(Henry Van Engen)为主席的一个全美数学教师理事会的委员会合作,发表了 1952 年所做的研究工作的一览表。下一年又发表了另一个一览表。于是布朗和全美数学教师理事会的委员会开始发行了一种由教育部出版的每两年一期的刊物,其目的不仅在于汇总近期文献,而也企图进行组织,和作一定程度的分析。

也是在 1953 年,国家教育协会的任课教师部与美国教育研究协会合作,发表了一套小册子丛书,标题为“研究工作给教师们讲

了些什么”(当时,全美数学教师理事会在1950年6月被并入了国家教育协会NEA)。由莫顿写的、书名为“教算术”的小册子,给教师们提出了一些教学建议,这些建议是莫顿从研究文献阅读中摘录出来的,但很少给出文献的目录。该丛书的另一册,“中学数学教学”,是费尔所著,它只引用了一篇实践研究的文献,即邓克尔1945年关于问题解决的研究,而另外却引用了许多的研究摘要、数学教科书、数学史书和教育学方面的工作。1962年,斯皮策(H. F. Spitzer)更新了莫顿的小册子,将注意力集中在新数运动的影响上:“企图从数学的观点出发去发展数学概念、运算和原理,而对它们的应用却很少顾及或全不顾及,即使在一题材的引入阶段也是如此”,以及“比起1952年来,1962年有一种明确的倾向,即把算术的题材放到更低的年级里去”。这里,同样地很少给出特殊研究的目录,而给出了一些关于教算术的一般文献目录。上述丛书以后由国家教育协会(NEA)所属的“督学与课程发展协会”继续组织编写,后来的一些小册子含有关于小学数学一些特殊问题研究的综合回顾。这些小册子按它们所讨论的内容是涉及课程、或儿童、或学习环境、或教学方法而加以分类。在其中会提出某个特殊问题来(如“皮亚杰的工作对儿童的认识发展提出了何种建议?”“儿童学习数学以怎样分组为最好?”等),然后接下来会有一篇短文,对最近研究工作中的看法和发现作出综合报导。

这些综合报导以及其他的关于20世纪50年代和60年代的各种特殊研究工作作长篇的、进一步发挥的、专注性的综合报导,表明了数学教育不仅在发展着本身的研究文献,而且是越出了常规心理研究的范围,去结合其他的源泉和模型,如金塞拉在1952年所说:“确定数学教育研究课题的问题现在变得更加复杂了,这是因为研究工作者们对以下事实变得敏感了,即数学的学习和课程的制订联系着其他的许多领域。”除了要确定许多研究课题之外,还需要从已有的工作中去找出它们所研究的课题。布朗尼尔

在 1950 年 2 月向美国教育研究协会(AERA)所作的一次讲话中报导说,到 1945 年底以前,算术方面的研究工作完成了 1 413 份,这些研究工作由 778 位作者所完成,其中 615 位作者从未报导他做过第二份这类工作;另外只有 53 位作者做过三份以上的研究工作。研究工作者们在认识到了由各别的研究人员所作的研究不能集中成为有效的成果之后,他们倡议要更多地进行协作研究,要找出把具有各种才干和特长的人们联合起来共同从事研究的途径。

## 黄金时代

**互相认识** 50 年代早期至中期,学校数学课程改革的建议是来自多个方面的。美国的学校,因为毕业的年青人缺乏基本运算技能而受到商界和军界的谴责;又因为大学入学生的数学知识适应不了大学的工作需要而受到高等院校的谴责;同时又因为它们响应了进步主义与适应生活教育的主张,降低了课程的标准而受到了公众的指责。1954 年末,卡内基公司要求教育测验服务社提出一份改进数学课程与教学的研究计划来。其结果,提出了一份报告,叫做“数学教育调查:小学和中学阶段里学生掉队、不及格和缺乏能力的原因”,它于 1955 年 10 月提出,而在第二年以简略了的形式发表了出来。报告的作者们查阅了研究文献;通过问卷与面谈方式征求了各方面权威们的意见;对教师与学生进行了观察和访问。他们作出结论说,当前拟议中的课程改革的努力,一般地是受到欢迎的,但同时指出:

更新课程只触及了数学教育难处的一个方面。更需要知道的是关于要完成该课程的儿童的心理机制,以及要进行施教的教师状况。他们主张:

要有一个协调的研究工作计划,而若对问题的各个侧面有专长的人们能够互相理解,并能长时间地合作,摸清那些互相关联着的调查研究课题,并开

展研究,那么,这种工作计划是有可能实现的。数学家、心理学家、教育家、课堂教师和诸如物理学家、工程师、经济学家等各类的数学应用者,应该联合起来,不是一天或一周,而是需要多久就实行多久的联合,以便实验性的研究工作得以继续不断地开展下去,使得一些直观的猜想得以转化为以课堂与训练中心得来的确实数据为基础的可核实的结论。

这份报告列举了 11 个研究项目,所涉及的范围由教师培训的课程设计与评估,一直到学生的补习个案研究。它建议成立一个数学教育研究委员会,这个委员会可以成为某一实施这些研究项目的执行机构的顾问,或者它就是履行执行机构的职责。

这样的委员会虽从未产生,但协调性的努力却继续着。然而事实表明,带有各种专业特殊性的研究工作者之间的鸿沟是很难填平的。20 世纪 50 年代和 60 年代,政府在支持课程发展的同时,对教育研究的资助也开始增加了;在这种条件下,关心数学教育研究的各个方面的代表们组织过一些零星的会议。1954 年的合作研究法(第 531 号政府令)曾授权美国教育部去资助高等学院、大学和各州的教育厅开展研究、调查、论证等科研项目。到 1965 年,数学方面大概有 30 项科研计划得到了资助,其中有 7 项得到了完成。有一项计划提出了数学教学中心理问题及其研究方法的课题,企图把各方面的力量结集起来;它在 1959 年的一次讨论会上提出了一份专题报告,对 1948 年至 1958 年间的文献做了回顾评论,提出了一些课题领域,建议了一些研究方向。1962 年社会科学研究理事会下属的智力过程研究委员会举行了一次讨论会,“它把心理学家、数学家、数学教育家结集了起来,共同讨论数学学习的问题,并企图去弄明白一组人的工作是怎样地、或可能怎样地同另一组人的工作发生联系。”(引自莫里塞特(Morrisett)和文森哈勒(Vinsonhaler)1965 年的专题报告第 2 页。)然而,互相交流并不容易。该报告的第 3 页上说:

讨论会的一个突出的特点可能是：心理学家和数学家们所感受到的互相交流上的困难。显然，数学学习这个题材和心理学的实验与理论中的思想有着丰富的联系。关于这个题材有着许多研究工作需要去做，然而，在数学家和心理学家通过不断的对话以达到更深入的互相了解之前，恐怕没有哪一个心理学家对这份研究工作是能够胜任的。

这就是当时关心于数学教学的思想，并要求胜任地对它进行研究的心理学家的意见。

其后的一些讨论会则是更为集中地讨论了数学家和数学教育工作者们的观点。其中有三个讨论会讨论了开展数学教育研究的必要性。第一个是于 1965 年由哥伦比亚大学教师学院主办的数学家与教育家的小型会议，会上，数学家马·斯通(M. Stone)在谈到研究内容时主张成立一个机构，它至少能合理地、但尽可能国际性地提供当前数学教育问题所在的信息。在其后的讨论会中，人们建议成立资料图书馆和创办一份研究杂志，作为交流与传播的手段。三个讨论会中最后的一个是 1968 年春在科内尔(Cornell)大学召开的规模较大的数学家与教育家的大会。该讨论会的目的是在于确定数学教育方面一些学期研究计划题目，学位论文题目，博士后的研究题目；许多可能的课题得到了明确。大部分的讨论则是关于数学教育的高质量博士学位计划的评定问题。虽然心理学被看作为对数学教育工作者的学习是一门重要的和潜在地有用的科目，然而

好像有着这样的一种共识：认知心理学就当前说来，它所从事的课题和所用的方法，对数学教育好像还没有用处。……实质性的问题似乎在于要找到一些心理学家(或一些数学家)，他们至少是肤浅地懂得一点数学(或心理学)。(引自朗(Long)等人 1970 年的一篇文章。)

三个讨论会中的第二个，在规模上和组成的多样性上都比其余的

两次更大。它是在 1967 年 9 月于乔治亚大学举行;在许多参加者看来,它是数学教育研究人员的跨学科团体的真正开始形成的标志。在讨论会的前一年(1966 年),格伦南(V. J. Glennon)就曾宣称:“我们正处于教育研究的黄金时代”。在 1967 年的这次讨论会上,韦弗对此作出了反响,指出:这对于数学教育研究说来,也是同样地真实的。整个讨论会的气氛说明了许多与会者都同意了韦弗的看法。

这次讨论会是由 NCTM、乔治亚大学和国家科学基金会所共同主办的。事前,NCTM 在 1964 年创立了一个临时的数学教育研究委员会。这个委员会在 1965 年得到了再组织,于是一个新的研究咨询委员会被创立,并作为课程子委员会之一而工作。这个研究咨询委员会在理事会里对促进研究活动采取了积极的行动。原先的一些研究委员会在 50 年代后期每年的年会上都安排了关于研究的讨论,并促进了《数学教师》和 1954 年创办的新杂志《算术教师》上文章的发表和研究部门的发展。这个经过再组织而产生的研究咨询委员会在 1967 年和 1968 年 NCTM 的年会上举办了关于研究汇报与研究评论的几个系列的会议,这些会议在一段长时间内把那些对研究有兴趣的人们结集了起来。在 1968 年费城的会议上也安排了一天的关于研究的会前讨论。这样的一些活动在以后变成了年会的一种常规。研究咨询委员会也提出了创办一份由理事会主办出版的研究杂志,并设立了一个顾问委员会去同乔治亚大学的人共同工作,以安排 1967 年以“数学教育所需要的研究”为题目的全国大会的召开。

全国大会是围绕着三个主题组织的。这三个主题是:数学学习、数学教学和数学课程。事先准备好的论文和会上的讨论都企图确定可研究的课题、理论的模型、研究的设计和各主题的研究方法。大会的主要目标之一是在于鼓励相关活动间的协作。泰勒在他的大会纪要(1967 年)中指出了为使参与者之间建立起共同语

言,不停留在因缺乏有意义的研究成果乃徒生悲叹上面,而能达到一些共识,需要费很长的时间。大会指出了数学教育研究事业的复杂性,但它也建议(至少在泰勒看来是这样):没有必要逃避这种复杂性,也没有必要因它而兴叹。该做的事情是:号召大家迎着困难上。泰勒在纪要中说:

在这研究事业内部,应鼓励多种多样的研究兴趣,而不是强调某种超人的模式,认为这种超人有着一个优秀研究人员的所有兴趣和可取的品质。……研究,它并不是一种孤家寡人的事业,也不是只和单纯的一类人有关。它是一个规模宏大的集体的事业,它涉及多方面的才干,而且也需要多方面的活动,以期获得最大的效果。

数学教育研究者的团体,必然地是一种复杂的团体。

人们开始探讨可使研究者在合理的基础上联合起来的途径。AERA(美国教育研究协会)在60年代后期就发展了大量的会员,也建立起了它的各个部门。它鼓励对不同的论题有兴趣的人们组成特殊的兴趣小组。在AERA 1968年2月于芝加哥召开的年会上,一些人组织了SIG/RME(数学教育研究特别兴趣组)。这是最早组织起来的兴趣组之一,它在几个月内发展了近75名组员,它和研究咨询委员会合作,创办了一份NCTM的研究通讯,主持NCTM年会作为会前会议以及会议中的研究讨论会。截至1981年,它的成员包含300名美国人和45位来自八个其他国家(包括加拿大)的人士。

数学教育研究的其他几个组织成立于20世纪70年代后期。SIG/RME开过一系列的年会,在它的第四届年会结束时,即1977年4月,成立了“诊断数学与处方数学研究理事会”,会员约100人。也在1977年,莫那西(Monash)大学的克莱门茨(K. Clements)和澳大利亚教育研究理事会的福伊斯特(J. Foyster)创立了MERGA

(澳大利亚数学教育研究组),它的第一次讨论会吸引了大约 80 名参加者。在 MERGA 成立之前,1972 年,曾有澳大利亚数学教师协会下属的研究与管理委员会的组织成立,并接着在他们的杂志“澳大利亚数学教师”里设立了研究部。PME(数学教育心理学国际组)迅速地成为国际上最大的组织,是于 1977 年八月底九月初在乌德勒支(Utrecht)大学召开了它的第一次大会。它是在那年的前一个夏天在卡尔斯鲁厄(Karlsruhe)召开的第三届数学教育国际大会上宣告成立的,而它实际的产生则是由于 1969 年第一届大会中的一次圆桌会议以及第二届大会的一次讨论会。(PME 作为 ICMI 下属的一种研究组织,它现有来自 39 个国家的约 500 名组员。)PME 的几位英国组员于 1978 年 3 月在乔尔西(Chelsea)学院集会,组建了英国数学学习心理学会,并于 1978 年 7 月发表了它的第一期业务通讯;PME 在北美的分支则于 1979 年 9 月在美国西北大学召开了它的第一次会议。

**寻找喉舌** 至少是自从 1956—1957 在 NCTM 内成立了研究委员会以后,在 NCTM 的理事会上就断断续续地有过由 NCTM 出版一种研究杂志的议论。该研究委员会的职责如下:“在大会期间组织研究性的讨论;为研究工作的收集与发表准备和提供途径;考虑建立‘数学评论’(Mathematical Review)的一种补充机构,以开展数学教育研究工作的国际评论”(引自 NCTM 1956 年的文件)。NCTM 的主席默赛夫(B. Meserve)在 1965 年主持原先的研究咨询委员会时,就要求委员会考虑创办一份研究杂志的问题。为证明这样的一份杂志既有资料来源,又有读者群,委员会建议发表一份研究报告,并为此而成立了一个特设委员会,由宾夕法尼亚大学的斯坎图拉(J. M. Scandura)主持去完成此事。由此而产生的一本小册子(斯坎图拉 1967 年主编)在第一年里售出了 4000 份以上。这件事向 NCTM 的理事们证明了:办一份杂志在财政上是行得通的。



在那本小册子里,有几篇文章强调了教育研究以信息为本(基础性)和以成果为本(应用性)的重要性。这种强调,其原因部分地是由于觉得在课程建设上多花了力气而使基础性研究受到了忽视;部分地也是由于这两类研究工作的区别得到了人们的关注;此外也部分地是由于在 NCTM 里一些有影响的人物对为教师作理论建设的努力抱着明显的怀疑态度。在 NCTM 圈子内之所以有办杂志的议论是因为有这样的看法:理事会所办的其他各种杂志所载的文章对于教师说来,理论性和技巧性都太强了。办研究杂志的主持者们认为进行基础性研究是重要的,也是教师们所需要知道的,问题是在于要有一份专门的杂志去对这类研究工作作详细的报导。但是 NCTM 理事会有些成员却认为,NCTM 作为一个教师的组织去办这样的一份杂志是不合适的。

研究咨询委员会于 1967 年 4 月在拉斯维加斯(Las Vegas)召开的会议上,决定向 NCTM 执行委员会提交一份正式建议,要求办一份杂志。会议的主席、威斯康星大学的龙伯格(T. A. Romberg),在向会议致词时说:“可以认为,创办这份杂志是本委员会一切活动中最优先的重点。”一份建议递交出去了。1968 年 4 月在 NCTM 的主席当·约翰逊(D. A. Johnson)主持下的一个 NCTM 的分裂的理事会上进行了投票通过,决定批准出版一份“自负盈亏”的研究杂志,并任命了明尼苏达大学的戴·约翰逊(D. C. Johnson)为第一任主编。虽然由于财政安排上的原因而造成了一些耽搁,但是一个编辑办公室还是建立了起来,对稿件进行了征求、评论和及时地编辑,于 1970 年 1 月,NCTM 五十大庆开始之际,出版了“数学教育研究杂志”的第 1 卷第 1 期。

在那以前,发表研究文章的其他杂志,实际上已经出现,只是都还不从事于发表原始研究的报告罢了。1969 年 1 月,斯坦福大学的“学校数学研究组”(SMRG)就印行了“数学教育调查研究”系列的第一册,这是一份刊登摘要并附注释文献表的不定期的杂志。

这份杂志在 1972 年被改组,变成了由俄亥俄州立大学的“科学与数学教育中心”和“ERIC 信息分析中心”合作出版的季刊。1964 年 12 月由重建的 ICMI 在乌德列支召开的“数学教育现代课程”讨论会上,与会者表示“迫切需要将各国的数学教育活动作更加国际性的报导,这种报导可以由某个积极的而又易于联系的国际信息中心,或者由一份高水平的数学教育期刊加以组织和传播”(引自弗赖登塔尔 1978 年的一份声明)。这种需要由于卡尔斯鲁厄大学的“数学教育中心”(Zentralblatt für Didaktik der Mathematik)的成立,以及从 1969 年 6 月起由该中心出版的“数学教育中心刊物”的发行而部分地得到了满足。这份“中心刊物”是用德语与英语刊登国际数学教育方面的文章和文件。关于期刊的要求也由于弗赖登塔尔创办了“数学的教育研究”(Educational Studies in Mathematics (ESM))而得到了满足。这刊物从 1968 年 5 月起开始出版。它发表了一些研究性的工作,这是它企图对教学上、方法论上、教育上的问题与本领域内的新发展努力进行报导的部分工作。

60 年代末和 70 年代初这段时期,不仅是创办杂志和建立信息中心的丰产时期,而且也是建立从事于研究工作的机构和中心的兴旺时期。在美国,作为 1965 年中小学教育法公布的结果,在 1965 至 1967 年两三年间建立了 21 所研究与发展中心,20 个地区性的教育实验室。其中有些中心与实验室开展了数学教育方面的研究。在其他的一些国家里,也成立了一些专门从事和改进数学教育研究的机构,其中包括:法国成立了 30 个数学教学研究所;英国在乔尔亚学院和诺丁翰大学成立了谢尔研究中心;德国在比勒菲尔德建立了数学教学研究所。

## 研究工作大跃进

龙伯格(1969 年)在介绍一组回顾过去 5 年间数学教育研究状况的文章时说:超过 1000 份的数学教育研究工作得到了报导。

在进行回顾时,他用了以下的纲目去进行组织:(a)联想学习,(b)活动学习,(c)问题解决与创造性行为,(d)施教,(e)教学计划的有效性,(f)学生在成绩上的特点,(g)态度,(h)成绩的评估。他说,这纲目反映了“60年代初制订的一些新的课程对数学教育的促进,以及数学教育工作者和心理学家对系统地开展数学的教与学的研究有了更高的兴趣和参与的意愿。”他预料了数学教育的研究工作会变得更有纲领性,会对基础研究给予更多的关注,会使用更好的课程评估方法,在评定成绩方面也会制订出一些更好的测试。他对所回顾的研究工作给出了如下的评论:“量大,质差,但在改进中;多样性。”他的这种观点,在他所介绍的那组文章里,得到了反响。

在联合国教科文组织的“数学教学新倾向”丛书的第三册(1972年)里,有一章专门讨论了研究工作。它认为当前研究工作的特点如下:

在过去的20年间,数学教育研究工作在份量上是戏剧性地增长了。一般而言,已发表的研究工作在质量上也有所提高,虽然还不是那样戏剧性地提高了。大部分研究活动的增加可追溯到课程改革运动。……但是在许多国家里,一些活动的增加是来源于一个更为一般性的运动,即对教育给予了更大的投资,以及相应地产生的更高的要求,即要求要有证据地说明这样的投资是值得的。许多研究中心和研究所都鼓励了开展所谓的“基础研究”,但是主要的工作还是在于“应用研究”的方面——主要地是关于方法和材料的开发和测试。

在丛书的下一册里,鲍尔斯菲尔德(Heinrich Bauersfeld,他是德国比勒菲尔德数学教学研究所的创立人之一)指出(1979年),他和他的同事们为准备在1976年于卡尔斯鲁厄召开的数学教育国际会议上提出报告而查阅了大约3000份研究文章。他同时也指出了这些文章中的大约85%是在美国完成的。他发现研究兴趣

已从学生和课程问题转移到了教师问题上去了,对课堂的真实状况和学习的社会意义给予了更多的注意。

**研究事业在数量上的增长** 从 50 年代中期到 70 年代中期,研究工作在数量上的加速度增长不限于数学教育方面,也不限于在美国。尼斯比特(J. Nisbet)在 1985 年对国际上的教育研究、方针政策和实践进行回顾评论时说了下面的一段话:

仅在这 25 年内,教育研究才获得了来自公众的实质性的资助。1960 年以前,这类研究工作主要地还只是业余爱好者的消磨辰光的行当,它没有任何组织,也常被忽视,一直到它的发现的价值渗透到了各个方面(这种状况才得到了改变)……1965 年—1970 年间,公众对教育研究与发展资助以前所未见的速度在膨胀。在英国,教育研究方面的公众开支在 1964 至 1969 年间递增了十倍;在美国,这种开支从 1964 至 1967 年间逐年地翻了一翻。这样的增长速度恐怕是不能期望再次见到的。

关于数学教育研究工作在百年间的增长状况,我们从几个报告的数据,就可见其端倪。伯斯威尔和贾德在 1925 年清点了 1892 年前至 1924 年间算术研究方面的书籍、期刊报导、公报等,共计有 307 份(他们报导的数据是以 4 年为一区间以计算其频数的。在附图中,数据由 1890 年起算,每个区间内的每年平均频数置于区间中点的上方)。司买勒在 1970 年统计了 1880 年至 1963 年的研究工作,共计 1 456 件,他是以 5 年为一区间报导其统计的。司买勒报导她的数据时说,“这是在美国所做的数学教育方面的一些工作”;而伯斯威尔和贾德的数据是把美国以外所做的工作也包括在内的。两份数据所作成的曲线显示了直到 1925 年的逐渐而稳定的上升趋势,两者基本上相同。这种逐渐的上升趋势继续着,一直到 50 年代中期至 60 年代中期开始了一种令人瞩目的增长。这种

加速度的增长也可见于苏伊旦在 1967/1968 年间所作的关于美国杂志上从 1909 至 1965 年间发表的有关小学数学的研究报告的统计。它也可见于苏伊旦关于 1955 至 1988 年间每年有关幼儿园至第 12 年级各年级所作的研究报告的统计,这些研究报告或是发表在杂志上的文章,或是学位论文。在图 1.1 中,这些文章和论文是分别地报导的,以便可分别地看到它们在数量上的增长率;显然,如果把它们放在一起计算,则增长趋势会显得更为剧烈。文章数量上的增长比学位论文增长的速度要小一些,但二者都似乎在 1980 年达到一个峰值。图 1.2 是把苏伊旦所统计的学位论文数据和弗罗比舍及乔伊(Frobisher and Joy)在 1978 年对英国与爱尔兰在 1910 至 1977 年间的毕业论文与学位论文所作的统计放在一起加以比较。苏伊旦的数据虽然不完全是北美的,但其中的绝大多数却是的。从图中可以看出,弗罗比舍和乔伊的数据中,突然地上升的时期出现得比苏伊旦的晚,但它(这突然的上升)究竟还是出现了。

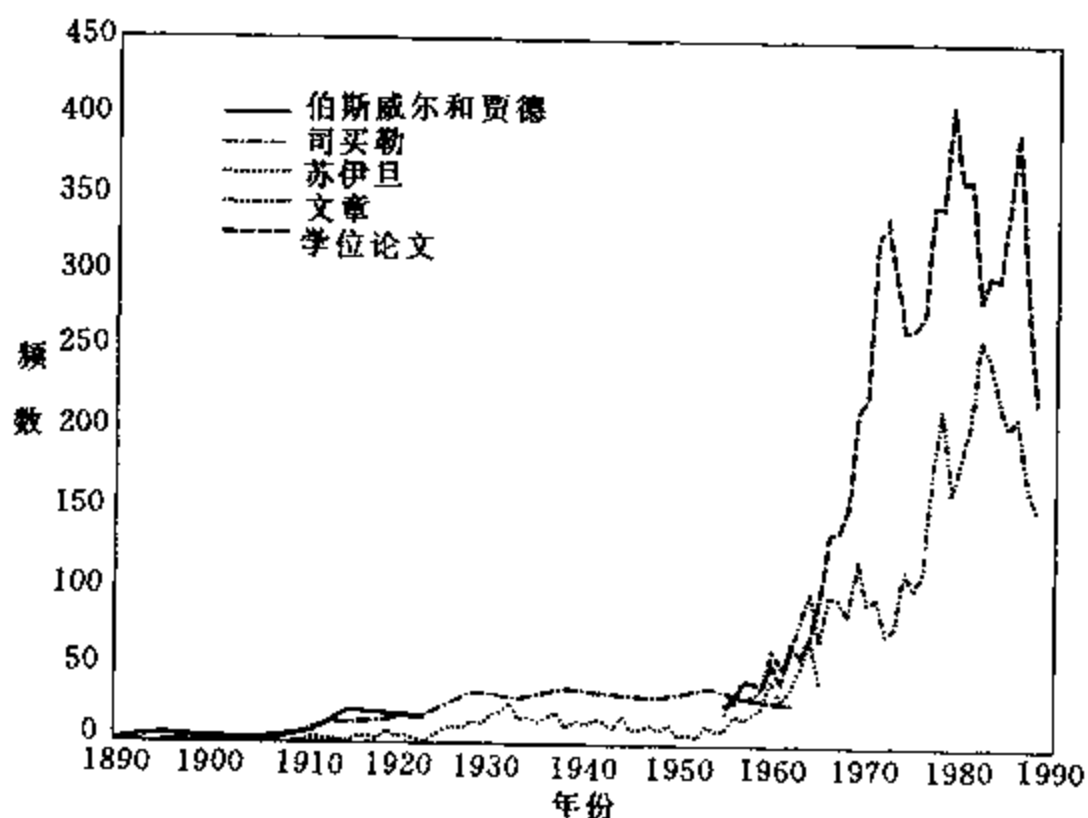


图 1.1 1890 至 1988 年间数学教育研究工作

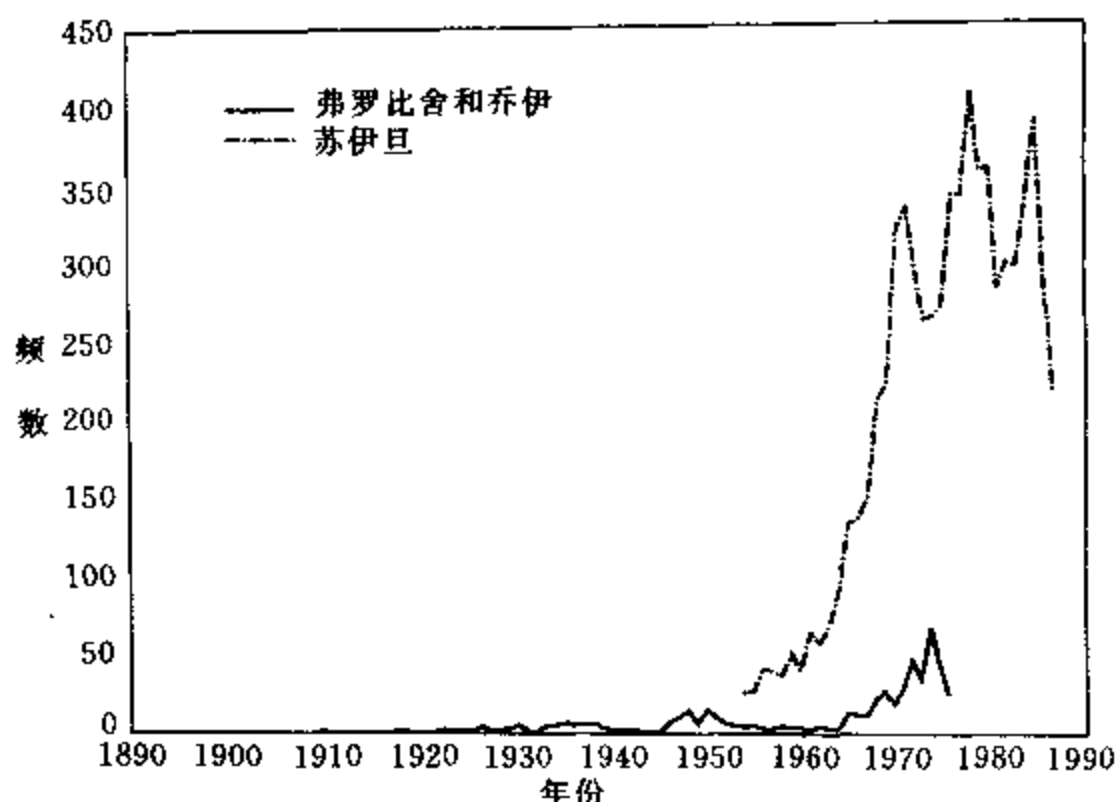


图 1.2 1910 至 1988 年间数学教育毕业论文与学位论文

学位论文的增长多数是由于数学教育方面建立了许多新的博士学位计划,其中多数建立在美国,但在世界各地也都有。有时,这些计划建立在数学系里,但在美国,大多数的计划是建立在教育学校或学院里。根据一份关于这些计划的调查报告,估计美国从 1967 年至 1973 年间数学教育的博士学位,在数量上大体上增加了一倍,当时大约有 1 000 名学生在攻读学位,而大约有 200 人获得了学位。博士学位计划的建立和发展为对研究工作有兴趣的数学教育工作者创造了机会,便于他们去获得职位,使他们不但可以教数学和培养教师——这是数学教育工作者历年来都这样做的——而且也可以在研究生的帮助下开展研究工作。其中少数人因此而能在大学里或在大学内新建立的研究所与研究中心里获得了专职研究的职务;然而,其他的大多数人是依赖于专项基金,或同基金会或同政府订立合同以支持他们的研究工作的。

**在全世界的发展** 20 世纪 60 年代和 70 年代里,数学教育研

究工作不但在数量上增长,而且由于研究人员不断地跨越学科的界限和国界,它的范围也在扩展。由于皮亚杰 1964 年对美国的访问,以及为向他致敬而在科内尔大学和在伯克利的加州大学两地召开的关于认知研究与课程发展的姊妹讨论会,而在北美的数学教育工作者中间掀起了一阵皮亚杰研究热。接着于 1970 年 10 月在哥伦比亚召开的讨论会,使皮亚杰在日内瓦的一位同事辛克莱(H. Sinclair)来到了美国;这样,数学教育研究人员和发展心理学家就有机会面对面地相处。1971 年 4 月在东京的日本国立教育研究所召开的美日数学教育联合讨论会上,集合了来自两个国家的几十位数学教育工作者;会上大部分的报告和讨论都是关于课程改革方面的,但有少数几个却直接地讨论了研究活动和合作研究的可能性问题。1972 年在英国埃塞特(Exeter)召开的第二届数学教育国际大会上,数学学习心理研究工作组在参加人数上说来是最受欢迎的研究组。组里的讨论引出了以下的要求:心理学家、数学家以及教师应召开“定期的会议”(采取座谈会、讨论会等形式)。

1968 年,贝格尔(E. G. Begle)在为参加威斯康星认知学习研究与发展中心的系列讨论会而准备的文章中指出:数学教育研究工作在数量上增长迅猛,但又报导了“阴暗的信息,即这大量的研究工作中没有多少真的对数学教育的改进有点用处”。直到 60 年代,由于缺乏充分的财政支助,对课程处理上的比较研究还无法开展。贝格尔指出,这些课程处理“或是大型的试验,或是大量而仔细地互相关联着的小型试验。”然后,他简要地报导了他领导的 NLSMA(全国数学能力纵向研究组)对十万名学生的成绩进行考察的工作。这个研究组从 1962 年 9 月开始收集数据,并在五年内每年的秋季和春季对学生进行了测试,其目的是想要肯定“新数学”课程改革的成效。NLSMA 虽然只从事课程评估,从而按某种定义说来,它并不是一个研究工作组,但是它对研究事业却有着一种实

质性的影响。它把心理学家和数学家结集了起来,去建立思维能力的评估手段,以及将数学应用于非常规情景下的能力和对待数学的方方面面的态度的评估手段,使这些手段既可用于辅助性的研究工作,也可用于持久性的研究工作。NLSMA 创立了和改进了一些分析的技术,用以对作用于非随机地选择的群体上的综合处理所产生的多重效果进行分析。它也训练了不少的数学教育研究人员。

其后的数学成绩调查研究,其目的已不在课程比较上面,而在于描述和比较成绩的水平,其中包括 NAEP(国家教育进步评估组)自 1972—1973 年度起每 4 或 5 年一次在美国举行的数学评估;由 APU(成绩评估组)自 1978 年起每年一次在英伦、威尔士和北爱尔兰所作的年度调查;以及 1977 年在巴布亚——新几内亚所创立的用于评估小学生数学成绩的一系列测验。

最具综合性的数学成绩研究是以数学为手段去考察教育制度上跨国性的差别。这方面的研究曾由 IEA(教育成绩评估国际协会)对多种学校课程做出过。IEA 的第一份数学研究于 1964 年在 12 个国家里开始了收集数据,并于 1967 年发表了它的研究结果。IEA 的第二份数学研究更以数学教育者们所提问题为主,对各国课程做了更为详细的分析,并对不同国家的教学特点作了更为努力的描述;数据收集开始于 1980 年,在 21 个国家里进行,国际研究结果发表于 1989 年。

IEA 的研究,连同各国在成绩方面的调查研究,表示着心理测量与技术的胜利。对项目与学生作取样,以及对不同来源所得的数据作等价比较,这样一些精细的手段使研究者能卓有成效地运用了测试时间;威力不断地增大的计算机使庞大的数据得以有效地计算处理。贝格尔所要求见到的那些大型的试验、或是大量面仔细地互相关联着的小型试验,不仅在经济上负担得起而且是行得通的。



## 一门实验性的科学

贝格尔在1969年8月于里昂召开的第一届数学教育国际会议上致辞提出了以下建议,即数学教育应仿效物理与自然科学所用的观察与推测的模式。他说:

为了建立起一种数学教育的理论,我们需要遵循我们物理学的、化学的、生物学的等学科的同事们所用的方法。……我们需要对数学的教和数学的学作大量而仔细的、经验主义的观察,并以此为出发点;在观察中所见到的任何规律性的东西都将引出一种假设。然后这些假设将由进一步的观察所检验、改正和明确起来,等等。轻视经验主义的观察或轻视理论的建立都是愚蠢的。它们在任何时候都必须结合在一起。

他接着说,经验性研究未必需要涉及大的数字。他引述了在苏联所做的临床试验,以试验为假设的依据,然后通过选择更多的学生和教师去做验证。然而,他说,由于所研究的现象的复杂性——涉及儿童的心理、数学的课堂教学等——表明“局限于小范围的观察将使我们的理论受到损害”。作为结束语,贝格尔提出了他的研究信条:“只有变得更为科学化,我们才能达到改进儿童教育(我们的儿童和任何其他人的儿童的教育)这个人文主义的目的。”

在其后的十年间,贝格尔尝试着依照他的信条行事,他设计了一系列结构性的教学单元,以便在比较教学方法时设法控制所产生的变差。他也对经验性文献作了一系列的评论,这些评论汇集成了一本书,该书在贝格尔于1978年3月逝世后才出版问世。在那本书里,他把近7000份的研究工作按其所涉及的会影响数学学习的变量(如教师、学生、教材、教学的特点等)的多寡加以分类,然后对那些研究工作的主要结果进行了评论。

贝格尔的书是在数学教育研究顺利的时刻出现的。由于计算机能分析大量的经验数据组,于是有可能使认知科学家们建立起思维模型,包括建立起数学的思维模型。在1972年出版的内维尔和西蒙(A. Newell and H. Simon)的著作《人的问题解决》(Human Problem Solving)把数学问题解决的研究者们的注意力转移到了所谓“心理空间”上面,在这个空间里,一个问题的解决者在描绘着他所考察的问题。数学教育研究者们虽然对认知科学在数学教育上的价值抱有保留态度,但他们还总是企图对认知科学家关于心理表象和对这些表象进行操作的思想加以理解和运用。杂志“认知科学”(Cognitive Science)于1977年1月出版;而“认知科学会”则在1979年创立。数学教育工作者和认知心理学家间的友好关系似乎在建立中。

国家科学基金会在1978年开创的教育科学研究计划,开始把不同学科的但都从事于数学教育研究工作的人们结合到一起来了。国家科学基金会和国家教育所制订了一个联合计划,企图将认知科学研究人员同他们的数学方面和教育方面的同事们结合起来。NCIM正在要出版一份数学教育研究的参考文件。为准备第四届数学教育国际会议于1980年在伯克利的召开而组织了一系列纪念贝格尔的研究活动;并在此会议上增设了比以前会议多得多的课题研究组。

在欧洲,正忙着开发在苏联发展起来的活动论的应用,这种理论将人们的日常活动从他们的社会环境和文化环境两方面去进行研究,并把它们作为对他们的心理机能进行分析的元件。欧洲的研究工作者们也在从事着被称为“教与学的实在论方法”的研究,这种方法把数学看作为一种产生自实际情景的人类活动;它要求学生通过研讨他们自己提出的问题而进行学习。在活动论或实在论方法这两者中,所学知识和教学过程的社会性质是中心问题。研究工作者对数学教育在社会方面和文化方面的问题的态度,比

较严肃认真起来。

在全世界,许多国家里,数学教育正在成为一门大学的学科,教师教育变得更加专业化了,建立起来的学科给人们开创了一些新的职业,这个领域开始考虑自己的活动,它的人员之间的互相交往也在改进。数学教育的研究俨然成为一门实验性的科学,正如贝格尔和其他许多人所想象的那样。然而,到了70年代末,怀疑在增长,人们怀疑研究工作对教育过程究竟有无贡献;甚至有些人终于怀疑教育研究归根到底能否成为一门科学。

## 一个领域的再评价

威沃尔 1967 年在他欢呼数学教育研究的黄金时代到来的一些文章里,也指出了教育研究的前途存在着问题。他起初只注意到诸如合作的不充分、研究设计的过分简单、报导的不适当等一类问题。但后来情况就变得更明显了:许多其他的问题有着更大的威胁性。教育研究的特殊危险性在于过分地卖身于政府和一些资助机构。当美国政府或别国的政府在 20 世纪 60 年代和 70 年代初期对教育研究增加了财政支持的时候,教育研究工作者和政府政策制订人两方面都抱有很高的期望。然而到了 70 年代,对教育研究、特别是对数学教育研究的批评甚至指责,却达到了高潮。教育研究工作者被认为:他们无法证明他们做出过可以对实际工作有益的任何成果来,如一份批评所说:“教育研究是在增长,但在多数情况下,它显然毫无成就。”

研究工作者们在看到他们的工作不孚众望,而受到了不尊重或被轻视时,开始反问:是否领导上在什么地方出错了。在 1976 年 12 月于比勒菲尔德数学教育研究所召开的“理论与实际关系研讨会”上,沃克(D.F. Walker)议论说,教育也许是不可能成为一门科学的。这样,教育研究由于对本身的性质感到不明确而备尝痛

苦；由于追求时髦而无所进步；由于威信低落而受创伤。沃克说：“威信低落这个事实迫使人们企图通过无懈可击的方法论去追求严格性，而这种方法论实际上却使这领域的研究成为不毛之地。……它也引导到对已有学科表现出卑躬屈膝的模仿和依赖的态度。”沃克宣称：追求学院的尊严已使教育研究人员脱离了教育实践的人们。

贝格尔在 1969 年就指出过教育现象的复杂性，这种复杂性现在看来正在造成重大的损失。教育研究工作者们没有能满足实践工作者的要求——后者要求他们提供有用的信息；他们也没有使资助机构和他们的同事们感到满意——后者要求他们做出有价值的工作；他们也没有达到他们自己的期望——期望自己的研究工作能像个样子。他们现在所感觉到的远不是生活在黄金时代，而是陷入了沮丧。有一位评论员在谈及 20 世纪 80 年代初美国学校所面临的问题时，讲了以下的一段话：

问题竟是如此地严重和比一般想象所及的远为复杂，也许承认以下的事实会有一些好处的，即我们对学校的了解实际上极少，我们可能只处在教育研究的开头的几天里。

鲍尔斯菲尔德在 1979 年 4 月于波士顿召开的 NCTM 年会里的 SIG/RME 研究讨论组上发言时，建议：数学教育这个行业要进行“模式上的根本性变化”。他指出了模式变化上的三个重要主题：第一，数学教育缺乏理论导向；第二，研究和实践遵循着不同的模式；第三，为将研究成果用于实践，跨学科的处理方法即使不是本质的，也是大有可为的。这些主题也说明了教育研究危机怎样地影响着数学教育的研究。

缺乏良好的理论框架，其原因可能是由于要快出成果的压力，从而遵循着一种“马虎了事”的研究程序（引自鲍尔斯菲尔德 1980

年的文章)。的确,美国的研究人员是感到要大量地发表文章的压力,其结果往往导致对细小的、有时是平凡的课题进行挖空心思的研究。为追求科学的尊严而模仿自然科学的研究设计,迫使研究人员去做那样的一些研究,它在方法论上是无可指责的,但是在概念上是贫瘠的。无论原因是什么,为推动数学教育向前进的一些好主意看来并非不可多得,以至于在公众的谈论中消失殆尽的。

在那些热衷于使用变差控制、作用量化、统计模式的研究者的结论中,不应继续地对实际工作者在他们的工作中对课堂活动作出的解释置若罔闻了。70年代末期,有过一些认真的企图,要求把研究工作人员和实践工作人员的不同方法协调起来,要求抛弃假设检验那种古典的模式,而采用思辨的框架,以鼓励研究工作者去采用实践工作者的观点。这样,数学教育研究才逐渐地走出了图书馆和实验室,而走向了课堂和学校。

更为重要的是,实践工作人员越来越多地成为了跨学科研究组中的主要成员,为把复杂的实践和理论的结构互相结合起来,这种跨学科的研究组是需要存在的。人类学家、社会学家、语言学家、哲学家的方法和概念证明了对这艰巨的任务是有用的,但是教师必须处于中心地位,因为他们的经验为研究提供了线索和赋予它以确实性。20世纪80年代开始见到了比数学教育史上任何时期都更为丰硕的研究与实践相结合的成果。

数学教育的历史虽然不长,但它是一种对话,这种对话在今天的研究者群出现之前很久很久便已开始了,而在他们消失了之后,它还会长久地继续下去。这是个千万个声音谈论着千百个课题的对话。许多重要的问题已被讨论过,但其议论却十分费解。听众会感到厌烦和沮丧。但是走开和对议论不假思索却比留下来倾听和回答问题远为容易。在对话中,美国的声音常处在支配的地位(目前仍是如此),但来自他处的声音也越来越多了。在交谈中,心

理学家和数学家都尝试奉献过他们的思想。当他们表现为顾全共同利益时,他们受到了一视同仁的欢迎;而当他们表现为追逐自己的好处时,他们就受到了冷落。

人们常以为这种对话刚才开始,或竟以为只有他们今天所讲的才有价值。当他们了解了被想过的和被谈论过的问题的记录时,他们就会幡然悔悟的。这既不是一份空洞的记录,也不是一份记录失败的编年史。它是一个群体为塑造自己而进行奋斗的激动人心的故事。

## 二、数学的性质:其任务及影响

John A. Dossey<sup>\*</sup>

社会对数学的性质和任务的认识对学校数学课程及教学和科学研究的发展有着主要的影响。对数学的不同概念的理解对学校数学大纲的发展与成功执行以及科学研究的指导和解释具有同样的重要性。数学及科学教学改革动向的文献(美国科学促进协会, 1989; 数学科学教育委员会, 1989, 1990; 全美数学教师理事会, 1989)描述数学为一门动态的而且是在发展中的研究领域。其他的一些观点则定义数学为具有一套已知的概念、原理和技巧的静态训练。

过去 50 年中数学及其应用的迅速发展引出了若干篇研讨其性质和重要性的学术论文。本文编织了一幅由关于数学性质的多种概念, 从公理结构到解题的一般探求方法, 所组成的精美图案。这些有关数学性质的不同观点还会对社会理解数学的方式产生深刻作用, 并对我们日常生活的日益扩展的影响作出反应。对此, 斯蒂恩(Steen, 1988)写道:

许多受过教育的人, 特别是科学家和工程师, 所持有的一种对数学的形象是把数学喻作一棵智慧的树: 公式、定理和结论犹如其成熟的果实有待过路的科学家采摘以滋养他们的理论。而数学家则认为他们的领域就像快速

---

<sup>\*</sup> 作者 J. A. 多塞(John A. Dossey)为美国伊利诺斯州立大学的数学教授。

增长的雨林,由数学外部的力量所滋养和形成而又对人类文化贡献出丰富而又始终更换新貌的智慧动植物群。这种感觉上的差异主要是由于抽象语言的严峻和崎岖的环境把数学的雨林与普通人类活动的领域分隔开来。

研究表明这些不同的概念对教师和数学家处理数学的教学和发展的方法产生影响。有些人把数学看成一种抽象地发展成的静态的学科。另一些人则认为数学是一种动态的学科,它随着试验与应用的新发现而不断变化。这些有关数学知识的来源和性质的截然不同的观点提供了自希腊时代以来的有关数学概念的完整延续。由于缺乏数学的共同哲学观使数学的实践和教学产生了严重分歧。有人认为,这种不一致性就是对不同的哲学观不作讨论的原因。也有人推测这些观点传播给学生并使他们形成对数学性质的一些观点。有关这些数学的概念以及有关对数学教学的性质和方针的目前和潜在的冲击的综述叙述如下。

## 数学的概念

### 历史

有关数学性质的讨论可追溯到公元前4世纪。柏拉图(Plato)及其学生亚里士多德(Aristotle)为对这一话题的最早的主要贡献者。柏拉图的观点是数学的对象有其自己的存在,在思维之外的外部世界。这样做,柏拉图明确地区分了思维中的观念和由感觉感受到的世界中的表现。由此促使柏拉图区分算术——数论和算术运算——商人所需要的计算方法。在“Republic”一文中柏拉图论证道,学习算术对个人具有正面作用,即迫使人们对抽象的数作推论。柏拉图坚持这一观点并对技术人员用物质的论据来证明有应用背景的结果表示愤慨。就柏拉图的观点,对现代思想家而言,数学是“等同于哲学的,虽然他们认为还应为其他的原因去研究



它”(亚里士多德)。数学作为对外界存在而只在感觉世界内有表现的对象的一个抽象的思维活动的这种崇高的地位,也可以在柏拉图在 *Timaeus* 中对五种正规立体的讨论中以及在他对雅典 (Athens)(博耶 Boyer, 1968)的数学的进展的支持和鼓励中见到。

亚里士多德,他的学生,则认为数学是知识的三个类别(物理的、数学的和神学的)中的一类:

[数学是这样的一类]它显示对形状及局部运动,在于探求图形、数值和大小以及地点、时间和类似的东西的性质……。这样的本质使其必然地与另外两类并列,不仅是因为它可以通过或不通过感觉来感受。(托勒米 Ptolemy)

把感觉作为关于数学的抽象概念的来源的肯定的观点是和他的老师柏拉图所持的观点不同的。亚里士多德对数学的观点是不以-一个外界的、独立的、不可观察的知识体的理论为基础的。而是以从实验、观察和抽象所获得的知识所构成的经验实际为基础。这一观点支持了这样的概念,即人们是从-一个给定的数学条件来构思其内在的联系。按亚里士多德的观点,数学概念的形成由于数学家对客体经验的理想化的结果。因而,应用数学中的陈述即是纯数学中定理的近似(科纳 Körner, 1960)。亚里士多德试图通过从实验和观察所得到的原始结果的收集和分类,用系统性的推理解释数据中的内在联系以理解数学的关系。从而,柏拉图和亚里士多德的著作和思想就形成了关于数学的性质的两个绝然不同的主题。

到了中世纪,亚里士多德的著作因其对逻辑学的贡献和在证实科学论断中的应用而闻名。这与亚里士多德已采用他的逻辑推理方法的途径并不矛盾,但是应用他的原理的人们往往用它来和从原始探求中导出的论据作争辩。亚里士多德在柏拉图所认识的

理想形式和他们在客观实体中的经验现实之间作出了严格的区分。

在16世纪初叶,培根(Francis Bacon)把数学分为纯粹的和混和的数学,并对数学思想的这两大学派之间的区别作了进一步的评论:

那些处理仅从自然哲学公理中分离出来的确定量的科学即属于纯数学。……对自然界的许多部分,如果没有数学的帮助和参与,则既不能以足够的技巧予以创造,也不能以充分的表白予以演示,也不能以足够的灵巧使适于应用。

有关数学的性质的类似的讨论还得到达朗贝尔(Jean D'Alembert)及法国沙龙圈的其他成员的响应(布朗 Brown, 1988)。

笛卡儿(Descartes)研究了使数学回复到从公认的公理作推论的轨道上。虽然他自己从事于生物问题的实验,笛卡儿却拒绝了从实验来的影响和在数学问题中的感觉,因这将引起误导。笛卡儿的数学的思考乃致力于将它与感觉分离:

由于“数学”这个名词与“科学研究”一词的意义相同,……我们发现任何一个稍受教育的人就能容易地把任何问题中的与数学有关还是属于其他科学的问题区别开来。……我因而认识到必须有一种普遍的科学来对所引出的有关序和测度等并不限于某一特殊主题的要素作出全面的解释。我认为这就叫做“通用数学(Universal Mathematics)”,这不是一个牵强的命名,而是早已存在而被普遍接受的,因为这一科学中包括了所有被人称之为数学的组成部分的内容。

这一场理性论者和实验论者之间的争论在整个17和18世纪期间影响了科学的各个分支。

德国哲学家康德(Immanuel Kant)在他的著作《纯推理的批判》

(Critique of Pure Reason (1952))中把数学性质的讨论,主要是几何学的性质,带回到一个核心问题。尽管他肯定了所有数学的公理和定理都是真理,然而他却认为感性的空间的性质是欧几里得(Euclid)的,并认为欧几里得几何学是人类头脑的先验的理解。这与非欧几里得几何的正在兴起的理解是完全相反的。

19世纪中叶,非欧几里得几何的一致性的确立终于使数学得以从认为是外部世界唯一模型的一套公理的束缚中解脱出来。一致的非欧几里得几何学的存在表明了人类头脑在构造新的数学结构方面的能力,而且不受一个外部存在并控制着的世界的限制(伊夫斯 Eves, 1981; 克兰 Kline, 1972, 1985; 科纳 Körner, 1960)。这一发现是那么的激动人心,带来了一个“真理”的新概念,它使人们专心于接受一个或一套决定着一个研究领域的模型的公理。数学家们立即着手运用这个新的自由并以公理化的方法去研究数学。

### 19世纪末和20世纪初的观点

摆脱了对实验和感觉的依赖性,数学方面的新的研究很快又遇到了新问题,即在实数系统和集合论中出现的自相矛盾的论点。此时,出现了三种数学观点来处理这些觉察到的问题。第一种观点是由德国数学家 G. 弗雷格(Gottlob Frege)于 1884 年所创立的逻辑主义学派。这一由柏拉图学派发展而来的学派阐述了这样的观点,即认为数学概念可看作是逻辑概念的一个子集。逻辑主义的支持者指出数学的命题可以用完全一般的命题来表示,后者的真实性来自它们的形式而不是来自在一个特定的内容背景下的理解。A.N. 怀特黑德(A. N. Whitehead)及罗素(Bertrand Russell)在他们的划时代的著作《数学原理》(Principia Mathematica)中对此作了阐述。这一尝试相当于从策梅罗(Zermelo)及费伦克尔(Frankel)所发展起来的集合论的公理的项目中建立经典数学的试图。这个方法,如同弗雷格的方法,是基于接受外部存在数学,因而它是柏

拉图学派的直接派生。怀特黑德和罗素的方法的失败在于不能建立无限性的公理以及在没有背景的完全一般原则的状况下的选择。这一柏拉图学派的方法也因其体系内的互相矛盾而失败。

另一方面,荷兰数学家布劳尔(L.E.J. Brouwer)的追随者不接受任何经典数学概念的存在,除非它可以通过由第一原理经一系列清晰的演绎步骤而构成。称之为直觉主义者的布劳尔学派思想的成员对集合论中自相矛盾的出现以及对所有经典数学的可能分歧给予极大关注。与接受经典数学内容的逻辑主义者不同,直觉主义者只接受那种从自然数通过建设性证明的智力活动可以展开的数学。这一方法不允许采用排中律。这一逻辑形式断定  $P \vee \sim P$  的陈述是合理的并能以反证法予以证明。

在许多方面,布劳尔所提出的概念是建立在与康德所公开宣布的观点没有矛盾的基础上的。布劳尔并不为“外界客体的检验”而是为“缜密的自省”作争辩(科纳 Körner, 1960)。这一概念将数学描述成“有效”演示所得出的客体。数学概念只是由它们的人类思维的创造性而存在的。这种对创造性的坚持遂将直觉主义者的数学置于亚里士多德的传统之下。按这种观点,逻辑成了数学的一个子集。直觉主义者的工作产生了一组与经典数学不同的定理和概念。在他们的存在和有效准则下,可以证明对全体实数定义的每个实值函数都是连续的。毋需多说,这个以及其他的与经典数学差别并没有吸引很多归依于直觉主义的人。

数学的第三种概念乃是出现于 20 世纪初的形式体系。这一学派是由德国数学家希尔伯特(David Hilbert)所创铸。与布劳尔的观点相似,希尔伯特的观点与亚里士多德传统更为一致而与柏拉图学说稍异。与布劳尔所持观点相同,希尔伯特也不接受康德关于算术和几何的体系是作为先验知识的描述而存在的观点。然而,他确认数学是从基于客体的直觉而产生的;这种客体至少能作为存在于头脑中的具体代表。

形式体系是建立于用形式的公理系统来描述数学概念的尝试。这种使数学摆脱矛盾的尝试是建立在对一个数学分支的一组公理的解释之上,从而使该专题可用一种最高级语言进行讨论。在由于戈德尔(Kurt Gödel)在 1931 年发表了划时代的论著而导致其失败之前,在形式体系的指导之下也在几个领域中取得了一定的进展。戈德尔确认按希尔伯特所建议的公理体系的类型内不可能形式上证明此系统没有矛盾。戈德尔也证明了,运用通常的逻辑和数论,如只用传统数论中的主要概念和方法,就不可能证明系统的相容性。这些发现结束了把所有的数学形式化的尝试,虽然形式体系者的学派对数学的发展仍继续产生强力的影响。

在 20 世纪初创立的,用于处理 19 世纪后期所发现的悖论的三个主要学派的思想促进了关于数学性质的讨论,然而它们中没有一个能提供对数学性质的能普遍接受的基础。他们三者都倾向于将数学的内容视为产物。在逻辑学中,此内容为经典数学的主体的元素、它的定义、它的假设以及它的定理。在直觉主义学派方面,内容则是从通过有效的推理方案建立起来的定理。在形式体系学派方面,数学是由形式公理结构所组成的,这种形式公理结构是用于克服经典数学的缺点。柏拉图和亚里士多德的概念的影响仍然像一股底流那样渗透到这些理论之中。所谓“产物”的来源——或者是一个早先存在的外部客体,或者作为一种从感觉或实验再通过经验所创造的客体——仍然是个问题。

### 近代观点

用产物情况来描述数学的性质在数学家之间尚未成为定论。对人们思维之外的数学概念的存在,他们趋于持有强烈的柏拉图观点。当迫使他们澄清其数学的概念时,大多数人会退回到一个形式体系主义者,或者一个亚里士多德主义者,数学的地位尤如用按照一套固定的社会接受的规则的标记系统而玩弄的游戏(戴维

斯及赫什 Davis & Hersh, 1980)。而在实际上,大多数职业数学家在从事于数学工作时很少考虑到它的性质。

形式体系的传统观念对数学的发展保持着极大的影响。赫什认为对数学基础的探求被误导了。他建议把重点集中到研究数学的当代实践,并认为当代的实践天生地容易出错而且是一种很公开的活动(蒂莫兹科,1986)。为此,赫什以描述正进行着工作的数学家的困境为起点。在创造新数学的过程中,数学家是在学科描述一个外部存在的客观实体的情况下进行研究的。而在讨论数学的性质时,数学家却又摒弃这一观点而把它描述为一场毫无意义的玩弄符号的游戏。由于缺乏对数学性质的能共同接受的观点,造成了对数学教育实践以及对数学本身的严重分歧。

教师所持有的数学观念对在课堂上处理数学的方法有很大影响(库尼,Cooney,1985)。持有形式体系哲理观点的教师会以结构格式来提出它的内容,需要用集合论语言和概念(赫什,1986)。这种形式体系的处理方法对那些对材料理解不透而不能提出有深度的创造性的观点的人往往是一个很好的回避。然而,如果这种形式体系哲理并不是数学家所持有的观念,为什么它又能在课堂上对数学的讲授起主导作用呢?面对这一问题,在数学教育中对数学性质的讨论必须摆在领先的位置。

蒂莫兹科及赫什认为必须有一个新的数学哲学为在业的数学家和在业的数学教育工作者提供一个基础。按照赫什的观点,在业的数学家应不制约于持久关注以一种被接受的形式论据来对每一步骤作论证。相反,数学家应在直觉的引导下去探求概念以及它们之间的相互作用。这样的道路是把重点放在理解作为引导而不是放在以形式语言表达的精确量化的结果的冗长而形式的推导上。

这一转移要求有一个主要的变化。必须接受数学作为一种人类的活动,这种活动不受任何一种学术思想(逻辑学的,形式体系

的或构成主义的)所制约。这样的方法可对什么是数学的问题作如下的回答:

数学论述的是理念。不是铅笔记号也不是粉笔记号,不是有形的三角,不是物体的组合,而是理念(可以用物体表示或提示)。我们大家从日常经验中熟知的数学知识或数学活动的主要性质是什么呢?

1. 数学的对象系由人类所发明和创造的。

2. 它们不是任意地被创造的,而是在已经存在着的数学对象的活动中以及从科学和日常生活的需要中产生出来的。

3. 一旦被创造后,数学对象所具有的性质是明确裁定的,是我们可能很难于发现的,但是是独立于我们对它们的知识而具有的。(赫什)

数学哲理的发展和接受给数学及数学教育带来挑战。这个哲理应当需要有助于数学家、教师和学生去体验数学的发明的种种经验。它应当需要有使观念和事件得以数学化或模型化的种种经验。发展一种新的数学哲理需要有数学的各种不同观点的讨论和交流,以便确立一种学科的有效而可行的特性。

## 教师的数学观念

教师所持有的数学观念与在课堂教授中数学的讲述的方法密切相关。传递给儿童们的关于数学及其性质的细微信息,就会对他们今后去认识数学以及数学在他们的生活阅历中的作用产生影响。

库尼曾经论述由于教师关于数学性质所持的种种基本信念的原因,像由 NCTM 标准(1989)所建议的在数学教育方面的实质性的变革实现起来将较为缓慢而困难。他注意到预备教师们在他们讲授中采用的最普遍的动词是现在式。这一教学观念体现了存在

着固定信息传递者的权威性的见解。处于这样的地位会接受的观点是有向学习者传递的大量知识的客观存在,因而是更接近于柏拉图哲学而不是亚里士多德哲学。这一观念的延伸,数学如何与教学及其实际有关,是一个很重要的问题。教师对课堂上如何进行教学的观点主要地基于他们对数学性质的理解,而不是基于他(或她)所认为的最好的教学方法(赫什,1986)。为了改变这种状况,人们必须建立把数学性质概念化的其他方法以及这样的一些概念对数学教育的关系。

库尼(1987)应用了戈夫里(Goffree 1985)及佩里(Perry 1970)的工作来分析在课堂上对数学性质的描述,他的结论是学校数学是热衷于一个形式的和外界的数学观的。戈夫里提供了一个模式,说明教科书是如何发展起来的,以及教师又如何在课堂上运用它来描述数学的性质的。四种教科书的模型是(a)机械论的,(b)构造主义的,(c)经验论的,(d)现实主义的或应用的。这四种教科书发展方法中的每一种都描述了数学性质的一种观点。随后,戈夫里把这些原文的特点与教师在课堂上应用教科书的三种方法交织起来:

工具式用法——教师把教科书作为工具,按照它的次序并运用它的提示来处理其内容。

主体式用法——教师把教科书作为指南,而提出其材料的一个创造性的概述,并根据教师的经验随即进一步讨论其概念/原理/方法。

基础式用法——在这个水平上,课程是从一种创造性的观点发展起来的。这个方法与数学涉及的内容和教学法均有关。

在许多课堂上,盛行的模式是机械论工具式。现代改革文件(NCTM,1989)所提倡的是一种更接近于现实主义—基础式的状况。这两种模式之间的巨大差别,指明了教师对数学性质的观念能对应用于学校数学的教学过程产生很大的作用。



在有关的著作中,库尼及其学生们运用佩里所创造的智力发展水平考察了教师的数学观念的性质。佩里的模型提供了一种方法来描述人们观察周围世界的途径。佩里的分级系统方案发现,每个人先后经过从二元论到多元论观点再到相对论观点等几个阶段。在二元论阶段,个人是假定在一个两极性的世界里工作,他只能作出好或坏,对或错这样的选择。在这个阶段中,问题是由一种权威裁决来解决的。个人可进入到接受多元观点的阶段;然而这样的观点仍被看作为离散的实体,缺乏结构上的关系。最终,一个人可进入相对论阶段。在此阶段,一定数量的多种可能性被看作是相互有关系的。在此阶段,每种可能性是在它自己的参考框架之内被考察的。

凯斯勒(Kesler, 1985)及麦克加里亚德(McGalliard, 1983)通过对他们的课堂教学的分析,研究了中学代数教师和几何教师的数学观念。凯斯勒发现代数教师在他们的确定方针上差异很大。一些人实行的是分级系统中的二元论或多元论水平,而另一些人则表现为多元的现实主义的习性。麦克加里亚德研究了几何教师,其结果表明他们的数学观念属于二元论。这些教师把他们的工作视为向他们的学生介绍数学。教师主要关心的是看到他们的学生对要求的家庭作业和测验能容易地完成。这样,数学的学习便降低到只知其然而不知其所以然。有少数几何教师超越了二元论水平的原因,可能是他们缺乏几何的经验的一种反映。库尼反映了教学中演示或传播模式的主导地位及其含意。演示,就其性质而言,包含着权威。这样的定位是与可促进学生考虑多种数学观念,其性质及其用途的课堂管理和资源利用的方式不相协调的。这些想法加上由欧文斯(Owens)与预备中学教师的合作调查的结果,提示了必须去抵偿使课堂上数学的成熟意见与戈夫里所期望的基础-现实主义组合相接近这两者之间的很大差距。

欧文斯以及布什(Bush)的著作进一步指出,许多预备教师的

二元论或多元论观点,由于他们在大学水平的高级数学内容课程的经验而得到加强。在那儿,他们在教学中所显露的是很强地反映了数学的形式体系的观点,即是一个外部发展起来的公理体系。这一影响只使数学存在于外界的观念得以强化。经过直接干预,迈尔森(Myerson, 1977)做到了使一些学生在一较高的水平上去观察数学。但是许多学生仍然认为总有专门固定的方法去处理每一个课堂上的问题,这反映了预备教师的很强的二元-多元论的倾向性。

学生们的反应是影响教师在课堂上描述数学性质的有力因素。布朗(1985)和库尼(1985)研究了一位任教第一年的教师在课堂上的反应。这位教师是带着反映多元论和相对论特性的倾向进入教室的。他试图倡导一种课堂风格,包括大量的解题和着眼于提供学生学习的坚实基础的学生活动。学生们发现这些方法具威胁性,他们的反应导致最终回到他的演示模式。库尼(1987)总结说:“我怀疑学生们是受机械论课程的吸引并且喜欢对教本的解释是可预测的教师。如果你不认为如此,可仔细听听当测验来临时学生和教师之间的讨价还价。”

## 数学观念对数学教育研究的相关性

20世纪70年代后期和80年代中期关于数学教育和数学教育研究的发展,反映了数学哲学及其与学和教的关系方面的重新关注。在数学教育的文献(索德(J. Sowder))中至少有5种数学的观念可予鉴别。这些观念包括二组持外部(柏拉图)的数学观点的研究,剩下的三组研究则持内部(亚里斯多德)的观点。

### 外部观念

两组研究者的工作把数学看作是大量可从大纲和课程材料中

得到的,存在于外部的已建立的概念、事实、原理和技巧。第一组研究者的工作是运用外部的观点集中于帮助教师和学校在向儿童们传授此项知识时更为成功。他们的工作采取一种相对固定的静止的数学观。

关于教师在数学课堂上的作用的研究,通常集中于作用和教学方法而不是所教的数学和学习数学的方法。

司密斯(B.O.Smith)和他的同事们对教师作用的早期研究,引出了一系列关于在概念和概括教授中用逻辑推理的相对有效性的研究。对有效教学的以后的研究中把教室选为收集数据的场所,并集中在对教师如何利用区域性的知识以及他们如何组织、安排程序及讲授有关内容试图达到在课堂上推进不同类型的学生操作。其他的研究则集中在教学工作的计划和在教学中区别“新”“老”教师等方面。这些研究常集中于可区分新老教师的表现的教学行为,并以学生对标准化考试、专题考试的表现或以在一个阶段中学生的成长作为分类的基础。莱因哈特(Leinhardt)及其合作者还探讨了分数的教学,对教师决策的作用、对教案的使用以及对讲解方式的作用进行了考察。古德、格劳斯(Grouws)及埃布迈尔(1983)考察了老教师的主动教学的作用,从而发展成一种能促进学生在数学上成长的课时组织的样板。

谢弗尔森(Shavelson),韦布(Webb),斯塔兹(Stasz)和麦克阿瑟(McArthur)(1988)对基于外部观点的研究结果的性质提出了警告。首先,研究结果提供的是一幅现状的图画,而不是一幅由于突然变化的讲授所能导出的图画。其次,研究结果反映了表现的方式,这种表现方式一开始就把教师分成不同的类别。如果基于某个特殊的准则一些教师被选作为有经验的教师,则这些结果所反映的是与此准则有关的讲解的教学模型。这些研究的实施以及数学的外部观点的运用趋于指导所提出的和那些没有提出的研究问题的类型。此项研究必须包括众多类型的教师,以便使所得结果能普遍

适合所有教师 and 所有课堂。

持外部观点的第二组研究者采取一种较为动态的数学观,但他们集中注意的是如何调整课程以反映这个学科的成长并观察学生如何获得有关内容的知识和技巧。然而,根本的中心问题仍在于学生对课程的掌握或在于将最近的技术进步或教学方法应用于数学教学。

索普(Thorpe, 1989)在评述代数教学的性质时陈述道:“学生已必须学习许多和他们的父母及祖父母所学的同样的代数。但是现在有些东西已经变化。我们有了新的工具”。卡普特(Kaput, 1989)接受了关于代数教学的变化结果并列出了关于在建立代数的符号系统中相连的符号的作用的研究问题。汤姆森(Thompson)提供了为确定计数法和数量的主题的含义的附加例证。沃恩及希伯特(Wearne & Hiebert)的著作(1988)提供了数学教育中此类研究的另一例证。从已知的分数的概念和技巧出发,韦沃恩和希伯特考察了学生学懂和运算十进小数的各种方法并把所学到的东西应用到要求从理解转变为技巧的情况。这些研究中都假设了数学是已知的,但又允许随时间的推移而获得新的含义。实质上这个结果是通过研究可使教师如何讲授和学生如何理解得到改进。这里的焦点不在于创立新的内容,而在于使现存的数学部分的个别知识增长。

## 内部观念

数学教育研究中其余的三个数学观念着重认为数学是一种个人构成的或内部的一组知识。其中之一把数学看作为一个过程。通晓数学等同于实践数学。按此传统观念的研究工作多着重于对一个给定的内容考查其特征以促进“实践”。几乎每一个参与数学的教和学的人都认为学习数学是个人的事情,在此,学习者,作为他们参与活动的结果,形成了他们自己的个性化的数学的概念。

格莱泽泛特(Ernst von Glasersfeld, 1987)将此学习与讲授的概念作了如下的描述:

当我们认识到知识和能力是对个人经验的个人概念组织的产物,教师的作用就不再是施与“真理”,而是在某些经验领域的概念组织中帮助及引导学生。为此教师要做的事有两件:一方面要有一种适合于学生的概念,另一方面是一种适当的目標的概念。两者都不是直接观察可以得到的。学生说的和做的可以用一个假设的模型来解释——而这正是自苏格拉底(Socrates)以来每一个好教师所直觉地进行研究的一个领域。今天,我们已可能为教师提供一套相对可靠的诊断工具。

至于在帮助和引导方面,好的教师对此总能找到途径和方法,因为不论自觉或不自觉,他们意识到,虽然人们可以用词语和符号来指明方向,但还得由学生来完成概念化及运算。

对学生实践数学的强调是这一数学概念化的标志。正是这种“实践”——实验、抽象、概括及专门化——组成了数学,而不是一种合格的信息的传递。这种学习数学的方法在斯特弗(Steffe)及龙伯格(Romberg)的著作中得到了反映,也同样反映在许多新兴的重视活动的学前和初级大纲中。这种观念似乎也为玻利亚(George Polya)所赞同,正如他在一次美国数学会会议上所作的关于数学学习的演讲中所表述的观点:

许多人用多种方式陈述了学习必须是主动的,不仅仅是被动或可接受的;仅仅是读书或听讲或看电影而不加入自己思考的作用,则你就很难学到什么,并且肯定不会学到很多东西。

另有一种经常被提到(且密切相关)的见解:学习的最好的方法是靠自己去发现。利希登伯格(Lichtenberg)……则增添了有趣的一点:你被迫自己去发现的东西在你头脑中留下一条道路,当需要时你就可以再次利用。

这种对数学的个人的构思探讨是 NCTM 学校数学课程及评估标准中的重要组成,而且在数学教育中有着动人的历史,包括福西特(Harold Fawcett)的著作,进步教育协会的著作以及 NCTM 的决定议程。

第二种数学的个人或内部的概念化是基于把数学活动以心理的模型来描述,这种心理模型运用了以实际经验为依据的步骤和方案。拉金(Larkin)对这一方法描述如下:

认知科学的中心技术是按下述方法来建立解题模式:将一个问题看作为一个数据的结构,它包括了一切可以获得的信息。然后我们探问何种程序能对那个数据结构增加信息?从而对问题产生答案。由于我们要建立一个能解释人类功绩的模型,我们要求模型对数据结构增加信息的次序应与所观察到的人类增加信息的次序相一致。

研究数学的这种认知科学的方法可在布兰斯福德(Bransford);坎皮恩,布朗及康奈尔(Campione, Brown and Connell);卡彭特(Carpenter);蔡克林(Chaiklin);希伯特;拉金;马歇尔(Marshall);内舍(Nesher);奥尔森(Ohlsson);彼得森(Peterson);雷斯尼克(Resnick);以及沃恩和希伯特等许多人的著作和介绍中见到。这种采用认知模型方法的研究的多样性表明对观察数学学习结构模型的明白的赞同。其基本原则是确认数学知识的表述,以此知识为基础的个体执行操作以及人脑对该知识的储存、转换和熔合的方式。

铺陈于数学教育研究的第三种数学的本质的概念是将数学知识视为社会相互影响的结果。在此数学的学习就是取得相关的事实、概念、原理及技巧;这都是社会相互影响的结果并强烈地依赖于环境和背景。论述这一观点的研究工作(鲍尔斯菲尔德 Bauersfeld, 1980;比肖波 Bishop, 1985, 1988;基兰 Kieren, 1988;莱夫,史密

斯及巴特勒 Lave, Smith & Butler 1988; 舍恩菲尔德 Shoenfeld 1988, 1989) 着重于按学徒的模式的学习来积聚数学知识, 既要利用其内容又凭借其背景。这种方式可提高学习者在数学联系应用和在解题场合的潜在用途的能力。内容的理论方面和应用的实用特征之间的距离缩短了。就社会背景面言, 数学方面的一种独特的进展的量度是根据所传递给他或她的材料内容的掌握程度而判定。不存在所传递的文化信息或材料与学习者的生活地位之间的关系的量度。

舍恩菲尔德(1988)认为, 学生对数学性质的理解是存在于学校环境中的认知和社会因素的复杂相互影响的结果。如果学生要学习和应用数学, 他们必定会看到数学在社会环境中具有价值。这种数学学习过程中产生的“理解”要求学生积极地参与“实践数学”以便学会这一学科的技巧。必须要求学生积极地参与分析、猜想、构造和综合所涉及的问题的数值和空间信息。这些活动还必须使学生参与观察这些活动的结果是如何与所涉及的社会背景的问题的解决相关联, 而问题也正产生于这一社会背景。基兰(1988)也类似地为具有社会背景特征的数学学习的细心综合作论证, 在这一社会背景下数学取得意义。

这三种关于数学教育的本质模型的发展和研究的观念, 都为数学教学的研究提供了重要的观点。选择其中的任一种观点并用于研究的规划将对所研究的问题的性质, 相关数据的收集和分析的方式, 以及与联系着所得结论的重要性产生强烈的影响。数学教育的创造者和使用者都应对这些观点在有关研究的执行中所起的作用给予密切注意。忽视了这一特征将导致此类研究结果的错误应用和研究发现的错误解释。

## 总 结

综观文献可见,数学的种种观念可归结为一个从外表到内在的统一体。赫什的评论及其他学者(蒂莫兹科)指出数学家们在受到质疑之前是以构造主义者的面貌出现的。对数学教师也有类似的判定。后退到用外表模型讨论其观念时表现了对数学的柏拉图观点的一种强烈的偏爱。这些观念受到数学的二元论或多元论信念的强烈渲染,使得很少有教师摒弃一个有权威的教学方式。即便如此,在数学教育中的领袖人物和专业组织都在推动一种反映肯定的相对论的数学观(恩斯特(Ernest),1989)。采取措施处理现代数学教学中不同的哲学基础之间的分歧是十分重要的工作,也是在各个水平上发展和研究数学教育所必须解决的问题。

数学的程序观点出现于几个 NCTM 标准(1989)中和见诸于一些现代数学思想家的著作中(蒂莫兹科,1986),提出了许多新而重要的挑战。教师的培育者和课程的开发者必须注意内在的和表面的观念的特点和分支以及对课程发展和教师作用的派生影响。再者,所有涉及应用数学教育研究的人必须认识每种数学观念对所引用的研究成果和对这些成果的解释和应用的重大影响。数学教育家需要把注意力集中在研究工作、课程、教师培训、讲授和评估中的数学本性上,就像他们力图理解它对数学的教与学的影响一样。



### 三、关于学术和研究方法的观点

Thomas A. Romberg<sup>\*</sup>

在教育学中,研究方法论成为热门话题的一个主要的原因是教育本身并不是一个学科。事实上,教育是一个研究领域,它包括了现象、事件、机构、问题、人物和过程的轨迹。它们本身就组成了多类调查的原始材料。

在过去的四分之一世纪中,许多领域的学者们面临着与数学的教与学有关的问题。在他们的研讨中采用了许多不同的观点。在这一章内,我打算在社会科学范围内认辨出那些在学校环境中与教学研究有关的、宽广的研究趋势,并且确定这些趋势对学校的数学学习的影响。作为对理解这些趋势的基础的辅助,我将(1)描述作为一个研究领域的数学学科教育的一些特点,(2)概述研究人员的活动,(3)列出现在所采用的各种研究方法。随后来确定并简单地描述五种一般的研究趋向以及它们对数学教育的研究的关系。

---

\* 作者 T.A. 龙伯格是威斯康星——麦迪逊大学的教育学教授以及美国教育部的全国数学科学教育研究中心的主任。

## 数学科学教育作为一个研究领域

把数学科学教育考虑作为一个研究领域是重要的,因为正像舒尔曼(Shulman)曾经主张的,学校是复杂的,因而对学校数学的教和学有关的,所产生的或所固有的问题,已经用过多种学科的学术探讨的观点和方法。贝格尔(Begle)的学校数学的图解,阐明了学校教育过程中各个因素的相互作用和对多种观点和方法的需要(见图 3.1)。在这个示意图中,学校教育事业是处于一个社会的环境中,数学科学课程涉及了数学的一个子集,教学是由一位教师在

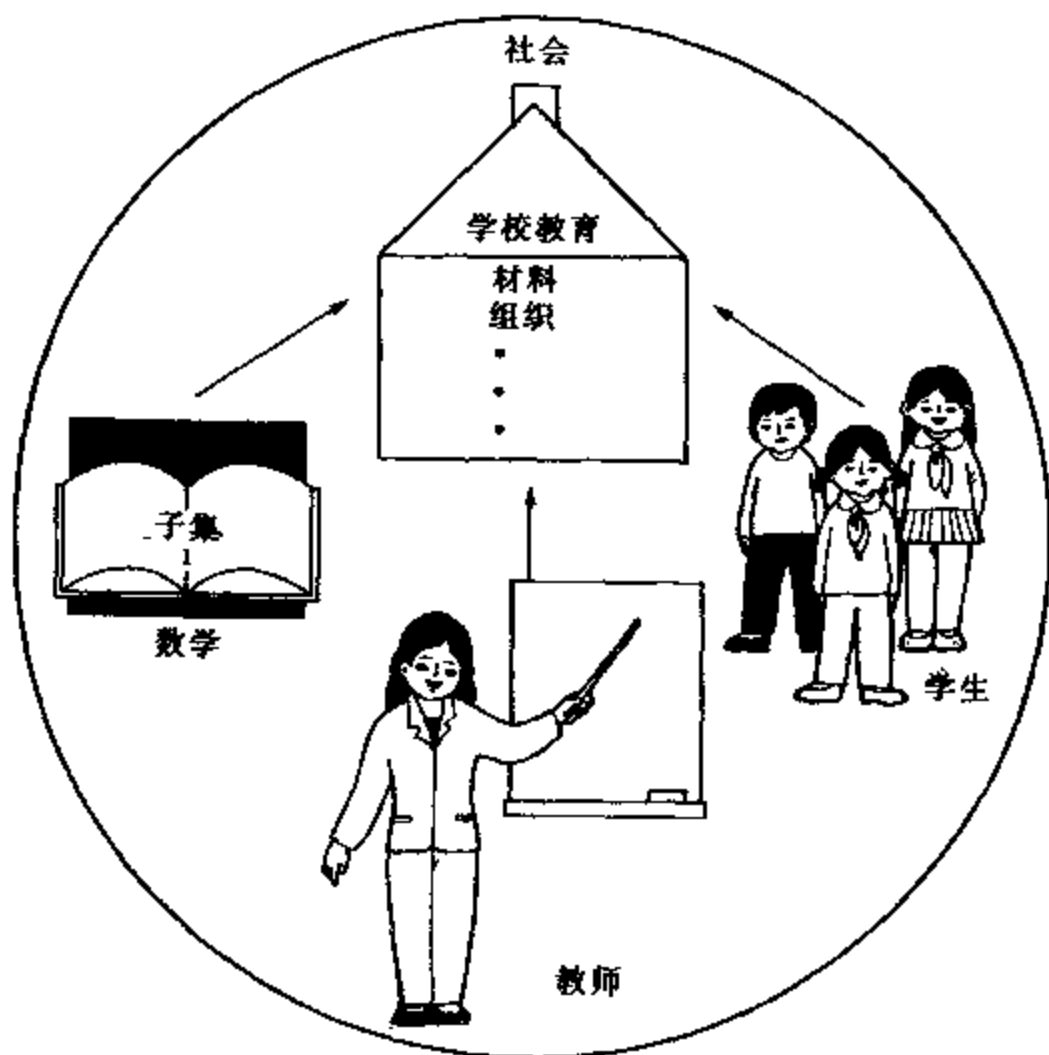


图 3.1 社会、数学、学生、教师和学校教育的关系  
(引自贝格尔数学教育讨论班的课堂摘记,1961。)

和一群学生在一段时间内在一个课堂内进行的。画这个图是为了提出一个关于数学教学的观点,它是由5个基本点来形成的。

1. 社会的群体创办了学校,为的是把年轻人培养成为社会的成员。

2. 精湛的数学讲授要从关心该教哪些数学概念和指明哪些应用着手。

3. 如果考虑到了学习的人,数学教学就会是有效果的。

4. 要使数学教学收效大就要考虑到学校教育的各个方面。

5. 教师是实施讲授过程的总管和引导者。

从这几点,可以提出各种各样的问题和猜想,并进行调查研究。譬如像下列的问题:

- 谁来决定一个数学课程中应该包括哪些数学?
- 为什么在美国学校中欧氏几何是个一年课程?
- 对学生如何学会解数学题,教师持有什么观点?
- 对有理数的教学应该如何安排次序和进度?
- 对比和比例,学生的概念是什么?
- 教师不了解其他数学教师的工作会对教学工作产生什么影响?

这些问题中的每一个都值得研究。然而,每个学者可以用不同的方法来研究每个问题。再者,不同学科的学者可对同一个问题用很不相同的方式来研究。常常是采用了从数学、知识社会学、历史学、学习心理学、发展心理学、农学和人类学的观点来研究这种教育问题。由于每一个学科的观点都对数学科学教育的领域有影响,它产生了自己的一套概念、方法和步骤。要懂得数学科学教育研究中当前的趋势,你就必须留意这些作为基础的观点和原理。这一点很重要,因为方法的差异不仅仅包括调查同一个问题用不同的方法。一个方法和另一个方法的区别不仅仅是信息如何收集、分析和报导的方式,而且还有所提的问题的类型以及研究这样的问题所根据的原则或范例。

## 研究人员的活动

研究这个词是指一些过程——人们所做的工作，而不是人们能接触到和看到的物体。再者，做研究不能看成是一种机械的操作，或者是按照一种预先指定的方式来实行一套活动。在做研究时的活动包含了更多工艺的而不是纯技术的训练的特征。就像在各行各业中，广义上说来，关于应该按照怎样的步骤去做和怎样的工作是令人满意的都是有共识的。这些共识来自于研究人员间日复一日的交流。已知做研究就是一种工艺，那么它的主要活动是哪一些呢？为了本章的意图，我们描述 10 个活动（见图 3.2）。这张清单并没有什么独特。事实上，几乎每个研究方法的教本上都列了相似的一套活动。然而，在这儿把它列出来是为了（1）突出一些共同性的问题，那是不熟悉研究的人在理解研究过程时要面临的；（2）为讨论研究趋势提供一个背景。另外，虽说这些活动是按照一个系列的次序来写出的，但是并不一定要照这个次序来执行。在实

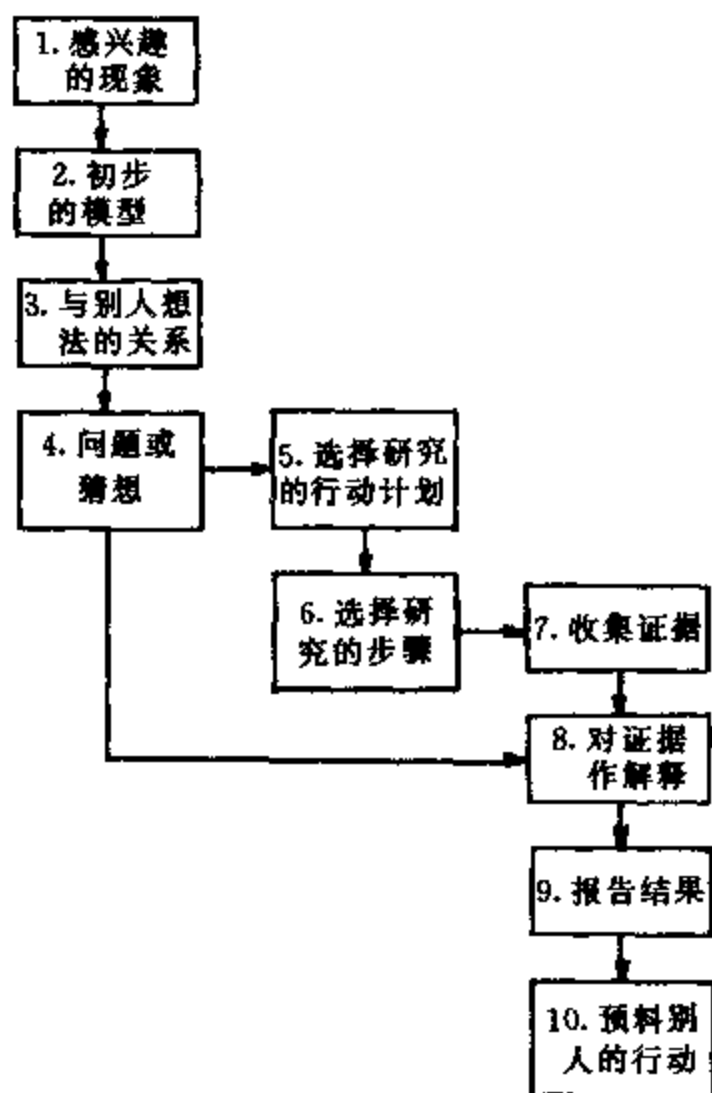


图 3.2 研究活动以及它们的关系

践中各种因素诸如学者的意愿、假设、猜想、信息的获得、方法等等的相互作用,都是无法分得那么清楚的。前面的四个活动是最重要的,因为它们涉及到如何将自己对别人的工作中的某个问题的观点摆位和如何来确定要研讨什么题目。下面两个活动则涉及到要收集何种证据和如何去做到。下一步是收集数据,而最后三个活动是关于弄懂收集到的信息以及将结果写出报告。

1. 确定一个感兴趣的现象。所有的研究都是从对现实世界中一个特定的现象的好奇心开始的。如在图 3.1 中所提示的,在数学学科教育中这种现象包括了教师和学生,学生如何学习,学生如何和数学互相作用,学生如何对教师作出反应,教师如何去备课以及许多其他的议题。数学教育家面临着许多领域,正像从任何一期数学教育研究的杂志上都可以看到的。

2. 建立起一个推测性的模型。研究人员可将所关心的现象的某些重要侧面作为变量以及它们又是如何关联的作出推测,然后用一个模型来阐明,例如卡彭特(Carpenter)和芬内玛(Fennema)提出了图 3.3 中的模型来引导他们目前的研究,将认知科学和教学科学结合起来。从这个意义上看,一个模型仅仅是一组关键变量和变量间的隐含着的关系的描述。对多数学者来说,一个模型只不过是帮助人们弄清一个复杂现象的一个启发式的手段。实际

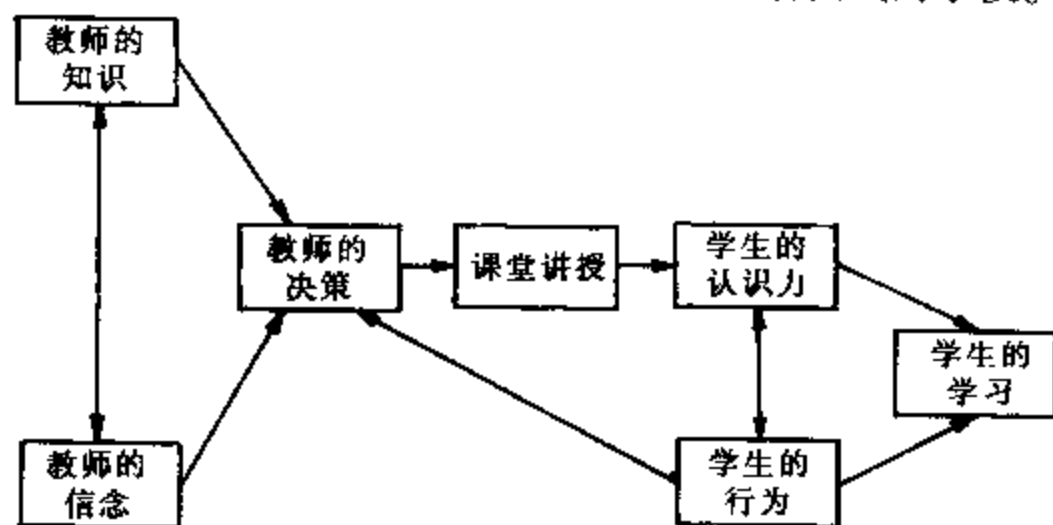


图 3.3 科研和课程发展的模型

的情况只有很少是明确的,它往往是“嵌”在某个环境中,因而难以获得情况的一个清晰的叙述。形成一个临时的模型通常是有帮助的,因为在这样做时,就要求你来指明那些你认为在实际情况下起作用的变量。当然,模型只是一种简化,因为在现实中有些特征是重要的,而另一些却可以说是无关的。不论怎样,模型提供一个起点或是对所关注的情况的导向。基尔帕特里克(Kilpatrick)指出过,好的研究人员就像任何领域内的大师一样,比那些不那么富有想象力的人们更能够创造性地辨认出变量和关系来,以便对熟悉的现象作出新的审视。

3. 将现象和模型与别人的想法联系起来。有一件重要的工作就是去考察别人对这个现象的看法,并且去确定他们的想法能否用来讲清楚、引伸或改造所提出的模型。对小孩是如何来发展计数的技能感到兴趣的研究人员,就试着把他或她的想法和其他人对于这个现象的看法作联系。为此,研究人员必须认识到每个做研究的人是一个持有特定“宇宙观”的学术群体中的一名成员。如果你要去考察别人的想法的可能的贡献时,你就必须把这些想法和那个特定的“宇宙观”联系起来。譬如说,一个从构造论的观点来观察小孩对分数概念的不同的理解,可能认为小孩子对分数的特定的经验是贫乏的。要树立起这样的论证时,研究人员就要去阅读并反映其他的构造论学者的文章和研究。然而,如果那个研究人员持有的是一个行为论者的观点,那么他或她的想法就得用其他行为论者的工作来作评价。

4. 提出具体的问题或者做出有充分理由的推测。在研究的过程中,这是关键性的一步,因为在考察某个现象时,不可避免地要产生若干个可能的问题。要决定究竟去考察哪个问题并不是一件容易的事。普拉特(Platt)认为至关重要的是问题的选择,如果提出的是个“关键性”的问题,那么就可以得出“强有力”的推断,否则的话,某个研究可能只是对一串提问得出很小的结果。强有力

的推断的想法引出了大多数研究计划的重要的特征——在某个特定的框架内的一串研讨的累积性。在这种情况下,前面提到的构造论者可能会主张,如果开展丰富的讲授活动,让小孩子来构造关于部分和整体的关系的意义,将会得出较好的理解,而行为论者则会拥护举行一系列的活动来取得更好的改进性的反馈或强化。

所提出的问题的格式往往会是:事情怎么会是这样的?(定位于过去)目前的状况是什么?(定位于现在)如果按照下面这样做下去的话,又将会是怎样呢?(定位于将来)譬如另一个研究分数概念的学者可能关注的是这个概念是怎样从数学中发展过来的,或者是在本世纪的教本中分数是怎样定义和阐明的,不管是哪一种关注,都会引导到特定的定位于过去的问题。也可能是对目前教师在关于有理数领域的知识水平感到兴趣,这就引到了定位于现在的问题。或许有人会主张讲授计数器算法对学生理解分数有好处,从而提出了定位于将来的特定的问题。

要特别留意的是,定位于过去和现在的研究是描述性的,而定位于将来的研究都是预测性的。这个区别引出了一个争论——人们是否可以从描述性的数据作出因果性的论点。经验主义者主张只有在有控制的情况下使用变量才能建立起可靠的因果性的论点。另外有一些学者则主张:从描述性的数据根据理论性的依据是能够建立这种论点的。

研究人员一般不是仅仅提出有趣的问题,而通常还会对回答问题的可能性作出一个或一些预测(有充分的理由的猜测或是预见)。这样的预测是基于表示这个现象的特征的变量之间的关系,以及在模型中概括了的那些关键变量的关系的想法上。

5. 选定一个收集论据的一般的研究策略。采用什么方法要取决于你所选定的问题,取决于那些问题所体现的世界观,取决于人们为了解释“有兴趣的现象”而构建的暂时的模型,取决于人们已得出了所需要的证据的推测。譬如说,如果要回答的问题是关

于过去的,那么史学研究的方法会是适宜的。然而,如果问题是定位于现在的,那么人们可以选择做一个概述或案例研究或应用其他的收集数据的策略。

6. 选定具体的方法。要回答所提出的特定的问题,就必须收集证据。在这一步上,在研究方法课上通常所教的方法是重要的。

7. 收集信息。一旦人们已决定要收集某些信息来为所提的问题建立一个论据,这一步将是简单的。譬如说,想要做一个概述的话,就可以做计划订立收集数据(通常是复杂的)的方法。而若要检查一个课堂的培养工作,收集信息的方法就有可能随着数据的收集而作扩展或更集中起来。

8. 解释收集到的信息。在这个阶段,人们对所收集到的信息作出分析和解释。在许多研究中,研究人员标定信息,把它们收集起来,在数据上作出性质的重要性方面的合适的统计测试。通常把这些称为定量的方法,因为对信息赋予数就是标定,然后用数学的方法来将证据收集和总结起来。在其他的领域如历史性的研究中,研究人员也对所收集的有关信息作分类、组织和解释。只是如果没有用到数,这种分析方法就称为是定性的。要紧的是要意识到每次作调研时,收集的信息要比用来回答问题的多。有的信息是有关的,有的是不相关的,还有的是不可理解的。从可以获得的信息中梳理出最重要的那些是一门工艺,而在这一方面,有的人就是比另一些人更强些。

9. 将结果传递给别人。作为一个学术群体的成员就意味着有一种责任把所完成的研究通报给其他成员,并征求他们的评论和批评意见。太多的时候,研究者只报告方法和结果而不提到模型和世界观。任何一个特定的研究成果只有用该世界观时才能说得清楚。如果没有说明这一点,读者无疑会用他们自己的观点去解释这个工作。不同分布特征,例如在理解分数时,计算器算法群体的平均和另一个群体的平均的显著的差别本身并不重要。应该



传递给别人的不光是结果,还必须有嵌在一个“正规科学”中的问题的答案。

10. 期待别人的行动。知道某个特定研究的结果后,每个研究者会对下面将发生什么感到兴趣,并且应该期待接下来的行动。

一个学术团体的成员和别人讨论想法,对别人的想法会有反应,也会提出新的步骤,以前的研究的修改,方法的改进等等。学者们试图把每个研究放在一串探索的某个位置上。在任何一个研究之前或之后出现的東西是重要的。

这个大纲提出了应当特别予以注意的,研究过程的三个方面:

1. 研究人员作为一个学术团体的成员。
2. 不同研究团体的思想体系和范例。
3. 许多新的研究人员没能加入一个研究团体。

## 学术团体

一个学者在一个团体内进行研究。学术团体涉及到对某条推理思路和确认知识的假设的承诺。每个学术领域有它特定的问题、方法和步骤的格局,这些格局提供了共同使用的“观察”世界的方法、工作的方法和鉴定工作的方法。向一个探索领域的典范学习就不单是学习该领域的内容,还要学习对世界的观察、思考和行动的方法。

库恩(T. Kuhn)主张,在一个学科内,在任何一时刻总有一个占主位的方法,带有互有关连的问题、方法和概念方面的观点。这个占主位的方法或“正规科学”具有明确的研究课题。个别学者的任务是在范例中填出那些“谜”。“正规科学”是个人接触的网络的一个产物,它被称为一所“看不见的学院”。在每个研究的领域中总有一小群高产而且有影响的学者。他们就工作方面经常做非正式的交流。这些小群体确定了研究的重点和对新的学生的招募和训练,他们也密切注意这个学术领域内的结构的变化。即使在

某个团体内,研究者也很少可以随意地去研讨令他感兴趣的现象。社会压力的限制给他们规定了哪些问题是重要的,要研究的,资源要如何去分配,还有,其他学者的期望规定了他们怎样去观察问题,怎样去进行研讨和写出报告。

就这个意义来说,各个学术团体都是在一个文化背景下运作。社会条件部分地支配了现在流行研究什么,不多的资源该如何来分配。在 20 世纪的 60 年代,公民权运动,对越南战争的抗议以及男女的社会地位的变化提出了新的研究主题。到了 70 年代,在数学学习上的性别差异以及后来在教学中的差异成了一个重要的争议。今天的任务是去产生一支懂得数学的劳动力来扭转下降的工业生产率。就这个内容,应该先提到的是在研究人员和社会问题之间的互相作用的特征。首先,社会问题的形成和考察的方法往往是基于

……个别的理论家有能力去创造考察世界的新的主题,从而创造出新的问题,并引导人们去寻找不同的数据来洞察我们的世界是如何构成的和变化的。与流行的信念不相同的是,社会科学的力量不在于它的应用,而在于它能扩展和把人们的意识释放出来考虑人类条件的可能性。

这样,学者们不仅对社会的和政治的压力作出了反应,他们还帮着去确定问题和创造政治压力去得到研讨这些问题所需要的资源。其二,虽说研究的根源在于社会的需要,光是研究却永远也满足不了这种需要。前面已经论证过,所有的研究都是为了能理解某些现象。可以假定,理解的增多对问题的解决或实践的改进会有所帮助,但是还必须认识到,对特定的一个或一组研究来说,或许还做不到这样。譬如说,对表面上能干但“冒险”的学生的关心“酿”成了许多研究,关系到对学校的疏远,这些学生的社会学的和心理学的特征以及其他的问题。所收集到的信息是有用的和有趣

的,但是不会由此减轻这种担心。

最后,学术团体能够限制研究。在某些时候会出现一些看来无法解决的异常情况,那么就必须创造新的概念和工具。这些对团体的挑战产生了焦虑和争论,那并不总是可以解决的。对于现有学科信念的挑战成为不光是对团体所持的客观问题的挑战,也是对现实组织的基本前提的挑战。譬如说,在20世纪30年代,心理学的两个观点(行为科学的和完形心理学的)争论的结局却不是证据,而是应该认为什么是合法的心理学的研究。在数学教育中,有关教师的授权的趋势也有类似的冲突,这将在后面进行讨论。一方面,有一些学者像布罗菲(J. Brophy)列举了“过程-产品”式教学研究的重要性,而另一方面,像康弗里(J. Confrey)则认为那条研究线路已途穷了。问题不在于证据,而又是在于数学教学的研究中什么是重要的以及如何去看待教学这一项工作。

## 思想体系和范例

要将一个人的想法和别的学者的工作联系起来,就必须懂得他的工作所依据的哲学观点。历史地看,所有的社会科学家的作品都依据了在自然科学如物理、化学中建立科学理论的思想和方法。在最近几个世纪中,这种理论的创造已引到了杜威(J. Dewey)所说的“有权威的信念”。这些关于自然现象的信念就成了命题,作为一系列有系统观察的结果就被认为是真实的。这样,命题是被学者所发现的关于世界的知识产权。在过去的一个世纪中,这个关于科学的性质的思想(称之为实证论)也被社会科学家采纳来建立关于社会行为的理论。例如,沃森(J. B. Watson),行为主义之父主张“心理学,就像行为主义者所认为,是自然科学的一个纯客观的实验性分支,它的理论目标是对行为的预测和控制。”对科学事业的这个观点一直到最近始终占了主导地位。

在过去的半个世纪内,科学的哲学内部对实证论的信仰产生

了一个很快的衰减,因为就像韦默(W. P. Weimer)所论证的,“最近几年来,我们对科学的本质以及它的生长的知识有了增长。科学和它的方法论的传统概念受到了检验,感到匮乏,并且有大部分被抛弃”。要提到的是这个检验的三个方面。首先,主要是由于19世纪非欧几何学的建立,说明了选取不同的假设,人们可以建立起同样地协调的理论。从而理论并不反映关于自然界的真理,而只反映了人类对于世界的假设。第二,哲学家波珀(K. Popper)说,所谓检验理论命题——它们的真实性是永不能被证实的而只能被驳倒——本身就含有这些命题难免有错误的意思。当前的观点则认为科学关系到可靠的知识面不是真理。一个命题在今天可以对某些预测有用,因为迄今并没有人反证它,然而很可能在将来可以证明它是错的。最后,在这个世纪中间已有许多社会科学家和教育家不认为物理的科学模型对他们的学科是合适的。他们的非自然主义的思想论据(被认为是解释学的,释义性的,现象学的或评论性的)试图在文学或科学的内部来解释人类的社会交往,支配这种交往的规则,等等。

这样一来,虽说在本世纪的早些时候,人们可以假定大部分的研究者都持有相似的思想观点,现在就不能这样做了。知道了这个事实,在过去的十年内,对学校内各门课程(包括数学)的教学的探讨由于多种原因具有多种类型也就不足为奇了。首先,几个领域的学者都选择研究一般领域的不同的方面。然而,如前所述,从不同的角度出发使得各组学者对进行的研究产生许多不一致的地方。这些争论,通过教育杂志和会议来表达时,就导致了新的杂志和组织的过剩。(对于不同研究计划的结果的分析感兴趣的读者应该去参阅玻普凯维茨(Popkewitz)的《教育研究中的范例和思想体系》(Paradigm & Ideology in Educational Research),本章所提供的想法主要是引自该文。)

现在已经很清楚了,学者们对所观察的现象在概念性上的差

异往往代表了对所研究的世界的本质所作的根深蒂固的假设上的差异。对于学校教育的研究,不同的思想角度反映了该组关于要讲授的知识,学生的工作和学习怎样发生,教师的工作和职业特性,以及社会组织和课堂和学校的技术的种种假设。不同方法的含义可以通过考察与三个范例有关的具体的世界观来阐明。这三个范例来自于对教育研究的实践作出定义和结构:即经验的-分析的,符号性的和评论性的。

**经验的-分析的范例** 它起源于逻辑实证论的研究方式,它的前提是人们的目标在于解释人类对自然界的联系,并利用这种解释来获取智力的或技术上的对世界的控制。(关于经验的-分析的科学的讨论可见伊斯顿(Easton)和霍曼斯(Homans)的工作。)他们还假设了:一个人知道的只能是基于能被观察到的或能被变成可观察的(经验主义者),再者,用观察来把人类的行为分解成它的组成元素(分析的),这样的分析的产品就是社会行为的法律般的理论。

玻普凯维茨认为至少另有 5 个互相有关的假设来形成经验的-分析的研究:

1. 理论应该是通用的,不是限于形成概括的特定背景或实际情况。
2. 信奉一个“公正”的科学。科学的陈述应该独立于人们在某一情况下所表达的目标和价值。去掉了它的具体的一面,理论只是为了描写“事实”之间的关系。
3. 相信社会各界是作为一个变量的系统而存在的。这些变量是一个互相作用着的系统的不同的和分析上可分离的部分。变量系统的概念在经验的-分析的科学内提供了一个特定的因果意义。一个起因就是在经验变量间的一种关系,它可以被理解成或处理得产生出有条件的可以预料的后果。
4. 相信有正规化了的的知识:这涉及到在研究之前弄清变量并使之精确化。

5. 对正规的和公正的知识的寻求创造了在理论的构造中对数学的依赖。变量的量化使得研究人员能够减少或排除疑点和矛盾。它也是为了使知识的逻辑-归纳结构更精细,用来检验假设和改进理论。

对于教育来说,这些假设转译成为一种信念:在任何一个领域,例如数学内学到的知识可以确定成为事实、概念、方法等等;学生的任务就是去掌握这个知识;教师的任务就是以有组织的方式来向学生提供知识并督促学生去掌握它,学校和课堂的组织和技术在于使讲授和知识的掌握尽可能地有效。在许多关系教育的著作中这些信念的影响是很明显的,譬如说布卢姆(Bloom, 1956)的《教育目标的分类》(Taxonomy of Educational Objectives),盖奇(Gage, 1978)的《教学艺术的科学基础》(The Scientific Basis of the Art of Teaching),以及在数学教育方面关于“直接教学”的著作。

**符号范例** 这种研究方法的目标是要懂得人类是怎样和他们所创造的社会各界相联系的。它的基础是一种信念——社会生活是由行为的符号的交往和模式所创造和支撑的。另一些人曾用过解释学的,释义的或现象学的等词来描述这个范例(在温奇(Winch),舒尔茨(Schultz),勒克曼(Luckmann)和奇库雷尔(Cicourel)的著作中讨论过符号科学)。通过人们的交往,造出并维持了支配着社会生活的规则。正如玻普凯维茨曾主张的,“制造规则和由规则支配的想法可以和经验的-分析科学的法律般的概括作出对比。在后者中,从方法论上假定了人类行为存在一种不变性,它是可以发现的。规则的思想把注意力从行为的不变性移到了人类的、意图和交流的领域。”目标在于建立关于作为基础的和支配着社会活动的社会规则的理论。这样的理论是关于谈话的本性的而不是行为的本性的。

故而,它假定了形成人类的唯一的品质在于人们发明来传递

或解释日常生活中的各种事件的符号。假定了语言及其在某个文化内的应用(在社会各种情况下的交往和交涉)确定了人类存在的发展前途。然而,和经验-分析科学一样,符号范例也是描述性的和中立的。因而,即使由交流能获悉有关改变社会条件的活动,这些问题还得服从政治或哲学方面的考虑。

这个范例在社会学、政治学科和人类学科中是很普遍的。在教育学中,这种看法转译为一种信念——知识是涉及情景和个人的,小学生的学习是用经验的结果来作构造,教学的任务就是为学生们创造学习的经验以及帮他们获得从这些经验中得出的一致理解,课堂和学校的组织和技术的安排是在于使所有的经验是丰富的和有意义的。从这个视角进行的研究包括了例如库西克(Cusick)的《一个中学生世界的内部》,巴恩斯(Barnes)的《从通讯到课程》,以及在数学教育方面,有在“民族数学”方面的各种最近的研究。

**评论性的范例** 这个范例的目标是把知识的模式和那些限制着我们的实践活动的社会条件解释明白。持有这种观点的人的基本假设是人们可以通过思想和行动来改进他们所生活的社会界。这个信念的根源是在上个世纪所发生的急剧的社会变革以及由这些变革所带来的某些问题。(在伯恩斯坦(Bernstein)和卢卡斯(Lukacs)的著作中讨论了评论性的态度。)例如,知识已变成“职业化了”的。结果是有许多人就依赖于社会中的一些专家。询问是为了弄清社会生活的假设和前提,使得每个人都可以认识他自己和自己的环境处境,弄懂有关他们的事务的眼界和界限,并且提出与主导的文化和机构相对的论证。因而像玻普凯维茨曾主张的,“评论性理论的作用就是去理解价值、兴趣和动作之间的关系,以及引用马克思的话,是改造世界而不是描述世界”。

这个范例对教育思想的冲击包含了如下的信念:人类改良社

会条件的反思便是获得知识,小学生通过反映和活动来进行学习,教学的任务就是使学生对所生活的社会界作反映并且对现行的实践发起挑战。具有这个观点的教育研究可见阿普尔(Apple)的《教育与力量》,威利斯(Willis)的《学会劳动》,在数学教育方面的有安尼翁(Anyon)的著作等。

这三种范例中,每一个都对我们的社会情况的性质和原因提供了一种不同的观点。每一种智力的传统都为在学校环境中数学的教和学中涉及到的社会活动的考察提供一种见解。意识到我们生活在具有不同社会看法的世界上是很重要的。这样的多元论是我们社会中知识团体的特点。

### 新手们的失败

这里只是一个简单的评论性的插入语。有太多的新手(通常是研究生)没有能看到把他们的研究放到和别人的工作相应的位置上的重要性。他们往往从一个感兴趣的问题跳到设计一个研究和收集数据上去。不能把自己的想法嵌入到一群学者中去,最多是让结果留待各种各样的解释,更多的是引导到一个少有实际价值的研究。他们或许也会回顾那些与所感兴趣的领域有关的文献,但是他们不会赏识不同作者们的不同的视角的差别(例如同时去引用斯金纳和皮亚杰来支持一个论点,好像他俩是从同样的视角来观看世界的)。在基尔帕特里克(Keir Patric)的带有使人愉快的标题的文章“数学教育研究中的合理的不奏效”详细地记载了这种失败的后果。

## 研究者所用的方法

在图 3.2 中,活动 5—10 就是一个学者用来决断(1)对所提出的问题或猜测需要些什么证据,(2)怎样去收集、分析和解释那些证据,(3)如何将所得到的结果作出报告。应该注意到,在开始探



讨问题时研究者一般很少会有一个固定的收集证据的策略或是头脑中已有特定的分析方法。只有一个新手才会说：“我刚学过因素分析，我可以研究什么呢？”或者说：“我刚读了一篇人种论，我想做一个种族方面的研究。”关于方法的决断是活动 1—4 的结果。有了这个警告，在用到研究方法这个词时就需要明白两个方面。首先，在研究文献中讨论到的特定的方法可能也包括信息收集的方式，集中和分析的方法，或者报告的方式。其次，研究人员真正应用来收集证据的方法至少依赖于 5 个因素：世界观，所提出问题的时间定位，情况是否在现时存在，期望中的信息来源和产品的判断。

世界观，如在上一节中所讨论的那样，把在某个学术团体的信念中应用的方法定了位。时间定位是指所提出的问题是引导到过去、现在或是将来。情况是当前存在的呢还是有待创造的？证据的来源必须或是人工产品（书，演讲以及类似的）或是问题的回答或是活动的观察。判断是指作为一类研究方法的评估。在文献中大量存在的特定的方法是基于或用到了这 5 个因素。

### 应用现有证据的方法

在三种方法中，研究者没有产生新的数据的余地，就是说他们必须去寻找已经存在的而且也是无法更改数据的出现形式的方法。这些方法就是

- 史学：在这个方法中，努力通过对过去已做到的或发生的，做出更深刻的以及更丰实的理解来阐明现有的条件和问题。
- 内容分析：这个方法是在可考察现有的人工产品情况下来探讨现有的问题。
- 趋势分析：这个方法就是从对过去或现在的信息做外插以便对将来作预测。

## 当某种情况存在而需要揭示证据时所应用的方法

当一种情况存在而需要收集特定的证据时有许多不同的方法。在每个方法中,研究者可以控制收集和汇总信息的形式。

- 回顾式调查。这种方法是用来研究定位在过去的问题。这种情况曾经存在,而对曾参与该情况的个别的人面谈时可以用此方法。
- 总的描述式的调查。这个十分普遍的方法是用来研究现在的问题。这个方法要求对参与这个情况的人中仔细地抽出一个样本来回答一套预先确定的、有组织的问题。
- 组织好的面谈。这个方法与总的描述式的调查相像,只是假定了通过听取(并编码)回答可以使研究人员得到比用大量的调查更有启发性的信息。
- 诊断性面谈。这种询问的方法开始时与组织好的面谈很相像,但是根据不同的被询问者,所提的问题串会变化,与前面的回答也有关。
- 投射性的调查。这个方法是用来对将来的事件作预测,它是通过向一组人的样本提问来对趋势作出判断。
- 组织好的观察。这个方法是用以研究群体,这里可以看到不同的成员的动作。例如,为了记录在一堂数学课上师生的交往,为了确定学生在学习中参与的程度,费希尔(Fischer)和他的同事们建立了一个“参与时间”(time-on-task)观察方法。
- 诊断性的观察。这个方法是用来研究群体的行为。组织好的观察和诊断性的观察的区别是和组织好的面谈与诊断的面谈相仿的。人们观察的细节从预先决定的范畴移回新的范畴,这有赖于开始的观察。同时,观察者往往也是情况的参与者。
- 纵向的研究。对研究随着时间的变化,纵向研究是最为自然的。事实上,往往又认为它是当然的。对学习和记忆、适应和习惯、疲劳、态度的变化和种群的变化变化的研究都不可避免地采用了重

复测量的方法,作为最合乎逻辑的获取所需要的信息的方法。

- 典型设计。由于在许多情况下,要研究对时间的真实变化是不可能实现的,学者们就依靠对不同年龄的学生的相当的样本来作比较,从而来推测它的增长或变化。
- 因果模型。这个方法往往是用于研究复杂的教育情况。研究人员先从建立一个数学模型出发,模型规定了所注意的那些变量以及它们是如何有关联的。接下来规定一个种群,抽出一个样本,再对模型中的每个变量收集信息,并加以标定和研究变量间的关系。所收集到的信息往往会涉及到从调查、面谈和观察得到的数据的一个混合体。社会学家往往采用这个方法来建立因果关系,而不必去处理变量。因果关系是从模型的理论基础中得到的。
- 案例研究。这个方法是用于在指定的条件或情况下,组织和报告关于一个个体或群体的行动,感觉和信念,研究人员感兴趣的是对某一个特定案例如何叙述一个充分深入展开的故事。它之有别于别的领域的(人类学的,行动研究(action research)和启发式评估)研究方法是在于作者是在记述该特定情况的一个自然历史。他们并不关心对某个计划作出判断或去检验某个理论假设。
- 行动研究。这个名词是指一种研究策略,用来研究教学情况,其中研究人员假设的“聪明的实践”发源于学校或课堂,而有待于成文或得到理解。而且通常它是由实践者来成文的。
- 人种论。人种论一词来自人类学,它的意义是“一个可被辨认的人群的生活方式的图画”。这个名词同时指人类学家做现场工作的一系列过程以及它的产品——书面的人种学的报导。它是用以研究学校的复杂的文化的一种方法。这个方法通常需要有个人深有训练的参与观察员去检验产品,进行诊断性面谈和作诊断性的观察。它之有别于其他的方法就在于研究人员试图从人

们生活的文化中去解释人们的行动。

## 试验

如果人们的猜测涉及到现在还不存在的条件下会发生什么时,即如果涉及到要收集在一个新的和不同的产品或设计的效果的证据时,就要用一个试验方法。在这种研究中,创造新的情况就成了工作的关键。通过研究新的情况和它的影响,研究人员想要建立一个因果论据。研究人员所采用的归到这一类的各种方法之间还有许多可能的差别。然而就教育方面来说主要有三种一般的方法。

- 教学试验。这个研究方法是以优秀教师们的共同实践作为基础的。多数的教师会周期性地在课堂上尝试用一些新的东西,然后再判断这样的活动对学生学习的结果。然而,研究人员用的方法则是更为系统化。首先对学习过程作出一些假设,并建立起一个教学的策略,包括了系统的插入和激发学生的学习,然后要确定教学的策略和它有效的理由。
- 比较试验。这个调研的方法是用来确定指定的一组活动是否能产生一个所期望的结果。确定的办法是将一个群体按这组活动处理后的结果和另外一个控制组(没有经过这样处理的)进行比较,看看结果是否有预测到的差别。设计指定的试验时要考虑能将处理后的效果从其他可能的效果分离出来。例如坎贝尔(Campbell)和斯坦利(Stanley)在关于试验设计的已认为是经典的说明文章中把各种设计分成三类:预试验的,准试验的和真试验的。这些设计的区别就在于如何去控制试验不成功的可能来源上。譬如说,在真试验中对内部失效的控制是通过比较处理组和控制组,其中处理组中的单位(学生、班级)是随机地指定的。
- 中断的时间序列试验。在教育方面控制组往往是不可能或不实

际的,譬如说,在一个学区内预备要增加计算机实验室内的计算机数量,如果享用的增加只是对某些学生(处理组)而不对其他的(控制组),就不可能确定这种增加(如使用实验室的学生数或用于一架计算机的平均时间)的结果。在这些情况下,合理的办法是让学生成为他们自己的控制。可以比较处理前后的结果。应用这个策略的关键在于处理之前要收集到足够的观察结果来确定一个趋势,然后去和处理后的结果作比较。

## 评估

最后,一般说来尤其在数学教育中,个人或群体创造出新的成果来改进教和学。这样的成果可以是新的教学材料、教学方法或教学大纲。成果的建立过程包括了发明各个部分,把它们组合起来以形成新的成果。建立的过程共有4个阶段:成果的设计,成果的创造,成果的完成和成果的应用。与新的资料的产生相配的有四个一般的方法论,评估者们用这些来确定每个阶段中成果的质量。

- 需求的评估。为了确定一个新的产品的设计是否“好”,研究人员必须回答三个问题:(a)对产品是否有需求?(b)所考虑的产品是否有较大的可能性来满足需求?(c)在各种产品中,这个产品有些什么优越性?为了回答这些问题就得收集和检验其他现有的或新的证据。
- 形成期的评估。在成果创造的阶段,评估者关心的是产品是否符合设计的规格。为了确定产品是否“好”,要收集证据来回答四个问题:(a)产品的内容是否是高质量的?(b)能达到预期的效果吗?(c)有否发现什么未预料到的结果?(d)是否具备了必要的设置方面的支持?
- 总结期的评估。为了决定一个新创造的成果是否可以投入使用,研究人员还要回答另外4个问题:(a)成果的内容和它的竞

争者有哪些差别？(b)成果和它的竞争者在操作上有哪些差别？(c)成果和它的竞争者在费用上有什么差别？(d)是否已经做好维持成果使用的准备？

- 启发性的评估。这个名词是由帕利特(M. Parlett)和汉密尔顿(D. Hamilton)杜撰来描述对在实际应用中革新规划的研究。这个过程包括了把现场研究方法(案例研究,人种论或行动研究)应用于新的教育成果。然而,要注意这里的重点在于叙述这个成果的应用以及对它的评判。

上述列出的收集证据方法任意的,其中有许多就包括了收集数据或组织数据的通用方法。然而对每个方法要正视的三个重要的方面是客观性、证据的质量和可推广性。

**客观性** 对所有的研究人员在考虑问题、提出问题、收集证据、组织证据和建立论证时始终要关注到客观性和它的对立面——偏见。一方面,一个研究人员必须既对有关现象感兴趣,又愿意研讨与之有关的问题。从这一点来说,每个研究人员总是带有偏见的。事实上,一个不感兴趣的研究者是不可信任的。另一方面,在收集证据,检验它和报告结果时,就要求研究者是客观的。每个做过研究的人都会承认要客观并不总是容易的。有多种理由,例如,一个人所找的和检验的证据总是受到他所属的学术团体和它的世界观所支配。由于客观性的要求,学术调查的一个特征就包含了对所收集的证据和它被检验的方式的介绍,以便别人可以作判断或重新来作检验。

**证据的质量** 从调研的结果中建立论据时,通常要考虑的是证据以及它的收集方法的两个方面:有效性和可靠性。在教育学中时常不易证明证据的有效性,因为它指的是所收集的证据和感兴趣的现象直接有关的程度。在太多的情况下,教育学调研人员

是从只和真实现象有边缘关系的替代物(或指标)上收集证据。譬如说,由于难以知道一个学生对数学的态度,往往就用学生对几个问题的回答来导出一个标志数作为态度的指标。这种“代理”的有效性常常就是有问题。

证据的可靠性,从收集证据的方法上看,关系到它的正确性。例如,测验的分数可以认为是可靠的,如果它的一致性指数是高的。如果鉴定者之间的同意率是高的话,可以认为观察是可靠的。在这方面的一个问题就是没有人愿意在他或她的分析中放进有差错的或带有个人色彩的证据。为此,研究人员面对一个“肮脏”或不可靠数据时就试图在分析之前,先把数据弄“干净”。

优质证据的重要性是不会强调得过份的。这是因为像拉腊比(H. Larabee)所说的,“观察过人类拥用认知的漫长历史的人都为大部分的对知识的拥有的自负性和实际所获得的证据的差距而感到震惊。”研究者的首要作用是对这样的拥有提供可靠的证据。太多的人倾向于接受首先急迫地,清楚地又重复地提供给他们证据或陈述。这种陈述往往是教条式的和武断的——(即便它们已是不断地超出于所提供的证据的),它们是关于确实已知的断言。有些人深信他们的信念是绝对正确的,而这又使他们强烈地和坚持地采取和追随大胆的策略。知道得少或不知道不常是自信的障碍。多数人不愿承认他们知识的真正的尺度就是意识到还需要去知道多少。一个研究人员应该做到使他所声称的知识,不仅是一个见解、猜测或一刹那的幻想,而是有充分根据来肯定的负责任的拥有。事实上克龙巴赫(L. Cronbach)和萨普斯(P. Suppes)声称:

受过训练的探索具有一种品质使之有别于来自其他方面的见解和信念。受过训练的探索在进行和报告时的方式使人们可以十分仔细地检验它的论证。这样的报告动人之处不在于作者的口才或是它的貌似真实性。

遗憾的是,正如任何一本杂志的编辑可以证实的,在教育领域中太多研究工作的证据的真实性或可靠性是有问题的。这个方面的典型的例子包括了应用标准测验成绩作为研究问题解答时的因变量,调查中的低的回收率,在试验中没能适当地控制失效性的根源以及在案例的研究中建立论据时采用循环论证。收集证据和建立论证是研究人员证实猜测的方法。这是一件费力的事。一旦做到了,也并不意味着完结或完成了。必须要不断地重新来完成它,因为一个合理的论证的组成和它的给定的目的都是不断地变化着的。

**可推广性** 传统的可推广性(基于实验-分析的假定)采用了一个步骤的定义。根据这个定义,认为一个研究结果是可推广的,因为它运用了取样过程。这种意义的可推广性又称为是横向可推广性。它使人们对它的发现可以附上一个可重复的可能性的量的估价。它的主要的特征是依据概率的概念,它使人们可以预料到样本的元素和它们所带有的特性与具有同样特性的种群有什么关系。

关于可推广性的论证确实可以依据上面定义的横向可推广性,只要研究者限于对同一种群的其他样本或是与此种群具有相同特点的样本作出断言。但是,有许多学者却超出这个特定的情况来考虑,并且把那个情况的特点联系到更抽象的,更一般的考虑。这另一种可推广性可以称为是纵向的。换句话说,在它们的证据的基础上,他们对理论的命题作出断言,而不要求重现性。

纵向的和横向的可推广性的对比可以通过在建立解释性的理论和显示这些解释可能在另外的相似的情况下是有用的两者之间制造一种差别来解释。为了建立解释性的理论,选取一个能够提供明显的描述性的特点和显著对比(纵向推广性)的事例会是有价值的。然而,一旦建成之后,这个理论需要有更一般的应用(横向



可推广性),并且调研者必须能使有怀疑的听众确信,产生这个解释性理论的特征对一系列的群体或情况都能保持得到证实。

## 研究趋势

知道了研究团体的背景,他们对世界的假设以及他们对研究的视角,要对过去四分之一世纪的学校教学的研究作总结会是有困难的,趋向也是难以辨认的,尽管如此,我认为在社会科学中还是可以至少描述出5个广阔的趋势。我强调了广阔的趋势,为的是我不准备去讨论在特定的数学科学教育的领域中的各种研究的特别的变化。这些内容在本书的其他的章节中会作讨论。同时,我要指出,虽说每个广阔的趋势是分别讨论的,但是他们是互相有关联的,而不是真正独立的。

### 趋势1: 研究工作的成长

虽说在学校环境中教和学的研究在美国已有一段很长的历史,但是在过去的30年中,它有一个戏剧性的成长。在社会科学领域内,这个趋势是很明显的,因而就不需要再作提醒了。既然在下十年内,这个成长会有更快的步伐,就需要提到有助于它的四个因素。

首先,成长的原因之一是可以得到研究基金。最早的教育研究的联邦基金开始于20世纪60年代,来自新成立的国家科学基金会和教育部。特别是1963年通过的初等和中等教育法令(ESEA)提供了数量大的基金,成立了研究中心,评估成果等等。数学的教和学的研究虽不总是关心的重点,同样也成长起来了。(本卷的第一章有一更综合性的数学教育的趋势的调查。)

第二,由于有了研究基金,也由于社会上对学校教育改革的要求,从非教育和数学的领域有日益增多的学者来参与数学的教学

研究。心理学家、社会学家、人类学家、经济学家、政治科学家、数学家以及其他的,和数学教学家一起对研究的增长都做出了贡献。

第三,自从 19 世纪 60 年代以来,杂志、研究机构和会议大量增加,都来研究教育。这些对于创立研究团体和与同行们作交流都是很有必要的。在 1960 年前,在美国只有三本研究杂志定期地出版教育研究的文章:就是《心理测验》(关于测验问题,由心理测验学会出版),《教育心理学》杂志(关于人类的学习,由美国心理学会出版)和《教育学研究评论》(特邀专题评论,由美国教育研究协会出版,从 1970 年开始这本杂志已改为接受投稿)。《美国教育研究》杂志最早出版于 1963 年。主要的两本数学教育研究杂志《数学教育研究》和《数学的教育研究》都是在 1969 年创办的。到今天,在美国已有 50 多种教育研究的杂志,而在世界的其他地方也有同样数量的杂志。同时专门从事研究的组织也相伴增长了。1963 年以来 AERA(美国教育研究协会)的数学教育的专门小组和数学教育心理学的国际小组已经成了国内和国际上的特别重要的组织。

最后,在好几个国家内已经成立了大学内专门做数学教育研究的中心。这些机构由数学教育的教授任职,他们的主要工作是在研究项目上而不只是教师的教育。发展这种中心对长期的研究规划和团体的发展来说都是关键性的,特别要提到的有下列中心:荷兰的乌得勒支大学的弗赖登塔尔研究中心,英国的诺丁汉大学的 Shell 数学教育中心,西德的比勒费尔德大学的数学教学研究中心(IDM)和美国威斯康星大学的全国数学科学教育研究中心(NCRMSE)。

显然,资料、通信工具的共享以及供长期查询的中心都是对教和学的研究作贡献的主要因素。

## 趋势 2: 研究方法中多样性的增长

不以为奇的是随着研究领域的增长,学者们所用的方法的门类也就有了增长。1963年坎贝尔和斯坦利(Campbell & Julian Stanley)认为,“进行试验是调停教育实践中的争执的唯一方法,证实教育学中的进展的唯一方法,也是建立一个传统的积累的唯一方法。这儿的改进不会有贸然抛弃旧的学问而去引入较差的新事物的危险。”他们接下来又谴责在一个班级作研究(教学试验或案例研究)是“近乎不道德的”。

到了1973年,当时试验仍被认为是在教育学研究中的最后决定的方法,其他的方法——作为一个描述性的、相关的试验环中的一个部分——也被认为可以是合适的。是这样来论证的:首先,确定问题情况的特点,并试着去描述这些特点的变化,这里包括了问题的答案的标定和对行为的观察。第二,用相关或回归方程来考察变量之间的关系。最后,改变一个或几个变量,并通过设计某些试验来检查这种改变的效果。

在教育上应用这些方法源起于传统的行为心理学中的“经验-分析”方法,而它又是从农学中借过来用的。但是,就像坎贝尔和斯坦利所承认的,“由于环境的不可妥协性”,做试验的人员就缺少那种在动物的或农业的试验中的控制。孩子们是不能像鸽子、老鼠或猴子那样受控制的,不同的教学方法也不像不同牌号的肥料;此外课堂也不是相互独立的田块。

今天,虽说经常在进行相关性研究和试验,许多学者正在用不同的策略和方法。这些方法(在本章的前面几节中已经描述过一些)已经从发展心理学、社会学、人类学、政治和其他社会科学的传统中适应到教学上来。这些传统是以不同的思想为基础的,并且也反映了不同的知识历史,另外,美国人已经开始留意起国际学者们的工作。由于这些学者用他们自己的文字视角来看教育问题,因而把他们的工作适应到美国的目标上也是有困难的。例如,伯恩(L. Bourne)在他1966年关于概念的行为理论的评论中没有放

入皮亚杰的工作,因为“它和传统的美国的理论有很大的分歧”。但是,如今学者们对国外的观点就比较宽容了。

最后,随着教育研究的成长,研究团体的会员制也是如此。现在有很多的研究是由研究小组来完成的,它的成员把不同的智能的和实际的知识用于同一组问题。这样的小组时常也包括了实践着的教师。观点不相同的一个结果是两种人之间的冲突。一种人认为研究的作用是使一个稳定的机构(学校或课堂)变成更有效果和有效率;另一种人把研究看作为一种力量,它可以使机构振作起来或是彻底地改造。

### 趋势 3: 认识论上的一个位移

当前在所有的学科中都会问:“知道是什么意思?”在过去假定了任一门学科的知识就是点滴信息(概念和技巧)的积累,是按一定的次序排列而成的。今天这个假设已经受到了挑战。另一个观点则涉及到真正的知识的观念。目前在许多领域内学者们正致力于弄清如何就他们的学科来弄清这个概念。关于这种尝试要提及三个方面。

首先,要区分知识和知识的记录。譬如说,在许多非数学家观察数学时,他们看到的是要掌握的一组有范围的静态的概念和技巧。这大概就是他们在学校或大学中所学过的数学的反映而不是对学科本身的见识。对许多人来说,通晓就是去辨认学科的产品,即它的基本概念和方法。对另外一些更熟悉这个学科的人,通晓数学就是去做数学。一个人是在有目的的活动过程中收集、发现或创造知识。只有把重点放在做的过程上,数学才会对学生有意义。

知识和知识的记录的区别恐怕可以用和音乐学科的类比来讲清楚。像数学一样,音乐也有许多分支,可用不同的方法来分类(古典的、爵士的、摇滚的;器乐的、声乐的)。它有一个简洁的符号

系统,用来保存信息(音符、拍号、谱号),还有描述作品的结构(音阶、模式)的理论。然而,不论人们学过了多少作品,这和做音乐就是不一样。只有当你演奏时,才是通晓音乐。相仿地,就数学来说,人们可以学过数的概念,怎样求解方程等等,但是这不是做数学。做数学包括了问题解答,抽象化,有所发明,证明等等。

用相似的方式,格里诺(James Greeno)论证说,在任何一个领域内要成为一个称职者,就会涉及到应该把该领域(如有理数或函数)看成为一个环境,在其中可以找出知道、懂得和推理用的资料。要学会在那个领域内作运算,就应该晓得有哪些资料以及在需要时如何获得它们。显然,学数学的概念和实践数学的方法(就像会读谱和练习音阶一样)是重要的,但是在学习者的能力水平上获得求解问题(演奏)的机会也是重要的。学生常常认为算术、代数和微积分是没有意义的、沉闷的,甚至于吓人的。毕竟谁会欣赏把4位小数机械地乘上另一个(相当于在钢琴上练音阶)或求解一组联立线性方程呢?这种有限的经验的后果往往使许多学生对更广阔的、更有趣的部分产生了偏见。总之,真正的知识的概念就包括了如何去做数学、社会学、音乐或科学。

第二,与流行的意见不相同的,数学不是一门稳定的学科。斯蒂恩(L. Steen)曾论证过:计算机、计算器和其他新的技术装备正在改变着做数学的意思。他推断说,“数学是一门模式的科学”,技术为数学提供了强有力的工具,以以前不可能的方式来考察精致的和复杂的模式。这些工具使得计算能够从数学研究中分离开来,就像打字机把书写从写作中拆开那样。高效能的计算技巧不再是做数学,不论是算术、代数或微积分的先决条件。技术使得每个人都能够把一般的计算做得更有效,去完成用手所做不成的新的计算,用众多的方式来将信息利用图象作阐明以及同时看到不同表示法之间的关系。

第三就是在任一个科目(例如数学)的教和学中什么是独特的

这一问题。从贝格尔的观点(图 3.1)来看,只有数学这个词可以使要研究的可能的问题和关系区别于那些关于科学或社会研究或其他学科的教和学方面所提的问题。数学的概念和其他学科中的概念相似。它的方法,往往是算法化的,却和学习规则动词的变化或解化学方程时所用的方法很少有差别;也不能论证说解题是数学的独特之处。因而,无怪乎涉及到学校中的教和学的研究时,许多社会科学研究人员看不到在数学的学习中独有的东西。事实上,许多研究人员选择了研究数学的学习只是因为它是组织得最好,最成体系和最完整的一门科目。

最近十年来,有些学者意识到了这个学科的动态的和变化着的本质。这种认识至少引向两个活动。首先是对难题的一个答复。根据巴尔伯(E. Barbeau),“大多数人认为数学是一个固定的知识体,早已形成了最终的形式。它的主题是数的操作以及几何演绎的证明。它是一个冷漠和严肃的学科,没有作判断和创造的余地。”无疑这些观点是学校内学到的数学的一种反映,而不是对学科本身的洞察。现在数学家已愈来愈意识到需要更好地来表示数学究竟是什么,说明数学家是做什么的以及去普及数学。这并不是说在 1980 年之前没有关于数学的好的书本、已经有了经典著作像纽曼(Newman)的《数学世界》,亚历山大洛夫等的《数学:它的内容、方法和意义》,克莱因的《古今数学思想》。遗憾的是这些书都是为已受过良好数学和科学训练的读者写的。但是在 20 世纪 80 年代中为未受过业务训练的读者出版了大量的书,其中包括了戴维斯和赫什的 *The Mathematical Experience*, Descartes' Dream, 埃克兰(Ekeland)的 *Mathematics and the Unexpected*, 皮姆(Pimm)的 *Speaking Mathematically*, 保罗斯(Poulos)的 *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences*, 斯韦茨(Swetz)的 *Capitalism & Arithmetic: The New Math of the 15th Century*, 数学教学调查委员会的 *Mathematics Counts*, 物理科学、数学和能源委员会的 *Renewing Unit-*

ed States Mathematics: Critical Resource for the Future, 克里斯琴森, 豪森及奥特(Christiansen, Howson & Otte)的 Perspectives on Mathematics Education, 德朗格(de Lange)的 Mathematics, Insight, and Meaning, 舍恩菲尔德的 Cognitive Science and Mathematics Education, 斯蒂恩(Steen)的 Mathematics Tomorrow, On the Shoulders of Giants, 数学科学教育基金会的 Everybody Counts, Reshaping School Mathematics, 全美数学教师理事会的 Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics。这些书显示出数学是一个具有多个方面的学科。人们可以把数学定义成为“一种语言,一种逻辑结构,一种关于数和空间的知识体,一系列推导结论的方法,作为物质世界的知识的本质或作为一种有趣味的智力活动”。重要的是要懂得这许多变更以及数学的动态性质,因为在学校课程的不同时期,由不同的作者强调了它的不同的特点,还因为目前在进行的改革的论点正随着参与者的数学观点而转动着。

第二,关于教师对做数学的理解,现在的关心正在日益增长。学者们正在处理一些问题,如:教师们是否意识到数学不仅仅是一些零碎的命题式的知识的汇编?教师在训练期间接触到的知识是否对教会学生去做数学有用?能否创造出一个新的课程教学法来使教师有好的准备去进行真正的讲授?论点是:数学是一个独特的领域——符号和记号的稀疏的集合——它能被用作情况多种变化的模型,用来检验该领域的特点的是一组策略(启发式的)以及特定的推理方法。如果教师想要把数学合适地给他们的学生表示出来的话,他们就必须密切地留意到这一点。

#### 趋势 4: 学习心理学中的一个转移

认知科学作为一个新的学习观点是心理学中改革的结果,它在过去的十几年间已成为很重要。下面的 7 个概念说明了头脑如何工作,它们表示了这个学习观点的特点。

首先,过程是从经验开始的。从经验得到的信息经过了过滤、组织,就被储存于记忆中。认知论的关键方面是它区别了三种类型的记忆:工作记忆,短期记忆和长期记忆。工作记忆涉及到使人们能够在某一特定的时间点上可以进行工作的有限的信息量。信息的单元可能是个别的“伴”或者是有关联的件(成块的信息)。储存在短期记忆中的信息是在相对短时间后要用的,然后,它或是被卸掉(忘却)了,或是被储存到长期记忆中去。第二,虽说人类能够记忆很多东西,但是要同时想许多不同的东西的容量却是非常的有限。由于这种容量是有限的,存在长期记忆中的信息必须经过很好的组织。头脑自然地把长期记忆中的重复的相似的经验组织成为心理学家所称的图式。它们是概念、规则和策略的复杂的网络,而不是孤立的事实或算法。有了用这种方式储存了的信息就能帮助个人去应付新的经历。这样的图式是长期建立起来的,并且靠不断地和有关联的事件接触。第三,新的经验或者是利用了现有的图式(同化)或者是强迫某个图式产生变化(适应)。第四,自然产生的图式是因人而异的,个人一般也并不意味着其组织。第五,虽说多数的学习是通过经验的自然的同化和适应,它也可以通过预先组织了的和结构式的经验来产生。譬如说,在学习几何图形的名称和特性(如等边的、平行的、垂直的)时,靠自然经验为基础就是不太可能的。对于任何一个数学领域,学习有关的原理、符号和记号、性质和定理就不是一件容易的事。教学活动应该是把学生的非正规的自然经验和数学的正规方面联通的一种方法,并假设在这种活动的作用下,学生会重新组织他们的非正规的、定量的和空间的图式。第六,图式从来不是固定不变的,随着个人的成长和增添经验,它们不断地变化。事实上,人们通常都同意这样的想法,一个人的思想的演化要经历若干个周期性的阶段。学龄儿童和成人的思考方式不一样。对新的信息,他们往往会按照一种具体的-符号式的方式来反映。要到了以后的年级时,他们才开



始在不可比较的经验中建立起正式的联系,而且即便到那时,他们还不会用复合的、抽象的概念来想。最后,那些建立了最初的,但还未组织得好的图式的学生开始寻找经验来提供结构。

总结起来,认知心理学家提供了“组织好的图式”这个概念来解释人们是如何使经验性的信息成为有条理的。在学校教育事业中重要的是对新的信息的同化和适应以及对新信息的响应的作用方式。缺了能使新的信息被同化的图式,经验就变成不可理解的,因此也就只能学到很少东西。但是一个学生把一堂课同化的图式却可能并不是老师或数学家所假设的那样。这种不相匹配的情形往往不会被觉察到,因为即使这个学生在一个不正确的、不完全的或不相容的框架中理解,他或她往往还可以把教材或讲授的一些段落复述出来。事实上,学生可能建立起专用的框架来维持教材的特色,以便应付作真实的复述的要求。图式的应用必须是一个动态的,构造性的过程,因为人们并没有对每一种可想到的情况都贮备了一个图式来相配。从这个观点来看,知识的获得意味着图式的变化,而不仅仅是信息的聚合。

### 趋势 5: 政治意识的增长

长期以来人们一直假定了科学的研究提供的是受过检验的、可靠的知识。人人都可以用它来思考或实践,并且对这种知识的寻求是独立于政治上的争论和教育上的决策的。如今许多学者开始意识到教育的研究既是科学的,又是政治的。正如基尔帕特里克曾经指出过,“一个愤世嫉俗的人可以认为教育研究是既不科学也不讲政治的,它自认为已经到了一个实际尚未开始达到的洞察力、精确性和清晰的水平,因而它照例受到了教育决策者的贬低和不予理会。”

无疑,在美国,教育是政治性的。我们的学校是由约 16 000 个地区的学区所管辖,还有州的规定和联邦的命令。在我们的社

会中正在进行着关于教学工作应如何组织、批准、监督等等的政策的公众性的辩论。此外,随着像《民族危机》和《为 21 世纪,教育美国人》这样的文件的出版(这两个文件对数学和科学教育的实践都是十分关键的),许多教育工作者觉得不能不参与到关于教育改革的辩论中去。

这种对研究的政治上的重要性的意识的日益增长又反映在强调对政策的研究和研究成果的传播上,反映在指定由美国教育部出资的新的教育的研究和发展中心上。同时国家科学院的国家研究委员会的数学科学教育委员会(MSEB)的创立,反映了对数学科学教育团体在政治上的关心。创立这个委员会是为了在华盛顿(DC)提供一个关于数学教育的全国性的发言权。最后,MSEB 正在鼓励着在 50 个州中逐个创立这样类似的联合。

在当今这种教育改革的气候下,研究者不能再是不热心的旁观者。他们必须意识到正在和即将做出的决策,而且他们也应该对讨论作出贡献。

## 四、具有理解的教和学

James Hiebert

Thomas P. Carpenter<sup>\*</sup>

在数学教育界内被最广泛接受的一个想法是学生应该要理解数学。在数学教育学中有许多研究和措施的目标是推行理解的学习。但是到达这样的目标犹如在寻找圣杯。人们对目标的价值有着执着的信念,但是要把教学环境设计得能成功地推动理解却是困难的。

理解的学习是一个超出数学教育界限的议题。有很多关于学习的一般理论,包括了来自不同范例根源的,和理解的思想顶牛。譬如说,在认知科学的传统内,最近有一些成果强调了带有相当的精确性的模式内部表示,可以理解为确认了理解是学习的一个基础的方面,而且学习的模式又必须顾及到理解的结果。同时也产生了一系列的理论,其中很多来自人类学和社会学,部分地是由于对认知科学方法所提供的对理解的解释感到不满意。这些理论强调了情景的知识和社会的公认,其目标在于解释在日常内容方面学习时明显的理解,和在正式的学校环境下学习时所缺乏的那种理解。对数学教育有利的是最近的讨论中很大部分是出现在有关数学的学习方面。

这一章的目的是再一次来考察理解的学习数学的问题。从新

---

<sup>\*</sup> 作者希伯特(J. Hiebert)是达来华大学的数学教育教授。卡彭特(T. P. Carpenter)是威斯康星-麦迪逊大学的课程和讲授教授。

的和以前的关于学习心理学的著作中取材,我们提出一个用来考察理解的结果的框架,先用它看学习,再用它看教学。我们对那些与理解的学习和为了理解而进行的教学有关的问题感兴趣。在结束这一章时,我们把要去理解的人从学生和教师转移到研究人员:从学生在理解时所作的努力中如何使研究人员得悉要理解“理解”应做的工作。

## 表示和联系:思考理解的一个框架

我们所建议的重新考虑理解的框架是基于这样的一种假设:知识是一种内部的表示,而且这些内部表示是有条理的——结构性的。一种有用的描述理解的方法是借助于个人的内部表示的构成的方式。我们指出一些可以代用的描述理解的方法,但是我们主张,为了分析有关理解数学的一系列问题,所表示的知识的结构提供了一个特别有条理的框架。

### 外部的和内部的表示

为了去思考数学概念和作交流,我们需要能以某种方式来作表示。为了交流,表示的方法应该是外部的,它的形式是口头语言、书面符号、图画或是物理客体。一个特定的数学概念常常可以用任意一种或是所有的这些表示形式。

为了去思考数学概念,我们需要有内部的表示,以便头脑可以对它作运算。由于智力的表示是无法观察到的,关于概念如何在头脑中表示的讨论都是靠高度的推理。多年来联想主义者的观点是排斥脑力表示方面的讨论,因为它们是不能被观察到的。然而,认知科学中的工作已经把智力表示恢复为一个合法的研究领域。实际上,智力表示的概念是一个中心思想,它从不同的领域,包括了心理学、计算机科学、语言学以及其他,汇集起了关于认知的工

作。

在这一章内,我们的目的不是去扩展在认知科学中的基础的研究结果,而是用认知科学工作中的见解去处理数学的学和教的问题。特别是我们以关于智力的或内部表示的认知科学的两个假定为基础。首先,我们假定了在外部的和内部的表示之间存在某些关系。第二,我们假定了可以把内部表示之间以有用的方法关联起来。

在外部的和内部的表示之间假定有一种关系是和认知科学中多数的工作相一致的,但它并不是统一持有的一种假设。现在正有一个争论,譬如说,关于智力表示的形式是否在某种方面模仿了所表示的外部物体或事件,或者是否有一个共同的形式可以用来表示全部的信息。虽说辩论还没有结果,但我们认为假定内部表示的性质是受到所表示的外部情况的影响和限制的,我们将这个假定用到了数学的情况,假设了外部的数学表示的性质影响了内部的数学表示的性质。从不同的工作得到的证据都提示了这是一个合理的假定。这儿重要的是,当考虑数学中的表示的结果时必须兼顾到外部的和内部的表示。就是说,一个学生所接触的外部的表示(物理材料、图画、符号等等)的形式对学生内部表示量或关系的方式有影响。反过来说,一个学生处理或形成外部表示的方式将显示出他如何把信息作出内部的表示。

尽管我们对内部和外部表示之间存在的关系作了假定,我们并没有对内部表示的精确性质作任何假设。例如,在处理两位数时二年级学生用了成捆的棒,我们并不假定他们把大于9的量在内部表示成棒的像。但是,我是假定了,那些和成捆的棒交往的学生为自己找表示时,和只用书写符号的学生是不相同的。

### 表示式的联络

从认知科学的工作中得到的第二个假定就是内部表示是可以

联系起来的。虽然说这样的联系只能是推断出来的,我们还是假定了,就像对表示一样,它们是受到外部活动的影响的。内部表示间的联系是可以用对应的外部表示之间建立起联系来激发出来的。

**外部的联系** 学习的人可以在同一数学概念的不同的表示形式之间,或是在同一个表示形式中有关的概念之间建立数学信息的外部表示之间的联系。不同表示式之间的联系通常是基于相似关系(在下列方面它们是相像的)和差别关系(在下列方面它们是不同的)。譬如说,整数在外部可以用口头语言、书写符号和十进制计数块。考察它们之间是怎样相同和不同就可以建立起这些形式之间的联系。在同一个表示形式内可以从系统内的模式或规律性中得出联系。例如对整数的口头表示词汇上有一个可预测的规律性(在十几之后)。在系统的词:个、十、百之间找出规律性就可得出联系。表示形式之间或其内部的联系在具有理解地学数学方面起了很大的作用。在本章后面对这两者都要细说。

**内部的联系** 我们提出,当建成了概念的内部表示之间的关系时,就会产生知识的网络。目前,还不可能指定网络的精确性质,但是我们相信,用两种比喻来考虑网络是有用处的。网络可以像垂直的谱系或是像蜘蛛网一样的结构。当网络的结构像谱系那样时,有些表示法包括其他的表示法作为更一般的内部的或下面的细节。推广就是伞形或包罗万象表示法的例子,而特例就是细节的例子。

在第二个比喻中,一个网络就像是一张蛛网,结点可以认为就是所表示的各条信息,而中间的线就是它们的联系或是关系。蛛网中的全部结点最终是联结着的,因而就可以按照已建立了的联系在它们之间漫游。有些结点则比另外的结点联结得更直接些。

蛛网可以是很简单的,像线性的链那样,也可以是特别的复杂,从每个结点散发出许多联系。

在相当广泛的关于知识结构的和语义网的著作中均提到了谱系和蛛网。在齐(Chi)和凯斯克(Koeske)的那篇关于一个四龄童的关于恐龙的知识的报道中,就有一个有趣的两种网络的例子。研究人员从这个孩子对一套关于恐龙知识的回答中标出了他对恐龙的信息,也包括了各片信息之间的关系。有些信息是在高一级的结构下集结起来的,就像在一个谱系之中。例如,恐龙的一个子集被认为是有关联的,因为它们吃的是同一类食品。在另外一些情况下,个别的信息则认为是和其他的有联系的,但是没有谱系。这种网络则更像蛛网而不是谱系。

没有理由表明这两种比喻:谱系和蛛网是不可混起来产生更多的网络的形式。例如谱系中的某个层就可以是个蛛网,齐和凯斯克的那个四龄童的恐龙知识的结构就是这样的。较为保险些,应该假定学生们的内部表示,不论其性质如何,都是非常复杂的,而要抓住这种复杂性就需要有得力的比喻。

## 框架的效用

目前有相当多的争论关于是否可以用内部的知识结构来完整地描述理解,可能要描写得完全,还要包括情景的活动和社会交流的分析。不论这个辩论的结果如何,我们相信知识有联系的表示的想法会继续为理解数学提供一个有用的方法。这里有几个理由:首先,它提供了一个分析的水平,既接触到理论的认知,又涉及实用的教育学问题。可以这样来进行关于理解的讨论,那就是把它放在一个较大的理论系统中而同时又提供了足够的具体说明来得出实质性的讲授方面的意义。第二,它产生了一个连贯的联系着在数学的教和学(过去的和现在的)中的诸多结果的框架。这个框架提出了对过去的一些数学教育中的结果的重新解释,也展示

了我们的方法和其他目前对理解数学的理解方面工作的异同。第三,它提出了对学生学习的种种解释,有助于说明他们在校内外的成功和失误。也就是说,考虑内部表示间的联系是考虑目前那些数据所引出的描述基于结构性的智力模型的认知问题的一个有用的方法。我们的目的是把这个框架应用到那些围绕着具有理解的数学的学和教的问题。

## 具有理解的数学的学习

### 理解的定义

作为开始,我们用信息的表示和构成方式来定义理解,我们认为一个数学的概念或方法或事实是理解了,如果它成了内部网络的一个部分。更确切地说,数学是理解了,如果它的智力表示成了表示网络的部分。理解的程度是由联系的数目和强度来确定的。说一个数学的概念、方法或事实是彻底地理解了,是指它和现有的网络是由更强的或更多的联系联结着。

将数学的理解看作在概念、事实或方法之间作联系的思想并不是新的。它是贯穿在数学教育文献的经典著作中的一个主题,并且在最近关于数学中的表示和理解的讨论中也常常出现。有许多研究数学的学习问题的人同意认为理解也包括了意识到各条信息间的关系。本章的贡献不在于表示这个基本想法,而在于把它描述得更为精确,以及把这个想法更推进下去以帮助我们理解“理解”。

学习的人构造了好几种联系来造成智力网络。可以构造出来的关系的种类已经在提出网络所用的比喻时提过了:一种是基于相似和差异,第二种是基于包含关系。

相似和相异的关系可以在不同的外部表示形式或是在同一个形式中创立起来。作为在不同的表示形式间建立起联系的例子,



让我们来考虑用十进制计数块和标准书写符号来表示整数时学生的活动。一旦规定了一个特定的块的值为1时,其余的块就必然取10到某个非零指数的值。由于每个块和相邻尺寸块大或小10的倍数,块的大小就告诉我们它的值。在特定的块的大小或书写记法的位置上可以建立起对应关系,然后可以建立起不同尺寸的块之间和位置间的相对值的联系。

对学习的人来说,所推得的好处是他们带来许多有用的与块有联系的信息。从以往的经历,他们往往已建成了相对的大小和重量(大的东西重得多)的观念,将物体点数,甚至还有对相等的东西作交易和将同类的东西集拢的观念。换句话说,往往有个内部的网络和物理的块的智力表示联系着。如果书写的符号与块的表示有了联系,它们也就和整个块的网络有了联系。学习的人已构成的对块的多重的联想会把信息提供给书写符号。

联系并不限于在量的表示上,也可以在量的动作间建立起来。在对块作加和减时,大概学生会把同样大小的块合并起来,对书写符号也可以作相应的动作。在块的每个动作和符号的相应动作上也可以建成联系。对学生说明白这种联系就是教多位数加法和减法的许多教学建议的基础。

应该弄清楚把量或量的动作的表示联结起来的的教学目标,不是在于使得学生对特定的块或特定的位数把这种联系具体化,而是应该让学生造起一座桥梁,使他们用块工作的知识(以10归组和合并同类的块,等等)能够通往书写符号上去。一旦数的相对值建立起来了,并且看作以10归组了,与块的联系就变成不必要了。

我们还一定要说清楚,建立起十进制计数块和书写符号间的联络对学生来说并不是那么容易。只有靠多想和谈论整数的符号和块的表示的差异和相同之处,学生才能建立起表示法中的关系。

在不同表示形式中建立起联系的另一个例子见诸于内舍(Nesher)的一篇关于运用奎逊纳(Cuisenaire)棒作个位数整数的加

法和减法的理论分析中。由于许多孩子对棒的特点——长度和颜色有过联系,这些信息的智力网络就可以作为用棒做加法、减法时的引导。然后,当学生们已经建立起了棒和数字之间的联系时,他们对棒的知识还能激发和告诉他们对书写的符号的动作。虽说内舍的论证的叙述稍有不同,但是她所援引的理论原理与我们这儿所表述的是相似的。

在学生的数学经历中,不同表示形式的相同和相异点,作为关系的基础,会反反复复地出现。譬如说,对极限的  $\epsilon$  定义的理解,在联系到图象上的渐近线的图象时就变得丰富起来。同一个信息的各种表示法之间的相同和不同点会激发起在不同的熟练水平上的有用的联系。

在一个表示形式的内部也可以建立起基于相同和不同处的关系。譬如考察整数连同四则运算的书写记法问题,对于每个运算通常都要教标准的算法,但是还有许多可供选用的方法。所有这些方法都有某些方面的联系。譬如说,标准的除法的算法在多处是和减法相同的,但是不同的是减数必须用乘法来提供。另一个例子是,通常我们可以采用两种不同的方法来做多位数的减法:重新组合法和加法相等法。这些方法相同的是每位数上作减法,不同的是,就重新组合法中保留的是被减数的值而变动了个别数位的值,加法相等法中保持了差的大小,改变的是被减数和减数的值。

学生可以在思考和谈论算术方法之间的异同中建立起他们之间的关系。这时,教学的目标不一定要一个方法为另一个方法提供资料,而是帮助学生去建成一个智力网络,使得各个部分是多方地联络到其他部分的,在一个表示形式内建立起联系往往就增加了网络的凝聚力和结构。

基于相同点和相异点的联系,不论是在表示的形式之间的或是在其内部多半在蛛网式的网络上出现,因为相同相异不必意味

着更高级的关系,而可能是在同一个水平上表示的信息的简单联合。当一个数学事实或过程被看作是另一个的特殊情况时,另一种关系就建立了。这种关系的依据是包含的概念或者是一般情况和特殊情况的概念。在谱网络中往往可以找到这种关系。

建立在包含关系的联络的例子可以从早期的加法和减法的工作中获得。已经得知许多小孩子在求解加法减法的文字题时用到了反映问题的语义结构的计数方法。赖利(Riley),格里诺(Greeno)和赫勒(Heller)提出了一系列描绘孩子的知识结构(他们的表示网络)的模型。这些模型都是以问题的图式为基础的,而这些图式代表了文字题中通常出现的语义结构的基本的类型。推测起来,孩子们把个别的文字题看成是一般题型的特例,然后应用与之有关联的计数方法。在最高级的模型中,赖利等人提出了一个最一般类型的问题图式。他们提出孩子们在部分和整体的关系上形成了一个内部网络。由于所有的加法和减法问题都可以作为部分-整体情况的特例来处理,一个一般的部分-整体的图式就可以提供一套高级的联系来包含个别的问题或更抽象的问题类的联系。于此,孩子们的内部的网络就像一个构造得很好的谱系,在其中部分-整体的关系成为特定关系的“伞”。

在赖利等人的模型中,问题图式的应用代表了作为描述知识结构的图式或框架。一般地说来,图式是较为稳定的网络,它们是建立在相对高的或一般化的水平上。图式往往就像是样板一样用来解释特定的事例。也就是说,图式是抽象的表示,特定的情况就是与它相联系的特例。为了我们的用途,重要的是将内部表示联上网络的那些联系是以归类和包含的关系作为基础的。

建立在包含关系上的联系的第二个例子,和图式有些不同,是采自基兰(Kieren)关于有理数的知识的描述。基兰提出了一个模型——专家们可能怎样来构造关于有理数的知识的。他把它描写为一个“理想化的个人的有理数的像”。在最低的水平上,也就是

最接近于外部环境交流的就是实验数据的一个智力的表示。这些局部的表示被联结到较一般的原理或结构,而后者又再联结到更高水平的结构上去。基兰提出了划分的直觉的概念,量的等价化的概念以及形成单位(还可以再分细)的概念作为一个中等水平(一般性)的结构而更正式的乘法结构作为高度一般化的结构。联结各片的众多关系是包含关系——把一个概念、事实或方法理解为另一个的特例。

总而言之,我们已经论证了:认为学生的数学知识是表示式的内部网络是有用的。随着各种表示联成日益增强的、有结构的和有凝聚力的网络就产生了理解。建成网络的那些联系形成好几种的关系,其中包含有相仿性、差异性、包含关系和归属关系。

### 形成理解

利用我们对理解的定义,现在我们可以描述(至少是用一种比喻的方式)产生理解的结构过程。智力表示的网络是逐渐地从对现存的网络联上新的信息或在以前没有联系的信息之间建立起新的关系而建成的。随着网络的变大和组织得更完善,理解就增长了。因此说理解就不是一种全部的或者全没有的现象。如果只是有一些可能相关的概念的智力表示是联系着的,或者联系是很弱的,理解就将是很有限的。弱的和脆弱的联系在面对冲突或得不到支持的情况下,就很可能没有用的。随着网络的增加和联系得到加强(强化的经历和更紧密的结构),理解也增长了。

网络的成长可以由多种方式来产生。大概最容易看到的是把一个新的事实或方法联到现有的网络上去。让我们来考虑四年级的学生,他们已经对整数构成了一个位值的内部网络。这个网络的一个部分就是做加、减法的步骤,把数字直的写,位数靠右排列。假设学生已经把这个方法表示成使得位数的排列可以和将同单位(个、十、百,等等)的量合并相联系,那么当这些学生遇到了有小数

的加减法时,他们就将处于一个有利的位置,将通常教过的方法——依小数点排列和合并相同单位的量联系起来。如果他们能建立起这样的联系,加减法就成为了现有的网络的一个部分,网络变得充实了,小数的加减法就被理解了。

虽然说对现有的网络按照一种顺当的累计方式作加法的形象有其简明可取之处,但也可能结果变成这个形象太简单了。从远处看,理解网络的线性增长看来似乎是可行的。然而,对学生在理解的过程中作仔细的分析时,显示出来它是一个更为紊乱的过程。作为增长的特征可以是网络中的变动,也可以是对网络作增加。有的时候变化表现成暂时的倒退,有时也是进步。变化好像是间断的,也有点不可预测。看起来学生建立理解是突然性的而不是经过顺当的单调的增加。

对网络中的变化的最好的描述就是重新组织。经过重新组织后形成了新的联系,而旧的联系可以作改变或被抛弃。新的关系建立起来后可能强迫受影响的网络形成一个重新的构形。重新组织可能是局部的或广泛的或剧变的,在好多的有关网络之间回荡。重新组织表现为新的洞察力(局部的或全局的),也可是暂时的混乱。最终,随着重新组织产生更丰富的、联系着的、有凝聚力的网络,理解就增长了。

作为重新组织网络的例子,可以考虑一年级的学生,他们观察到一个数从方程的一边移到了另一边时,会改变符号。如果学生只把等号的概念联系到写出答数(将问题的提出和答案分列在其左和右),那么这样的学生好像就不具有这种内部网络使得新的动作可以联系上去。由于他们对等号有受限制的表示,学生们就不大会把新的信息表示得能够和现有的网络有联络。但是,假如在活动中,学生集中注意到等价性,例如鼓励他们把等号看成为天平的支轴,这种新的等价的表示法和学生所建立的新的关系,会促使他们将有关网络内的现存关系用新的关系来代替。有关等号的网

络被重新组成,那么把问题提出放在左边,答案放在右边以及当一个数从方程的一边移到另一边时符号的变化,都能在单一的一个凝聚了的网络的内部和等价联系起来。

重新组合明显地普及的一个结果是最好认为内部的网络是动态的而不是静态的。每当建立起新的关系时,网络经常要经历重新整顿和重新组织。

网络的重组过程和对现存的网络连接新的表示的过程,都在某种程度上依赖于已经造成的网络。学习的人用过去的经验创造出的智力网络来解释和理解新的经验和信息。“人们不断地尝试用已经知道的来理解和思考新的。”换句话说,现存的网络影响到正在构成的关系,因而有助于形成新的网络。

现存网络对新的关系的性质影响的程度可能有很大的不同。如果一个学生努力将一个新的想法、事实或方法适应到目前流行的思考方法中去,现有的网络将会限制新创造出来的关系。在另一个极端,一个学生可以将新的信息表示得和现存的网络不相联系。这种表示可以是孤立的,并且如果它不衰退的话,最终还可能和其他分隔出来的表示或一个联通的网络联上。然而,即便如此,最后的关系仍然受到了现存的影响。从我们的角度来说,最可能的构成理解的局而涉及到网络的尺寸和结构的增加,而这些过程都是建立在现存的网络上的。

用建立关系来产生更大的、更有凝聚力的内部网络来形成理解的这个想法,对于分析有关理解数学的一些结果是有用处的。在下而几节中,我们将这个框架用于数学表示中若干个重要的问题,它们目前正受到数学教育界的关注。

**交替表示在课堂中的运用** 多年来数学教育家一直主张对学生采用各种形式来表示数学的思想。通常认为物质的三维的物体是特别有用的。它的简单的理由就是,用具体的物质来表示概念

时,孩子们会懂得好一点。

虽说用物质的东西有直觉的感染力,但是对在课堂里应用具体物质有效性的研究却产生了有分歧的效应。从我们的观点来看这可以有几种解释:

在我们的框架内,说到运用具体物质时孩子们理解了是具有一个确定的意义的,并且也提供了一个方法去思考如何使交替的表示会(或不会)支持带有理解的学习。从我们的观点来说,当看到具体的物质时,孩子们理解概念,指的是孩子们建立起关系,这种关系产生了一个有联系的网络,它包含了物质的表示以及和它们的交流。这时孩子们可能把物质的表示和现有的网络作联系,或者是建立起一些关系来促使网络重新组合。因此,重要的是同时要考虑到学生所具有的内部网络以及能促进内部表示间建立起来关系的那些课堂活动。

许多学生从校外带来了关于数量的经验的表示。譬如说,即使是很小的孩子就已有-一个属性(如长度、容量、重量等等)的网络。这种网络可以有不同程度的范围或聚合力,但是,多数孩子随之有一些数量的知识。孩子们现有的和数量的联系可能正是用来对具体物质作恰当的解释的或是用来将物质的有关特性和现有的网络作联系的。譬如说,孩子们的等价概念——等量的交易以及同类项的合并,就是在用十进计数块来构成适当的关系时所需要的。事先具有数量的或在数量上动作的表示式往往能够(至少部分地)说明在课堂中运用物体所获得的许多肯定的结果。

那么对那些否定的结果又怎样呢?为什么有时候具体的物质没有效果呢?首先是,上面的讨论有它的另一面。如果学生不具有教师所希望的那种知识,那么学生就不容易把他们和物质的交流联系到现存的网络上去。他们就不能按教师所期望的那样去解释物质,使用具体的物质也就只会产生偶然的联系。

第二,上述否定的结果也可以追溯到学生进行的活动的两个

特征。其一是关系到具体的物质和我们企望他们所表示的数学关系的距离。当物质的突出征候和数学关系配合得愈好时,就愈能支持学生建立起所意想不到的联系。具体物质和在该环境下的目标关系之间,可以从很紧密的内容上强化了匹配一直排到只有少数几个暗示的那种关系。在后面那种情况下,那个具体的物质只能是一个任意的记号而不是一个自然的表示。

作为内容上的距离的例子,再来考虑整数记号系统中的位值原理。对低年级学生通常用来表示位值原理的有几种不同的物质,包括十进计数块,有色的筹码和钱。所想象的情况是有 136 个物体(牛、糖果、分币)与 57 个相同的物体合起来。如果这个情景是用十进计数块来表示,其中一个小块代表了 1,这些物体可以用一组 136 个小块及另一组 57 个小块来表示。然而,没有一种特定的分组办法的话,这个表示法就抓不住位值原理。从另一方面来看,可以利用材料的组合,136 个物体的组合就能用 6 个小块,3 个长条(十个)和一个平块(百个)来表示,相仿地,57 个物体就可以用 7 个小块和 5 个长条来表示。要紧的是注意到在这两个组中,应该依旧可以看得到总数,只不过用了一种特殊的方式来分组。此外,正如前面曾提到的,还有若干个物理的暗示如尺寸、重量等用来反映块的相对的值,使得分组的表示是很突出而且并非随意的,即大一点的块是前面的 10 倍大。由于这些理由,这些块就含有了位值原理相当的内涵上的证实,因为材料的特征和位值的数学特征是相当密切地匹配的。

假设这个情况是用有色筹码来表示的,我们就得先任意地把一种颜色如黄色指定为单位值,上面的 136 个和 57 个物体可以用一组 136 个黄色筹码和另一组 57 个黄色筹码来表示。为了抓住位值原理,我们就得为其他的颜色指定值 10 和 100。与块不相同的是这样的指定也是任意的。一旦指定了值,物体也就可以用筹码来表示,只是在筹的表示中就不再看得见个别的物体了。136



个物体可以用 1 个红筹, 3 个绿筹和 6 个黄筹来表示。像块一样, 这些筹上也可以做运算——把相同的筹合并起来, 10 个同样的筹可以换成另一种 1 个的筹等等。只是筹的材料本身并不能提供关于它的值的任何暗示, 因为表示位值的数字特征的颜色是随意地指定的。与块相比而言, 筹码就包含了较少的位值的证据, 因而说它内涵的距离就较为大了。

现在再设想用钱币来表示这个情况。硬币和纸币的值已经按传统被指定了, 分币代表 1, 角币代表 10, 元票则代表 100。如果学生已经从先前的经验中知道了这些值, 他们就能运用这些知识, 以 1 元票, 3 个角币和 6 个分币来表示 136。同样地 57 可以用 5 个角币和 7 个分币来表示。也可以像对块和筹一样来操作钱币, 材料本身是像筹码一样随意地指定取值的, 也没有什么钱的物理特征来显示其值。在这种意义之下, 钱是和筹码一样和位值的概念在内涵上有距离。

但是钱作为位值的物理表示提出了另外一些问题。虽说某件钱币的值是随意地指定的, 但是学生往往带上了各种钱的联系(包括了每件钱币价值的知识)。也就是说学生往往带有一系列通常从校外的经历中建立起来的钱的内部网络。网络中表示了的知识会支持钱的一些特征而获得位值原理, 例如: 分、角和元的值以及它们之间以 10 换 1 的交易。因此, 对多数的孩子, 钱就比筹码提供了很不一样的表示, 尽管对两者都是任意地指定其值的。

孩子们对钱的熟悉提示了它可以作为一个特别有用的位值的表示。然而对这样的结论还是需要作一些调整的。孩子们对钱的经验是在特殊的文化背景下出现的。在涉及到购买或交换货物的情况下钱才有意义。在我们的文化中, 一般是不让钱代表其他的物体, 如牛或糖果。由于这个特别的作用, 孩子们可能不会立刻意识到钱表示位值的方式。孩子和钱的联系可能只是停留在课堂之外, 因而并不像教师在课堂内所强调的那样去和位值的概念联系

上。这意味着,虽说钱是一种有用的材料,教师不应该假定学生会立刻作出相应的位值的联系。还是需要对钱像对其他具体材料那样进行一些活动,来使学生明白所要的联系。

要注意到,不是因为一个材料和所要的关系较远就意味着它就是较少有用的。也许有成效的是去想象在有关的量和关系和它(们)最终要表示出来的外部形状的距离。在多数的教学程序中选中的表示是用书写的记号,它和许多具体的材料相比较,在内涵上看与量或关系的距离较远。对学生来说,可能较有用的方法是用物理的材料来填这个数量和书写记号间的空隙,从内容上接近的材料开始接近有关的定量的关系,然后移向从内容上较远一点的材料来接近书写的记号。

课堂活动的第二个特征可以帮助我们去解释在课堂内利用具体材料时有效性的不均匀情况,是由于材料和运用材料的社会情况可能有相互作用。为了准备证明这一点,必须指出,一个数学情景的所有表示法都不是完全忠实于原来感兴趣的量或关系。也就是说,一个量或关系的每个表示只能抓住它的一些特征而不是另一些。为了要做成所打算的联系,学生们就必须集中到那个能抓住感兴趣的关系的表示特征。

如何使教学工作有助于集中学生的注意力呢?课堂内的社会交往成了一个有力的收集学生的注意力的方法,并且使得它集中注意到共享的经验上去。语言有一种独特的支配作用,而课堂讨论会又开拓了这个作用,使得学生的注意力被导向有关的数学关系。具体的材料提供了一个公共的表示,使得注意力能被引导上去成为讨论的焦点。材料是公共的,课堂内所有的学生可以共享。学生们感觉到的是相同的数学特征,课堂内的语言也就可以是关于同样的东西。由于所有的参与者(师生)的注意力集中在同一个目标和目标间的关系上,这就促使了师生之间的交往。这一点并非不足为道,因为学生们的背景和目标各异,往往不易使他们共同

对一件事或想法进行讨论。具体的材料,由于提供了一个相对明确的目标物,也就有可能共同来进行讨论。

把学生的注意力集中于特定的关系是重要的,因为不是所有的关系都是同样令人感兴趣的。有的材料被选作课堂活动用,是因为认为它们可以抓住一些关系,那是成人认为特别重要的。然而,这并不保证了学生们能够像我们那样看到材料中的关系。通过课堂讨论,教师和学生可以谈论可能的关系以及把注意力引到所关心的关系上去。通过和材料的交往和其他人的交往,学生多半就会建立起教师所想使他们具有的那种关系。事实上,关于材料谈论时所使用的语言对于学生建立关系往往是关键的,所使用的材料的社会内容也部分地说明了在帮助学生理解中的有效(无效)性。

**对书写记号的理解** 数学的标准书写记号系统对孩子在学校学习的经历中起着特别重要的作用,形成了一个专业的初级的表示系统。书写记号的意思和使用方法值得特别予以考虑。

书写记号的意义可以像对任何表示形式的理解那样有两种建立的方式——和其他表示形式联系起来或是在表示式的内部建立起联系。当书写记号和其他表示形式(如物理对象、图画和口头语言)联系起来时,我们假设意义的来源就是对那些形式已建立起的内部网络。联系上这些网络就使得书写记号的内部表示得益。在符号系统内部建立起关系也可以得出意义,往往是发生于在符号系统内部认定模式。

当学习的人建立起了书写记号和其他的表示形式(如具体的材料)的关系时,从记号系统以外又取得了意义。从早前的分析中,不光是具体材料的出现,也不单单是材料和记号的并列提供了记号的意义。为了使记号取得意义,学习者必须把他们的书写记号的智力表示和具体材料的智力表示联系起来。这种联系能造成

理解的可能,则由于具体材料又是数学关系和量的表示,而变得复杂化。因此,具体材料可用于作为记号的讨论目标,同时依赖于它们所包含的数学关系,以及对书写记号的关系。

可以对个别的记号,也可以对记号上的作用来作出书写记号和其他表示的联系。学生在校内遇到的大多数数学记号系统具有两类的个别记号:符号代表了量和符号代表了量之间的关系。数值符号,就像 $-3$ , $\frac{1}{2}$ 和 $2.8$ ,当和量的其他表示有联系时就有了意义,其他的表示就像是具体的材料或日常的经历。运算和关系的记号如 $+$ , $-$ 和 $=$ 在和量的相同表示下的关系和动作有了联系就会取得意义。例如,在 $3.2 \times 4.5 = \underline{\quad}$ 中的记号 $\times$ ,假设学生用的是十进计数块作为小数的参考物,当学生把它和完成3组代表4.5的块以及再加上十分之二的一组的动作时就取得了意义。 $\times$ 的意义并不指明如何去处理那个记号,而它只是提出当你学习并执行它后,运算会为你做什么。注意,这里所阐明的 $\times$ 是它的一个意义,单是这样的话,它并不能提供乘法的一个完全的理解。学生们随着把它联系到更广泛的参考物时(每个都有它的背景的表示的内部网络)对 $\times$ 的理解就有了增加。对书写记号的意义的增长是并不仅用于 $\times$ ,而是对所有书写记号的。

对个别的记号的意义一旦确立起来后,就可以考虑建立作用于这些记号上的规则和方法的意义。在建立规则的意义时,只要把组成规则的记号上的动作和对数值记号的参考物的相应的动作联系起来。对参考物的动作和对记号的动作的一步对一步的对应的明显程度可以有所不同。已经证明,不论是在暗含的或是明显的条件下,学生都能建成联系,但是在教学方法上是有重要的差异的。在本章的后面部分将细细讨论这些。

也可以从系统内部建立的联系产生对书写记号的理解。正如前面所指出的,在系统内部的联系通过将它的元素互相联络起来

就会给出它的结构。在一个书写系统内建立联系的过程中至少有两个成分。首先,书写的记号必须在内部表示为数学的对象而不只是在纸上代表了别的东西的记号。从某种意义上说,记号必须是从透明的(只显示它们的参考物)到不透明的,从而获得自己的身份。学生必须能认识,记号是个实体,是一个系统的元素,用多种方式相互联系着的,以及是可以对之作运算的。当学生在用直觉建成方法时,他们谈论到符号时所用的比喻式语言表明了他们能够把符号当作实体来处理。当学生说他们正在把数一剖为两,敲掉或粘上数的部分时,他们在暗示记号本身是一个有意义的物体。

对联系过程有贡献的第二个成分是在记号系统内的模式和规则的集合。由于在数学中标准的书写记号系统的结构是那么严谨,这样的模式极多。虽说这些模式(如同任何特定的外部表示)不是必然会转移到学生的内部表示中,学生们必须自行去构造有关的关系式。

就像对具体的材料那样,课堂内的交往会影响到学生所建立的关系式的式样。共同对一个书写系统内规律性和模式进行讨论会帮助个人构成有关的关系式。很可能构成关系式需要有一个思考的心情。由于书写的记号必须看成是数学的对象,当然认为学生应该自觉地想到记号是系统的元素,而不是单纯按照一些记位的规则把它们在纸上移来移去。当然,可以不经过思考来处理记号,但是没有经过思考的话,就不大可能激发起构造出关系式来引到理解。

可以在数学的各个水平上找到在一个记号系统的内部建立关系式的例子。当然这样的关系式随着数学愈来愈高级而更加占优势。举个在初级水平上的例子,再来考察整数的记号系统。人们通常把数字 3 824 看成 3 824 个单位,单位是 1。由于记号中内含的结构,该数字也表示了多少个 10 的几次幂,382 个 10,38 个 100

和 3 个 1 000。同样的模式还可以推广到小数。可以从数字上确定出特定单元的个数,只要把该单元认为是最末的位数。这种记法内的关系式对成人虽说是很明显的,但必须由学生自行建立起来。

作为第二个例子,考虑把一个最简分数变成小数的过程。这个活动的一个有意义的结果是小数或是终止,或是重复。为什么这串位数不能随意地继续下去呢?从作长除法时出现的模式中可以得到线索。假定,这个分数是 $\frac{8}{17}$ ,在减法这一步上最多可以有 17 个差(0,1,2,...16)。如果差是 0,除法(小数表示法)就终止了。如果差不是 0,最多经过 16 次减法后,它也必然要重复。一旦减法产生一个前面已经得到过的差,整个计算以及商的小数就会重复。这个分析的意义在于,它可以完全在记号系统的内部实现,而不需要靠其他外部的参考。

第三个例子取自中学代数学。学生往往学了许多简化表达式和解方程的方法。对方法的理解来自记号系统内部的联系,特别是联系到数系的基本性质。例如,对表达式  $3x + 5x$  的化简是根据分配性质。如果学生能够认出分配律能够用于这个表达式的话,他们就具有必要的知识来化简这个表达式,而不必另外学合并同类项的新的方法。和分配律的这种联系能帮助学生辨认出可以应用它的情况,从而能避免像  $3x + 5y = 8xy$  这样的错误。数系的基本性质对代数方法的联系是对方法和性质都有意义的。

要紧的是要记住,在一个系统内辨认出模式和建立起联系,需要将活动的目标从熟练地执行转移到关于结构的思考分析。记号系统的结构是记号取得意义的来源,而只有当学生辨认了其结构并且有了内部表示后,源头才会开通。

在数学的记号系统内部建立关系式来导出意义的论点并不是新的。譬如说布劳内尔(Brownell)的许多文章都可以被理解为支

持这个论点的。布劳内尔的论证和我们的略有不同,因为他将从数学关系式得出的意义与从现实生活内容(其中含了数学)中得出的意义在做对比。另外,布劳内尔也不区分我们所说的表示式内部的联系和表示式之间的联系。然而,布劳内尔所举的说明数学关系式的例子中多数是在书写记号系统内和根据这些系统的结构的例子。

现在对这个分析来作总结并推广,书写记号的意义能够通过记号和其他的表示形式如物理对象的联系或记号系统内部的联系来建成。换句话说,书写的记号是智力的工具,它有两个主要的功能:(1)公共的功能,它涉及到把已知的记录下来以便共享或交流,(2)个人的功能,它涉及到组织和处理想法。当记号起的是记录已知的作用时,它代表某些东西,学习的人把它联系到用另一个方式表示了数学情况。这时,记号就是用来再一次表现出它所代表的想法和动作的。在记号被用来组织或处理想法时,记号系统的结构或相互关系就是最重要的。记号替代了想法的位置,成了思维的对象。记号的两种功能都需要联系:公共的功能一般要求和其他表示形式的联系;个人的功能会随着记号形式内部联系的增加而得到增进。

## 理解数学的结果

理解数学的后果是通过为此而提出的种种要求来获得其重要性的。例如,建议要对学校数学强调理解的人曾争辩说,那些能理解的学生会保留他们所学到的,并且将它传递到新的情况。有的要求是有很强的理论支持的,有的则是有实验的数据作为依据的,而还有一些则几乎没有上述任何一种支持。最要关心的是配合前面两种的要求,在这儿将就知识的表示和联系方面来考察它们。

**理解是有繁殖力的** 现在人们已经接受了这样的看法:学生

是由他们自己来建立数学知识的,而不是从教师或教本上接受已经完成了的形式。在我们的框架中,这意味着,从和外界的交往中,学生创造出自己的内部表示和建立自己的表示网络。学生在构造过程中关键的一面是他们的创造发明。孩子们不断地发明与外界打交道的方法。他们犯的许多错误,如语言上的过分一般化,就可以解释为创造的结果。同样地,在学校数学课上,学生靠了已经发明的办法去求解各种问题。

但是学生的发明并不一定引到有成效的数学。如果学生们用书写记号而并未和更丰富的知识网络联系时,他们的创造往往会产生有毛病的算法。譬如说,考尔利(Cauley)发现三年级学生缺乏多位数减法的知识时,往往会出演算错误,如从下面的大的数上减去上面的小的数。但是如果学生的发明的理由是结构完好的网络的部分时,得出的数学就可以是有成效的。譬如说,已经能够把小数联系到小数的物理表示的四年级生,就更有可能(比没有这样的联系者)发明适当的处理他们所没有看到过的问题的方法,就像按大小排列小数,小数和最简分数的变换。

有效的发明的独特之处在于智力的表示的性质,在它的基础上得以进行发明。合情合理的是,如果智力的表示是因为在网络内部有了联系而得以丰富,那么发明就会被许多有关的知识所激发、引导和检验。另一方面,如果发明是运行于与有关知识没有联系的表示法上时,那么发明就很有可能是有毛病的和产生相反效果的。

这个分析的重要性在于,如果从一开始就建立起了理解,那么进行的发明过程就能够在有丰富联想的智力表示上进行。这样的发明的结果仍然保持和知识网络的联系。这样,发明推进了学生们的目前的理解。在理解上进行的发明可以产生新的理解,形成一种滚雪球的效应。随着网络的增长和构成得更好,将会增加发明的潜力和新表示的信息的接触点。更丰富的网络比贫瘠的有更



大的可能联结新的表示；新的表示有更多的方式作联系，因为存在着更多的可以联系之处。

产生理解的理论的情况对学生数学知识的增长有其重要的含义。如果这个论点是正确的，它指出了每当第一次遇上一个新主题时就建成理解的重要性——创造丰富的知识网络。它的重点应该是放在支撑学生们努力去建立关系而不是鼓励他们成为方法的熟练执行者。这种假设的方法与另外的不同，如把信息分别储存起来——通过练习和实践，然后在后来的某个时刻把这些储存着的信息联成网络。

强调关系并不意味着要学生去背出联系。有繁殖力的联系意味着可以把学生放在一个环境里，使他们能够建成有用的联系。理解应该正确地看作是由个别学生所产生的，而不是教师所提供的。

如同前面曾指出的，有繁殖力的过程不是顺溜的和可以预测的，但是已有的证据提出到时候学生会建立起关系，创造出有成效的发明以及建成理解。

**理解推进记忆** 自从巴特利特(Bartlett)发表了他的关于记忆的工作，现在愈来愈清楚，记忆是一种构造性的或是再构造性的过程，而不是一种被动的储藏工作。如果要记住的信息是比无意义的音节较复杂些的话，人们往往把它组织成一个有点意思的结构。这样做的时候，他们往往将所记住的信息变更一下。从文字上的学习和理解证实了这些变更是为了使信息能够和此人目前的知识合拍起来。这样学生把信息表示得能和他们现有的知识网络一致起来。在新的信息和已经表现于网络中的现存知识之间建立联系是描绘巴特利特观察自然“探求含义”的一种方式。

创建新的和现有的知识之间联系的倾向的一个好处就在于，可以将联系得好的知识记忆得更好。关于这一点大约有两种解

释。首先是知识的整个网络一般不像个别的信息那样容易变质。第二,当一个信息是联系到了一个较大的网络上时,它就比较容易得到恢复,因为会有更多的回忆的途径。例如,学生在学习做小数的加法时,假设老师说:“在加小数时,先把小数点对齐。”如果学生把这个信息个别地储存,要恢复时就依赖于在一条方法和涉及到小数的加法的单链上追溯。然而,如果学生们把这个信息联到关于其他量的加法的知识网络上,利用了合并同类项,那么他们就将处在较好的地位上去恢复这个信息。恢复的过程可以由几个外部的和内部的线索来激发,如关于位值的,公分母的或量的大小的知识。事实上,这个信息可以看成是较一般的原理的一个特殊情况,是可以即席重新建立起来的。

看起来,理解促进了记忆的理由在理论上是直接的。如果把记忆看成为一个重新构造的过程的话,它就涉及和理解相同的认知活动——构成新知识和现有的知识的表示之间的联系。假定这种联系在数学上是恰当的,那么理解和记忆将会同时增长。

**理解会减少必须要记忆的量** 理解增进记忆的一个结果就是关于什么是必须记住的。如果某个事物是被理解了,它就被表示成为一种联系到网络上的形式。网络的结构愈好的话,需要个别恢复的信息就愈少。对网络的个别部分的记忆来自于对整个网络的记忆,因而就减少了必须要记住的条目的个数。

有的网络的结构是那么紧密,因而它是作为一个整体来进入和应用的。进入了整块的任一个部分就意味着进入了整个网络。回想到本章前面的关于图式的讨论,让我们来想象学生要对等价分数构造其图式。这样的图式将包括等价关系的表示,对一个已知分数产生与之等价的分数的方法,和检验两个分数是否等价的方法,以及关于分数对(如 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ )的一些事实。现在来考虑通常

用来教分数的加和减,分数的化简和假分数和带分数的互换的方法。通常这些方法是用不同的算法来讲授的,而且每个算法是分开储存和回收的。但是每个方法的主要成分都涉及到构造等价分数。如果学生具有等价分数的图式,并且意识到每次应用这个图式是合适的,那么这些方法就不必分别加以储存和回收。为等价分数构造了一个核心程序后,就能够把它取出来并应用到各个问题上去。

**理解会增进转移** 显然,转移对数学的胜任力是必不可少的,而且转移在数学中是经常出现的。转移是不可缺少的,因为要用前面学过的方法去解决新的问题。如果对每个问题都要学一个新方法,那就谈不上胜任了。转移常常会出现,那是因为学生通过学会解决有关的问题来使他们对一些问题的操作有了进步。然而一旦分析超出了这些全局的观察,就会产生困难。譬如说,问题要有关系到什么程度才能使得解了一个就有助于解决另一个?

虽说转移是较难以精确地估计和有效地讲授的,但是它在心理学和数学教育中有悠长的历史。随着认知科学影响了我们关于学习的观点,它又重新受到了关注,并且出现了互相竞争的理论。我们将简短地回顾转移的理论地位,然后把问题放进我们关于表示和联系的框架内作讨论。

对学习的转移的最早的一个解释可以在桑代克(Thorndike)的关于共享成分的观点中找到。按照桑代克的观点,从一个任务转移到另一个的程度是两个任务所共享有的元素的数目的函数。如果组成任务的元素或成分有很多是相同的,那么从一个任务转移到另一个的程度也是高的。

桑代克之后,有许多工作就在于尝试去改进任务间的公共元素的概念。辩论就是围绕着究竟共有的成分是特定的元素呢还是更一般的原理。有人主张说:认知科学的最近的工作使得我们能

够阐明较一般的转移的假设,以共享的原理或方法为基础,而同时又维持了与桑代克提出的关于特定的转移的假设相同的精度。一般,认知科学的工作鼓励人们把共同元素从看成是外部的任务所固有的转换到是任务的内在的表示的特征。

经验中的结果表明,转移通常是相当特定的和在内容上有界限的。意即,如果任务间存在特定的公共的外部的或内部的元素,或是任务是处于相同的内容上的,任务的转移会是明显的。如果任务的位置特征是相当的不同,且任务只是在一般的方面相似,就不太会有转移。对于这些发现,人们重新认定,只能在学习者识别出任务的相似性后才会发生转移。再者,这种识别又依赖于任务所嵌入的内容。

由于情况加在转移上的界限是那么严格,以致于莱夫(Lave)建议重新来阐述学习和转移的理论。根据莱夫的意思,如果假定了认知技巧的学习可以离开它们原先的内容而被转移到一系列任务上去的话,理论就不再站得住脚。理论应该假设情况的指定和情况的中断是认知的基本的和固有的特性。莱夫主张认知的分析应该从集中于内部表示的抽象的和非嵌入的特性移到描述在一个情况的内部的认知动作。

我们所提议的框架保留了内部表示的概念。事实上,我们提议:内部表示的联系方式是有助于说明转移的可能性的。但是,我们也提议:学生从事的问题情况影响到内部表示的性质以及它们和其他表示的联系。换句话说,情况和内涵影响了实际发生的转移的量。

为了详细说明,考虑在学习的文献中特别是在数学学习中出现的复杂的悖论。一方面,在学生中好像存在一种自然的“探求含意”,这方面的努力的迹象可以见诸于他们所出的错误,许多概念错误看来是由于推广过头或是以不适当的方式来连接了信息的片断。例如,在学生开始学习代数时,有许多错误都可以从他们把以

前学习的方法推广过头来作解释。他们学的许多方法涉及到把表达式看作是可分解的。像 $(ab)^n$ 和 $\sqrt{ab}$ 这类的表达式可以改写成 $a^n b^n$ 和 $\sqrt{a} \sqrt{b}$ 。看来并不奇怪有好些学生也写 $(a+b)^n = a^n + b^n$ 和 $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 。用我们的术语,学生们在作联系,只是这些联系是不适当的。

另一方面,学生们好像往往又没有去做联系。他们把信息表示成孤立的,把知识分隔开来,而并没有能够认出或创造出相应的联系(在成人看来是极显然的情况下),而这些失误正好是目前对学生学习数学的分析的中心问题。作为例子,戴维斯(Davis)和麦克奈特(McKnight)考察了3—4年级学生如何处理 $7\,002 - 25$ 这样的问题。他们辨认出学生可能有6种知识可以和这个问题联系上:量的近似大小,钱的找零,用十进计数块来表示量,求解当数较小时的相似的问题,心算方法和标准的书面方法。在面试中,他们发现并不是所有的学生都具有各种知识,而更重要的是,即使有知识,那也是没有联系的。特别是书面方法的知识 and 别的类别的知识。这一点当学生在表演进行变换的知识,但是不会用这个知识去纠正一个出了毛病的书面程序或者对一个不合理的书面答复提出疑问时,表现得很明显。

学生为什么是一面好像在找联系,而另一方面又不会去辨认和创造很多重要的联系呢?我们相信这个悖理,至少部分地,是由于学生漫不经心地对自己的内部表示加了种种限制。学生们把他们交流过的信息和材料表示起来,信息和材料的丰富性会影响到他们的内部表示的丰富性。如果学生参与的活动是过分受到限制的,他们的内部表示是严重地受到限制的,结果是建造出来的网络受到这些限制的局限,很难建立起这些受限制的网络间的联系。学生不得不在这种相对小的、有限制的网络内寻求含意,由于数学中的含义通常得自在一系列的情况下把想法、事实和方法作联系中,在一个过分受限的领域内去寻求含义就必然是有缺陷的。

现在来举例说明数学的活动引导到过分受限制的内部表示。我们考虑的是在小学低年级引入加法和减法,在美国的课程中多数只介绍少数几种不同的问题情况。在美国教科书中典型的是文字题中描述两个集合的连接或一个集合中分出一个,要求出其结果。很少有表示情况的比较或相等,或改变问题中的未知量的问题,虽说孩子们是能够理解许多这类问题的。只提出有限制的一套问题就容易限制学生对加法和减法的内部表示。

最近还提出了在中年级的数学学习的研究中更多注意到过分受限制的数学活动的例子。例如,乘法只被看作是重复的加法。这种表示法就不适宜于处理乘法的各种情况。事实上,只要把问题中的数从整数变成分数,就会造成学生无法用重复做加法的情况。通过变动学生所处的情况就能鼓励学生去获得更丰富的对乘法的理解。类似地,通常是用看区域的一个部分来引入分数。这种从有限制的活动中建立起来的内部表示就不适合于使学生去处理分数的宽广的范围。

由于在学校中,问题的情况是用教科书上的或题纸上的印刷符号表示的,这就更加深了学生建立起受限制的表示的可能性。这些印刷符号表示的问题鼓励学生主要想的是符号。内部的表示就是为了符号和符号上的运算而形成的。如果不把问题推进到和其他表示联系,所形成的内部符号网络就是严重地受限制的,而且是和其他知识无联系的。例如,许多学生不把小数符号系统和最简分数系统联系起来。因而,寻找含意——做联系的尝试——就必须在表示特定的记号的有限的网络内实现。

学生在过分受限制的范围内部寻找联系的概念是和前面提到过的利用匮乏的资源来作创造完全相仿的。在这两种情况下,学生都是通过找联系来构成知识,但是联系既是过分受限制的,知识只能是很有限地有用。

在此,我们假定问题的情况限制了内部表示的性质,提出它是

因为这个现象对理解和转移有着直接的关系。问题的情况影响了内部表示的形成方式和结构,而知识的内部网络的结构又决定了转移的潜力。按照我们前面所做的分析,理解意味着在网络内部的更多的联系和网络之间的更多的联系,意味着更少的限制,并且允许在更大的知识范围内寻找任务之间相似之处。认辨出任务之间的相似点就增加了在一个任务上所用的策略转移到另一个有关任务上的应用的可能性。

如果我们的分析是正确的,问题的情况又帮助在内部表示上加以限制,那么设计学习环境时应该使得限制的界限得以扩展。这里我们对环境的设计提出一些建议,在本章的后部再把它们精确化。首先,问题的环境应该在关键的尺寸上有变化,或者要鼓励与中心思想的接触来推进以后的联系而不是去限制它们。第二要鼓励外部表示不同形式之间的联系的结构。第三要推行集中于数学关系的课堂讨论和社会交流来支撑联系的辨认,智力界限的冲破和内部网络的重组。

**理解影响信念** 到此为止的讨论是集中在理解的认知结果上。重要的是要注意理解也产生情感方面的后果。学生对数学的信念对理解的增长有着重要的而且是微妙的影响。同时建成理解的过程也可能影响到学生对数学的信念。

多伊尔(Doyle)关于课堂活动的那个分析提供了一个沟通理解的认知过程和形成信念的情感的过程之间的桥梁。多伊尔论证了,学生所做的那种工作将决定他们对那个特定领域的想法以及对该题目的性质的信念。这里的工作是指由学生完成的任务和他们所用的认知过程所确定的。由于在数学课上要学生去记住操作记号(作为个别的信息)的程序和规则,不足为奇的是许多学生认为数学主要是按规则办事,主要是由纸上的符号所组成,而那些记号和规则是和他们关于数学所知道的其他东西不相联系的。另一

方面,如果要求学生去构造信息之间的联系——在一个表示系统之内或是用不同的表示法,那么学生就会认为数学是一个聚合的知识体,在一个情况下获得的信息会和另一个情况下的信息有联系,又在不同的表示系统之间有其一致性,表示系统之间有可预料的对应关系。反过来,这种信念又会支持数学知识的增长。然而,鼓励学生在一段长时间上去构造联系的教学计划是很少有的。而且,关于数学在认知联系过程和有成效的信念之间的联结的经验数据还刚刚得到一点,因此,虽说理论的根据是诱人的,但是最后的分析还需要靠收集更多的数据。

### 过去的和现有的关于理解的议题

在本章内所提出的考虑理解的框架,对于重新来思考数学学习的研究中的一些持续性的问题是有用处的。将数学量和关系作内部的和外部的表示,并将表示联系起来组成内部网络的想法是有用的,因为它提供了一个公共的观点来考虑过去传统中分别处理的结果。这样做会提供一个机会来辨认通常未予考虑的关系,并且用一个新的方式来观察事物。有些议题是已经提到过的,有些是较简单地讨论过的,现在让我们把注意力专门转向它们。

**概念性的和方法性的知识** 在数学教育中最持久的一个辩论是关于概念性知识和方法性知识,或者说理解和技巧的相对重要性。辩论所采取的形式是建议教学计划中强调其中的一种知识。流行的观点已经在翘翘板上来回摆动了几次,总是由在各自位置上的代言人的言论的动听程度来作加权。虽说有时在数学教育界内部论证好像有说服力,但是对问题的理解上还是没有多大的进展。

或许弄清方法性知识和概念性知识对数学专门知识的贡献各是什么的第一步应该是同意“哪一种知识最重要?”本身就是一个



错误的问题。两者都是必不可少的。较恰当的问题应该是：“概念性知识和方法性知识是怎样联系着的？”

作为更好地理解这个问题的第二步,就是把概念性的和方法性的知识精确地作定义,以便可以描述它们之间的特定关系。这些概念的有用处的定义往往就提到了关系。我们把概念性的知识定义成与理解了的知识是等同的;概念性的知识等同于有联系的网络。换句话说,概念性的知识是那种关系丰富的知识。一个单元的概念性的知识不是作为孤立的一个信息储存起来的,只有当它是一个网络的一个部分时,它才是概念性的知识。另一方面,我们定义方法性的知识是一系列的动作。要建成一个方法的内部表示的最少的联系是方法中相继动作之间的联系。方法的举例就是算术中的标准计算的算法。通常,在学校数学中,方法规定了操作书写记号的步骤系列。

在考虑概念性的和方法性的知识的潜在关系之前,很重要的是应强调,对数学专业来说,两种知识都是必需的。方法能使数学的任务得以有效地完成。经过多次练习已经记住的方法,用起来很快,也只需要很少智力上的费劲。经过了多次练习的方法获得一种数学的力量,因为它们利用数学系统内的一致性和模式并且能不费力地解决常规问题。

对数学专业来说,概念性的知识也是需要的。前面提到理解的长处,从中就可以辨认出它的一些好处。除了对理解之外,它和方法性的知识的关系就是对数学专业的贡献。在本章的框架下,我们指出概念性的和方法性的知识的关系是依赖于学习者在它们的表示之间所建立的联系。从数学专家的观点来看,数学的方法总是依赖于概念性地表示的原理。换句话说,所有的数学方法都是和联系着的信息网络有关的。譬如说,多位数做减法的方法是一系列逐步进行的动作,与之相伴的就是包含了等价性和重新组合的数学原理,有的时候是用丰富地连通了的网络来表示的。戴

维斯和麦克奈特曾经描述了这些网络内可能含有的信息,猜测到可能提供学生方法的那几类知识:作变动的知识,用特定的具体材料工作的知识以及求得数的近似大小的知识。如果学习的人把方法联系到它所根据的一些概念性的知识上去,那么这个方法就变成了一个更大的网络的一个部分,是和概念性知识紧密地联系着的。

把方法联系到概念性知识上去的好处一部分是所产生的灵活性。联系到网络上的方法可以获得网络内的全部信息。当遇上一些不同于原先(已学过解决方法)的问题时,有关的概念性的知识可能会发现问题之间的有用的相同或不同之处,从而可以对方法作适当的调整。这样一来,概念性的知识扩大了方法的可应用范围。

概念性的和方法性的知识之间的关系可能是从没有关系一直到关系密切到无法区分。从考虑所建立起来的联系的数目和强度可以得出关系的程度,然而关系的性质只用智力表示间的联系的理论概念是描写不完全的。再要充实概念性的和方法性的知识互相作用的方式,并描述它们的关系可以采取的形式,那就越出了本章的范围。

即使我们把问题从“哪种知识最重要?”改变成“概念性的和方法性的知识是怎样互相利用的?”之后,教师仍然要处理这样的问题:“究竟是先考虑概念上的关系还是方法的精通?”。留给教育家的的问题是“如何去设计学习的环境?”,对这些问题的不同的回答就会提出不同的设计。为了讨论的目的,我们集中在学校数学教学大纲的一个特别重要的特征上:“我们应该帮学生先建立起有效的记号运算方法呢还是先建立记号方法和概念网络间的关系?”

理论上的论证大多支持为了有效地执行,在练习各种规则之前,应先对书写的数学记号和规则建立起意义。虽说实验的数据尚未跟上理论的推测,提出问题的数据看来是主张:意义要先行于

有效性。有证据说明,处理符号规则已经很熟练的、不用费脑筋的学习者并不愿意把规则联系到别的表示式上来使得它们具有意义。譬如说沃恩(Wearne)和希伯特(Hiebert)曾报道过:五六年级的学生已经练习过关于小数加减法的规则(对齐小数点),他们比没有这种经验的四年级生更不愿意从使用十进计数块来表示小数的量和在量上的动作的教学中去获得关于小数的概念性知识。

这种倾向——一旦对方法熟练后,就不再考虑它们或再检验它们,而坚持使用这个方法,已经在几个不同的领域内被注意到有一段时间了。库恩(Kuhn)和费尔普斯(Phelps)观察到在做相当复杂的化学问题的学生,并注意到要使一些学生成为更好的解题者的最大困难是在于要放弃旧的策略。他们提示说,学生不愿意放弃熟悉的策略,特别是当他们并不懂得,因而不能认出它的不合适性的时候。几年以前完形心理学家为一可能有关的现象起名叫功能上的固定性。这种现象就是:在练习了一种特定的方法后,就让它固定起来,从而很难用另一种方法去思考问题的情况。

在认知科学的传统中,关于将熟练的方法隔绝起来的倾向,有关的现象可以用严密地联系着的方法性知识的不可接近性来作解释。安德森(Anderson)提出,知识首先是作为陈述性的知识储备起来的。随着问题获得解决,有的知识(片)就联系而成为方法中的步骤。在重复使用方法时,个别的知识(片)失去了它的身份而成了方法的一部分,也就难以去考虑个别的步骤。就像旗野(Hatano)提出的,把一个方法联系到概念性知识时,就需要把方法分解到各个步,以考虑它的组成。在分析珠算家所获得的知识时,旗野观察到“计算速度的加快的后果是牺牲理解和建立概念性的知识。把一个融合了的规则分解开来,寻找任何一步的意义是很困难的。”

总之,目前的研究是指向揭露概念性的和方法性的知识的关系。这比之以前要确定哪一种知识更重要有用处。在这一点上理

论和现有的数据都偏重于强调理解在技巧之先。按照本章的框架,应该设计教学的环境来帮助学生建立起方法的内部表示,使得它成为更大的概念的网络的一部分,然后才去鼓励对方法的重复实践。

**街道数学和学校数学** 最近有许多兴趣产生于发现从未上过学校的人可以成功地运用所发明的方法来解决日常的数学问题,而许多上过学的人也用不同于在校内学过的方法来解决日常生活中的数学问题。对这些发现的理解往往是相当部分的数学能力是在校外形成的,而校内的学习对解决实际问题并不是有用的。看来日常问题中的数学行为含有许多好的解数学题的方法的特征,但是值得考虑的是在表示和联系知识的框架内街道数学和学校数学的关系。

对学校数学较常有的批评是解题的方法的学习过于机械化。也就是说,在校中学到的方法往往不能被灵活地用于没有练习过的题目上,因此说是转换不好。我们曾经论证过,学生接触的问题的情况可能对他们的作业的内部表示加了限制。如果学校的教学计划只是提出用书写记号的作业而并不联系到其他的外部表示形式和问题情况,所获得的知识就会带有受限制的转换能力,因为内部表示是严重地受限制的。

校外的学习过程的性质就较难予以描述了,但是校内和校外学数学还是有些有趣的相似之处。街道数学的标记就是它被融入背景的性质。日常的数学作业是被嵌入到自然的和熟悉的背景之中,而完成任务时所形成的数学技巧仍然可以深深地留在内容之中。换句话说,像校内学的技巧一样,校外所学到的技巧也可以受到内容因素的限制。对这个假设所收集到的研究数据是混合的。譬如说,萨克斯(Saxe)报道说,巴西街上的小贩只有当数字是写在熟悉的纸币或硬币上时才认得。方法看来是受到熟悉的内容的限

制。施利曼(Schliemann)和卡拉厄(Carraher)发现有些施工头和渔夫能灵活地运用比例方法解出一些新奇的问题,而另一些却不能。并不清楚这个差别的原因,但是重要的可能是,成功的工人具有多年的运用特别的比例方法的经验。在这方面一个可取的结论是,学校数学和街道数学早期的学习大半是在内容上有限制的,且表现出有限制的转换。

有了上面的关于问题情况和内部表示的关系的论证,要为街道数学和学校数学的缺少转换作解释就比较直接了。在两种情况下,学生可能是通过有限制的和特定的经验来获取数学,所表示的数学概念和方法只是形成了小的、特定的内部网络,也并不被看成是和其他的信息或其他的网络有关系的。人们可以预测,如果孩子们的内部网络是同时在校内外建成的,又若他们能认清它们之间的联系,他们的理解和执行,在两种情况下,都将会有所改进。

这种论证还没有能很好地表明校内的和校外的学习的关系。有些学习者好像要把校内的和校外的数学联系起来,而另外的人则不然,而且所做的联系的性质还是不清楚的。如同前面提过的,有许许多多的迹象说明有许多人没有去做联系。有些情况下,在校学习数学的人支持更灵活地运用非正规的方法。亚乔里(Acioly)和施利曼报道过,在彩票经纪人中,上过学校的人对涉及打赌的新的问题的解决就比没有受过学校训练的人要好些,萨克斯发现校内学到的计算方法是影响了巴西糖果贩子们的价格对策的精通。反过来,有的证据也提示了,在校外获得的非正规方法也能使正规学校数学的获得更方便。萨克斯报道过,糖果出售人用了出售糖果时的那些对策,做某些学校作业时,就比非售货员做得更好些。贝布(Bebout)和卡彭特等人发现美国的一、二年级学生通过用计数的对策解决简单的加法、减法情节时,弄懂了代表加减情况的符号表示的意思。这些研究表明了,学习数学并非注定是一部分一部分分开学习的,内部表示间建立联系是有可能的。但是数

据还不足以指导我们如何去构成学习的经历,以便使校内外的学习能够有联系。

在结束本节的时候再来考虑表示的想法也许是有用的。在校外的非正式的情况下所用的数学是用日常经验、书面材料、物理对象、图画等在外部表示的。通常,表示街道数学时并不广泛应用书写记号。与之对照,学校数学则较多地依赖于书写记号来表示。在每一种情况下,本领是在各个表示形式下发展起来的,但是问题的情况并不鼓励人们去建立在不同表示法之间的联系。本章前面一部分的一个主题是数学的知识增长,并且随着表示法之间有联系而重新组成。到此为止,关于街道数学和学校数学的研究给我们得出的结论是,两种数学往往都是有限制的,因为两者都只利用了某种表示系统,并且创造了有限的知识网络。如果学习者能够建立起这些网络之间的联系,数学知识就将增加,并且变得更协调。组织起校外经验中的数学信息的内部网络将变得和校内数学网络更加融合。在一种情况下的问题的解答就能为另一情况下的问题求解提供资料。

**准备知识和当前的学习** 在认知科学中有一种说法,它几乎取得了公理的地位,那就是学生的准备知识影响了他们学什么和如何进行学习。奥苏贝尔(Ausubel)在他 1968 年的那本书的引言中说道:“如果我必须把全部的教育心理学减少到一条原理的话,我将说:影响学习的最重要的一个因素就是学习的人已经知道的是什么。”学生们用他们已经知道的去解释和对新的情况作反应。在我们的知识框架——作为内部表示的网络——内,可以认为学生已经建造的简单的知识量就是内部网络的数量,而对知识的理解程度就可以看成是这些网络的结构或粘合性。

与我们前面的论证一致的是,我们提出不仅仅是预备知识的数量,还有知识的结构都影响了目前的学习。换句话说,预备知识

理解得好不好,对学习的影响就不相同。这一点的理论支持就是前面已经提到过的论证。例如,对内部结构很好的信息,记忆就比对结构疏松的信息的好。当他们遇上新的有关问题时,学生对先前理解得好的知识就容易检索到。同时,理解是有繁殖力的,先前的理解得好的知识,在新的情况下,更有可能产生新的理解,也就比较容易建成在以前的知识和新的知识之间的关系。

考察学生现有的内部网络和新的信息之间的潜在的联系是一种看待是否准备就绪的方法。如果学生拥有很少某个领域内的知识,或者他们的知识组织得很差,他们就难于学习该领域内进一步的内容。只有当他们已有的内部表示使得新的信息可以联系上时,他们才算已准备好去学习了。当然学生也可以通过比喻或用其他的外部表示作类比等等使得能和有关的想法作联络,但是建立联系总是必要的。

多年来在发展心理学上的许多工作表明了我们准备就绪的讨论是不完全的。现存内部网络的数目和粘合性还不是唯一的重要因素,发展上的限制看来也是对学习新的材料加上的限制。

凯斯(Case)的上述理论是特别有关系的,因为它是基于假设:把个别的信息整体化和建立起内部联络的能力是个关键的发展上的限制。年幼的孩子就不像大一点的孩子那样能够把信息联络起来。发展促使形成更大更完整的知识网络。我们肯定承认学生能力上存在发展上的限制,即使我们并未强调过它们。

## 总结

数学知识的增长可以看成是构造信息的内部表示,进而把这些表示联络成组织好的网络的过程。对数学教育家来说,一个特别重要的问题是去获得具有理解的知识。在表示和联系知识的方面来看,理解可以看作确立关系和做成联络的过程,或是在已经内部表示的知识之间,或是在现有的网络和新的信息之间。当你接

受这样的描述时,无疑理解在数学的学习中有特别的重要性。即便我们已有了前面提到的全部赞成理解的理由,我们还只是刚开始觉察到它在数学知识的增长中的作用。

除了提供一种理解理解的方法以外,内部表示和联系的概念给数学教育界提供了一个思考各种感兴趣的议题的框架。概念性的和方法性的知识,街道数学和学校数学(非正规和正规知识)以及以前的知识对学习的影响等问题都可以就此来作讨论。不仅如此,讨论还提示了,这些问题也不是分隔的现象,而是从相同的基本的机制产生出来的不同的方式来标明认知活动。

在本章的这一部分,我们已考虑了这个框架帮助我们去理解学习中的一些关键的问题。在下面一部分中,我们还保持用这框架来考虑教学方面的理解。

## 以理解为目的的数学讲授

在理解力的培养应是数学讲授的基本目标这一前提下,理解力的特征描述的明显含义是讲授的设计应使学生建立起其间的逻辑联系。应如何设计讲授以达到这个目标呢?明显的是方法和概念不能作为孤立的信息片来教,而不够清楚的是什么样的联系最重要或是怎样的讲授方式能最有效地推进这些联系。不可能处理所有的可能的联系,而不同的讲授和研究方案则着重于处理不同类别的联系。我们首先考虑可能成为讲授重点的各种联系,然后考虑如何能帮助学生形成这些联系的问题。

### 构成联系的可供选择的框架

对于在计划数学讲授时哪个联系最重要的问题不同的观点提出了不同的选择。在各种观点之间作出抉择的一种方法是提出这样的问题:究竟是从学生已有的知识出发并着重于如何使知识得



以扩充,还是从分析在知识获得后如何使之联系并返回去研究决定这些联系的如何形成着手。虽然任一透彻的分析必然会联系到知识一旦获得后如何组织和如何使新知识与学生原先的知识相联系这两个方面,但不同的讲授方案可能与某一个方法更相一致。

此外,一些关于理解的基础研究工作由于其内在的原因只对一种或另一种方法有用。例如,有日益增多的研究证明小孩和成人从校外获得丰富的数学知识,他们能应用于解决日常情况中的各种问题。这项研究为建立学生的预备知识上的讲授提供了一个潜在的起点,但它没有提出如何使那些知识能最终地融合到一个完备发展成的网络中去;这个网络包括学校数学中的概念、方法和符号。此项讲授方法研究的应用将倾向于把重点放在与预备知识的联系上。此法被名之谓“自下而上(bottom-up)”法。

另一方面,专家-新手的研究一般地提供一个模型,说明知识一旦获得后是如何被联系起来的。虽然,其中不少的研究倾向着重于新手所掌握的知识的局限性;因而,要达到熟练主要是放弃新手观念而不是在它们上面建立的问题。此研究的最直接的应用是着重于知识是如何作为讲授的一种特定形式的结果而潜移默化地构成的。其目标是试图教会学生作出在专家那里所见到的同样的联系。此法可命名为“自上而下(top-down)”法。

自下而上与自上而下的区别不仅反映在作为讲授研究基础的学生的思想的模型,在被强调的数学内容的选择上也是基本的。然而结果尚未铸成白纸黑字,关于究竟讲授应着重于从给出特定的数学概念或方法含义的问题所导出的联系,还是讲授应基于数学结构的分析方面的讨论仍然不断地进行着。这一区分有一段长久的历史,而且是关于数学课程目标的问题的争论中心。杜威及布鲁纳的著作为一方,奥苏贝尔及加涅(Gagne)的著作为另一方的争辩是突出的。反映在《学校数学课程及评估标准》的介绍及《人人都会算》等资料中的现代数学课程改革运动,强调用问题内容去

建立意义,而 20 世纪 60 年代的课程改革则是以数学结构和严谨的分析为基础的。目前,大多数课程改革介绍对建立数学意义的问题内容发挥了重要作用,而有一些方法在问题内容的分析中更多地反映了“自下而上”法,而另外一些则较多地反映着“自上而下”法。

当前关于情景认知的讨论反映着前一种观点。布朗及其合作者认为,讲授不应立即试图将抽象数学概念及方法与一开始就给予意义的环境相分离。他们建议概念和方法是不动摇地和它们所处的内容联系在一起的。这意味着学习的环境应放在真实问题的背景中使它对学生有意义。通过对解题内容中概念和方法的学习,相信知识是联系着的,所以对解题是有用的。

维诺德(Vergnaud)所定义的概念域的概念也是关系到在数学抽象背后的问题环境。然而,概念域是通过一次自上而下的以一组相互联系的数学抽象所代表的问题和环境的性质的分析而给予定义的。这样对概念域的结构强调在许多方面和基于数学结构的一种分析是相似的。虽然概念域是以问题来定义的,但重点还是在那些基本的词义的性质上,这些性质定义了问题之间的相似和相异,而不是在问题的特定的内容上。

情景认知和概念域的原理并不一定代表如何组织知识或应当如何构成知识的对立的观点。对问题的环境如何与概念域相适合的分析能有助于识别使特定概念或方法就位的合适背景。此外,虽然概念域可以提供一個基础,以识别知识作为讲授的结果应如何联系起来,但概念域还可以为分析学生的预备知识提供一个基础。然而,依赖于究竟讲授的目标是由概念域的组织结构所驱动还是由对学生而言原来就有其含义的问题背景所驱动,可能得出根本上不相同的讲授方案,尽管它们自身的结构并不矛盾。

**例 1: 获得书写记号的知识** 卡彭特,芬内玛及彼得森一直

在研究如何在儿童入学前已掌握的非正规的数的概念和解题技巧的基础上,讲授基本的加和减的概念和技巧。对儿童的早期数的概念的研究,提供了一个反映在儿童对各种类型的文字题的解题中的加和减的概念和技巧的培养的高度的结构分析。此研究提供了许多进入一年级的儿童已能解出的问题的分类,一个儿童用于解答不同题目的过程的详细分析和一幅描述这些过程随时间变化的图解。有关此项研究的一些评述参见卡彭特、莫塞(Moser)、赖利等人的文章。

在卡彭特等人的研究中提出教师是以学生的非正规知识为基础,从学生所能解的题目作起点。学生在运用各种非正规的计算和建模方法去求解和谈论这些问题的过程花了大量时间。问题的详述的分析和儿童们的解答使教师能挑选和调整题目,以便让不同的学生都能接触到具有合理的验证力的题目。

通过对他们如何解题的谈论,儿童们学会了对解题方法的思考和对答案的阐述。儿童们用于求解不同的题目的建模和计数的策略就变得更易理解了。这样它们便可立即应用到各种问题上,而儿童们可把用于不同问题的策略联系起来。一旦儿童们的非正规策略成为容易理解而且成为讨论的对象时,便可引入符号作为表示儿童们已有的知识的方式。以这种方式,符号便和儿童们的直觉的加和减的知识联系起来了。

设计讲授使新的概念和方法与学生的预备知识相联系的一个意义是所教的内容和序列要选择恰当,使新知识与已经知道的知识直接地联系起来。引入加和减的符号意味着引人可供儿童们用于表示与他们的非正规策略,包括计数和用实物或手指建模相一致的问题的符号。试以下列问题为例说明之:

卡洛司有 4 美元。他还得赚多少钱才够买一只价值  
为 11 美元的小狗?

大多数一年级的儿童用模拟问题中所描述的动作来解答上述问

题。如果他们使用计数器,他们先做一个4个计数的集合,再在集合上增加计数直至总数达11,并数出7个加上去的计数便可求得答案。一个较不简单的方法是从4数到11,记下在数数过程中数了几次。譬如,小孩数到4,停一下,然后数5,6,7,8,9,10,11。从5开始每数一次就伸出一个手指。按伸出的手指的数目就得到问题的答案。这两种策略反映了问题中的联合作用并最直接地对应于不正规的填数式子  $4 + \underline{\quad} = 11$ 。贝布(Bebout)、凯里(Carey)和卡彭特、莫塞等人的研究指出,儿童们很容易学会写出填数式子,这正直接对应于他们用于解题的计数和建模策略。这项研究提出填数式子可用于帮助儿童建立早期算术符号的内在表述,又进而建立与他们关于数的运算的直觉知识的联系。

另一可供选择的方法是以数学结构为基础从自上而下分析开始。数学的一个有力的方面是在于这样的事实,一些看来不同的情景可以用相同的数学符号来作外部的表示。最终学生必须要学会不同的加法和减法的问题可以用正规的填数式子  $a + b = \underline{\quad}$  或  $a - b = \underline{\quad}$  的形式来表示。有些研究者认为儿童们开始应先用上述数句中的一种来表述问题;例如上述问题即可用填数式子  $11 - 4 = \underline{\quad}$  来表述。儿童们是用部分和全数来分析问题的方法学会把问题和填数式子联系起来的。4美元是11美元的部分;当你有一个部分和一个全数,你相减一下就求得另一部分。这一部分-全数分析提供了一个统一框架,把不同的相加和相减的数连结起来;这是以熟练的演算的分析为基础的,然而却与大多数儿童原来对这些问题的想法不相对应的。

建立内在联系网络的目标并不能解决究竟在课程中早些先介绍部分-全数分析,还是代之以从各种填数式子开始的问题。两种方法的目标都是连结知识,但它们从不同的角度操作。部分-全数分析提供部分-全数的统一模式,几乎所有的加和减的问题都反映进去了。这种方法提供了一种可以将看来似乎不同的问题互相联

系起来的图式。这一分析是基于一种自上而下的观点;这是熟练解题者能分析加法和减法情况的一个有效途径。讲授的方法主要是直接讲解熟练的操作者用于组织其知识的图式。于是,从开始起讲授就着眼于长期的目标。

填数式的方法则从另一方面开始;它试图把儿童们新的内在的符号表述与儿童们已经构成内在网络的概念和方法连结起来。重要的是如果儿童们没有一开始就在他们的非正规知识和书写符号之间建立联系,儿童们就可能建立两套算术体系,一套是在学校内操作而另一套则操作于现实世界,而且他们不会很快看到它们之间的联系。两种方法都意在帮助学生获得使问题互相联系的灵活方案,但他们是从非常不同的角度出发的。

**例 2: 主题的序列** 帮助学生把他们的直觉数学知识与书写符号联系起来是帮助他们把新知识与预备知识联系起来的一种途径。在帮助学生方面可考虑的另一个基于其现有知识上的因素是所教的各主题的排列次序。讲授的序列一般是在对学习某特定概念所需的知识和技巧的自上而下分析的基础上予以说明的。从学生的现有知识出发而不是从讲授的目的出发,讲授的不同序列就可能出现。

我们的第 2 个例子是说明学生的预备知识将如何对讲授的序列产生影响。麦克(Mack)在教六年级学生基本分数概念时,将分数的符号和运算与对学生有意义的问题中的非正规的分数知识联系起来。对背景条件作出如此的安排使学生开始与把单位分成部分并把各部分当作为整数的方式的分数问题接触。于是,问题的背景提供了一种途径,让学生能把分数的概念和方法与他们对整数的概念和方法的知识联系起来。儿童们在没有获得分数算法的详细知识时就能求解的一类问题就是用重新分组作减法,是通常被视为较难掌握的分数专题之一。然而,麦克发现学生能将需要

重新分组的分数问题与从现实世界背景所获得的知识相联系,并能运用这一知识来解题,虽然他们缺乏重新分组概念的正规知识。

六年级学生能通过联系从一条  $4\frac{1}{8}$  英尺长的木板上锯掉  $1\frac{5}{8}$  英尺的实际问题,来解出如  $4\frac{1}{8} - 1\frac{5}{8}$  这样的分数问题。学生们在正规地接受诸如等价概念之前已能解出种种此类的问题。当教了等价概念之后,它可以联系到为学生所创造并用于求解各种问题的非正规方法。分数的等同性提供了一种背景,并成为连结种种不同解题方法的统一构造。

作为对比,一个自上而下的分析可能提出可提供有理数的一个整体化观点的其他联系。有理数的一个完整概念涉及到若干个子结构的一体化,这些子结构包括量度、比例、商及乘法算子,它们全部纳入于一个较宽广的乘法的概念域的结构中。基兰提出了一种谱系结构,其中基本的子结构是分级集中,引向一个统一的有理数概念。贝尔(Behr),哈雷尔(Harel),波斯特(Post)及莱什(Lesh)辨识了一些基本的原理,像算术运算的不变性及合成、分解和单位的换算,将乘法域联系到其他概念域。这些分析说明了可作为讲授重点的明显的连结。例如,贝尔等人发现在大多数现行的课程中,分数的等价性是作为独立的专题。他们建议等价性应作为一个更一般概念的一个特例来处理,这个更一般的概念是指在运算对象的不同变换下算术运算结果的不变性。他们又提出布置给低年级儿童们的作业应要求他们考虑运算对象的变化对算术运算结果的影响。

试图以学生的知识为基础的危险之一是学生的不正规概念可能具有局限性。对学生原来是最有意义的问题情景可能不能提供一个足够充分的背景以造就一种对给定构造的完全理解。例如,一年级那样的儿童会产生一种乘法的初步理解是把它当作为一组含有同样数目物体的集合;而到三年级时,就是这些相同的学生把

乘法与重复相加相联系。这种狭隘的乘法概念不能推广到分数和小数,因而就引导到“乘法总是变得更大”这样的错误概念。尽管对学生思想的仔细分析是麦克的教学的推动力,她始终注视着必须建立的更宽广的一组联系从而能避免这些隐患;所建立的这组联系使学生对有理数能有一个完整的理解。虽然她给学生做分块问题使他们能联系到整数分块和分类情况,她逐渐地把问题情况扩展到在乘法概念域中所代表的大多数问题情况。

以一个自上而下分析为起点的危险在于讲授将不接触到学生已经知道的内容。学生时常建立算术的不同系统——一个他们用以求解对他们有意义的问题的不正规的系统,以及一种包括他们应用于在学校中给予他们的符号或模拟情节问题的方法的学校算术——互相独立地运算。20世纪60年代的课程改革强调以结构来建立理解,但是这个自上而下分析并不接触到学生已经知道的内容。因此,学生们对于与正规数学结构相联系感到困难。

为课程设计而采用基于概念域的更进一步的自上而下分析,并不意味着初始的讲授不考虑学生在参加时的知识。一个概念域的分析可提供一个框架以分析学生们在该领域的初始知识的力度和限度。虽然贝尔等人建议对基本原理的及早重视以便对乘法概念域提供一个结构,但他们并不赞成把这些结构强加于处于并不理解状况的学生们。他们宁愿要选择体现在概念域的基本原理方面对学生有意义的这种状况。为了选择能包括对它作出表征的关键性情景,对概念域的透彻理解是必需的。

在讲授的最终目标或讲授要触及学生现有概念方面,两种方法之间并没有很大区别。然而,由麦克所阐明的“自下而上”方法可能在有些方面较为灵活,它包括所遇到的问题情景的次序和在讲授的早期如何建立联系。学生们可以挑选对他们觉得有意思的问题的内容和解释,同时,在如何建立联系方面给予他们一定的回旋余地。由贝尔等人所阐明的“自上而下”方法,则更多地关系到

学生们的理解反映着在每一教学阶段中的概念域的关键参数。

**例 3: 学到计算方法** 关于多位数算法教学中不同观点的第 3 个例子。假设学生们学到了许多为解决现实世界中的问题的非正规数学,则试图建立在学生预备知识基础上的许多讲授实例求助于现实世界环境中的固有知识的情况就不足为怪了。我们认为对预备知识问题的关键并不在于它是否是以现实世界问题的固有知识为基础,而是在于它是否对学生有意义。如果符号知识本身是富于联系的,则学生们是可能扩展更抽象的符号知识。在学会正规算法之前学生们所发明的求解各类计算问题的方法,可作为学生们所作的此类扩展的一个例子的说明。下面是一个一年级学生如何作  $246 + 178$  的例子:

噢! 2 加 1 等于 3。因此我知道那是 200 和 100,而且应该是 300 多。再来加几十,一个是 4,一个是 7……噢,嗯,从 70 开始,80,90,100,对吗? 那是 400 了。因此你已经有 300 多,因为是  $(100 + 200)$ ,而现在已是 400 多了,因为有  $(40 + 70)$ ,但还多了一个 10。因此,300 加 40 再加 70,将得到 400 又 10。但你还未完成,还要在 10 上再加 6,等于 16。另外还要加上 8,17,18,19,20,21,22,23,24。那就是 124。我是说 424。

开始打算发明多位数运算方法时,儿童们必须运用位值的知识,因为他们没有可凭借的算法。这就促进了位值概念和多位数运算之间的联系。一旦学生们在构造他们自己的解多位数问题的方法已相当熟练时,即可引入标准算法作为一种更有效的方法而把这些步骤放到一个更系统的方式上。这样,标准算法就通过所发明的方法与位值的概念联系起来。

另一种赋予算法意义的方法是帮助学生们把符号算法与其他对学生有意义的外部表示相联系;这些外部表示通常是包含位值



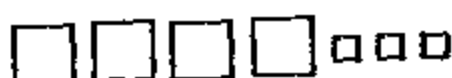
原理的实物材料。代表位值的最常用的材料之一是一些十进制计数块。正如我们早些时候所指出的,这种计数块提供实物代表,直接地对应于我们的十进制体系的书写数字。利用这种计数块,可把以学生们的早有的连结和分开物体的知识为基础的“自下而上”方法与位值原理和在标准算法中所包含的步骤的“自上而下”分析相结合。因为这种计数块仅仅是以特殊的方式汇集起来的计数器,它们可以像任何其他计数器一样结合起来或分隔开来以解算题目。虽说这些计数块并不是学生在校外自然地碰到的或者他们自己发明的,但是它们是专门设计制造的,能包含基本的位值原理,并能以与加法和减法计算中的步骤直接相对应的方法进行操作。把算法中的每一步骤联系到计数块的相应操作,即可为运算步骤赋予含义(见图 4.1)。对学生们而言,因为运用特殊设计的材料,可造成明确的联系,这方法在促进发明的方法和允许学生们的注意力投向潜在联系的范畴之间形成了对比。

**向高级专题的扩展** 我们所列举的三个建立在学生原有知识上的讲授的例子涉及了算术概念和运算。许多对非正规数学的研究涉及到算术概念和方法,而大多数着重于学生们的原有知识的初步的教学法研究反映了这个重点。然而,这一方法是否只局限于初等数学概念和方法的问题就提出来了。可以论证,高等数学专题的结构是从形式分析导出的,而仅具有有限的知识基础的学生很难在此基础上建立更复杂的数学概念。

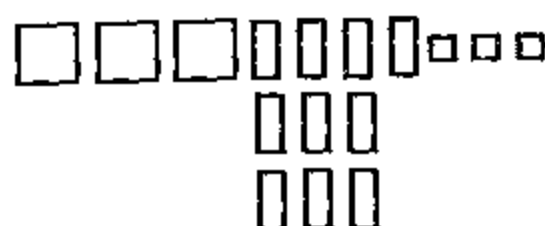
许多关于原有知识对学习高等数学专题如比例推理和代数的影响的研究工作,分析了如何从算术带来的原有知识在向更高级的专题作一般化时引出了错误的概念。然而,戴维斯的研究工作,作为“曼狄逊计划”的一部分,却阐明了通过扩展学生们的算术的知识,一定数量的代数的高级原理被发展起来了。

大多数的阶段理论,诸如范希尔(van Hiele)及凯司(Case)等人

问题:  $403 - 156 = \square$



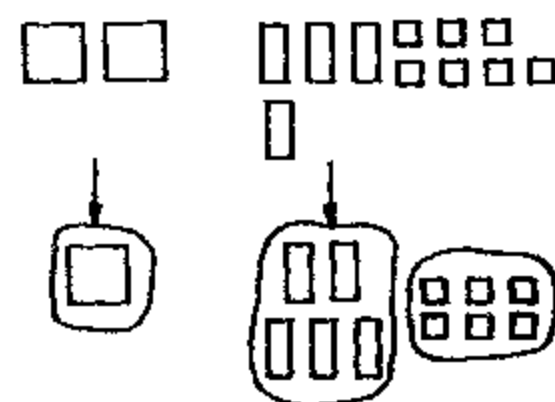
$$\begin{array}{r} 403 \\ -156 \\ \hline \end{array}$$
 儿童用计数块来代表 403, 并用竖式写出题目。



$$\begin{array}{r} 3\overset{1}{4}03 \\ -156 \\ \hline \end{array}$$
 儿童重新分组, 将一个代表 100 的大块换成 10 个代表 10 的中块, 并用符号记录。



$$\begin{array}{r} 3\overset{9}{4}03 \\ -156 \\ \hline \end{array}$$
 儿童将 1 个代表 10 的中块换成 10 个代表 1 的小块, 并记下这个兑换。



$$\begin{array}{r} 3\overset{9}{4}03 \\ -156 \\ \hline 247 \end{array}$$
 儿童移去 6 个代表 1 的小块, 5 个代表 10 的中块和 1 个代表 100 的大块, 并记录答案。

图 4.1 用十进制的计数块解一个减法题

的工作,都是基于这一大前提:学习高级的专题在重要方面是建立在学生原有的知识上。更高级的阶段是以认识和构成越来越复杂的联系的能力为特征的。凯司的研究工作提供了为构成联系的“自下而上”方法的又一例子。他建议可以用概括在讲授次序中的自然发展阶段来形成有效的讲授程序。可以从较早些阶段所要解决的问题开始讲授,并相继引入要在稍后阶段解决的问题。例如,他制订了一个讲授比和比例的程序,是从涉及能被学生用整数运算即可解出的整数比的问题开始的。需要更精确方法的一些问题是在教完比和比例问题的一般运算方法之前分阶段地予以介绍。

对更高级的专题当然需要更多的研究,但是,怀疑高等数学教学的有效程序可以通过系统地建立在学生现有知识之上而发展这样的假设还为时过早。

### 使联系明确化

正如要解决联系应成为讲授的焦点的问题一样,从讲授应促进联系这样的大前提出发,并不能为讲授应如何帮助学生建立那些联系提供明确的指导。中心问题是在具体说明联系时讲授应明确到什么程度。有两个问题应予阐明:对学生是否要把联系明确化以及是否有特殊的联系要教给学生。关于前一个问题,一般认为数学概念之间的联系应予讨论,并应鼓励学生去考虑它们。这并不意味着教师必须记住这些特殊联系,这些联系可以由学生去产生。在前面讲到的一些建立在学生原有知识上的例子中,一开始由学生谈论他们的非正规策略以便让他们意识到他们的原有的非正规知识。协作小组或全班讨论能为学生提供描述和解释他们的已形成的联系的机会。

我们对理解作为联系的概念能提供一个框架以研究不同的教学和分组实践对培育学生的理解的效果。最近,关于学生学习小组内相互影响的作用问题已进行了不少研究。虽然看起来通过与作业有关的互相影响可提高成绩,但哪些因素能为学习作出解释仍不清楚。需要有更详细的观察和评价办法以便能拣选出学生相互影响的重要认知特征。由于讲授提供机会让学生把联系弄明确,研究在师生间相互影响过程中什么样的联系变得明确,以及评价作为教学活动的结果,学生作出什么样的联系,可能有助于我们去搞懂特定的教学程序和特定的学习结果之间的关系。

对上述两问题中的第二个问题看法较不一致:我们能否认定一个事先特定的联系作为讲授的目的呢?要认定特定的联系作为讲授的重点有两条假设:(a)只有对课程很熟悉的个人所作的关

性的联系才应使之明确化,(b)明确化了的联系被学生内在化了。早些时候我们讨论了几种知识如何能内在地联系起来的观点,其中之一涉及一种谱系结构,而另一种类似于网络。既然联系是谱系的,就有可能认定向一些有关概念提供结构的关键结构;这些关键结构能提供一个协调的重点来组织教学。可把学生的注意力引向这些关键结构和特例或具体例子之间的关系上来。例如前面讨论过的部分-整体模式,可使许多加法和减法的可替代的概念融合一体。另一方面,类似蛛网的结构则描绘成一个联系的复杂网络,这种联系的复杂网络是如此的丰富和风格独特,以致不太可能作为明确讲授的选材。虽然我们不能期望在讲授中使所有可能的有成果的联系都明确化,但不同内容范围的结构专家-新手研究及理论分析,已认定了关键结构或者将主要概念和程序组成块的方法可为讲授提供一个明确的结构。

去假定明确地教给学生的联系被他们内在化了这一点是更成问题的。明确地讲授联系的潜在危险在于所需要的使联系明确化的信息将被内在化为另一片孤立的知识,而不是去支持有用的联系的结构。例如,讲授位值时常包括使用扩展的记号( $500 + 70 + 6$ 代表 576)。此方法的一个基本原理是扩展了的记号有助于为数与实物表示(如十进制计数块)建立联系(见图 4.1)。然而,理解扩展的记号需要具有大部分与理解标准数字同样的知识,而且扩展的记号还包括一些附加的复杂性。年幼的儿童一开始并不感到这种扩展的记号容易理解。除非尽力在不同的符号的和实物表示之间建立联系,否则会有这样的危险,即扩展的记号将成为供学习的另一种孤立的观念,而且它会实际上干扰培育理解。

另一方面,有可能论证学生们在建立联系时,他们可从明确的指导中得到益处。如果没有给学生以足够的引导,则他们将只着重于表面的联系,这种表面联系与熟练的演算以及中心概念的理解所需要的联系是不相对应的。如早先所指出,学生往往在一个

过分限制的范围内建立联系,而且所建立的联系是不合适的或不会产生效果的。

结果不会归结到究竟以理解为特征的学习是否需要使特定的联系明确化。研究人员在采用某种方法时应该明察该方法所根据的假设,以及可能产生的潜在益处和错误概念。通过仔细地考察如何设计讲授以促进联系,和仔细地评价学生作为结果所作的联系,我们可以着手去培育一种原则的基础以理解不同讲授模式的效果。

**特例** 明确地讲授特定联系的问题并不是新事物;在本世纪60年代中的关于发现性学习和有意义的解说性学习的争论中已有所反映。奥苏贝尔的著作的中心前提是讲授开始时应先指定主要概念是如何相互联系的,并和学生们所已经知道的内容相关联,而布鲁纳则认为通过解题而发现关键的关系,由学生们自己构成联系,从而可获得解题用的相关知识。

重点已经有所转移,以致研究人员不再把在学习数学中向学生提供的指导水平作为基础的教学程序作比较。当然,研究及讲授的不同程序常常以不同的假设为基础,这种假设关系到对学生而言究竟是否合适或可能去认定联系。在关于物理学专家们的知识是如何联系起来的著作中所包含的内容是为学生认定联系的一个例子。拉金(Larkin)、西蒙(Simon)、麦克德莫特(McDermott)等人发现物理学专家们把他们的物理学原理的知识组织成块,这种对原理的组织是以一种不同于标准物理学教材的更高层次的原理为基础的。例如,专家们并不把有关斜面的全部原理内在地表述在一个单一的网络中,有关滑轮的全部原理在另一个网络中。恰恰相反,他们是根据不同物理内容之间的关系这样的方式来内在地组织这些原理。这一研究提出采用更直接对应于物理学专家们组织他们知识的方式的物理学课程作为一种可选用的组织方法也许

是合适的。由专家们连结成块的许多原理将以某种相近的关系进行讲授,于是对学生们来说这些联系的性质就变得很明确了。

重要的是要注意到是否要设计讲授以促进特定联系的问题并不等同于“自下而上”或“自上而下”两种建立联系的方法之间的区别,尽管专家们的知识的研究早些时候曾作为“自上而下”方法的例子被讨论过。建立在学生们的原有知识上的讲授也能被构成来培育明确的联系。使非正规知识与数学的符号及方法之间的联系明确化的一种途径是让教师允许或推荐直接对应于儿童用于解题的非正规策略的符号表述。利用非典型和典型的填数式子以表示加法和减法问题的情况阐明了这种方法。

把符号表述直接地与学生的非正规知识相联系的另一种方法是形成实物表示,此类实物表示与作为讲授目标的抽象符号和方法有着突出联系。十进制计数块即为此类代表物的一个例子,但是用十进制计数块的讲授在怎样明确地表达联系方面并不全是同一种类型的。例如,可以用十进制计数块明确地表示实物材料的操作与计算算法中的步骤之间的对应。仔细思考一下图 4.1 中所说明的整数的多位数减法的教学方法,先用较大的块来代表大数目,为了相减,必须要有 1 化为 10 的兑换,以便能有足够的小单位可以从中拿掉 6 个。这个兑换就对应于重新分组或减法运算中的借位,在用块进行兑换时都注明了相应的重新分组的记号及其书写符号。于是,块的兑换就直接地映射到符号算法中的步骤。这一过程,由于更明显的理由被称之谓映射教学,是在算法讲授中常用的,并为富森(Fuson)及雷斯尼克(Resnick)等人的研究工作中阐述过。对此法而言,其关键在于材料的制作应能使解题所必须的操作与所要学习的算法中的步骤相对应。

沃恩和希伯特建议另一种可帮助学生们把符号算法与十进制计数块算法联系起来的方法。他们把符号与相关对象的联系分开,并把符号处理方法的产生和精心计划分开来。他们赞成帮助

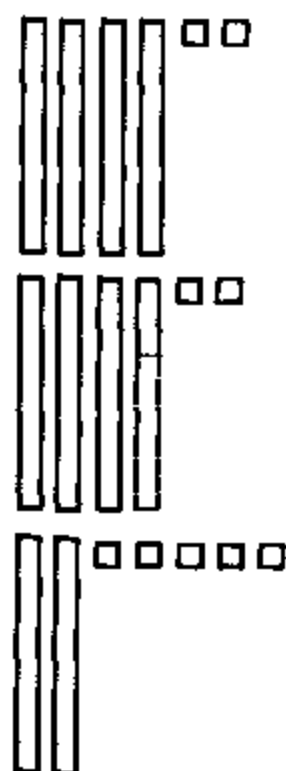
学生通过与相关对象建立联系来确立符号的意义,然后鼓励学生运用这些符号的意义去培育操作符号的方法。通过发展以前构成的符号方法产生出更复杂的算法。换言之,算法步骤是通过把它们与符号的意义及与已建立的更简单的符号方法联系起来而学会的,而不是直接把它们联系到相关的物质对象。在应用这一方法的过程中,沃恩和希伯特用十进制的计数块教给学生们初始的小数位值概念。鼓励学生用位数值作为引导做小数的加法和减法。这些计数块不是作为操作的工具来表达计数块的操作和符号的加减运算之间的步步对应,相反,推动学生们把他们的符号方法与他们已掌握的位值概念相互联系起来。

沃恩和希伯特的方法要求符号及初始步骤的意义建立在能支持产生复杂方法的水平上。作为对比,对某些映射教学研究,只在开始时试验性地学习基本的符号的意义,而以学习复杂的符号操作过程作为映射教学的一部分,通过这部分的学习,使符号与所指对象之间的联系牢固地同时建立起来。

可以用除了十进制计数块以外的物质材料帮助学生为计算算法创造意义,而且这些材料的使用方法在联系的明确性方面提供了进一步的对比。例如,图 4.2 所示解题方法说明了年幼的儿童用固定单位方块(Unifix cube,以下简写作定单块)求解所给问题的方法。儿童通常是将 10 分开而不是把一个“10”兑换成 10 个“1”。这方法是非常不同于映射教学的,因为在这些定单块的操作和标准算法中的步骤之间不存在直接的联系。定单块可以允许有多种不同的解题方法而十进制计数块不能被分开并更多地受到限制。这些限制能与映射教学相适应,其中有一种特定方法来使用计数块从而使与算法的联系变得明确。用定单块也可以有同样的操作,但是当多个解题方法是可能的话,教师们往往不会把重点放在定单块的作用和符号算法中的步骤之间的明确联系上。

关于不同方法的结果方面有一些基本问题应予以注意。例

问题 42-17



儿童把定单块联成 10 块  
长的长条从而构成 42。

儿童从其中一条长条中  
移去 7 方块。

儿童再移去一个长条并把  
3 个连在一起的方块分开，  
然后点清条数和方块数。

答案：25

图 4.2 用定单块解减法题

如,作为映射教学的结果学生们形成的联系是否限制于在讲授中所特定的明确联系?联系能否灵活地予以应用,或者它们只是代表那些必须一步步执行的过程?人们可能关心究竟学生能否将用定单块的操作与对应于他们的物理操作的特定符号方法相关联。在这两种情况下,我们应该关注学生如何将他们所作出的联系一般化,并将它们扩展到一些不熟悉的情况中去。例如,如果学生已通过映射教学或其他一些可替代的方法学习了加法,他们能否立即把他们的知识适应于减法问题?他们能否把他们已学过的符号方法扩展到尚不具备物质代替物的较大的数值?关于符号方法学生形成了什么信念以及他们对它们的理解能力如何?

如何运用物质材料以发展理解上的不同并不是仅仅以那些物质材料的性质为基础的;在如何能运用这些材料使联系明确化方面也有许多重要差别。如早先所述,对的理解所运用的材料的影响可能与它们应用的环境以及学生与材料互相作用和材料自



己的相互作用的方式有很大关系。我们已认识到应当考虑的一个重要的可变因素是在材料的特征与符号表述之间学生所引出的联系的明确化的程度。

**错误概念** 虽然我们对此问题的讨论是假定了联系知识是有益的,学生的错误和错误概念也可以从所形成的联系来理解。对学生在算术和代数中的错误的分析提示了他们的错误常常是由于把学过的方法错误地扩展到新问题的情况所造成的。事实上雷斯尼克、内舍、伦纳德(Leonard)、马戈恩(Magone)、奥曼森(Omanson)和皮莱德(Peled)认为,这些错误是把新方法 with 已有知识统一起来的尝试的必然结果。因此,问题并不在于从其他知识分离出错误的方法,而是缺少了弄清错误性质的关键性的联系。

许多对学生的错误的研究试图用辨知识能否联系起来的特定途径来解释这些错误。例如,对学生在十进制分数上的错误的研究指出,其中有些错误是由于把整数的规则应用到十进制分数而造成的;另一些错误则是因为学生试图将常用分数符号的规则应用于小数符号而出现的。这两类不同的错误产生于两类不同的联系,因而认为需要有不同的讲授方法去纠正这些错误。

对学生的错误的研究的一个可能的含意是可以设计教学方法直接提出错误分析帮我们诊断特殊的缺陷。换句话说,对学生错误的研究使我们有可能辨认出学生知识联系方式上的特殊缺陷,从而可以设计讲授方法提出学生所缺乏的特定的联系或者指出为什么某些联系是不合适的,把有关特定的联系对学生讲明确。

学科教育的研究人员认为必须直接提出学生的特殊的错误概念,否则的话,即使他们学习了与错误概念相矛盾的科学原理,学生仍然会坚持这种错误。除非迫使学生去明确地面对他们的错误概念与所学过的科学原理之间的矛盾,否则这种联系就不可能建立,而错误概念与科学原理可能会像知识的孤岛那样地共存着。

在前面我们曾论证过,许多数学中的错误可能是由于学生试图在过于限制的领域内建立联系造成的结果。例如,整数规则错误应用于十进制分数可以理解为学生们把十进制的计算与他们所已经知道的某些东西联系起来的试图,而他们所寻找的最初的范围就是整数符号方法。对小数符号有意义的对象的相关领域也许是得不到的。这个解释提出一个有些不同的教学方法。讲授应着眼于把学生寻求范围的界限往后推而不是把重点放在学生的方法的特定缺点上。其目标应是帮助学生们把整个小数方法而不是某一特定方法与其他领域相连结,并鼓励他们建立通向多种网络的联系,而不是仅仅与整数方法的联系。因为有了多种联系是重要的这样的假设,而且还假设不同种类的联系可能是同样合适的,这一方法对特定的联系可能是不够明确的。

## 评价

我们对理解的描述不仅对讲授有密切关系,而且对讲授的有关结果也有密切关系,譬如应如何评价讲授的结果。教育中的最紧迫的问题之一是培育评价高层次思想的方法。虽然某些进展是明显的,但教学实践和关于教学的研究两者都由于能获得的成就的狭隘评价标准而受到限制。为了理解而教学的研究的重要进步取决于一个关于理解的好的评价标准,以便可以对讲授的特定结果作评价。强调理解的课程计划的广泛执行方面取得的进展决定于能够为这样的计划的结果提供文件的证明。

理解在数学课堂上成为如此难以表述的目标的一个原因可能是对理解的评价不是那么直截了当的。因为大多数关于理解的理论或模型,包括本章中所用的框架,是建立在人们头脑的内部活动上,它们不能被直接观察到。其结果是,估量理解竟成为一种高度推断性的工作。就是说,由于理解不能被直接地估量,它需由估量者作推断。而且,理解通常也不能从一件事的一次反应作出推断;

任何一件事可以不理解但完成得正确。于是,需要有多种多样的工作来产生行为证据的一个轮廓。所有这些复杂性给评价理解带来困难。

在一定的限度内,对学生的错误的分析提供了对理解的一种观点。学生的错误的理论分析为认定学生的理解的具体限度方面可能提供一个基础。通常可以从已经或尚未形成联系来分析学生的错误,所以一个方法错误的分析可以提供关于理解的具体限度的见解。例如,许多关于分数的计算错误可解释为把整数规则连结到分数符号。布朗及范莱恩(VanLehn)提供了造成儿童减法中犯特定错误的特殊规则的一个条理清楚的分析,而马茨(Matze)把许多方面的代数错误联系到对分配律的过分一般化。

通过对学生的错误的分析来评定理解的具体界限要求用不同于多数标准测验中所用的方法去处理上述错误。与其注重于一个整体的成绩,还不如注重个别错误的模式;关键在于应考虑错误的性质,而不只是考虑学生是否错了某一项。虽然这些项目应当仔细地挑选和组合,以便评价可能产生的错误概念的范围,但是用于错误分析的个别项目往往相似于多数标准测试中的测定常规方法的项目。结果是,有几个好的例子可以准确地诊断出学生的错误性质并认定出他们的理解的具体限度。这样的测试对教学和研究两者都是有意义的。雷斯尼克的研究表明,对学生的错误的仔细诊断提供了在讲授前学生知识的一幅线条清楚的图画以及作为讲授的结果它又是如何地变化的。

错误分析的局限性在于它只能提供图画的一部分。错误可能包含着缺乏理解,但是在大多数诊断工具上某类项目的不存在错误并不意味着存在理解。理解包含着联系良好的知识,这一假设提示我们应该试图从测定知识是如何联系起来的去评价理解。可能有几个联系可以评价,而这些联系一般地对应于作为可能要提到的讲授的部分内容的几类联系。事实上,理解的评价可以依赖

于讲授以及谈论联系所产生的语言。

联系的一种可供评价的类型是符号及符号方法和对应的目标之间的联系。例如,可以要求学生用适当的物质代表物去证实符号方法,然后去解释他们的符号方法是如何对应到物质对象的作用上。在评价这些联系时有几个固有的困难。一般说,学生应对物质对象有一定的熟悉方能对某项评价工作有取得成功的合理的可能性。许多诸如计数器、钱币之类的可作为对象的东西对所有的学生都熟悉,但一些特别制作的代表物则可能不熟悉。此外,除非学生在使用和谈论材料方面有经验,否则他们可能不知道对它们有什么希望或用什么样的语言来谈论它。如果对他们讲清了任务,他们可能会去建立适当的联系,但是在一个测试的情况下,他们可能不会很容易地做到。这对教师在讲授的情况下评价学生的理解是不成问题的,但是对更标准化的测试可能是一个问题。

评价符号与对应物体之间的联系的第二困难在于并不总能讲清究竟是否存在有意义的联系,或者学生只是简单地应用一个他们从讲授中机械地学到的方法。学生能学会操作物质对象的一系列步骤,并完成与此对应的符号操作。为了确定这些操作反映了理解的某个水平,必须确定学生在建立适当的对应时具有某些灵活性。

可能评价理解的另一类联系是符号方法与非正规解题方法之间的联系。科布(Cobb),埃尔凡格尔(Erlwanger)及劳勒(Lawler)等人曾记录下学生如何会看不清同一问题以不同条件表示时的不同解法之间的关系。书写符号与直觉知识之间的联系可如此作评价:从可以引出不同解的情况提出问题并要求学生讨论这些不同解之间的关系。例如,可向一个二年级的儿童提出用竖式计算  $38 + 6$ ,并要求解出包括相同的加法的应用题。前一种情况是有意引出学校方法的答案,而第二个问题则是要用从 38 开始以数数的方法来求解。一次对儿童如何觉察这两个解答之间的关系的讨论

即可提供关于学生如何联系符号方法和直觉计数和模型方法的洞察力。

要进行评价的第三种类型的联系是符号系统内部的联系。了解此类联系的一种途径是去评价学生们是如何把他们已经学到的方法扩展到一些超出他们已经直接学过的内容。例如,对已经懂得百分小数记法的学生们,可对他们把这一知识扩展到千分小数记法,比较和排列小数或者将小数表示成分数的能力作评价。

我们不敢擅对评价问题提出解答而只是提出我们所建议的框架,特别是对表示之间的联系的概念提供了关于评价理解的一条思路,并提供构造有用作业的一般准则。正如我们在本章开始时所建议的,想象一下学生们用以相互作用的外部表示与他们所创造的内部表示的形式之间的一些对应是有用的。在培育理解时,认识外部表示之间的联系可能促进对应的内部表示之间构造联系。也许考虑评价作为这一过程的逆转是有益的。通过让学生把它们反映回到外部表示之间的联系中去,内部联系可被提供出来。显然,测试理解的作业必将以某种方式去检测学生已构成的联系。此类评价工作的例子正在增长。此类著作包括索德(Sowder)的数的方向的探索,马歇尔(Marshall)的关于评价知识模式的论著以及科列斯(Collis)、龙伯格(Romberg)和朱尔达克(Jurdak)等人的关于评价数学解题方法的技巧的讨论。在上述每项论著中,评价是直接建立在特定的认知研究和与在此领域中用于解题的内容和过程有关的理论之上的。

这些评价提供了一个与现行的标准测验不同的学生成就的图象。这些测验不是用单一的成绩来测量理解而是提供一个沿着对评价的理论中被视为关键方向的理解的轮廓。这些条目不是从具有相似心理测量性质的一大集合的条目中抽样出来的;而是从一个对理解关键的特性所定义的一个多方面的领域内挑选出来的。在此类评价工具的结构中所包含的结果的讨论可在亨特尔(Haer-

tel)的著作中找到。

最后,重要的不仅是学生已经构成为理解他们已经学过的材料的关键的联系,还在于学生对培育形成新联系的能力和争取理解新材料的益处的认识。这些重要的目标也是我们在计划评价时必须考虑的。

### 为了理解的教学和教师们的理解

我们对理解的分析扩展到教师和学生,包括他们的教育知识和数学的知识。这意味着我们要关心教师的知识是如何联系着的。我们鉴别了讨论为理解而教学生的同样的基本论点也可用于帮助教师去执行为在学生中间培育理解而设计的教学计划的问题。

教师对学生和教学拥有许多直觉的知识,但是那些知识常常没有很好地联系起来。如卡彭特、芬内玛及彼得森在早先所描述的研究工作中考虑了帮助教师把他们的知识联系起来并加以发展的作用。在教师接受的教育和作为结果,他们在课堂上实行的讲授之间存在着直接相似之处。运用儿童解题的录像带,教师就有机会进行讨论并把他们关于学生的思考的知识弄明确。在儿童中间培育加法和减法的概念的研究提供了一个基础来组织这个知识并使其具有连贯性。这个研究提供了一个框架,可用少数几个基本原理在各种题目中间加以区分,而儿童们的解题策略则直接地与这一分类方案关连起来。这样,教师建立起一个把他们的数学知识和他们对学生的思考的知识综合起来的的原则的框架。

科布、亚克尔(Yackel)及伍德(Wood)等人先后采取一种建立在教师对学生的思维的知识的相似的方法。然而,他们开拓特定教材供教师以特定的方式用于儿童。应用这些材料与生相互交流的过程中,教师不得不检查自己对儿童的思维的知识。

关于是否使联系对学生明确化的问题与我们的关于学生的理

解的知识是如何演绎成提供给教师的教学程序也有等同之处。一种可能性是向教师提供一些从研究学生和(或)专家的实践而导出的原理为基础的明确化的教学程序。例如,在富森(Fuson)和布里亚斯(Briars)在关于探讨用映照法讲授多位数减法算法的研究中是这样写的,为教师提供特定的教学活动并推行在职的培训计划以说明如何使用这些材料。虽然教师在理解映照教学所包含的原理方面获得帮助,但计划的性质则要求以特定的方式来使用材料。

尽管科布等人的讲授计划是以结构主义原理为基础的,他们也为教师提供了明确的教材和将学生成对分组的特定方针,然而,在这种情况下,给予了教师在如何使用材料方面很大的自由度,因而这些材料和活动只是作为帮助教师理解学生的思维的一种途径。

在向教师提供明确的教学活动的连续体的另一头是卡彭特、芬内玛和彼得森的研究工作所阐明了的方法。根据关于教师的思维和决策的研究,这一计划是从假设教学就是解题出发的。卡彭特、芬内玛和彼得森鼓励教师去设计他们自己的教学活动,并使讲授适合于他们自己对学生的知识和能力,这知识和能力是以他们从计划中获得的关于儿童思维的一般知识为基础的;而不是向教师提供为培育理解而设计的特定活动。

在上述例子中所阐明的区别并不是机械执行和有意义执行之间的区别。我们的基本假设是在任何复杂领域内的有技巧的执行都需要理解。课程执行的成就的研究和分析已把教师试图执行他们所不理解的教学计划中所发生的种种问题记录在案。从长远来看,任何一个讲授计划都需要有教师对数学和教学的理解才能取得成功,而这里所讨论的所有方法可以用一种独立思考的方式去执行,目标是帮助教师理解一些可替代的讲授计划。

## 关于理解研究的本质

我们的大前提——理解对学生和教师两方面都是关键的——可推广到研究过程。这一推广应用于两方面。其一,正如我们所深信的对来说来说把他们正在学习的东西联系起来是重要的,而对教师来说,建立有联系的连贯的教学知识结构也是重要的,我们也相信对从事数学教学研究的人来说,考虑他们所研究的现象之间的联系也是重要的。研究人员需要不断地寻求在他们自己工作的不同方面之间的关系以及他们的工作和其他工作之间的关系。找出几个领域之间的关系或联系就意味着建立理论。其二,接受理解对学生和教师都是重要的这一大前提应对研究成果的内容产生影响并应决定开展研究的方式。

### 建立数学的教与学的理论

我们在这里所用的理论一词是指我们对事物如何行动的解釋。它们是使关于如何教和学数学的假设和大块文章明确化的产物,也是使关于在教和学过程中的重要特点和关系的个人直觉知识公开化的产物。它们是我们已构成的联系的种种陈述。

给出了这一定义后,所有的研究者都从理论开始工作,虽然这些理论可能是很局部和隐含的。所有的数学研究人员都是在关于学生如何学和教师如何教数学的假设、直觉和假定下进行工作的。这不是一个我们是否发展理论的问题。既然盖奇(N. L. Gage)在《教学研究手册》中已把它载人,每个人都有理论而“差别不在于他们用不用理论,而在于他们对所用理论意识到的程度”。建立理论的过程是把指导我们工作的隐含的假设明确化的过程。

从科学的历史和基本原理看,对发展明确的理论方面,理论是否正确,理论的真理是否能建立或取得同意等等有咄咄逼人的争



论。理论是那么重要的理由是由几个令人感兴趣的类同情况所提示的,这些类同情况是指学生在学习中使用理论和那些从事研究这种学习的人们建立和使用理论之间。正是这些类同之处我们要予以强调的,其中有两点似乎特别令人感兴趣。其一是与我们看待理论的方式有关,其二是与创立有用理论所需的明确性的水平有关。

在调查究竟学生是否懂得他们正在做的数学时,我们往往要求学生解释他们这样做的理由。我们指望在他们的解释中找到证据来说明他们已经把支持他们的演算的那些片断的知识联系起来了。学生的解释就是事物怎样工作的理论。要求学生用语言来表达他们的理论使我们能就他们的思维与他们相互交流。同样地,我们对教和学的过程的理解程度可以用我们如何解释好学生的联系和关系来作出测量。理论成为我们的解释,把理论公开化使研究者得以互相交流,在个别研究计划之间建立联系,把各个计划的结果以有意义的方式联系起来,并指导将来的协作成果。

第二个相同点,即在学生的理论和研究者的理论之间的相同点,是由卡米罗夫-史密斯(Karmiloff-Smith)及英海尔德(Inhelder)在《如果你要领先,找一个理论》一文中提出的。他们描述了在用代用块理解一个游戏活动中幼童的进步;这个理解是根据儿童形成的理论和他们验证的假设。要使儿童的理论对他们有用,理论必须足够地明确达到产生可以检验的预见。这对我们的教-学过程的理论同样也是正确的。这些理论可能是相对地原始和局部的,但只要有用的它们就必需足够地明确以产生可检验的预见。

关于理论的最后一个评论也是与儿童的学习有关的。卡米罗夫-史密斯及英海尔德指出理论即使是错误的对儿童还是有用的。但是理论能成为儿童的一个障碍,如果它们持续很久都面对不予证实的证据。我们的理论总是暂时的,用来使我们对自己或对他人的解释明确化,但是也总是需要作修正或替代。

## 为研究定目标

如果学生和教师的理解是重要的话,那么应该努力把研究引向描述和解释这些理解上去。被提出的特定的研究问题将沿着使我们的理论明确和我们的预见可检验的方向前进。然而,这些理论不能完全决定研究的设计或者研究过程中其他的细节。

我们建议应如此设计着重于学生和教师的理解的研究工作以能提供在教-学过程中各要素如何互相作用的一个条理清楚的分析。我们认为把一种讲授方法和另一种方法对立起来而不提供讲授对学生的学习和思考的效果的细节的研究是没有多少价值的。没有这些细节的话,这种信息对增进我们自己对教-学过程的理解的作用甚微。其结果可能以未知的方式被联系到讲授的特定特征或学生的特定特征。对我们理解学生和教师的理解作出贡献的研究将是那些能显露在课堂环境中发生并在讲授过程中变化着的学生和教师的思想的研究。这样的研究会使我们远远超过早期的基于简单的成就量度的研究,也会给日益有用的数学的教学理论的发展提供养料。

## 五、数学教学实践及其效果

Mary Schatz Koehler

Douglas A. Grouws\*

本章的主要目的是调查分析关于数学教学实践研究的现状。首先简要回顾在数学教材内容方面的教学研究,接着将探究当前集中于数学的教与学的结合问题的研究计划,最后将对重要的而又经常被忽略的教学质量和针对性学习这两个方面加以讨论。

### 教师研究的复杂性程度

为了充分理解当前的研究,我们需要了解一些关于数学教学研究的历史。关于教学的研究已经经历了几个阶段的改革。罗森谢恩(Rosenshine)和梅德利(Medley)1979年曾按照几个时期或周期回顾了教学研究。罗森谢恩认为教学研究有三个周期,第一个周期集中于教师的个性和特性,第二个周期集中于教师和学生之间的相互作用,第三个周期则集中于学生的注意力和学生所掌握的教材内容。梅德利提出了类似的观点,指出研究集中于鉴定有成效的教师,首先是通过他们的特性,再通过他们所使用的方法,然后通过教师的行为和课堂的氛围,最后是通过他们的各种技能的运用

---

\* 作者凯勒(M. S. Koehler)是圣地亚哥州立大学的数学系数学教育副教授。

格劳斯(D. A. Grouws)是密苏里-哥伦比亚大学的数学教育教授。

能力。这两种回顾,都是着眼于按年月顺序,或按历史观点来研究教学,而本章则从复杂性方面来检查教学研究,提出四种复杂性程度及其所代表的模型,以反映在教学研究中的变化和进步。

## 程度 1

1 级程度的研究是用一种相当简单的模型去描述教师有效性的工作。在这个模型中,孤立地研究教学的某个特殊环节或教师的某种具体的特性,而很少或根本不注意其他因素,不注意教学的质量。这种研究类型的早期例子(多数完成于 1950 年以前)是调查分析教师的特性(例如,教师经历的年限,讲授过的数学课的数量等等)和研究个性品质(例如,热情)。图 5.1 的模型说明了这种研究类型。教师特性和学生成绩之间的虚线表示了教师特性直

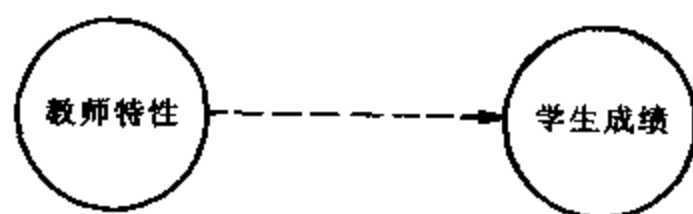


图 5.1 基本程度 1 研究模型

接影响着学生成绩的假设,虽然学生的成绩通常都未经测定,但取而代之的是根据督学员、校长,偶而也根据学生的意见去鉴定教师的教学是否有成效;根据这些意见,去作出教师的某种具体的特性或品质是否与其成功有关的结论。这种研究强调的是教师,而不是教学。这些研究,包括查特斯(Charters)与韦普尔斯(Waples)(1929)和巴尔(Barr)与伊曼斯(Emans)(1930)所作的工作,都认为诸如良好的判断力、考虑周密、热情、个人的魅力、个人的外表和忠心耿耿这些品质都是卓有成效的教师所具有的特性。

1 级程度后期的研究例子包括仅仅对整个教学过程的一个环节的调查研究。虽然这些研究考虑了学生的成绩,但是研究所注意的范围狭小,对教学的质量缺少考虑,因此是很有局限性的。有

时这种研究是一些实验,在实验中仅仅对教学过程中的一个方面以某种方式施行变化。有两组研究提供了1级程度这种研究类型的例子。例如希普(Shipp)与迪尔(Deer),舒斯特(Shuster)与皮杰(Pigge),赞(Zahn),辛德拉(Sindelar)、加特兰(Gartland)与威尔逊(Wilson),塞弗特(Seifert)与贝克(Beck)的研究,都分析了一个数学课时中的时间分配。这些研究都分析了在新课、实践或课堂练习上该花费多少时间才会导致学生获得较高的学习成绩。史密斯(Smith)(1977),史密斯与科滕(Cotten)(1980),海因斯(Hines)、克鲁克香克(Cruickshank)、肯尼迪(Kennedy)(1985)分析了教师的清晰表达情况,对比具有不同程度的含糊和不连贯的课,以确定哪种课对学生才是最好的。模型图5.2表达这后期的1级程度研究,它表示明确地承认教师的行为对学生成绩产生影响。



图 5.2 改进的程度1研究模型

## 程度2

这一程度的研究比1级程度来得复杂,它经常涉及多方面的课堂观察,以提供与数学教学有关的大量细节。2级程度研究的一种形式常常称为过程-产品研究,它观察课堂过程(经常解释为课堂上进行的一切),注意教师、学生的一些特殊的行为出现的频率。图5.3说明了这种类型的研究。教师的行为影响学生的行为,而学生的行为又影响教师的行为,这是这个模型的两个重要假设。这些研究的中心特点是仔细记录下教师和学生在数学教学中所做的一切资料,其中经常涉及的是,用十分周密的编序计划的方式将观察到的课堂事件记录下来。通过对教师和学生的相互作用的分

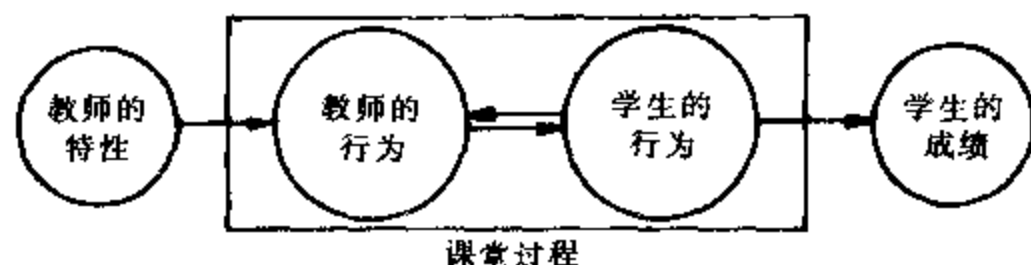


图 5.3 程度 2 研究模型

析,常常观察到教师和学生的行为的相互影响。在某些研究中,预先编序的行为例子包括所提问题的类型,回答问题的长短,所使用例题的类型与数量,用于实践活动的教学时间量,操作材料的使用频率,分配于发展新概念的时间量和复习活动所花费的时间量。对使用这些特殊的观察种类的理论根据,通常没有提供出来,而经常地代之以给出逻辑上的理由。学生的成绩(通常是指学生的测试成绩)则和所观察到的行为频率作为相关事件,以确定哪些行为与学习上的大收获互相联系着。在这里,对施教的质量也没有给以很多的注意。布鲁菲(Brophy)和古德(Good)(1986)对过程-产物的研究给出了简要的回顾。

属于这一过程的后来的一些研究,被更仔细地加以设计,从而对数学教学的知识基础起了有意义的作用。在这些重大的研究例子中,有《得克萨斯教师成效研究》和《密苏里数学规划》。得克萨斯研究提供了关于数学教学与其他学科教学之间存在的差别的有用信息,同时也提供了关于成功的课堂管理技术的特别信息。《密苏里数学规划》遵循描述—相关—实验这一循环,得到了整堂数学教学的模型,称之为活动的数学教学,这种模型导致学生极大的学习收获。

### 程度 3

我们转到程度 3,这一程度又增加了教学观点的复杂性。如图 5.4 所示,程度 3 与程度 2 的基本区别在于含有学生特性的范

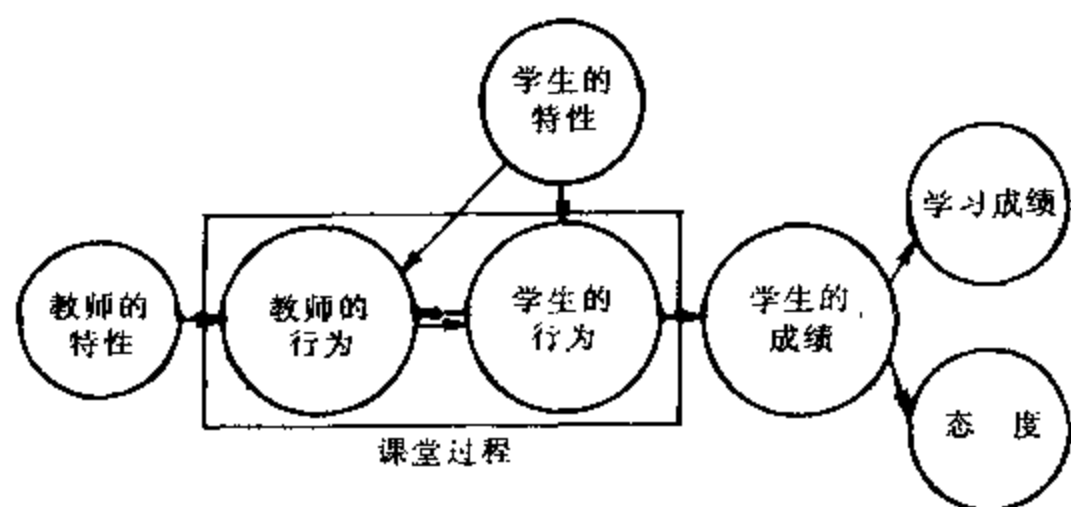


图 5.4 程度 3 研究模型

畴,扩大了学生成绩的范畴,使它包括学生的态度和学习成绩。学生的特性诸如性别、民族和自信力水平都能影响教师的实践和学生的活动。

对四年级所作的《自主学习行为的研究》是 3 级程度研究的一个例子。它在下述意义下也使用了一些过程-产物的思想,即它是一种大规模的使课堂过程与学生的学习收获相关联的观察研究。然而它在下列一些方面超出了以前所作的过程-产物研究,即它既考虑认知水平高与低的学生的收获,同时也考虑男女学生不同的收获。

这一程度的其他研究,开始在考察学生的多种特性时,使用了一种混合的方法论。哈特(Hart)进行了课堂观察,也作了课外记录。在她对七年级数学班的研究中,她考虑了学生的自信力水平和性别。她发现在教师-学生互相作用的模式中存在着性别差异,而这似乎与教师的特殊模式或风格相联系。凯勒(Koehler)把对教师-学生相互作用的观察和课外记录相结合,去检查代数课中某些教学过程对男女学生的高与低的认知水平成绩所产生的不同影响。她发现一种迹象,表明当女学生在班上较少地得到教师帮助,从而直接或间接地鼓励了她们成为更独立的数学学习者时,她们的演算反而比其他班好一些。为了分析由于民族与性别而产生的

不同成绩的问题,斯塔尼克(Stanic)和雷耶斯(Reyes)在七年级实施了一个深入的教学研究,它包含录音、课堂观察和同教师与学生的座谈。他们推断:要对教师-学生的互相作用有充分理解,就必须考虑教师的意图。他们注意到不同的成绩可能是由教师对学生的不同对待所造成,也可能由教师对学生的同一对待所造成,因为并不是所有的学生都以同一方式对特殊的教学风格作出反映。

#### 程度 4

教学的确是非常复杂,它不仅比原来意识到的更为复杂,而且这种复杂性在日益增加。教师能达到的能力水平有着很大的范围,能教的数学课题范围也较开阔(全美数学教师理事会),可供他们挑选的教学方法种类也繁多(例如操作、小小组)。此外,研究技术和资料分析技术已经变得比较先进,这也允许研究者分析更为复杂的问题。就教学研究的角度看,最重大的变化是意识到需要把教的研究和学的研究联合起来。龙伯格(Romberg)与卡彭特(Carpenter)竭力赞成两个方面的融合。芬内玛(Fennema)、卡彭特与拉蒙(Lamon)、格劳斯(Grows)对这一论题作了详细的说明。帕特曼(Putnam)、兰帕特(Lampert)与彼得森(Peterson)讨论了近年来对学习的研究是如何取得进步的,他们从认知心理学、数学与课堂几方面的观点提出了关于学习的一些新的看法。

当前,关于教与学的研究正以多种观点进行着。程度 4 的研究可以认为是具有强有力的理论基础的研究,并且是建立在包含许多因素的模型上的。程度 4 可以以图 5.5 的模型或另一种相类似的模型为基础。

在这个模型中,学习的成绩建立在学生自己的行动或行为上。在大多数情况下,这些行动极大地受到课堂上教师言行的影响。影响学生行动的还有学生的态度,或对自身作为数学的学习者所抱有的信念和把数学作为一门学科的信念。学生在学习数学能力



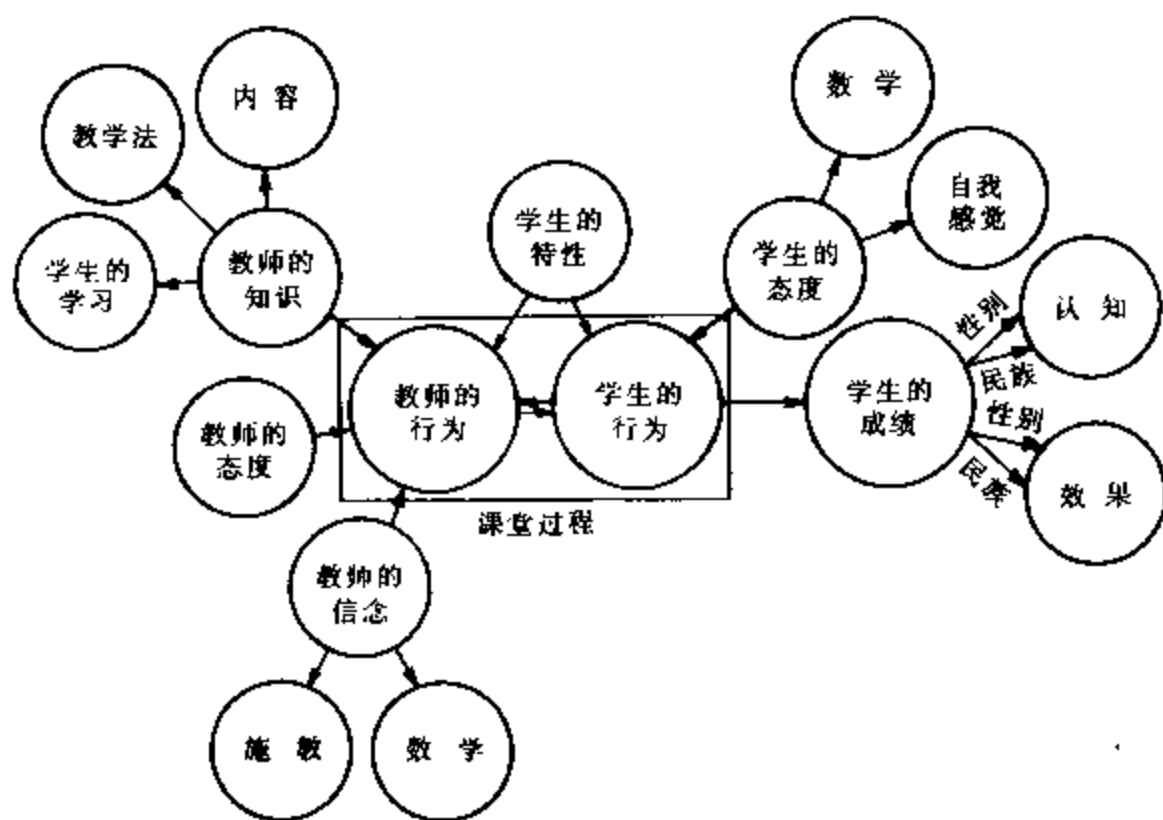


图 5.5 程度 4 研究模型

上的自信,关于数学对他们将是有用的信念,和他们对自己是否能“发现”数学的感觉,这些都是影响学生行动的部分例子。教师的行为受到教师知识的影响,这些知识是(a)所教的数学内容,(b)学生会如何学会或理解该特殊的内容,(c)教那些特殊内容的方法。影响教师行为的还有教师对待教学与数学的态度和信念。例如,相信学生是通过明显的例子和反复讲授,或通过大量的练习进行学习的,并认为教师的作用是信息的传授者的那些教师,在课堂上的行为与另一种教师就会不一样。后者相信学生是通过发现或研究进行学习的,并认为教师的作用是学生的“合作探索者”。这后一种教师会提出较多的开放型问题,热衷于提出更多的问题,并且较少受教科书的束缚。如在程度 2 和程度 3 中所见,在学生的行为和教师的行为之间存在重要的双向连接,学生的特性同时影响着教师、学生两者的行为。

本章的其他部分将描述几种程度 4 的研究,这些研究强调对

关注于学生学习的施教行动本身进行分析,而不直接考虑包含教师的知识、信念和决策的研究,尽管这些也都融合于施教行动之中。

## 多种研究观点

当前存在许多用以分析施教行动的观点。本节将考察当前研究所采用的各种观点。

### 构成主义的方式

把教学研究和学习研究相联系的一种方式 is 凭借构成主义的观点。科布(Cobb)等解释说,“根据构成主义的观点,数学学习不是一种仔细使已经包装好的知识内在化的过程,而是一种把活动进行再组织的事情,这里活动作广义解释,使之包括思维活动或思想”。科布、亚克尔(Yackel)与伍德(Wood)应用构成主义的观点构造一个框架,用以讨论教和学。然而这不是一种直观明显的概念。科布指出了所遇到的一些困难,他说,“虽然在研究学习课题时构成主义的理论是有吸引力的,但是当设法将它应用于教学时,却引起一些深层次的问题”。如果你同意教学的“知识转移”的观点,而不赞成那种“学生通过重新构造其内部的认知结构自己构造知识”的观点,那么这一点尤其如此。构成主义关于学生如何学习的假设改变了教师何种行动或行为是合乎需要的假设。如果同意构成主义的学习观点,那么其目的不再是形成教师的某种教学策略以帮助学生接受或获得数学知识,而是构造、控制和调整学生所进行的活动。在这种情况下,研究者要以十分不同的方式仔细观察教学。例如,那种观点不是认为教师的行动对学生的学习有直接的影响,而是有更间接的影响。科布指出,“教师的行动会影响学生试图解决的问题,因而影响学生所构造的知识”。

科布与斯特弗(Steffe)解释构成主义的教学观点时指出,“在构成主义的观点中,教师应该不断地作出有意识的努力,按孩子的观点去观察他们自己与孩子两者的行动。”构成主义的教师将会开始实施一些活动,而孩子将对此作出反应,并由此抽象出模式或规律性。

在进一步的详尽阐述中,科布指出施教可以被理解为以讨论和灌输为两端的连续统一体。把施教看作是知识的传递的教师遵循强加性教学模式,而把施教看作是促进知识结构的教师则遵循讨论式的教学模式。科布等解释道:

在实施和指导数学讨论中,教师的作用是高度复杂的活动,它包括指出在可供选择的解释或解答之间的矛盾;帮助学生发展有成效的小组式的合作关系;促进学生之间的数学对话;从对进一步的数学构成具有潜在的有效性这个角度,含蓄地指出讨论中所选择的观点的合理性;用更具学术性的术语对学生的解释进行再描述,而同时又能为学生所明白;在有特殊的描述体系建立时,指导有共识的解释的发展。

亚克尔、科布、伍德、惠特利(Wheatley)和默克尔(Merkel)指出,除了提供给学生以待解决的问题外,许多知识的学习或构成,是通过解题和师生相互交流而发生的。当给孩子们以机会去互相交流,也和教师互相交流时,他们就能“用词语表达他们的思想,解释或证明他们的答案,以及请求澄清,解决不同意见的企图会给学生以机会,去把问题重新概念化,去延伸他们的概念框架,而引入一些新的解题方法”。

根据构成主义观点,用于分析教学的研究技术之一是仔细地研究通常结合个别学生的教学情节。科布对此作了详细的描述,指出,因为学习是一种生动的问题解决过程,所以“教师的一种基本责任应该是使学生从事适合于他们的名符其实的数学问题的活

动”。这些教学情节常常被录像,然后和教师一起加以讨论。研究者可以对开始实施的活动提出建议,使这些活动能培养孩子掌握正在教学的数学概念。

另一种研究技术是教学实验。一种教学实验的内容是孩子早期的数概念的获得。一个二年级的班级被用于持续一年的实验。研究者紧密地和一个有经验的但又是传统的教师一起工作,去开展教学活动,以允许学生构造他们的重要的数学思想和概念。在实验之前的一年里便已经开展了某些活动,但是更多的活动在实验的一年中被构造和修改,这在一定程度上反映了新的学生的数学概念中的差异。资料包括每一堂课的录像,也包括和孩子们交谈的录像及和教师交谈的录音。研究者和行政区职员都认为实验是成功的。因此,在计划的第三年中,日益增多的教师能够贯彻完成这项教学过程。

除了考察基于学生如何学习的特殊观点的不同教学过程外,这一类研究也考察了学生的非认知成绩。尼科尔斯(Nicholls)、科布、伍德、亚克尔和帕塔什尼克(Pataschnick)使用了上述的二年级学生的样本,分析了那些在课堂上参与协作解决问题和进行互相交流的学生对数学上成功的原因所抱有的信念。本章的课题不是讨论情感问题,所以不列入那些细节了。但是我们感到重要的是要指出:通过分析非认知的成绩,这种特殊的一连串调查能更充分地结合如图 5.5 所表达的模型的某些部分。

## 认知指导的教学

《认知指导的教学》(CGI)的根本原理是教师需要根据认知科学关于学生如何学习特殊内容的知识去作出教学决策。依照理解包含把新知识与现有知识相联系的观点,芬内玛、卡彭特与彼德森解释道,教师需要知道他们的学生在不同阶段所具有的知识,以致于他们能提供恰如其分的教学。这一原理已经成为一种研究规划

的框架,在这一研究规划中,“主要的注意力集中于研究用来使教师了解学生的思维和如何运用那些信息去设计并完成其教学。”图 5.6 给出了 CGI 的模型,它表明课堂教学是建立在“教师决策的基础上的,而教师的决策则既是建立在他们自身的知识和信念基础之上,也是建立在通过对学生行为的观察而作出的对学生知识的评价的基础之上的。”

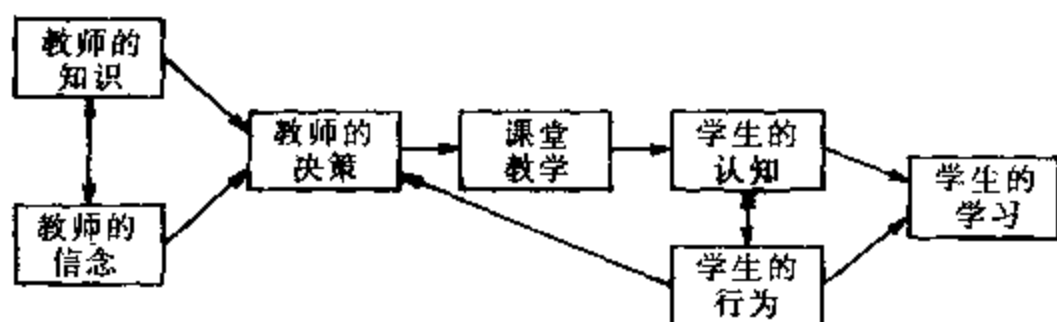


图 5.6 认知指导的讲授(CGI)研究模型

芬内玛、卡彭特与彼德森进一步解释道,“CGI 的主要原则是:(1)教学必须建立在每个学习者所了解的知识基础之上,(2)教学应当考虑孩子的数学思想如何自然地发展,(3)当孩子学习数学时,他们必须积极思维”。卡彭特、芬内玛、彼德森、蒋(Chiang)与洛夫(Loef)实施一项研究以测试关于 CGI 的某些假设。他们的研究包括 40 位一年级的教师,其中的一半被随机挑选出来组成培训组。这些受培训的教师参加了为期一个月的关于加减法概念的学习的研究的假期研讨班。所有 40 位教师和他们从 11 月到第二年 4 月至少被观察 16 天,以作出各种评价,包括对学生在各种程度的问题解决能力方面的学习成绩的预测和测试后的评价,包括对学生自信和信念的评价,包括对学生面试的评价。结果指出,实验班级的学生能更顺利地实施一定量的问题解决,也可以更顺利地实施数的实际事实的复忆。

实验组的教师在文字题上比控制组教师花费较多的时间,而控制组教师在数字问题上花费较多的时间。实验组教师更经常地集中注意于学生用来解决问题的过程,而控制组教师则更经常地

集中注意于问题的答案。另外,实验组教师允许学生以较广泛的各种策略去解决问题。下面的节录说明了两组教师所显示出来的教学行为上的差异:

在 CGI 班级中观察到的典型活动是教师对一组学生提出问题,提供学生一些时间去解决问题,然后教师请一位学生描述他或她是如何解决这一问题的,重点放在解决问题的过程,而不是答案。在这个学生解释了他或她解决问题的过程之后,教师再问是否有不同的解决问题的方法,并给另一位学生以机会解释他或她的解答。教师继续询问学生,直至没有人报告有还未描述过的解题方法……。与 CGI 教师相对比,控制组教师较少经常(a)提出问题,(b)听取学生的解题策略,(c)鼓励使用多种策略解题。他们花费较多的时间复习以前学习过的材料,例如数字的训练,也花费较多的时间对学生的答案作出反应。

描述 CGI 教师教学实践的较为详细的几篇短文是由芬内玛、卡彭特与彼德森给出的。

### 专家-新手模式

分析教学行为的另一种方式是专家-新手模式。莱因哈特(Leinhardt)解释这个方式的中心是:

教学是较为有趣、较为复杂的人类所从事的认知过程之一,在这个过程中,人们分析任务、对策和教师所受到的限制。对于这种观点可以象征性地比喻为一个人站在教师的肩膀后面注视着教师在完成讲稿的宣读、课堂信息的处理、决策的作出、问题解决和计划的制作上,如何想方设法以达到多种的目标。

这种类型的研究的根本原理确实类似于过程-产物模式。在研究中,带着鉴定对成功教学所必需的品质或行为的意图,对两类

教师加以观察(在这里,将专家与新手相对照,而在过程-产物模式研究中,将有成效的教师与成效较少的教师相对照)。“最终的目的是要对内行有足够好的理解,从而能为新任教师制订出一种教学模式,使他们的初期表现比较地像专家,并终于使所有教师的表现都进入专家的范围。”专家-新手模式不同于过程-产物模式的地方,是在于观察的内容和衡量成功或效果的方法上面。

在专家-新手的--项研究中,4位专家教师和2位新任教师被加以观察、交谈和录像。对他们的课极为详细地加以分析,发现了专家和新手之间的差异。组织和教课的能力、上课的“技艺”是专家和新手差别之一。莱因哈特解释说:一堂课由三部分组成,一份教案,一个课堂环节和一份解释。“教案是教师用来教数学课的唯一运转计划,它包括各个课堂环节的目标或目的,及能用于达到这一目标的行动两者。”课堂环节,也称为活动结构,是“公共活动的环节,在这些环节中,各种演员将按预设的特殊作用完成特殊的任务”。其他的研究者也曾对课堂环节加以界说,并且研究过它们的排列顺序和效果。莱因哈特所研究的第三个课堂组成部分是解释,或“在教学内容的实际传递中所涉及的目的和行动体系。”

在对资料的分析中,人们发现专家有较为丰富的教案——他们的教案包含较详细的信息,明确的供参考的学生行动和有计划的教学行动。关于课堂环节,则发现专家花费较少的时间于转换上,而更始终如一地把时间花费在其他的课堂部分上。新手花在各个课堂环节上的时间量相当变化无常——从而出现全面不稳定的效果。课堂的解释部分表明,专家对新资料给出较好的、包含较紧要的特色而错误又较少的说明,新手则常常没有完成他们的解释。

总之,人们发现了:

数学专家教师以始终如一地依赖于前面课所引入的材料,并加以发展的

方式把一系列的课组成一个教学论题,专家也把他们的课组织成具有高度有效的内部结构,具有从一种类型的活动流畅地向另一种活动过渡的特点,也具有在教学中,学生极少有困惑不解、并且教学有着一整套明显的目标等特点……。另一方面,新任教师的课的特点是:在课堂各环节之间有着冗长的过渡,以致课堂结构支离破碎;通过信息的错误传递而引起的经常的慌乱;目标体系不明确,以致这些目标常常似乎要被放弃而不是要求达到。

上述研究方式也关注于学生如何学习,但其观点完全不同于其他关于学习的研究。莱因哈特与帕特曼以学生的观点分析课堂教学,并对学生实际上是如何进行课堂学习的作了假设。他们指出,为了数学课的学习,学生需要一定的认知能力。这些能力包括(a)一个行动体系,它使学生能在学校里适宜地行动;(b)一种课堂语言分析能力,它使学生能认识和预知课堂的各个组成部分;(c)一种信息收集能力,它从课堂上吸收信息,并融合进现有的知识之中;(d)一种知识产生能力,它寻求新的知识,并像激发器似地行动;(e)一种评价能力,它评估新材料的意义。这项关于学习的研究是和教学研究平行地进行的,在某种意义下两者互相联结,处理现行的课堂教学的各个方面。

利文斯通(Livingston)与博科(Borko)也考察了专家-新手教学中的差异问题,他们提出了分析教学的两种理性框架。其中第一种框架是把教学看作为一种复杂的认知技能,这一框架的中心思想是教学法的推理、教学法的内容知识和纲要。他们解释道:

纲要是一种抽象的知识结构,它对许多特殊情况下的信息和它们之间的关系进行综合。……教学法推理是教师把教材转化成他们特殊的学生可以理解的形式过程。……教学法的内容知识是把教学内容和教学法融成一体的教学的专门知识领域。

他们发现专家教师比新任教师有较详尽的互相联结的纲要。



另外,新任教师的教学法推理处于发展的早期阶段。

第二种理性框架是把教学作为即席创作演出加以对待。教师有一个全面考虑的计划或概要,但又不遵循严格的讲稿。相反,教师依靠的是常规的全部技能和与学生的需要或行动相呼应的教学措施。在比较实习教师和与他们在一起的较有经验的合作教师的过程中,研究者发现利用这两种理性框架能使他们分析专家和新手之间的发展差异。新任教师关于学生学习的教学法内容知识是有限的,他们对学生所误解的知识掌握甚少,他们的纲要对他们自己的理解是足够的了,但是发展与互相联结并不充分,并且不能充分地使他们成为善于反应的、灵活的教师。这些局限性导致新手在即席创作上缺乏技能。博科与利文斯通进一步指出当施教新的内容时,专家在某些方面与新手类似,强调了所教的内容知识的重要影响。可以相信,不实际地教学具体的内容,就不能获得教学法推理或教学法内容知识。博科与利文斯通提出了教学中专门知识发展的纵向研究的必要性。

### 社会学和认识论的观点

兰帕特通过一种社会学和认识论的观点把教学研究与学习研究结合了起来。她考察了如何在数学训练中建立新的知识,并把这个过程应用于课堂的教学过程,从而给这个研究领域带来了一种新颖的观点。

兰帕特相信新的数学是通过关于数与形的关系的“‘有意识猜想’的过程而产生的,其证明是沿着一条开始于猜想,而后转换为通过反例或‘反驳’的使用来对假设进行分析的羊肠小道”。她进一步指出:当前在数学学科中人们如何达到掌握数学,是完全不同于在学校里的过程的,在那里“做数学意味着遵循由教师所设置的规则;懂得数学意味着当教师提问时记住和应用正确的规则;并且数学的真理是由教师认可答案来确定的”。理论上,“新知识是

作为课堂上共同猜想而构造的,而不是作为教师向学生的传送”。

兰帕特所应用的一套研究方法是有独到之处的。她自己一直在起“教师-学者”的作用。她以这样的身份一直在四、五年级班上教数学,同时收集她自己教学的资料。某些资料由课堂的录音与录像、课堂观察、学生的笔记本与家庭作业这些形式的工作样本,和关于课堂的计划与完成的课外记录所组成。兰帕特指出她的方法是行动研究与说明性社会科学的融合。她的资料分析方法在下述意义下也是独到的,即它是教育心理学家、社会语言学家和数学家所共同阐明的。兰帕特称这种分析方法为“课文注释”,意思是说:教学是多种互相矛盾的目的地处理,任何教学行动都可以用多种方式加以解释。她强调说,分析的目的“不在于确定关于学成教的一般议题是否正确或错误,而是在增进我们对人类这些特殊类型活动特点的理解。”

兰帕特认为教学的最终目的是“鼓励猜想、论证,并使环境适合于学生表达他们的思想”。她认为她的研究目的是用学科知识“描述在学校数学课中教师与学生之间的课堂上的互相作用”。她的教学前提“包含使学生揭示和分析他们所作的关于数学结构的假设,包含提出新的材料,使他们能考察他们自己的与教师的主张的合理性”。这一关于教学本质的信念导出教师的两大任务:(a)挑选和提出问题,包括引入问题和要求阐明,以使学生参与数学讨论;(b)找到使学生和教师能用来交谈同样的数学内容的语言和符号。

兰帕特的研究,使她能洞悉适合于课堂结构所提出的问题的一些特点。第一个特点是问题的范畴是学生所熟悉的。这时,将使班上所有的学生都能说明和检测数学猜想。第二个特点是这些数学问题具有引导学生进入不熟悉的但又重要的数学领域的可能性,特别引导学生进入与课程进程有关的领域。

兰帕特认为学生构造他们自己的知识,而教师则负责以他们

的修养为手段去教育学生。她企图通过基于所提问题的讨论,使“在课堂上掌握的数学更像在学科中掌握的数学”。兰帕特指出:虽然在使学生参与“可靠的数学活动”方面,她是成功的……但是,要明确学生所获得的究竟是怎样的知识,这一问题还有待解决。

### 数学内容观点

这种关于教与学的研究观点,其首要目的在于产生“一个领域中关键认知过程的获得和支持或阻止这种获得的教学事件之间的联系的信息”。这种观点研究如何学习数学领域中的特别课题或内容,并把这种知识直接应用到那一部分特殊内容的教学上去。基于这一原因,它也被称为《认知教学方式》,并被描述为“研究学习以指导施教”。

希伯特(Hiebert)与沃恩(Wearne)较充分地描述了由这一观点出发去研究教与学的一整套方法。首先是,选择一个范围明确的内容;在他们早期的研究中,他们使用了十进位分数的加减法内容。其次是,确认在那个内容中使运行成功的关键性认知过程。沃恩与希伯特根据十进分数体系所需的能力,确认了四个关键认知步骤:(a)把各个符号和它们所论及的事物连结起来,(b)展开符号-运算过程,(c)详尽阐述符号的规则,并使其成惯例,(d)在更为抽象的符号体系中,把符号和规则用于所论及的事物。第三部分方法是:发现已有的教学模式或设计出专门的教学模式,以促进关键性认知过程的使用。在希伯特与沃恩的研究中,发展了一些新的教学策略。最后一部分方法是:同时按照对内容领域中表现的直接评价和按照任务的迁移评价,来共同评价教学。

沃恩与希伯特报告了一个应用这套方法的研究例子。在四、五、六年级取了一系列9节课的样本,它结合在学习如何计算小数的获得过程中所确定的第一、二个认知过程。他们发现能应用“语

义学过程”——即包含关键性认知步骤的过程——的学生,要胜过那些不能应用该过程的学生。他们也发现以前的教学(如一些五年级和多数六年级的情况)与这些关键性认知概念的获得相冲突。这导致他们得出以下结论:在进行句法上的惯例操作之前,最好先详尽阐述符号的意义。

按这一研究观点,教师的行为多少有点被预先规定。工作的目的是要对学习者如何获得具有非常专门的数学概念的专业知识的研究成果加以利用,从而仔细地编排教学,引导学生去通过关键性认知过程。

在他们一系列连续的研究中,希伯特、沃恩与泰伯(Taber)集中研究学生是如何构造理解的。他们对于一个成绩低下的四年级班级实施十进分数的教学,并把教学特别地进行设计,以促进理解。在 11 天的单元教学中,对学生的理解用书面测试和交谈的方式进行过几次评估。他们发现理解是逐渐产生的,经历着细小而飘浮的变化,而不是经历一种突然的顿悟的火花。一个完整的理解并非可以刻划成由片断的理解拼凑成不断增大的网络。他们的分析说明,理解的发展的合适模型可能是一种变化、流动和重新组合的模型,而不是那种稳定地单调增长的模型。……不连结、连结、再重新组合,这似乎是一种规律,而不是那种逐渐增加到一个稳定的结构。

麦克(Mack)也从数学内容的观点去分析了教与学。类似于希伯特小组,她分析了学生关于分数的理解的发展。特别地,她把注意力集中于研究学生日常的分数知识如何影响他们对分数加减法教学的理解,其目的是要了解学生如何依赖这个知识去理解分数的符号和运算。麦克的研究包括 8 个中等能力的六年级学生,对他们进行了个别教学,并附以诊断性的交谈。由于这种教学是针对每个学生本身的需要来特制的,而这种需要又建立在他们的日常知识与误解,以及对问题所作回答的基础上的,所以这一系列研

究与 CGI 原则紧密相关。

麦克发现学生储存有丰富的关于分数的日常知识,他们能依赖这些知识去发展对正式的数学符号与运算的认识。麦克指出还不清楚的是:学生是否还能延伸这一核心知识去发展有理数的一般概念。她最后指出,“研究的结果为支持在运算之前教学概念的主张提供了更多的证据,并认为学生是能够依赖日常的知识去构造有意义的算法的。”

## 总结和比较

在前面几页,我们提出了分析教与学的研究的几种不同的研究方案与模式,下面我们想总结和对比一下这些模式。

在构成主义的方式中,教师的行为是以这样一种观点被分析的,即它在多大程度上鼓励或促进了学习者的知识结构;施教被放在讨论与灌输之间的连续统上去考察;教师的作用则是去发现和调整学生的活动;公共活动中的互相作用被视为知识结构的关键性部分;研究的一套方法包括详细地研究一段教学情节和实施一种教学实验。

在认知指导的教学中,基本的看法是:教师是在他关于孩子是如何学习知识和信念的基础上去作出教学上的决定。由于人们认为学生是通过新知识与现有知识的联系而学习的,所以教师的作用是向每个学生提供适宜的教学。留神听取学生是关键。研究工作包含向教师提供孩子如何学习的理论,包含关于孩子的数学思想在特别的课题中如何发展的研究,还包含注视这新的知识如何改变教师在课堂上的行为。

隐含在专家-新手模式的研究后面的目的不仅仅是确认专家教师在他们课堂“技巧”中的行为,还要确认教师当他们由新手转化为专家时所经历的发展过程。教学既看作为一种复杂的认知技

能,也看作为一种即席发挥的表演。研究的整套方法包含广泛的观察和对完成教学的深层次分析。

在数学的教与学的社会学和认识论的观点中,认为学生只有按照数学学科发展的方式去学习数学时,他们才能懂得数学。在这种观点下,施教被看作是帮助学生通过问题的提出和投入数学讨论去构成学科的知识,并在讨论中考验自己对数学的看法。至今所使用的研究技术是独到的,它要求研究者成为“教师-学者”。

最后,在数学内容观点中,施教被看作为学习者认知变化的动因,其目的是设计教学序列,发展教学技术,从而毫无困难地促进认知的增长与变化。研究的整套方法包含分析在获得特别概念中所使用的关键性认知过程,还包含设计教学方法以帮助学生发展这些过程。

当今关于数学教与学的研究观点变化多端,对它们加以比较,就可以揭示这些模型之间的重要差别。首先,让我们冒着过分简单化的危险,提一些基本的一致点。所有这些观点接受一个假设,即学生不是被动的信息吸收者,而是在知识与策略的获得中起积极的作用。所有的观点都基本上把教师看作是有知识的、认真思考的决策者。除了这些相似点之外,在这些观点之间看来有重要的差别。例如,兰帕特认为学生构造知识的方式和知识在数学学科内构造的方式十分相同。莱因哈特认为学生通过对课堂教学的阐述说明而构造知识。希伯特与沃恩相信知识是通过关键性认知过程的获得而被构造的。麦克认为学生的日常知识是理解的基础。科布等人与 CGI 小组认为学生是各自以独特风格去构造知识的。帕特曼、兰帕特与彼得森对什么叫做知道和理解数学的各种不同的看法作了仔细的研究,其中有一些类似于前面的研究观点所持有的看法。他们利用一些术语来讨论理解:(a)表述,(b)知识结构,(c)各类型知识之间的连结,(d)知识的主动构成,(e)认知情境。这些有关知识的获得或构造的不同观点导致不同的教学观

点。希伯特与沃恩似乎要在他们设法确定教师能用来促进学生学习特别的内容的一系列课的过程中提供更详细的细节与构造。CGI 看来更为坦率和理想主义,建议教师了解每个学生关于给定的内容的认识发展阶段,建议教师连续地修改教学以适应各个学生的需要。科布等人认为教师能根据在思维上伴随有认知策略而已经被发展的课堂教学而工作,并且在必要时能修改那些课堂教学。兰帕特相信教师需要集中精力挑选和提出合适的问题。莱因哈特则很少注意特别的内容,而更多地注意课堂的编排。博科与利文斯通指出,当教师讲课时,他们应该运用教学过程中的丰富技能去临场发挥。显然,在关于有效教学的解释说明中,有着足够的变化空间——但基本的前提是一致的,这基本前提就是:认为教学研究应当与学习研究相结合;学生是在构造他们的知识;教师是深思熟虑的决策者。

## 关键性的方面:教学质量、意义和发展

虽然存在着多种能用来探讨教学研究的观点,也存在着教学行动的多种解释,但不管研究中的富于哲理性的观点如何,一个需要在所有的关于数学教学的研究中更充分地提出的根本主题是教学质量的概念。虽然一般都一致认为数学教学的质量是重要的,但是大多数研究工作一般都不直接提出这一点。研究者是否已经迎头抓住这个问题,似乎还是一个未知数。

教学质量可以分解地或整体地研究。例如,分解的分析可以以施教行动为基础,而整体的分析则集中于施教事件或数学课的整体分析。格劳斯指出,许多教学行动——例如提问、举例和画图——都有与其相关的质量。他指出“确认落在质量区间的终端的教学行动,相对来说是容易的:画图但看不懂,提的问题模棱两可,使用的例子不符合定义的条件,等等。”然而,对教学质量的考察不

能限制在对一些特殊的教学行为的评价上面,它应该包括分析“与课堂事件相适应的、共同形成一个有意义的学习情境的途径”。基于任何一个前面所讨论过的五种研究观点之上的未来研究(尽管他们的根本原理有所不同),都将会从教学质量的更充分的研究中获益。

有许多方式可以进一步提出教学质量和有意义的学习的问题。一种方式是研究某些研究工作称之为数学课的“发展”这一部分。发展的研究作为一堂课的特别部分,是开始于前面所讨论过的某些早期关于时间分配的研究。这些研究对用于发展的时间量与用于一堂课其他部分,诸如课堂作业或实践的时间量通过实验进行对比。自从这些早期所做的研究以来,关于发展课题的研究,像关于教学的一般研究一样,已经有了相当大的进展。

在早期的关于发展的研究中,增加发展的时间量的价值被明显地指了出来,但是对发展的质量却没有多少考虑。在这些研究中,“发展”经常地被当作为“教师讲授”的同义词。然而,依照古德、格劳斯与埃布迈尔(Ebmeier)所作的较新的定义,它被定义为“一种过程,依赖于这一过程,教师促进学习者有意义地获得一种思想。”它包括教师为促进学习所做的一切,无论是组织小组,提供指导下发现的活动,引导课堂讨论,还是组织个别调查,或作一次讲授,都包括在内。

重要的是,记住在新近的关于发展的定义中,所强调的是有意义地获得思想。在布劳内尔(Brownell)的深入研究中,详尽阐述了在数学的教与学中意义与理解的重要性。他所作的一些观察虽然已过去了五十多年,但今天仍然是恰当的。正如皮里(Pirie)所指出的,“如果我们,作为数学教育学家,打算设计有效的教学策略,领会学生行动的含义,提供能使孩子构造他们自己的数学概念的经验,那么我们首先必须具有一个可行的、可依赖的模型。”在提倡不断注意提高我们对理解的认识与发展其模型的同时,他也认为



实际上我们对“理解”本身可能永远不会有充分的认识。许多新近对意义与理解这些概念的学术性调查已经产生了重要的概念,例如相关性的和工具性的理解,符号的理解,和四个等级程度的理解等。更多的细节和思想的重新概念化,以及学生对理解的看法的调查则在本书第4章中由希伯特与卡彭特给出。

在古德、格劳斯与埃布迈尔的工作中,也已经确认意义与理解的重要性,作为他们对成功的数学教师的研究的一个部分,他们确定了发展的五种组成因素:注意预备知识,注意相互关系,注意表达,注意理解和概念的一般性。他们强调“发展是一种非常复杂的现象,组成成功地发展的特别部分可能会随着一个教学内容到另一个教学内容而变化”。他们提出“即使在类似的教室环境中,有效的发展也可能不是由相同的行为相结合而成,认识这一点也是重要的”。

他们所确定的发展的各部分并不互相排斥,也不一定就包括了所有能被确定为发展的各个方面,然而他们可以对重视学生的数学教学质量的研究提供一种有用的出发点,也可以提供在那个过程中关于教师作用的一个焦点。他们所强调的后一点,超出了许多的研究课题,这些研究课题往往在有关学生对数学的理解上作出一些概念化的时候就结束了。

## 结论和未来的方向

布罗菲曾指出,“虽然在近二十年来取得了相当可观的进步,但是关于课堂教学的研究,包括学校数学教学的研究,仍然还处于萌芽状态。”现在我们似乎可以有把握地说,从布鲁菲发表这一看法以来,研究工作取得了相当可观的进步。研究在一定意义上变得较为深入了,即教学行动的每一方面都被极为仔细地加以观察,对教学的内容给予了较多的注意。然而,某些领域需要更为强调。

例如在学生的成绩方面,应该把较多的注意力放在正在进行的学习中的认知水平的更好的评价上,和放在非认知的成绩上,并且也放在特别群体的学生所得到的可能不同的成绩上。另外,由于种种原因,已经做了的大多数研究是对低中年级做出来的。对于我们,迫切需要注意中学阶段,了解迄今所讨论过的学和教的理论,在复杂一些的有较高年级的学生和较完善的数学背景的教师的数学环境中,是否仍然可行。布鲁菲指出,这种研究工作也需要在中学后的阶段中去做。

数学教学的研究者在应用许多技能(研究方法)方面已经变得更为内行,更愿意同时考虑两件事(教和学的研究),并且较能容忍不同的观点。虽然他们并不经常一致,但是研究者至少愿意设法交流。当前有改革数学课堂教学的要求,又有可能增强我们在本章中所提及的各种模式说明的数学教学的认识,所以比以往更有可能,研究者将在重要的方面作出贡献,以增强学生在重要方面的数学学习。

## 六、教师的知识及其影响

Elizabeth Fennema

Megan Loef Franke<sup>\*</sup>

作为一个教师,需要广泛的、有高度组织结构的知识。

看来对于推进我们对教师作用的认识具有极大影响的独一无二的因素是教师知识的表现。

毫无疑问,对于教师在课堂上所做的一切,乃至最终对于学生所学到的一切,教师所掌握的知识是最为重要的影响之一。然而,哪种关键知识对确保学生学习数学是必要的,对此却还没有一致的意见。教师知识的许多组成部分是已经被确认了的。一些学者认为既然一个人不可能教他所不掌握的知识,那么教师不仅必须具有他所教的特定数学的深层次的知识,而且还必须对学生将来要学到的数学知识有深入的了解。一个教师只有在具备这种强有力的知识的时候,才能掌握如何构造他(她)自己的数学教学而使学生不间断地学习。另一些学者认为文化和种族差异方面的知识对有效的教学是至关重要的。由于美国正日益增长地成为多重文

---

\* 作者芬内玛(Elizabeth Fennema)是威斯康星-麦迪逊大学课程教育系和妇女研究规划教授,全国数学科学教育研究中心副主任。

弗伦克(Megan Loef Franke)是威斯康星教育研究中心认知指导教育研究课题副研究员。

化的国家,又由于学生的文化是他们如何学习的一个重要的决定因素,所以在教师有效地进行教学之前,他(她)必须认识学生的文化差异。还有些学者仍然认为学生如何思维和学习方面的知识对于教师是极其重要的,同时也有些学者相信一般的教学法原理是教师知识的必要组成部分。

从研究中能否得到一些关键的信息,用以帮助我们确认哪些是教师知识的关键组成部分?这些部分是否影响着教师在教室里所做的和学生所学的?过去的研究是否能够为将来关于有助于数学教育改进的教师知识的研究指出方向?

本章并不明确地回答以上问题,面是对关于教师知识的问题的学术文献作评论回顾。我们将不作文献的全面回顾,而是确认并且讨论一些重要的研究课题,提出总结性的回顾,提供充分表达和已经完成的致力于那些课题的研究例子。我们思索由过去关于这些问题的研究如何得到知识,建议如何设计将来的研究用以提供关于教师知识、课堂讲授和学生学习的有用信息。本章的焦点在于教师知识。虽然我们认为不能分割信念和知识,但在本章中我们还是忽略了关于信念的大多数讨论,其讨论将在第七章由汤姆森(Thompson)给出。

我们一直设法根据许多不同的观点来研究文献,并以数学教育文献作为我们的出发点。在考虑提供资料的学识时,我们曾探究过其他的一些学科领域(例如历史或科学)。另外,我们注意到了一般的教学知识,也注意到了由认知科学家所断定的关于知识的获得与组织的理论。关于教师知识的问题,正引起研究者们的大量关注。但即使如此,这个领域还是复杂的,尚未完全定义的,又是经常缺少研究的。本章的目的是在于指出这一领域所有的困难,以期希望将来的研究工作能对迫切需要的教师知识提供重要的信息。

## 教师知识的组成部分

一般常识认为教师的知识不是铁板一块的,它是一个大的、综合而有效的系统,其中各部分难以分割。许多人思索教师知识的组成部分,但仅仅有一些部分得到研究者的关注:内容的知识,学习的知识,数学表达的知识,和教学法的知识。有些人将知识综合地加以研究,但大多数人不是如此。基于许多研究者的侧重情形,我们不得不违背我们所主张的知识综合性这一重要前提,而开始考虑教师知识的某些单独部分。只要有可能,我们还会指出如何综合研究知识的一些组成部分。在考察对单独部分所做的研究之后,我们将转移到一些假设的框架和综合知识的模型,最后提出一个研究模型,用以考察教师知识的综合性。

### 数学的知识

每当教师的知识问题被提出时,数学本身就会立即介入。在数学教育中,有许多话反映了关于数学知识对教师的重要性这一强烈的信念。例如,对学生不学习数学的原因,最为广泛提供的解释之一是他们的教师的数学知识不够格。另一例子是确认中学教师所需要的知识时,几乎经常列出一批在一个人从教之前所必须完成的各种数学课程。这些信念是基于数学知识对教师来说是能够帮助学生学习的~~关键~~这样一个假设。

这一研究领域中的学者都具有数学知识的重要性这一信念。试看下列一些论断:“数学的知识显然是基本的,能帮助其他人学习数学”,“牢固掌握基本概念是小学教师所具有的重要和必要的准则……(当)要把有关概念教给儿童时……(而)许多教师简直不懂足够的数学。”

有迹象表明:教师,特别是小学和中学教师的数学知识不是很

好。试看近期的报告：在回顾了关于职前小学教师内容知识的研究之后，布朗(Brown)、康尼(Cooney)与琼斯(Jones)推断说：“这一类型的研究留下了明显的印象，即职前小学教师不具备教小学数学所必需的数学认识水平，这种水平是一些专业组织，如 NCTM 在各种声明中所推荐的。”波斯特(Post)等人调查了 218 位中等年级教师关于有理数的概念性基础的知识。综合其调查结果，他们指出：

无论调查的项目是属于哪种类型，对其中的一半至三分之二的项目回答不出来的教师，所占的百分率不小。这个百分率随类型而变化，但一般地说，百分之二十到三十的教师在全全面测试中得分低于 50(采用百分制)。

尽管相信数学知识的重要性，尽管有迹象表明一些教师不具备相应的数学知识，但研究工作对教师的数学知识和学生学习之间存在着直接关系的看法并不给以很大支持。试看下面一组有关这一相互关系的研究：《数学能力的全国纵向研究》(NCTM)对教师知识和学生学习的相互关系提出了报告。NLSMA 调查者仔细地核实了教师所学过的数学课程的数量，然后测算这些数量和学生学习之间的相关系数，他们没有发现重要的关系。5 年之后，艾森伯格(Eisenberg)重复这一研究，得到了同样的结论。这里重要的是要注意，这些研究把教师的知识定义为成功地学完的大学水平的数学课程的数量。它没有设法度量教师所掌握的数学，或精确地确定在学完的各种课程中所覆盖的数学。

在某些报导学生学习和教师知识的相互关系的研究工作中，教师知识是通过例如《全国教师测试》之类的成绩测试而测定的。其他一些研究则调查了教师的知识获得与学生的学习之间的相互关系。这两类研究都没能更多地指出教师知识与学生学习之间的相互关系。这些研究结果是如此令人失望，以致贝格尔(Begle)

说：“教师的学科内容知识的效应似乎远远没有为我们大多数人所意识到的那么强……对教师的进一步研究好像对我们改进数学教育的企图并无益处。”

这样就显得我们虽能证实教师(至少小学教师)的知识不是很好,但是一直到最近都没有多少证据能表明这一知识的缺陷严重地影响了学生的学习。然而,在我们把教师的数学知识是一个有价值的研究领域这个信念全盘地抛弃之前,让我们先来考察大多数的研究工作是如何测定知识的。例如,在 NISMA 的研究中,所学过的大学课程的数目时常用来作为一种知识的代理测度,对教师的知识是如何综合起来的,或在所学的大學课程与课堂教学之间是否存在着相互关系,没有提出多少依据。其他的研究使用某种形式的标准化测试去确定教师的知识,但和前面所说的一样,它也并不设法去测量教师知识的复杂性或教师所掌握的正规数学与他所教的东西之间的相互关系。此外,相关技术常被用来评估教师知识与学生成绩之间的相互关系,以致对所存在的任何关系的方向性都很难得到了解。因此可能是不适当的知识测量与相对有限的研究方法隐蔽了原本存在着的教师知识与学生学习之间的相互关系。

近来,有些研究工作已经指出了一些不同的结果,这部分地是由于研究方法上的改变。学者们不再使用相关技术去测量教师知识的某种度量与他们的学生学习之间的相互关系了,而是关注于教学本身。教师在教室里所做的一切被当作教师的内容知识与他们的学生学习之间的传递者而加以研究。这些研究,大多数都是在解释的传统下做出来的,它们集中地对第一线的教师在教室里的行为加以丰富的描述。通常是一小部分教师被描述后,就对教师的教材知识与课堂各方面的相互关系作出各种推断。常见的是:对专家教师进行描述;把较高级的专家教师和较低级的专家教师作比较;或者将教师同他(她)本人作比较,即将他(她)所知较多

的领域同他(她)所知较少的领域拿来比较。

下面,我们将深入地描述三个例子,其目的是为了说明正在被使用的方法,结果的性质,以及由这种类型的研究工作能得到什么和不能得到什么。所有这三项研究都指出了内容知识对教师在课堂教学上所作的决策的确有着影响。所考察的是一个一年级教师与两个大学教授的工作。这些教师极不相同,他们所教的学生在年龄上与经验上的差异很大。根据对他们教学的描述,教师的数学知识对他们的教学有影响,这一点是清楚的。但是,那种影响的性质和对他们的学生学习究竟有怎样的影响,却并不是那么清楚。

**一名一年级专家教师** 第一个例子涉及一位小学教师,她在多种内容领域上的教学被观察了两年多,而在这些领域内,她的内容知识并不一样。杰克逊(Jackson)女士是一位积极地参与了《认知指导的讲授(CGI)》课题计划的教师。在计划的第一年之后,根据对她在课堂上的教学与她的学生的学习两者所做的观察,CGI专职人员确认她为一名 CGI 专家教师。在计划的头两年期间,杰克逊女士任教一年级;在第三年,她和她的一年级班级转入了二年级。

当她在许多内容领域上对学生做工作时,我们都认真地对她进行了观察,但是这里将只对她教二年级时在加法、减法和分数上的教学所做的观察作一报道。作为 CGI 计划的一部分,杰克逊女士研究、学习了大量的关于加法、减法这一范围的内容。特别是,她学习了多种能用加法或减法解决的问题类型,学习了加、减法问题之间的相互关系,还学习了儿童用来解题的策略。在分数内容上,她没有受过在职培训。杰克逊女士不仅多年来在分数领域内缺乏研究,而且她称她的分数知识是欠缺的,她希望掌握分数知识如同掌握加、减法知识那么多。在测定她的分数知识时,发现她在内容上所知有限,而在教学法上是丰富的。显然她的加、减法内容



知识大大丰富于她的分数知识。

杰克逊女士加减法的教学方法和分数的不同。在加减法是教学的重点时,她班上的中心活动经常是问题解决,使用各种类型的问题:结合、分解、部分-部分-整体和比较。在分数教学时,只使用一种基本类型的问题:部分-整体。加减法教学期间,课堂讨论大部分由学生引导作出。他们时常写出自己的问题,并详细地讨论不同的解决策略。如果杰克逊女士企图在学生准备就绪之前转移到另一个问题上去,学生会拒绝进行,直到他们把原来的问题解决了为止。杰克逊女士听任学生操纵讨论,并且多数是根据学生本身情况来对进度和活动的选择作出决定。当学生产生一种意外的反应时,杰克逊女士会感到一阵激动,并经常地据此而确定该课时或该周余下时间内的活动方向。她会十分详细地对我们诉说某个学生的反应,并说明如何据此反应以确定学生下一步的行动。

当问题解决的内容是分数时,课堂讨论就大不相同,这时杰克逊女士对学生的相互作用加以操纵的程度就大得多。在加减法的教学期间,当一个意想不到(对杰克逊而言)的反应给出时,它时常成为较多问题解决的基础,或把讨论延伸到关于那种反应是否适合的问题上去。杰克逊女士能够把握这个反应,用它来向学生提问或提出不同类型的问题。而当一个意想不到的反应在分数教学期间给出时,杰克逊女士仔细地听取学生,但不对学生所说的有所表示。她通常不跟踪学生的反应以提出专门澄清的问题,她也不设法提出建立在学生反应基础上的其他问题。总之,在涉及分数的课内所发生的讨论和数学要比涉及加减法问题解决的课内所发生的少。学生对问题解决的讨论,在分数课中也不像在加减法课中那样轻松自在。因此问题变化量依赖于课堂内容是加减法还是分数而定,课堂讨论量和随之出来的活动量也是如此。看来可以合理地推断:杰克逊女士在课堂行为上的这一差异至少是部分地由她在两个内容领域的知识差异而造成的。

对杰克逊女士二年级班的学生在一年级末和在二年级末都进行了测试。他们解决加减法问题的能力在一年期间有了显著的增加,而同时他们的分数问题解决技能的增加则不怎么显著。我们决不是要指出在杰克逊女士班上就分数发生的一切是不恰当的。这些二年级学生所做的分数工作超过多数二年级的学生,对分数所进行的活动使他们能发展分数的基本概念,从而也能学习乘、除法。然而,明显的是,在哪个领域杰克逊女士的知识较多,那么其教学与随后的学习就越丰富。

**一位具有高水准数学知识的四~五年级教师** 兰帕特(Magdalene Lampert)已经在初等学校从教10年,她现在是密歇根州立大学教师培训研究院的一名教授。作为她的学术活动的一部分,她每天教一个小组孩子的数学。虽然从来没有作过明确的测定,但是她的数学背景是完善的,教育背景也是完善的。通过阅读兰帕特自己的教学手稿和她的一位同事写的兰帕特研究实例,可以确认她教学上的某些重要方面。兰帕特教学数学的总目标包括“学习什么是数学,学习如何从事数学。”她说,“这些目标有着相同的目的,并且是和获得数学的要点——概念与操作程度——互相联系着的。”她要求她的学生学会数学思维,并发现他们自己有做数学的能力。“目的是帮助学生发展数学能力,成为作为人类思维一种体系的数学的积极参加者。”

在开始上课之前,兰帕特仔细地思考她将要教的数学。在上课期间,她使学生参与对话,并且不断地作出反应,对他们提出“你怎么知道的?”或者“为什么你认为那样?”的问题,她仔细地听取学生的回答,把整堂课聚焦在她想要学生学习的内容上。她能利用学生的几乎任何一个反应作为一个机会以推动进一步的讨论。学生显得活跃地参与数学,正在形成以他们自己的方式去理解数学,而这一点恰与兰帕特对数学思想的分析是一致的。“兰帕特的教

学法巧妙地把目标和过程融合在一起。……她把数学思维和活动模型化,提出问题以推动学生分析,明确表达他们的思想,……兰帕特根据数学本身的原理得出她的策略和方法的理论基础。”(引自波尔(Ball)1991年的书)

显然,兰帕特正在利用她的数学知识构造她在课堂上的所作所为。她意识到数学包括概念与过程,也包括程序。她把所有这三方面综合进她的教学。对她的教学我们获得了丰富的描述,但不幸的是她和她的同事对她的教学在学生的学习上产生的效果如何,没有作出报告,所以我们还没有证据说他们比传统的课堂教学学得更多。我们只能设想,这样的一种丰富的环境肯定对她的学生学习到的东西有积极的效应。由一位了解数学的教师所创造的丰富环境的影响是一个需要研究的课题。

**一位知识渊博的大学教师** 舍恩菲尔德(Alan Schoenfeld),数学教授,从事于有关数学问题解决的研究。作为这项工作的一部分,他一直在教一批强化的大学水平的班级,进行启发式的问题解决研究,并且写下一些书面材料。在他所描述的各个班级中,其强调的重点各有一些差别,这依赖于在调查研究中提出的特殊研究问题。然而,正如舍恩菲尔德所说,也有类似之处:

正如所期望的,实际上我们所有的教学时间都投入于解决问题与讨论问题解答。典型的一天工作概要如下,课堂教学经常从讨论家庭作业开始,其解答时常由学生提出。在讨论完家庭作业之后,提出一串问题,然后全班分成小组(每小组3至4人)研究这些问题。当学生研究时,我就像一个漫游医生在教室里四处走动。当他们已经取得适量的进展,或者已经失去热情时,我又把他们重新召集在一起,了解他们已经解决的内容,着手处理一组困难的问题。

当然,也有着关于问题解决策略方面的讲演,在其中给出了样板式的解答。当样板式解答被提出时,决策过程明显地扮演模型化的角色。在我得到

解答的一个关键点时,我提出三个到四个可能的选择途径,并且加以评价。在评价的基础上,我选择可遵循的一种途径(也许是错的一种)。

当班级集中在一起研究问题时,我就成为学生建议的乐团指挥。我的作用不是将学生引向预先确定的解答,虽则显然地有许多机会可以恰当地对某些特殊的数学思想加以论述。……(我问这种类型的问题):你认为我们应当做什么?你是否完全肯定你理解了这一问题?我们应当试图用哪一种建议?为什么?

当学生被问题困扰时,小组形式解决问题为个人同学生一起进行解题提供了机会。在这一部分教学中,我的作用在本质上是扮演一个问题解决教练的角色。

课堂讨论在这里也是部分地由学生主持进行,课堂教学的重点是学生对于数学中的过程与相互关系的认识理解。舍恩菲尔德没有叙述他的学生学习的內容,所以我们只能再次设想,但没有验证,他们的学习受到舍恩菲尔德的课堂行为的影响。

虽然我们有关于各个教师的内容知识的不同水准上的信息,但是似乎这三种教师的数学知识对教学都有影响。这三种情况具有许多共同的成分,但其中最重要的一些是学习者接触到了数学的丰富多采,以及课堂教学的结构,使学习者有可能参与真正的数学活动。每个班上数学所强调的重点都是问题解决和学习者理解数学和做数学的能力。在所有这三位教师的班上,学习者自己做数学,思考他们所做的数学,和他们的同学与教师一起进行数学讨论。这些班上的学生所体验到的数学,和通常的课堂上所体验到的那种程序数学根本不相同。

通过这种类型的研究所得到的知识是有价值的。这些研究对一个掌握数学的教师如何构造课堂教学作了丰富详尽的描述,这样的教学使学生以某种方式与数学相互作用,而这一方式已经广泛地被认为会导致积极的成绩,包括效果与认知。大多数研究者认为这种班上的学生发展了他们自己与数学的积极的信念体系,

也学到了一群丰富的相互有关的数学思想。然而,这种描述不是,也不应该是就此宣告结束。在没有提供更多的关于这种课堂教学对学生成绩的影响的信息之前,研究是不完全的。当然,对知识渊博的教师在教学中造成丰富课堂环境对学生产生的影响进行研究,这是一个富饶的研究领域。

**内容知识和其他学科** 在其他学科中有着一些研究,它们加强了教师的内容知识会对学生有所影响的观点。哈什维(Hashweh)分析了教师的教材内容知识在生物与物理中的教学效果。他在某一个教师所擅长的完全确定的范围内测定教师的知识,同时也在另一个他们具备知识较少的有关范围内进行测定。在他们擅长的范围内,教师具有较为详细的课题知识,较多的其他学科的概念知识,较多的更高层次原理的知识,和较多的把各课题的本质互相连结的方法的知识。换句话说,对一个课题教师知道得越多,那么他们的知识和其他方面就越是有关联,并且这些是综合在一起的。哈什维也收集了许多有关教师行为的信息。在教师的知识较为贫乏的领域中,教师布置着重于复忆的考题,而在教师的知识较为丰富的领域中,则布置要求应用、转换、能得到概念之间相互关系的问题。当教师不是在擅长的范围内工作时,他们较紧密地遵循内容章节,而不会拒绝不合适的章节。另外在他们知识渊博的领域中,教师会纠正学生的误解,而在知识较为贫乏的领域中,他们或者无法辨别误解,而与学生一起随波逐流,或者对误解不加以纠正。哈什维指出:教材内容的知识极大地起作用于从书面课程到能动课程的转换。

瓦恩伯格(Wineburg)与威尔逊(Wilson)描述了两位教师的历史知识的教学效果。这两位教师都已被大学教授、学校行政管理人员和其他教师确认为是专家教师。依据的资料是通过互相交谈、自我介绍与课堂观察收集的。报告粗略地说明这两位教师之间极

为不一样的教学风格。一位是善于表达的,他以戏剧性的表演迷住了他的班级。另一位则建立一种环境,使她的学生深深地卷入对预先设计好的观点的研究,以致于互相争论。每个教师都显示出对所教的重要历史概念的相当的掌握了解。瓦恩伯格与威尔逊指出两个班的学生都由于这两位教师丰富的教材内容知识而学到了大量的历史知识。在试图理解这种知识如何支配教学方法的过程中,瓦恩伯格与威尔逊指出:

教材内容知识在教学中所起的作用是复杂的:一个教师的美国历史知识并不以任何规则的方式支配他或她要教什么。教历史把教材内容知识和许多其他的理解认识融合在一起——学生的知识、学和教的知识、课程的知识 and 教育目的的知识……教师所掌握的关于美国历史的知识不仅影响他们要教的内容,而且影响他们教课的方式。

对具有丰富、综合的教材内容知识的数学、科学和历史教师的研究为教师知识会影响教学提供了凭证。在这些研究中,教学的内容看来好像如同课堂讨论一样至少部分地依赖于教师的知识。知识并不明确地支配做什么,这在提供的历史教师的例子中是再清楚不过了。然而,所教材料的丰富性似乎直接与教师的教材内容知识有关。

当然,以说明性研究模式所做的这些研究,关于教师的教材内容知识对讲授、乃至最终对有效的认知成绩的影响的问题,并不给出确定的结果。我们所需要的是要进行明确而又系统地测定教师的内容知识的工作,其重点放在学生在教师的教材内容知识有差异的环境中所学到的一切上面。然而,这些研究确实指出了研究教材内容知识的必需性,因为它会和教师知识的其他方面相互产生作用。研究的结果是令人感兴趣的,为教师的内容知识与其课堂教学的结构是明确相关的信念提供了凭证。

**教师内容知识的组织** 哪些教师的数学知识对他们如何构造学习活动会有影响呢?证据正在开始积累以支持那种思想,即当一个教师对数学有理性认识时,这种认识会以积极的方式影响课堂教学。若想理解什么是数学的理性认识,就应当考虑两种构成物:(1)数学自身的本质,(2)教师所具有的数学知识的智力组织。纵然这两种构成物看起来是十分背道而驰的,但实际上却并不是如此,因为两者的相互关系是极其活跃的。依次地考虑上述的每一点,以充分地理解两者的相似性,理解它们对教师知识的研究的意义所在,是有好处的。

**数学的本质。**首先研究数学的本质。近年来,有许多这一方面的文章,其中一些共同的题目是:日益增长的数学内容,它的重要的结构部分间的相互关系,它表达客观世界的能力,它在交流中的应用,和它在解决许多类型问题中的创造性应用等。研究者强调两种关系:一种是数学内部的关系,另一种是数学与客观世界的关系。对数学本质的研究已经导致要求改变数学课程,以强调数学过程,强调数学思想间的相互关系,强调客观世界的问题解决,但数学本质在许多有关教师内容知识的研究中一直没有适当地被加以考虑。早期的研究倾向于使用不适当的测定,说明性的研究则很少引证数学知识。使用一个恰当地涉及数学本质的复杂定义去测定个人的数学知识不是容易的,大多数所使用的测定设施并不是根据这一定义的。需要的是测定思想的相互关系、思想的应用和数学过程的方法。然而,这种方法目前只在对学生进行研究方面得到了发展,关心教师知识的研究者必须修改这些方法或发展出他们自己的方法,才能在测定教师的数学知识时把复杂的数学本质考虑在内。

**教师知识的智力组织。**另一种理解教师知识的理性本质的途径,是求助于处理知识的智力组织的认知科学文献。这一文献为研究教师知识的组织与错综复杂的内容提供了新的理论与方法:

如何获取知识、构造知识与回忆知识。认知研究者企图阐明什么是个体的智力表达形式,然后探究这些表达形式是如何发展的,如何相互联系着的,和如何被回忆的。这样所得到的信息为更充分地理解教师知识对他们的教学与学生的成绩的影响提供了基础。这一信息将为我们对教师如何表达他们的计划、如何组织他们的常规工作、如何根据学生的反馈评估他们自己的教学和如何断定他们是成功的等问题的研究,提供深入的了解和猜测。

虽然在认知科学领域内存在着各种描述一般的认知系统的互不相容的模型,但是关于个体的知识结构方面的互相一致的信息还是有的。例如,给以适当的经验,个人就能“加厚”信息,并且把它组织成等级的形式(其中特殊的知识被嵌入到更一般的可实施的知识中)。这一知识的等级组织允许有效地使用信息和增加记忆容量。

理解等级知识结构的一种途径是研究专家与新手在解决问题时的表现。研究者连续不断地报告说:专家比新手更有效,且有不同的解题途径。专家有效地研究问题空间,掌握命题的变形以助于决策,根据性质而不是根据个别的规则或例子去组织他们的知识。因此,相对于新手而言,专家的知识是比较完好综合的,更容易理解。对于专家来说,他的知识是以特殊方式组织的:思想之间存在着连结,能详细说明思想之间的相互关系,在思想之间的联系可以不一致,组织知识的方式和理解应用有关。

研究者们也已开始调查关于知识的智力组织的信息如何能用来加速新知识的获得。艾龙(Eylon)与赖夫(Reif)指出等级组织的有效使用依赖于不同水准的等级与其他水准之间的明确的智力连结,依赖于所提供的材料的组织与个人内在知识的组织之间的相互关系。他们也指出具有高水准知识组织的个人能较好地复忆信息。个人的知识的组织对成功地掌握该信息和获得新知识有着影响,从而对解决问题也有着影响。



这些思想在数学教育的研究中并不陌生。有过一段研究的历史支持以下的思想,即仅仅当数学学习是与对数学过程的理解同步进行时,或者当学习者能建立起他们已经掌握的东西与新的思想之间的相互关系时,知识才被保留,或是有用的。过去,关于理解的这一定义大量地引起了数学结构的分析,但是认知传统中的新工作已经将什么是理解地学习的含义扩展了。共同点看来好像存在于思想的相互关系中,既在数学结构中,也在学习者的智力结构中。然而,在这类已经进行了的研究工作中,大多数都是涉及学生的数学学习的,只是最近,理解的构造物才被应用于教师知识的研究。教师所做的常常与教师的理性知识有关。这一工作的仔细研究揭示了,用于研究教师知识的构成物与研究学习者的人们所使用的东西非常类似。

有些分析教师知识的研究工作表明了这种知识的理性的或相互有关的本质正在被加以研究。这些研究几乎一致地断定,当教师的内容知识以和数学的本质相一致的方式加以定义时,和(或)当知识的理性组织被考虑时,就能发现教师的内容知识与他们的教学之间有着确实的相互关系。

莱因哈特(Leinhardt)与史密斯(Smith)收集了教师对分数理解认识的资料。他们的研究对象是新手(实习教师)和专家(教师,其学生在5年多的期间里已经显出不寻常的和连续不断地上升的成绩)。莱因哈特与史密斯通过和教师交谈,观察教师的教学,和让教师完成各种类型的卡片,发展了教师知识的语义网。在比较有经验的教师与新任教师的语义网之后,他们指出在专家教师中也存在着知识上的差异,“较有经验、有能力的教师在知识上显示出一种更为精细的等级结构”。换句话说,这些专家教师看来不仅懂得解决分数问题的程序规则,而且理解这些程序之间的相互关系。

斯坦伯格(Steinberg)、海默尔(Haymore)与马克斯(Marks)不仅调查研究了教师知识的相互关系,而且也考察分析了其他相关的

知识对教学的影响。他们报导了教师所受的正规教育与背景、他们正在从事教学的那部分专门的数学实际知识、他们对那部分专门知识在数学的“大画面”中处于何种地位的知识,和他们在教学中使用的方法之间所存在的一种关系。那些其数学知识显得是理性的和有联系的教师,在他们的教学中也是更为理性的,而那些缺乏这一类型知识的教师则更为照章行事。

在其他的学科中,也一直在对教师的教材内容的理性知识和学生的学习与课堂行为之间的关系进行调查研究。卡尔森(Carlson)报导了一项涉及科学的研究,描述了四位教师的教材内容知识。他对每个教师都确定了一些课题,在这些课题中,教师的知识水准或高或低,然后他收集了一年的课堂教学计划,划分成高的或低的水准知识课题的八节科学课的备课笔记,和教师与学生的评论。他指出当教师在一个领域内具有低水准的理性知识时,他们趋向于使用课堂作业与非实验性的计划,而同一个教师当他对一个课题具有高水准的知识时,就趋向于使用讲授与实验性活动。具有低水准知识的教师在教学中不鼓励学生提出问题和参与,而具有高水准知识的教师则积极鼓励学生提出问题。当教师在一个领域内具有低水准知识时,他们会传授内容,但其教学内容是建立在与科学本质相对立的基础之上。“对学习者的传授了科学,但它是一种不完全的科学观点”。

哈什维也描述了教师在擅长的范围内的知识和在另一个有关的而不擅长的范围内的知识,他的研究本文前面已作了介绍。在教师擅长的领域内,他们具有更为详细的课题知识,更多的其他学科概念的知识,更多的高层次原理的知识,和更多的课题统一体互相连结方式的知识,换句话说,他们的知识是联系着的和综合的。

上面引述的研究工作,没有一个本身特别有说服力。然而,结论的相似性为一个信念提供了依据,那就是当教师具有对专门教材的综合的、理性的理解时,他们就能那样地构造他们的课堂教学

以致于使学生能和题材的理性本质相互作用。在各种研究中,所教材料的深度似乎与教师的教材内容知识量直接有关。

现有的依据指出教师的内容知识想要对课堂讲授有积极的影响,那么这种知识就必须以一种特殊的方式加以组织起来,有理由相信目前之所以能够指出教师知识与课堂行为之间的积极的相互关系,这部分地应归功于教师的数学思想内在的相互关系正在被加以研究这一事实。内容知识与课堂教学之间积极的相互关系中的重要因素似乎是教师所具有的知识的智力组织。正如布鲁菲(Brophy)所说,

那里(教师的)知识越清楚、连结得越好、越综合,那么他们就将趋于越有生气地进行教学、以越有变化的方式表达、从而充分地鼓励学生,并对学生的评论与问题作出反应。而在他们的知识有限的地方,他们就趋于依赖教材的内容,不强调相互间的讨论,而善于布置课堂作业,并且一般地把事物当作一组静止的、既成事实的知识来描述。

### 数学表达的知识

另一类与内容并不完全分离的知识是应该如何在教学中表达数学。这牵涉到取出复杂的教材内容,并将它转变成学生能理解的表达形式。这种从数学到可理解的表达形式的转变正是区分数学教师与数学家的地方。现在请看瓦恩伯格与威尔逊对历史教师的讨论:

他们的目的不是在学科中创造新的知识,而是在学习者的思维中创造理解。历史学家只需面对学科内部,而历史教师则不同,他必须面对内部与外部,在深刻熟悉学科内容的同时,又从不忘记理解的目的是促进理解其他的内容。正是在这教材内容与教学法的交汇中,我们最为清楚地看到教师的专长。

符合于历史教师的也符合于数学教师。即使许多人把理想的数学教师描述为让学生“做”数学的人,但教学生“做”的数学还是必须放入一个能为学习者理解的框架内。对学生而言,数学必须被转换,以致使他们能了解他们的知识与准备学的新知识之间的相互关系。数学是由一大群高度有关联的抽象概念所组成的,如果教师不知道如何把这些抽象概念转换成能使学习者把数学与他已经知道的联系起来的形式,那么他们就不可能理解地学会这一切。

能表达大多数学校数学的一个方面的是,利用现实世界的情境和问题。每种数学思想都能用几乎无限多个这种情景加以表达。例如,在简单的加法和减法中,人们能够解决结合问题、分解问题、交换问题和比较问题。在这每一种问题中也有无数多个能为幼小的孩子所理解与解决的实际问题。不仅存在能用数学表达的实际情境,而且存在一群高度复杂的、具体有形的、以图片表示的表达形式,用以把数学思想模型化。例如(教算术用的)奎逊纳(颜色)棒能用来表达所有整数的数学思想,列阵能用来表达分数的运算。在涉及这种类型的表达形式的情形中,教师把学生应该学习的一种数学思想模型化。希伯特与沃恩的工作说明了这种类型的表达形式;它和小数的教学有关,也和迪安尼斯(Dienes)如何使用十进计数方块以促进学习有关。

我们相信实际情景和用具体东西或图片表示的表达形式这两者的使用有助于学生理解地学习数学的抽象思想。因此,为加速理解地学习,教师必须知道如何解释或表达他们希望学生学习的数学思想。有些研究工作已经调查了教师的数学表达的知识,其中多数研究工作指出许多教师缺乏这种知识。

鲍尔(Ball)报导了 19 位职前教师把  $1\frac{3}{4}$  除以  $\frac{1}{2}$  的表达式发展为一个故事问题或其他类型的模型的能力。除两位教师之外,其

他教师都能精确地计算出问题的答案,但是没有一个职前小学教师能把它发展为一个合适的问题表达式,并且只有大约一半的职前中学教师能这样做。这些职前教师知道计算答案的规则或程序,但是明显地不能把这种程序知识转换成一种能有助于学生理解概念的形式。奥顿(Orton)也调查了教师的分数概念的表达知识。他询问了29位在职的小学教师,他们如何对一个假设的在分数上有一定误解的学生教分数的概念。大多数教师严重地依赖于程序的与符号的表达方式,而不是依赖有助于理性认识的表达方式。

有点令人感到不解的是,在这两份研究工作中所说的教师都没有显出具有分数表达的知识。而多数初等职前数学方法课程是强调了这种表达式的应用的,虽然它们经常被称为操作。如果所研究的是整数运算这一课题的话,那么会不会得到不同的结果呢?教师知道他们通常所教的内容的表达式吗?知道这些表达式会对教师如何教或学生学习什么产生不同的结果吗?这种表达的知识应充实到教师的知识结构的何处呢?这种种问题都尚未解决。

### 教师的学生知识

教师知识的复杂结构中的另一个成分是关于学习者的知识。教师需要具备关于学习者的知识的这一思想并不是新的,几十年来已经认识到教师需要知道学生是如何获得知识的,如何发展有自信的自我形象的。职业教育的一个重要原则一直是,如果教师具有这种知识,他们将把它用于教学决策,以致改进学习。帮助教师获得这种知识是许多教育心理学课程的责任,这些课程包括从行为主义到皮亚杰的发展心理学的范围中有关学习的一般原则。有人认为这些原则对所有的学生和所有的内容范围都是适用的,并且如果教师掌握了这些原则,他们将在制订课堂计划时运用他们的知识并加以贯彻。然而,没有多少依据能表明这种知识

对教师作出教学上的决策时是有用的。许多教师除了照章办事的方式之外都显得不能使用这种知识。

显然,各种学习理论对教师并不有用的一个原因是,在发展学校的课程与教师的教育规划时没有任何人考虑到教师与他们的认知。一般地认为如果课程教材得到认真推敲地发展,且以专家的有关学生如何学习的知识为依据的话,那就好了。也有人认为教师所掌握的一般原理的知识将确保教师使用预先设计好的方式去使用教材。然而教师能对学习者有所影响之前,这些教材是怎样渗透到各个教师的认知中去的,这个问题没有得到考察。

试考察《发展数学过程》(DMP)这一例子,这是一项依靠支付大量联邦基金发展起来的初等学校数学规划。这一规划是围绕两个基本课题加以组织的:数学的结构与学生如何学习数学。学习活动被仔细地设计,以便把重要的数学思想按那样的方式表达出来,使学生可以自己学习其内在的相互关系。另外,还设法给教师提供为作出教学决策所需要的各种指点与帮助。事实上,这一规划的设计,就是为教师对内容的选择、对应当如何施教这些内容,以及如何对它作出评价等去作出大多数的重要决策。人们相信,对有效的教学问题所必需的知识,即使不是全部也是其中的大多数都已经涉及。

然而,DMP 从来没有按照作者的计划被实行过。斯蒂芬斯(Stephens)研究了 DMP 的实施情况,他指出:使用这一规划的教师“成了把一堆教材内容有效地向学生进行灌输的执行者,并因此而破坏了作者所持有的主要教学目标……。事实上 DMP 的确是向教师提出了一套完整的数学课程,供教师去贯彻和执行。”教师被要求具有 DMP 的作者所挑选出并明确表达的一组预定的信念与知识。由于 DMP 作者的信念、知识与目标并不必然为教师所具有,所以大多数教师没有按计划使用这一规划。虽然课程发展者以最好的可能方式把学生如何学习的知识补充进这一规划,但它

在教师实际上作出数学的教学决策时并不有用。

也许可以提出争辩说:对学习者如何获取知识的理解与教师并不相干。争辩者提出的理由可以是:任何一种学习理论仅仅反映了过去对知识的获得所了解的一切,而并不反映一个创新的教师在课堂上能够或应该做的一切。也可以争辩说:学习是依据课堂上所发生的一切,所以学习依赖于教师如何构造学习环境,而并不依赖于学生所做的一切。因为看来这些学者认为不可能制订出一种一般的学习原理来,使它影响学习的教学决策能有所作用,所以考察特殊的学习原理也许是有用的。

**有关学生认知的知识** 以认知科学的观点对学习进行的研究,更新了关于学习者的思维知识与该知识应如何用于教师的决策的讨论。许多人认为由认知科学研究推导出的原理当它和教材内容结合起来,并使它直接用于教师时,比其他的学习理论对教学决策的影响有更大的潜力。认知原理组成的一个统一的整体看来与我们所知道的教师的知识组织如何影响他们的课堂行为的原理是一致的。

看来,这种类型的知识当教师计划在课堂上对各别学生进行教学时应当是有用的。然而有人认为:要教师记住并利用每个学生的思维过程,从而使他们能作出教学决策,那是不可能的。例如,帕特曼(Putnam)与莱因哈特报告说,他们没有掌握任何依据,可以认为专家教师在教学期间意识到学生的思维过程。他们指出掌握学习者的思维过程不是专家教学的一个重要成分。然而在这个研究中,关于专家教师是否事先就对学生思维的综合知识有所掌握,却没给出任何有根据的报导。

本文作者和卡彭特(Carpenter)与彼德森(Peterson)所作的一系列研究,说明了如何将学生思维的知识用于研究教师的知识的研究方法。这些研究指出,教师有关学生思维的知识,对于课堂学习

可能有重要的影响。这些研究依托于调查年幼学生对加减法学习的研究。卡彭特与莫泽(Moser)对加减法的内容领域作了理性分析,其结果导致对能被年幼学生解决的11种类型的加减法文字题的确认。通过与学生的个别交谈,他们明确了特殊类型问题的难度等级与年幼学生解决这些问题的解答策略。当学生成熟时,他们能用日益成熟的策略解决更为困难的问题。许多其他的研究进一步证实了卡彭特与莫泽的发现。

这样,加减法的知识是一个综合的整体,它由一种理性的内容分析与学生关于该分析所含各种成分的思维相结合而组成。这结果对学校里所教的重要内容而言,是明确的;它给出了一幅有关学生认知的容易理解的图画;并且是健全的。它包含着发展心理学的成分,反映了学生解决较为困难的问题类型时成熟的策略与能力。

作为由《全国科学基金会》资助的、被称作为“认知指导的教学(CGI)”的计划的一部分,人们进行了多项的研究,企图弄明白:通过对加减法的研究而获得的知识,是否足以对教师的教学决策加以区别了。首先,我们发现即使在教师正式教学加减法的内容之前,他们就已经知道许多这方面的内容。然而,这些知识不是特别完好地有组织的,教师常常没有认识到问题类型、解答策略和各种问题类型的困难之间的相互关系。他们所拥有的知识显得是零乱的,没有组织成使他们能理解学生的思维,且能用于教学的方式。

在随后的研究中,我们通过请学生解答问题,然后再请教师预言学生将如何解决那些问题,去比较实验组教师和控制组教师对课堂上学生的思维知道些什么。然后让实验组(CGI)的教师了解学生在加减法中的思维知识,这样,在一年内,我们把他们的教学决策(由课堂行为所表明的)与控制组教师的课堂行为进行了比较。在教学学年末,我们再来测定实验组教师与控制组教师所具有的有关他们的学生的知识,结果是,对于学生在解题及运用有关



数的事实进行工作时所使用的智力过程,实验组教师比控制组教师知道得更多。实验组教师的教学决策在某些重要的方面不同于控制组教师。实验组教师在课堂上花费较少的时间于操练活动,而把更多的时间花费于问题解决活动。他们也比控制组教师花费较多的时间去听取学生解释他们在解决文字题时所使用的智力过程;他们也比控制组教师更多地期望和接纳产生的更多种类的问题解决策略。实验班上的学生在计算技能与问题解决两方面也比控制班的学生学到更多。

这组研究说明,由关于学习者思维的研究所得到的知识,能为教师所用,从而影响到教育成绩。CGI 所作的研究其目的在于调查那种思想,即关于学生在加减法上的思维知识,将使教师能评价学生的知识,并能根据学生所有的知识而对每个学生调整自己的教学。在许多情况下,课堂里实际发生的一切并不是我们所预期的那样,但是我们相信有关学生思维的知识的的确影响着教师在课堂上的所作所为;他们能以不同的程度善于对待各别学生,并且作为教师掌握学生思维的结果,学生的学习能有所改进。

CGI 研究提供了依据,当教师具有合适的、良好组织的知识时,他们善于对待各别学生。CGI 教师了解使用的知识是非常确切的,又是良好组织的。我们猜测这一知识如此有用的原因在于它是确切的,与学生在一个特定的已经成为教师课程一部分的领域中的问题解决有关。看来这种知识使教师能够理解学生的思维,而在以前则不可能如此。正如一位实验组教师所评论的:“我经常知道倾听孩子是重要的,但是以前我从不知道问什么问题或留神听什么”。我们也猜测帕特曼与莱因哈特所提到的一些专家教师不注意对待各别学生的一个原因,是他们不具备 CGI 教师所具有的关于学生思维过程的知识。

应当指出,在数学课程中不存在一组健全综合的关于多数内容领域的有效知识。至今,对于需要多少学生的多少思维知识才

能对教学产生必要的影响,我们还没有什么这方面的信息。我们是否必须等待认知科学家为我们提供加减法中详细的知识类型?或在一个领域里的详细知识是否在其他领域仍能充分地使教师理解学生的思维?教师是否还可能对每个内容领域都具有这种完全的知识体?存在许多这种种尚未解决的问题,我们当前正在调查CGI计划对初等学校的其他内容领域的伸展。然而,CGI研究支持这一思想,即当学生的思维知识是综合健全,并且是已经掌握的课程的一部分时,它能够影响数学的教与学。

### 教师的教和决策的一般知识

近十年来,研究者日益增多地研究教师,研究他们作出的决策如何影响学生的学习。大多数这种工作已经在数学教育领域之外进行,并且和一般的教学原理有关。许多研究是根据教师是善于思考的具有专一的人类能力的专业人员这一观点而进行的,这种能力就是计划、执行、评价和思考他们的教学。教师不仅作为观察课堂行为的人员,而且作为课堂教学前、教学中和教学后的信息的积极处理加工者。谢弗尔森(Shavelson)与斯特恩(Stern)(1981),克拉克(Clark)与彼德森(1986)给出了这一研究的概要回顾。这一工作证明了教师具有对他们在课堂教学中的感性认识、计划与行动有影响的理论和信念体系。教师是富有思想的、善于思考的个人,从事一种复杂的、高认知要求的对人的加工工作。教师的信念、知识、判断力和思想对他们的决策有深刻的影响,这些在很大程度上都决定了学生在课堂所学的一切。

研究已经清楚地证明教师在教学前、教学中与教学后所作出的决策对学生所学的一切起支配的影响。在这些时间中作的决策不是也不可能被完全分离,但同时各别地考察这些决策是有用的。计划教给许多教师的关于课程的四个步骤(明确目的、选择行动、组织行动和明确评价程序)看来并没有经常为教师所用,但是教师

的确花费时间作出计划；他们经常作整整一年的计划，学期计划、单元计划、每周计划和每日计划。这些计划一个套一个，某一计划的修改会导致其他计划的修改。这些计划在篇幅上、细节上和特性上都不一样。事实上，有些计划从来没有被写下来，而只是记在教师的心上。

在实践之前或计划阶段，教师作出显著影响教学的决策。他们决定教什么，如何进行教学，如何组织课堂教学，采用什么样的程序，以及如何使教学适应各别学生。在彻底地回顾关于决策的文献之后，布什(Bush)指出大多数教学决策是实践前的决定。人们不应当把这个看作与 CGI 研究中或与曾报导的知识更为渊博的教师在教学中对学生反应的研究中教师所做的相冲突。事实上，对学生的这种反应是这些教师计划中的一部分。

教师在教学期间也作出了许多决策，这些决策常常称为相互作用的决策。教师选择了这样一些决策，即修改他们的计划，以特别的方式对一个学生作出反应，指定一个学生回答问题，肯定或否定某种答案，训教不守秩序的学生，鼓励害羞的学生和加快或减慢课堂教学进度。教师作出这些决策在一定程度上是通过评价计划进行的情况与学生反应的程度而作出的。教师在教学之后反思他的教学。教师可能常常参照他们收集到的特殊信息，进行非正规的思考。例如，核对工作记录时教师得到了那天学生学了什么的信息。她(他)可以用这一信息，评价这一天的教学，计划第二天的教学。

对教师决策起重要影响的是促进教师行动与决策的知识，是使教师具有能推理、判断、权衡取舍、思考与行动的灵活性的知识。最终，教师如何行事与可能产生的效果依赖于教师所具有的知识。许多涉及决策及研究决策如何受知识影响的工作必须用教师个人与实践(一般的)的知识去做。在课堂教学的组织与进行中，经常包括特殊的知识，例如如何继续训练，如何建立有效的程序。它包

括过去所教的各种课程的结构及各种学生如何对这些课程作出反应。

这种知识通过种种经验建立起来,同时它又经常增长、变化。克朗迪宁(Clandinin)说明“个人的实践知识被看作为暂时的、随时可更改的与短暂瞬变的,而不是固定的、客观的与不可改变的”。实践知识的目的是引导聪明的行动,表达目标和给出教师经验的具体表现与意思。它是个人强制性地调整个人的行动的特殊情境的知识。换言之,它是教师决策的重要基础。这一来自职业的、个人的经验的信念的观点的基础形成了教师的知识。教师被理解为会思考的人,他的知识依据于通过信念、洞察与习惯表现出来的经验。

### 教师知识的框架与认知模型

现在我们转到不同的方面,其中知识作为一种综合现象加以研究,并且考虑某些已经被提出的框架和指出不同的成分如何被组织的认知模型。从中我们选择舒尔曼(Shulman)与彼德森提出的框架,简要地加以报导,并且深入地讨论三种模型:一种是结合数学教学加以研究,而另外两种,我们考虑有潜在研究的可能。

舒尔曼提出一个框架,分析教师的知识,区分不同类型的知识:教材内容知识、教学法内容知识与课程知识。教材内容知识“本质上是教师头脑中的知识量与知识组织”。这是教师的数学知识。

按照舒尔曼的观点,教学法内容知识包括“那些(内容)思想最有用的表达形式,最有力的类推、说明、列举、解释与论证——一句话,表达和系统地阐述主体的方法,使它能为其他人所理解。”它也包括“对什么会使特殊课题的学习容易或困难的理解,以及对那些最经常施教的课题,不同年龄、不同背景的学生本身所带有的设想与预先形成的看法。”在这类知识中包括数学可以怎样解释给学生

听,例如怎样表达一个分数,以使学生能理解分子与分母(以有部分阴影的一个几何区域或一个集合表达分数)。在教学法内容知识中还包括了解学生在特定的数学领域内如何进行思维的知识。近几年在认知科学传统中所完成的工作容易纳入这一类型;例如卡彭特与莫泽的工作,因为它处理了年幼学生在加减法中的问题解决。

课程知识是对各种课题施教有效的教学材料的知识,是“在特别环境中指示使用或禁忌使用特别课程或程序材料的特性的集合”。各种程序材料的知识,例如表现数学思想的一批训练或计算机软件属于这一类型。因此舒尔曼认为教师知识的重要成分是他们所掌握的数学知识,所了解的学习者是如何思维数学课题的知识,及用于教学数学而发展起来的的教学材料。

彼德森在舒尔曼的框架的基础上作了修改。她认为为了有效地进行教学,数学教师需要三种类型的知识:在特定的内容领域内学生如何思维的知识,如何加速学生思维增长的知识,及他们对自身的认知过程的自我意识方面的知识。彼德森没有忽略内容知识对教的必要性,但是令人信服地指出这一知识必须在她所确认的三种类型知识的关联中加以掌握。从学生的认知和教师的超认知中分离出来的数学知识对她来说显得并不重要。按照彼德森的说法,除非教师能理解他(她)自己在数学上的思维,内容知识在组织课堂教学以利学生学习中才是有用的。

**教学技能的认知模型** 在用公式表达教师的认知模型中,一些心理学家,包括谢弗尔森企图描述为决策提供机制的智力模式。这些研究者提供了依据,说明这种模式是存在的且在教师的决策中得到了应用,各种特殊内容的大多数工作已独立地做了。在这个与内容独立的工作中,莱因哈特与她的同事的一系列工作是值得注意的。

莱因哈特与其同事的目的是深入地描述有技能的教师的智力结构。这种工作以教学是一种复杂的顺从于分析的认知技能这一信念为依据,在一定程度上类似于认知心理学所描述的其他技能。利用认知科学方法,他们首先假设了一个智力结构模型。其次他们考察和对比专家与新手的施教行为,了解他们的行为是否与这个假设的模型相一致。

模型。按照莱因哈特与其同事的观点,施教技能是由至少两种基本的、有关联的知识体系所决定的:教材内容(内容知识)与课堂教学结构(实践知识)。重点在于课堂教学结构,它既受到教师所教的内容知识的支持,又受到它的约束。

课堂教学结构的知识由大纲、教案与程序组成。大纲与教案之间的差别不是绝对的,在进行一系列调查之后会有所变化,大纲能被刻划成一个动态的总体计划,其包括一堂课的总目的与活动,而这些在教学进行时能加以修改。教案包括教师为教学一个特殊的课题超前建立的一组松散有序的目标与行动。教师在开始上课时,早就在头脑中形成了教案,它包括各种活动,例如回顾、展示和督察下的实践,这种种活动将在教学期间发生。它是一堂课重要的决定因素,在教学中很少变动。教师花费很多时间发展与琢磨这些教案,并在任何合适的时候加以使用。

程序是教师与学生经常实施的活动。他们“允许有效地执行相对低水准的活动,并没有把更一般的真实存在的教学活动与目标从有意义的心理对策脱离开来。”

因此,他们假定一个教师开始上课的时候,她(他)具有一个总的目标,具有某些为达到总目标先后将采用的步骤或活动,及某些使课堂教学能平稳运行的程序。从学生那儿获得的信息会稍许修改所发生的事情,但对预先计划好的课堂教学的修改充其量是有限的。

教材内容知识定义为“在一个特定的学校水准课程的教学过

程中教师必须具有或使用的知识”，是大纲与教案的基石。因此，教材内容知识不仅包括数学知识，而且包括课程活动知识、有效的表达方法和评估程序。教材内容知识有助于教师建立大纲与教案，特别是决定使用什么样的数学课题的表达形式，和(或)如何表达这一课题。然而，按照莱因哈特所提出的模型，教材内容知识本身不是教学行为的第一位决定因素，相反，课外建立的大纲与教案的丰富的全部内容确定了教学方法。

模型测试。为考察所假设的教学认知模型的有效性，莱因哈特与她的同事把专家(其学生在标准化测试中取得高分的教师，和(或)同等水准的人或督学员提名的教师)与新手(实习教师)进行了比较对照。他们观察了这些教师的行动，与他们交谈，并且以各种其他方式收集资料。

在收集资料之后，研究者发展了在教学行为中所反映出来的用以智力结构的语义网，确认了教案与大纲。特别是教案这一概念已经证明在刻划教学和区分专家与教学新手这两者中都是有用的。研究者指出教案应该是稳定的，和课程紧密相结合的。在课堂教学过程中，教案不作许多修改，只是当教师取得较多经验时才作修改，他们使教师能保持注意力于重要的数学思想。莱因哈特等指出，“教师的课程教案为探索教师的教材内容知识提供了特别富有成效的场所，因为他们表达了从教师的内容知识到课堂教学期间所采用的形式的转变。”

专家教师的大纲、教案与程序在体系上与新手不一致。专家教师使用变化更多、更具体明确的程序。专家课堂教学的各部分更为确切。事实上，当阅读对这些专家教师的描述时，他们显得与古德(Good)、格劳斯(Grouws)与埃布迈尔(Ebmeier)所描述的“有活力的教师”非常类似。与专家教师相比，教学新手显得只有不怎么精心设计与互相连结的模式，这一模式的信息也不怎么为教学新手所理解。

模型评论。莱因哈特与她的合作者的这一工作是有意义的,能用来作为确认教师知识的进一步工作的基础。在数学教育领域中,我们很少能显示一系列可靠的调查报告,在那里,研究者发表了一系列以仔细假设的模型为基础的研究。莱因哈特等的工作是这样的系列研究,其方法始终是完善的和完好被记录的。然而,由于研究者的主要兴趣常常不在数学教学这一方面,所以数学研究是有限的。教学研究的重点已经放在过程的学习上(例如把一个分数约简为最简分数),否则由研究者观察的课的结构就只反映了过程而不是反映理解。

这套方法涉及对教师的观察,也涉及对于所提出的数学的详细语义网所作的准备。它有助于把数学思想分解为细小的组成部分,并且研究它们之间的相互关系。虽然得到这些语义网的过程(通过对教师的观察所发展的)非常不同于加涅(Gagne)为发展他的内容等级制度所使用的过程,但是最后的结果非常相似,特别对专家教师。

对莱因哈特与她的合作者来说,教师的知识是由技能与能力组成,而这些技能与能力是完好运行课堂教学、适当解释说明某些数学程序思想以便学生能获得教师感到重要的数学技能所需要的。当前,认知心理学家与数学教育研究工作者都对数学细节的注意是否会达到数学的重要目标产生疑问。数学比一大批细小的思想的总体多得多,对这些细节的注意并没有达到对数学的总体理解。

测试这一模型需要把数学理解作为教学焦点的其他工作。人们不得不对由教师预先发展的程序、教案与大纲的注意是否能使学生学习 and 理解数学丰富的一切感到怀疑。莱因哈特认为当各别学生学习时教师对他们加以关心是不可能的,仅仅当各别学生和他们所学习的数学相互作用时才有可能做到这一点,而这些数学对他们来说又是合适恰当的。因此至少在两点上这个模型存在欠



缺之处:缺少学生正在想要学习的数学和缺少对各别学生的注意。

**作为个体的和实践的知识** 由于这一模型对内容知识只给了有限的注意,所以它是不完全的。但是它对理解数学教师的实践知识带有某种可能性。埃尔珀兹指出教师知识的实践的、个体的观念把知识认定为是动态的、前后相互牵动的及与过去、现在、将来都有关系的(即使知识与信念之间的区分能被觉察到,也变得模糊不清)。这种知识在课外被产生,组织成一组规则与原理,虽然其他职业的与个体的经验对它的产生也发生作用,但主要还是通过在教室环境中学生的相互作用而产生的。正是这种知识,引导教师作出教学决策,用来调整他(她)的行动。埃尔珀兹认为教师的知识结构包括三个方面:实践的规则,实践原理和表象。规则与原理使教学知识具体化,同时表象引导教师作出决策。在表象中,教师的各方面知识聚合在一起,这对每个教师都是唯一的。表象是短暂的,相互作用的和非模糊的;它们是逐步形成的,且依赖于知识的各个方面。表象包括情感和道德,说明现有的知识,为发展新的知识提供了可能。埃尔珀兹说明当教师“用公式表示应当如何教学的简短比喻说明时,当他整理经验、理论知识与学校民俗以给出这些表象的具体例子时,他的感觉、价值、需求与信念就结合在一起了”。

表象把所有各方面的实践知识整理有序,且用于作出判断。通过表象选择用于直接教学的规则与原理。如果规则与原理和教师所拥有的特殊境遇的表象发生冲突,那就会选择其他不同的规则。通过产生新的规则与原理,表象也能延拓知识。埃尔珀兹断定教师的实践知识以特殊的实践环境为方向,这些定位能在许多方面加以考察:社会的、个人的、实验的、理论的和情境的等各个方面。定位提出教师如何掌握知识;它对其他方面的复杂信息集合提供了有序的感觉。对定位的考察为理解教师的知识、注意广泛

的细节范围、为说明教师知识的多样化与综合提供了可能。

虽然我们没有对埃尔珀兹关于数学教师的知识的思想加以研究,但是推测一下这些思想的含义还是有意义的。定位的思想肯定可以在关于教师信念的文献中看到。教师的定位包括数学是程序性的这一信念,他们会使用与他们的信念相符合的规则与原理,指导他们的决策。另外,决策是用来确保清楚地表达数学,确保学生有充分的机会实践所提出的程序。人们也推测如果教师的内容知识是缺乏综合的,那么他(她)的数学表象将可能反映这一表象,并且课堂的教学内容也可能是缺乏综合的,如此的理论模型为调查提供了丰富的场所。他们肯定了教师知识的复杂性和清楚地确认与研究这一复杂性的必要性。

莱因哈特的一些模型,每一个都包括一种体系,用来解释教师所具有的知识,解释互相作用的本质和教师如何决定在课堂环境中所作的一切。莱因哈特讨论了在大纲、教案与程序之间的相互关系,提出了一个由课堂教学结构与教材内容知识所组成的互相作用的体系。教师的行为受建立在教案(其依赖于教材内容知识)与程序之上的大纲的支配。在模型中,大纲起着确定在课堂教学中应用何种教案与大纲的目标结构的作用。即使给出不同的环境,只要目标保持不变,教案与程序也保持不变。埃尔珀兹认为规则与原理受表象的支配,所有这一切都受教师定位的影响。

在埃尔珀兹与莱因哈特所提出的那些模型中,将教案与规则、程序与原理相比较,看来存在某些特殊的类似之处。虽然大纲在范围上比表象似乎更为有限,大纲与表象看上去还是有一点类似。与表象不同,在大纲中没有出现那样的情况,包含信念、情感或目标的选择。大纲在对决策的影响上不同于表象,表象趋于吸收许多形式的知识与信念,指导课堂教学的决策,但是与大纲不同,它并不确定特殊的行为。

**教师的情境知识** 能够用来理解教师知识的另一个框架是情境知识。关于情境知识研究的复杂性与丰富性超出了本章的范围,而当我们设法理解教师的知识和它对教师行为与学生学习的影响时,其构造物是值得考虑研究的。我们将简要地回顾情境知识的构造物,然后当我们考虑研究教师知识时再来探索一下它的含义。

当我们讨论情境知识和它的获得物时,几位学者已经指出学生在校内与校外所获得的知识的悬殊差别。这些学者从理论上说明学生通过单独地回忆规律与刻板的概念及解决完全确定的问题而获得校内的知识。这种知识是明确的、难以转换的。校外知识则是通过社会情境中的工作而获得的,它决定事件的原因,解决不完全确定的问题,构造自己的理解。这种知识是个体的,可以转换的,因为它能被重新获得与使用。这些学者继续解释说明校内或校外获得的知识都并非和学习与使用时的情境无关,而是与获得知识的情境有关的思想。所有的知识与境遇有关,而且多半是活动、环境与文化教养的结果,使知识得以发展。知识不仅是这三种相互有关成分的部分结果,而且该部分知识也一直是讨论的目标,由此重新获得知识、阐述知识和使用知识。

在学校内所获得的知识并不适用于各人较为广泛的生活实际,因为学校的活动、环境与文化和学习者校外的文化无关。学校的知识并不是特别有用的,因为它是支离破碎的、与实际相脱离的、过分明确以致于无法被转换的,并且很快就会被忘却。

通过环境中设置的某些活动所获得的知识是可概括归纳的、有用的,这种环境能使学习者把知识与他(她)的宽广的文化教养连结起来。通过布朗和他的同事称为真正可靠的活动,即使是原来十分专门的知识,也变为跨越多种环境的知识。这种知识能用来解决许多各种各样的问题,得到新的知识。兰帕特与舍恩菲尔德所描述的学习环境常常以教室作为典型,在那里以和这些思想

和谐一致的方式学习数学知识。

看来多数教师的知识类似于所描述的校内获得的知识。通过在学校里的数学学习,教师掌握了数学内容的知识。某些初等学校可能会以这样的方式施教数学,使未来的教师能把一部分数学与他(她)的较广泛的文化环境相适应,而多数教师在典型的教室里学习进一步的数学知识,这一推断并非是不切实际的。在教室里使数学得到了解释,并且指定了实践和(或)家庭作业。学生日益单独地学习指定的数学,解决完全确定的说明那一天学习的数学课题的问题。数学因此就变成为仅仅适应于完全确定的问题和与学校的文化有关的情境。因为多数教师以这种方式学习数学,所以认为他们只有极其初等的数学知识是与课堂之外的情境相适应的,这一点看来是合乎逻辑的。

教师也曾在课堂上作为学生突出地学习了教学法程序的知识。职前教育经验为他们提供了某些观察与实践一些程序的机会,但假若认为所有的教学法知识都可以在职前教育中学到,那这是幼稚的。进入职前教育之前的12年至14年的许多各种各样的课堂学生经历提供了许多与课堂实际相适应的知识,然而,教师的作用不同于学生的作用,刚开始从教的教师的教学法程序知识仅仅出自学生的观点,职前经验使得这些教学法知识稍稍得到了琢磨,而使其与教师的观点更为接近一致。因此,刚开始从教的教师的教学法程序知识与他(她)自己的学生经验相适应。当教师在课堂教学中获得经验时,这一知识就得以增长、成熟。通过完成某些工作或否定某些事情,她(他)的教学法程序的全部技能也得到增长。

我们谈及的另一种类型的教师知识是有关学生的知识。教学新手常常从各种职前的课程中得到学习者如何获得知识的一般信息。有迹象证明当教师取得经验时他们就获得能刻划成情境知识的知识,而这种知识尚未被证明是对教师有用的。考察卡彭特等

报导的一年级教师的知识,在他们参与某项试验过程之前,这些有经验的教师被要求回答对一般的一年级学生和他们班上6个特定学生而言,几种类型的加减法文字题的困难与解题策略。大多数教师熟悉经常使用的解题策略,能相对精确地确定他们自己的学生在解题中将会获得的成功。这些教师具备必需的知识,能够预言他们自己的学生在问题解决中的表现,但这种知识不是完善综合的。因此,这些教师具备关于他们施教的学生的特定知识。

那么数学教师的情境知识是什么呢?它是数学知识、教学法程序知识与有关学生的知识这三者相互作用产生的知识。一个教师必须取得他(她)的数学知识、教学法程序知识与一般的学生的知识,并且用于构造他(她)的适合于特定学习者的课堂学习活动。这种知识是动态的,它开始于初为人师的基本知识,当它和课堂上特定的学习者相互作用时就得到增长、成熟。

情境知识的全部构造物是如此的新颖,以致于为了说明这一切,还必须发展研究实例,并应用于对教师的研究。然而,有很大的希望增强我们对有关学习者知识的理解,或许有更大的可能性增强我们对教师知识的理解。这一模型对师范教育有许多影响,无论是职前还是在职期间。教师所掌握的数学必须在某个环境中学习,这种环境比传统的校内学习更为广泛,以致于使得教师的知识更类似于我们所称的数学本质。教师的教学法知识也必须考虑,以便他们能学到使学生能参与数学的课堂教学知识。情境知识和如何获得该知识的思想为许多关于学校与师范教育程序的整个重新组织的必要性论述提供凭证。

理解教师的关于课程和教学变化的情景知识的影响是深刻的。如果与知识相适应的课堂教学知识像认为的那么少,那么应该如何提供课堂教学的情境知识才能达到《标准》所提的目的呢?当然,当建议数学课堂教学作某些改变时,在传统的课堂教学中教师已经获得的知识对数学的学习者和教师的影响是不能被忽略

的。

**模型的综合** 我们已经报导了几种关于教师知识的框架与模型。每一种都提供了定义教师知识的新见解和新的思维方式。所采用的方法和提出的教师知识的概念化并非不一致,相反的倒是相互依赖。他们的一致性、不一致性与相互关系的确认能有助于研究者确认教师知识的有用的概念,从而说明所提出的模型的各个方面。

舒尔曼通过提供一种包括不止一个方面的教师知识的分类引入更新的关于教师知识的思维。彼德森以舒尔曼的工作为基础,通过确认教师认知的重要性,对超认知加以讨论。在他们引入的概念中,舒尔曼与彼德森描述教师知识的许多相同的组成部分,两者都强调考察作为教师知识的重要部分的教学内容的重要性,强调它的组织,强调应该如何加以研究。另外,都有力地证明考察学习者关于教材内容的认知知识的重要性。

虽然教材内容的定义并不恰当,然而在莱因哈特与她的同事的工作中内容知识是重要的。在数学内容知识上,众多专家教师并不相同,专家教师与教学新手之间也存在着重要的差别。专家教师的知识趋于组成等级的构造物。他们利用较为丰富的表达体系,倾向于提出更为详细的理性与程序知识。这种教材内容知识对下列几个方面产生影响:(1)大纲,因为具备知识较多的教师比知识较少的教师具有更为丰富的智力计划;(2)教案,因为具备知识较多的教师能使用较多的表达形式与更为丰富的解释;(3)在教学期间教师对学生的评论与疑问的反应。埃尔珀兹的思想强调知识的日益增长的动态本质,而在她的模型中没有为内容的影响提供合适的位置。她提出有必要认识知识是日益变化、永不稳定的。在狭义的意义,她的工作与情境知识有关。这两种方法的结合能丰富个人的实践知识,提供一个框架,用来继续对教师的情境知

识概念化,并加以测定。

情境知识的思想提出校内知识的独立性这一见解,认为学校的知识不同于客观实际的知识。我们认为教师知识的这一组成部分也是与狭窄的学校环境相适应的。教师知识的这种情境特性对教师作出教学决策的方式和学生所学到的一切都有所影响。

**作为发展过程的知识** 跨越教师知识的所有概念的一致性是这样一种观点,教师的知识是连续变化的、发展的,知识不是稳定的。教师知识的各个方面在课堂环境中通过与数学、与学生相互作用,通过专业经验而得以增长,这里仅列出一些途径,还有许多其他的途径。知识的获得是一个过程;至关重要的方面不是存在什么知识,而是过程的继续。那么艰巨的任务是在知识增长变化时理解知识,是发现什么样的经验会使知识增长变化。

知识作为过程的见解对于测定教师的知识,发展描述如何获得教师知识的模型,作出关于在施教之前教师所需要的知识的决策这些方面都产生了一些结果。这种观点促进了教师知识不断变化的思想,促进了他(她)具有的关于教学的知识(依赖于进入教室前所具有的关于内容与教学法的知识)不断变化的思想。为了变更知识,教师必须按照新的知识重新发展他们的知识。这一方面是认知的要求,另一方面也耗费了时间。毫无疑问,变更知识需要时间,教师常常不随着在职培训规划而变更他的知识。

对知识是动态的这一信念的方法论之影响是深刻的。在测定稳定的知识的时候,对发展中的知识的理解是有限的。而且如果信念或定位对确定知识是如许多人建议的那样重要,那么测定也需要发展,以便能说明教师的不同定位。研究者也必须注意自己的定位,因为这些定位会影响他们所选择的测定方法与所获得的结果。

## 教师知识研究的一个模型

理解教师的数学知识和其对教与学的影响是困难的,并且随着知识的复杂性与动态本质的认识而日益困难。教师知识的研究的含义超出了对教师所教的许多数学课程或他们具有的数学程序知识的调查。数学教学的知识包括教学法知识,也包括对数学概念的基本过程的理解,包括对数学知识各个不同方面之间相互关系的了解,包括阐述教学知识的能力,包括理解学生思维的能力,包括评估学生知识从而作出教学决策的能力。教师的知识不再看作为是在教师的课堂行为与学生学习的作用中孤立产生的构造物。教师的知识不能与正在调查的教材内容相分离,不能与教材内容如何能为学习者所表达相分离,不能与我们所知道的特定范围中学生的思维相分离,并且不能与教师的信念相分离。

既然我们正在取得对能在课堂实践与学生学习中产生不同效果的教师知识的组成部分的理解,那么每一个组成部分都需要根据定义、参数和与其他部分的相互关系作进一步的研究。只有在清楚地定义各组成部分和它们之间的相互关系时,才能获得对教师知识的理解和术语方面的一致。这些组成部分的研究不能离开环境完成或孤立地进行。对这些组成部分的研究不仅必须在相互关系中进行,而且必须考虑教师知识的动态本质。对知识在一点一时的测定无法对当教师参与计划或非计划的各种试验时知识会如何变化作出正确的判断。

我们提出的测定与讨论的模型集中处理在课堂环境中产生的教师知识(参阅图 6.1)。这一模型同时显示了教师知识的相互作用与动态本质,包括教师的数学内容知识、教学法知识、学生认知的知识和教师的信念这些组成部分,也显示了在环境中的每一个组成部分。其每一部分将作简略地描述,随后讨论关于涉及各种



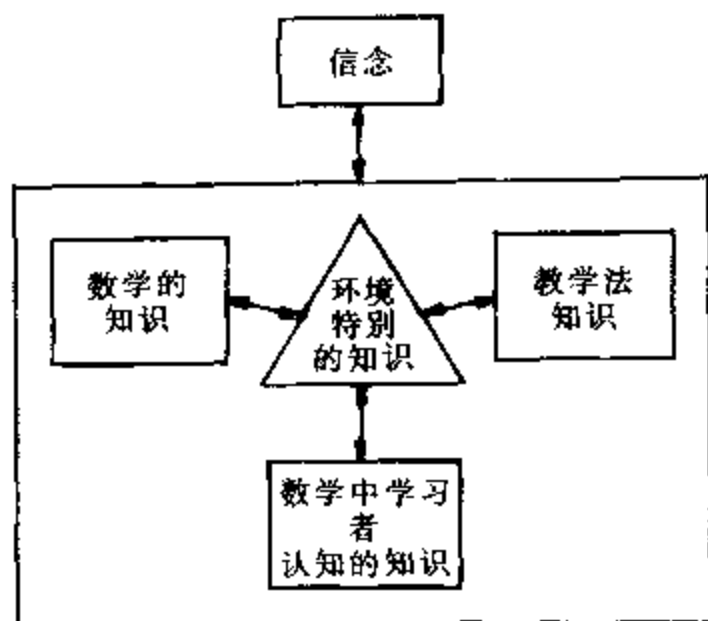


图 6.1 教师的知识:环境中发展

组成部分的环境的作用。

数学的内容这一部分包括教师在他们施教的范围内也在有关的内容范围内的概念、程序和问题解决过程的知识。它包括程序必需的概念、这些概念的相互关联及这些概念与程序如何应用于各种类型的问题解决。对教师的内容知识来说,其关键也是组织知识的方式,是指出存在于数学思想之间关系中的教师知识。

教学法知识包括教师的教学程序知识,例如计划的有效策略、课堂程序、行为管理技术、课堂组织程序和启发技术。

学习者的认知包括学生如何思维与学习的知识,特别是其在特定的数学内容中的知识。它包括学生如何获得正在参与的数学内容的知识,也包括对学生将要使用的过程,对可能发生的困难与成功的理解。

我们模型的中间三角形指出环境中或作为情境中的教师知识与信念。环境是定义将要实施的知识与信念的组成部分的结构。在给定的环境中,教师的内容知识和教学法知识、学生的认知知识互相作用,和信念相结合以产生唯一的一组支配课堂行为知识。为了理解我们表示环境及其在我们的模型中所起的作用的方式,

考虑下例。

一位教师经过在职培训规划取得了知识,这一规划指出掌握她的学生用来解决加法问题的智力过程将有助于改进她的教学,增强其学生的学习。这位教师决定设法在教学中应用这种知识。教师的加法内容知识有助于她挑选与学生已经掌握的整数知识相联系的加法问题类型。然而,在组织教学中,教师没有任何特定的教学技术或活动,来帮助发现学生正在思维的一切。而且,如果她不能从学生那儿探得他们正在思维的一切,她就不可能预料将会发生什么问题。教师在她的全部表演中凭借其他的教学法技能探知学生的思维,例如提问技能,或阅读理解中使用的程序。在教学期间,关于学生思维过程的知识 and 相应的教学法逐渐地适应,以致于在当前的情境下取得成功的教学。教师获得了关于如何了解学生正在思维的新知识,发展了关于加法问题的提问的新程序,使教学与教师所了解到的学生的情况相适应。

我们在例子中所进行的一切证明了教师知识的某些部分通过教学得以发展,其他的研究者也证实了这一点。施教是新知识得以创造产生的过程。

知识常常以教师的教学法知识为基础,通过与教材内容、与学生在课堂上的相互作用而得以发展。舒尔曼指出:

区分教学的知识基础位于内容与教学法的交叉点,作为教师,能够把他(她)具有的内容知识转变为在教学法上有效且还适合于学生所表现出的能力、背景上的差别的形式。

这里的关键词是转变。教师必须采用他们复杂的知识,并且以某种方式变化,以使他们的学生能和教学材料相互作用来进行学习。这种转变不是简单的,也不会在一时一点发生。相反,它是连续的,并且当所教的学生变化时也必须变化。换言之,当他们教学的环境变化时,教师对其知识的使用也必须变化。

对教师的考察分析开始指出知识通过课堂上的相互作用在转变,并且也能被转变。上述的例子指出当知识在教学期间被转变时,知识变为依赖于它得以发展的环境。如果以教师作为一个要素的环境发生改变(覆盖的内容不相同,课堂教学结构不相同或学生不相同),那么教师所使用的知识也将发生变化。使用的知识中变化的程度依赖于所涉及到的教师的知识基础,知识基础的复杂性,它的相互联系和特定的有效知识。如果对给定的环境来说,那种知识不是有效的,那么教师必须使用与各种情况有关的更一般的知识,或使用与情境紧密相配的知识。当新情境导致产生知识时,这种知识能适合于当前的情境,并且作为现在与当前情境有关的新知识而加以储存。

可以理解在运转中知识的转变是复杂的。很少有研究能有效地解释当新知识在教学中得以发展时知识各部分之间的相互关系,而且关于通过教师的执行得以转变的知识的信息也不是有效的。这里教师知识的所有各方面与信念结合在一起,必须考虑将其理解为一个整体。艰巨的任务是发展方法与系统的研究,以提供信息,启发我们在这一领域内的思维。未来的一切在于理解教师知识的各部分与信念之间的动态的相互作用,理解他们所起的作用,理解当教师所具有的知识与信念不同时所起的作用怎样不同。

## 七、成为一名数学教师

Catherine A. Brown

Hilda Borko \*

本章所要考察的问题是：成为一名数学教师所要经历的过程。它将集中于研究个体以及个体在担负职业教师角色时所起的变化。本章的目标则在于：对有关成为一名数学教师这一课题的研究工作作一番回顾，并对这些研究工作对数学教师培养和来日的研究工作的影响作一些讨论。

近年来，人们对成为一名教师的过程这一课题兴趣有加，这一定程度上源于以下这些全国性报告：“未来的教师：霍姆斯集团的一份报告”和“为国家做好准备：21 世纪的教师”（卡内基（Carnegie）专门调查委员会，1986 年）。这两个报告都指出，现行的教师培养方案远远不能满足为我国培养 21 世纪的学生备用教师的需要。

在数学教育界，全美数学教师理事会（NCTM）发表了三份文件：“中小学数学课程与评估标准”、“数学教学职业标准”以及“取得学士学位后数学教师培养的指导原则”。这些文件都强调了数学教师培养的重要性，同时对目前教师培养方案的适宜性反复表示关注。它们共同指出，现行的那套培养教师的做法，根本造就不出他们所设想的能够进行数学教学的数学教师。

---

\* 作者布朗（Catherine A. Brown），美国弗吉尼亚科技学院和州立大学课程教学和数学系数学教育副教授。

博科（Hilda Borko），美国科罗拉多-博耳德大学课程教学副教授。

考虑到人们对培养教师——尤其是培养数学教师重新萌发的兴趣,教育研究界显然有必要对有关成为一名教师的过程这一问题的认识作出一个估价。这样一来,对最近出版的两本研究手册都涉及与本章讨论焦点有关的话题,我们就不会感到奇怪了。由拉尼尔(Lanier)和利特尔(Little)撰写的“教学研究手册第三卷”(威特洛克(Wittrock))中,有一章运用施瓦布(Schwab)常说的教学四要素:教师、学生、课程和环境为基础的框架,考察了有关教师培养的研究工作。拉尼尔和利特尔对涉及到教师培训者、职前和在职教师、教师培养课程以及教师培养环境等几个方面的研究工作做了一些回顾。与本章相比,他们写的那章主要考察关于教师培训方案的情况,而不是考察个体在成为一名教师的过程中所表现出的各种特征。

最近出版的“教师培养研究手册”一书中,布朗、库尼(Cooney)和琼斯(Jones)撰写的那一章,明确提出数学教师的培养问题。布朗等人所写的一章集中探讨了有关数学教师培养研究工作中的哲学问题,而不是传统地更多地对文献资料作回顾,其部分原因是对数学教师培养或成为一名数学教师这一课题开展研究的团体并不多。

与布朗等人不同,我们恰恰选择目前研究中的薄弱环节开展研究,本章主要是要对文献资料作一些回顾。当然我们并不局限于数学方面的研究工作,而是考察涉及成为一名教师这一课题的研究工作,不管它们有没有明确提出数学方面的问题。我们还尽可能地设法从一般的研究结果和结论中推出其对成为一名数学教师所能产生的影响。

本章安排了有关成为一名教师这一课题三个方面的研究内容:学习教学、社会化和成人发展,这反映了大多数有关这一课题研究工作的传统。学习教学方面包括对教师的知识、信念、思维和行为的研究,着重强调以心理学学科和认知心理学各种假设为基

础进行研究。有关教师社会化方面的研究工作,则是把教师看作一种职业社会的成员,并考察进入这一社会的过程。研究集中讨论有关教师社会化方面研究中的三个主要传统观点:机能主义观点(functionalist)、译释主义观点(interpretive)和批判主义观点(critical)。所有观点都想解决这样一个问题:教师如何在特定的文化背景下获取或形成自己的信念、价值观和态度。在教师发展方面的研究,则是运用成人发展和教师发展的各种理论来指导教师职业发展方面的研究工作。总的来说,成为一名教师是通过一系列内在的、有指导的变化来实现的,并按照发展、适应和变化的顺序演变。

本节我们将对每一种有关成为一名教师这一问题的传统研究观点,提出这种观点依据的基本假设和理论框架、若干关键的研究项目以及该研究结果的模式。接下来的部分则简要介绍了运用多种传统观点对这一问题所作的研究工作。本章的结束部分讨论的是教师培养的研究工作和实践所产生的影响。在作回顾之前,我们首先提出有关成为一名数学教师这一课题的三个假设,它们在本章中对我们要讨论的所有方面起着指导作用。

## 关于成为一名数学教师的几个假设

在本章的写作过程中,我们始终在三个假设的指导下进行讨论。第一个假设是:好的数学教学是可以被确认并加以描述的。我们采纳 NCTM 在“数学教学职业标准”中阐明的基本准则作为“好的数学教学”的标准,它告诉我们,如果要按照 NCTM“课程和评估标准”展望的那种方式进行数学教学,那么数学教师必须要了解哪些方面并且能做哪些方面。“职业标准”中将数学教师的主要作用归纳如下:

1. 创设课堂环境以支持数学的教与学;

2. 设置目标,选择或设计数学作业以帮助学生达到这些目标;

3. 激发和运用课堂交流以使学生和教师对所学内容有更清晰的理解;

4. 分析学生的学习情况、数学作业和环境情况,以便不断地作出教学决策(NCTM,1990)。

做一名好的数学教师意味着要在课堂上充分发挥这些作用,使学生能按照 NCTM“课程和评估标准”中倡导的那样学习数学。根据这些标准,算法、符号运算和法则记忆必然不再成为中小学数学的主要内容;相反,数学推理、问题解决、数学交流和数学联系则必然成为主要内容。“课程和评估标准”的核心在于发展所有学生的数学意识和能力。数学意识包括能够欣赏数学的价值和美,能够评估和运用数学知识;数学能力则包括“探索、猜测和逻辑推理的能力,也包括运用各种数学方法有效地解决非常规问题的能力”和解决这些问题的自信心和个性。

“课程和评估标准”不仅为中小学数学确定了目标,而且在摆脱传统数学教学做法方面迈出了具有重大意义的一步。“职业教学标准”确定了与课程目标相一致的教学目标。例如,教师必须为学生提供和安排必要的时间用于探索数学,尽力解决各种猜想和问题。教师还必须布置包含大量有意义的数学知识的作业,并鼓励学生进行数学联系。教师应该运用有关的技术,不断地对自己的教学和学生的学习情况作出分析,并反映到短期和长期的计划之中。这些职业标准是教学质量的衡量尺度,我们在分析成为一名数学教师的过程这一问题时,常常要用这些衡量尺度对数学教师进行比较。

本章依据的第二个假设是:成为一名数学教师的过程包括一般的和特定学科两个部分。对成为一名教师这一课题的研究工作大多是考察一般的教学问题;而很少集中于特定的数学学科方面。

然而,我们相信,对一般的教学问题进行研究得出的结果和结论很有价值,能为我们对成为一名数学教师的某些方面进行研究提供大量知识。例如,这些研究结果让我们联想到为什么新手教师可能会对实施 NCTM“课程和评估标准”有疑虑,以及为什么他们可能不愿放弃 NCTM“数学教学职业标准”中提及的在课堂上的“权威”地位。因此,本章的研究工作涉及一般的和特定数学学科两部分以及成为一名数学教师所表现出的各种特征。

我们的第三个假设是:成为一名教师是一个终身的过程;也就是说,教师学习教学知识早在接受正规师范教育之前就已开始,并且贯穿了整个教师生涯中延续变化。我们相信这个假设是对的,但本章主要集中于研究这一过程中的实习教学阶段和入门阶段。实习教学或教学实践实际上几乎包含在每个职前教师培养方案之中,并且常常是这些方案中必不可少的一个要素。尽管人们在教学实习对学习教学过程所产生的影响程度和性质方面仍然存在很大的分歧,但它也是职前教师培养方案中研究得最为广泛的一个方面。入门阶段的几年时间,是教师对是否继续从事教学职业作出抉择的时期;在这几年当中,新手教师形成了许多信念和行为,并将在今后的整个教师生涯中继续得以保持。

## 学 习 教 学

本章的这一节中,我们将从学习教学的角度来考察成为一名数学教师的问题。有关学习教学的研究工作传统上是在心理学学科中开展的;近年来,这项研究工作的基本框架发生了转向,从以行为心理学为基础转变为以认知心理学为基础。为了与这种变化趋势相吻合,我们将着重以认知心理学的观点来研究学习教学这一问题。

本节内容由三个部分组成。第一部分,我们将考察基本假设



和理论框架,它们构成了以认知心理学研究学习教学问题的基础。第二部分介绍有关学习教学问题的研究工作。为了与本章关注的焦点相一致,我们将着重研究成为一名教师过程中的职前阶段;当然,我们也将对专家教师与新手教师在教学上的差异情况作简要介绍,同时对在职教师学习教学的调查情况作一点评述。本节最后部分将对这些研究的结果模式进行讨论。

### 以认知心理学为基础的理论框架

认知心理学是研究人的心理活动的科学,它主要研究人类思想(知识、信念)的内容以及人们从事(思维、问题解决、计划)活动时的心理过程。多数认知心理学家所持的观点是:知识和思维完全是人脑的内在活动(然而,我们应当把这些心理学家所进行的讨论看作是:认知科学中有一个不断发展的趋势,即认为认知活动是相互作用地存在于自然和社会环境之中)。正如雷斯尼克(Resnick)强调的那样,“认知心理学的核心在于将人类思想置于中心地位,并将思维过程视为可以进行科学研究的具体现象。”

构成认知心理学理论和研究基础的一个基本假设是:知识是有条理地被组织和贮存于人脑之中的。认知心理学家认为“知识的本质是结构。知识不是‘一筐事实’。”这一假设的中心地位使得帕特曼(Putnam)、兰帕特(Lampert)和彼得森(Peterson)提出:“认知理论中关于知识的一个基本定义(尽管过于简单)”是:“知识是个体认识者的认知结构。”

认知心理学的第二个基本假设是:“个体的知识结构及其对世界的心理表述在这一个体的知觉、思维和行为中起着核心作用。”与行为心理学家不同,认知心理学家认为:教师的思维直接受其知识的影响。而他们的思维进而指导其在课堂上的行为。人们“不断地根据自己已知的知识试图理解和思考新的知识”。学习就得把新的知识和现有的知识体系联系起来;教学应当帮助学生促成

这种联系,把新的知识与学生业已形成的知识联系起来。

学习教学就必然需要获取知识体系或图式,获得例如解决教学问题和作出教学决策等的认知技巧,获取一系列可以观察的教学行为。要理解学习教学,就必须研究这些体系——以及它们之间的关系——是如何随着经验的丰富而变化发展的,同时还必须认识影响这一变化过程的各种因素。出于这种考虑,我们就不会奇怪,为什么本章关注的焦点是有关学习教学问题的心理学文献中的两个主要领域,即教师思维的内容和过程,以及教师知识体系和认知技巧。教师思维的这两个方面在实践中很难加以区分。事实上,研究人员通常对两个方面同时进行研究。当然,在概念层次上还是有可能把两者区分开来的。现在,在表述教师的知识体系和认知过程方面已经分别形成了一些理论模式。下面,让我们考察几个已经形成的模式,它们构成了若干学习教学方面研究方案的基础。

**教师知识** 人类知识是有组织、有条理的这一假设是有关教师知识的认知心理学研究工作的出发点。图式理论为知识的表述和组织提供了一个模式:图式是一种抽象知识结构,它概括了关于许多特殊事例及其相互关系的信息。人们把他们经历中碰到的各种物体和事件的有关知识贮存在代表这些经历的图式中。

舒尔曼(Shulman)关于教师职业知识领域的理论模式尤其适合于研究学习教学问题。舒尔曼等人假设,教师在计划和实施教学时,从七个知识领域构画了一系列认知图式,即学科内容知识、教学法内容知识、其他内容知识、课程知识、学习者知识、教育目标知识以及一般的教学法知识。他们的研究方案(将在本章后面提到)主要集中于研究前两个领域。该方案为教育研究界提供了有关学科内容知识和教学法内容知识的精确定义,以及它们与课堂实践关系方面的研究结果。

学科内容知识包括对学科中所谓的实质知识(即学科中的关键事实、概念、原理和解释性框架)以及句法知识(即学科中的论证规则)的理解。例如,在数学中,实质知识包括数学事实、概念和算法;句法知识包括数学证明方法和数学家运用的其他论证形式。

教学法内容知识或者学科内容的教学方面知识包括对以下内容的理解,即如何运用与不同学习者的兴趣和能力相适应的方法来表述特定学科内容中的各种课题(topic)和问题。它包括:

……在某个学科范围内,最常教到的课题,最有用的那些思想的表述形式,最有效的类推、例证、实例、解释及论证——一句话,用别人能理解的方法来表述这一学科……[它]还包括对特定课题学习难易原因的理解;不同年龄和背景的学生在学习时和学习前形成的概念。(舒尔曼)

数学学科中实例不计其数,但是有一个课题已经明显地引起研究人员的注意,即整数的加减运算。有关学生如何学习加减运算概念的研究工作为分析文字问题和儿童解决文字问题的过程提供了一个明晰的框架。就此课题而言,教学法内容知识包括:有关这一框架的知识和如何运用该框架帮助一年级学生学习加减运算的知识。教学法内容知识是教师职业特有的一个知识领域,它将教师与其他诸如理论数学家、研究科学家和新闻记者之类的专家区别开来。当然,它对于新手教师来说相对不够成熟一些,这并不令人觉得奇怪。

鲍尔(Ball)为探索教师的学科内容知识,特别是数学领域构想了一个理性框架。她主张要理解教学用的数学,就必须既要理解数学的知识,又要理解关于数学的知识。数学的知识与舒尔曼提到的实质知识方面密切相关,它包括命题知识和程序知识。鲍尔认为要有效地教好数学,个体必须具备一定的数学知识,要对构成数学程序之基础的原理和含义有明确的理性认识;同时要把数学

课题、规则和定义联系起来,而不是把它们隔裂开来。

关于数学的知识与舒尔曼提到的句法知识方面有关,它包括对该学科中的知识本质的理解——知识的来源,知识的演变,如何确立知识的真理性,以及懂数学和做数学必须知道哪些知识。鲍尔关于这一理性框架的研究工作(本章后面会讲到)考察了未来的教师受训时接受的数学知识。

**教师的认知过程** 教师思维的研究者通常将教师上课前的计划与上课时的思维过程作一区分。这种做法源于杰克逊(Jackson, 1968年)的研究工作。杰克逊提出,教学过程中暂时可分为三个阶段——相互作用前的阶段,相互作用中的阶段,以及相互作用后的阶段(以下简称为交互前阶段、交互中阶段和交互后阶段)——其依据的假设是:教师在课堂上师生间相互作用时的思维与没有学生时思维有着质的区别(克里斯特(Crist), 马克斯(Marx)和彼得森)。(读者可以参考最近由博科和谢弗尔森(Shavelson), 及克拉克(Clark)和彼得森撰写的几篇评论文章,文中对有关教师的认知过程的研究工作作了进一步讨论,并对教师的计划和师生之间交互中的决策研究了一些模式。)

谢弗尔森指出把交互前的思维与交互中的思维加以区分,虽然在以前曾经是有用的,但现在看来并不适当。交互前与交互中的决策过程在概念上并无区别;它们都是发展和制订日常工作事项过程中相互关联的组成部分。有关学习教学的研究工作必须考察以下几个方面:教师如何学会将贮存于他们教学图式中的知识转化为供课堂上使用的操作方案或事项;他们如何学会在课堂上实现这些日常工作事项。只研究这一过程中的一个部分,如计划,而不考虑其他部分,如交互中的教学,这是不可能的。

威尔逊及其同事创立的教学思维和行为模式支持了谢弗尔森的观点,认为交互前的思维和交互中的思维在概念上没有区别。

该模式描述了教学中通常的六个组成部分：理解、变换、讲授、评估、反思和新的理解。理解是指对要讲授的一系列概念进行批判性理解的过程。变换过程是指教师从个人对要讲授的概念的理解转变为如何促进学生理解这些概念的认识。讲授是促进学生理解的过程，它包含了各种教学行为，比如组织和控制课堂教学，进行清晰的解释，以及为学生提供实践操作机会。评估或检查学生的理解情况，包括对学生的理解情况进行实时操作式的评估和更为正规的测试和评估程序。反思意味着需要评估教师自己的教学工作。这一系列过程确保了教师积累经验，学会教学。这样一轮下来，教师就发展了对该学科内容的新的理解。

教学思维和行为的这一模式的核心在于教学分析的概念，它将学科内容转换成“在教学上极其有效，同时又能适应学生在背景和能力方面表现出来的多样性的形式”（舒尔曼）。教学分析包括确认和选择在课堂上表述关键概念的策略，并使这些策略能适应学生的不同特点。与教学法内容知识相同，这是从事教学职业的人所特有的，对于新手教师来说只不过相对不成熟一些。

以上描述的有关教师知识和认知过程的理性框架使我们得以清晰地考察有关学习教学的研究工作。本章的下一节所要讲的，与内容知识、教学法内容知识和教学分析的概念尤为相关。

## 教学知识和教学认知过程的获得

尽管知识与思维在概念上的区别是不言而喻的，但教师认知内容与认知过程却是盘根错节的。教师在教学计划与交互式教学活动中，同时运用了他们的知识和思维技巧。此外，许多调研人员在单个关于教学或学习教学的研究方案中也同时提出了知识和思维问题。同样，我们在探讨这类研究工作时，并没有把这两组问题分隔开来；而是根据参与者的经验层次，对研究工作进行分类。我们的重点集中于有关教师培养中职前阶段的学习教学的研究工

作。当然,本节的开始部分将对有关专家教师与新手教师教学情况的研究工作作简单讨论,最后部分则对有关在职教师学习教学的研究工作加以考察。本节的重点是突出有关学习数学教学的调研工作,尽管这里所列的研究报告并不局限于这方面的研究内容。

**有关专家教师与新手教师的研究工作** 有关教师认知的最全面的研究工作已经在专家-新手教师这一传统研究领域地开展起来;这些研究工作在有关专家与新手教师的知识、思维和行为上的差异性方面提供了一系列相当一致的研究结果和结论。这些研究结果和结论尽管不能完全阐明学习教学的过程,但它们有助于我们理解学习教学的一些结果。考虑到它与本章的中心立题并无直接关系,所以这里就不再对研究个案作全面叙述,而只是对这些研究工作中的模式作概括介绍。

然而,在对这些模式进行概括介绍之前,必须认识到这里对专家-新手的研宄着重于数学教学方面。但有一点很重要,是必须强调的,即尽管这里研究的是有关数学的教和学的内容,但也涉及一般的教学策略问题,而且其研究结果和结论也不是只适用于这一特定的学科内容。

伯利纳(Berliner)、卡特(Carter)及其同事设计了一个研究方案,用来识别具有不同经验和专长的中学数学与理科教师在知觉、记忆及问题解决方面的差异。他们开发了一系列实验性工作,模拟课堂教学活动,然后对三组被试完成这些工作的情况作了比较。三组被试是:专家教师(由校方负责人或校长提名,经项目研究人员审查,教龄超过五年的中学数学和理科教师);新手教师(中学数学和理科实习教师或具有一年教龄的教师);以及申请教学人员(任职于商业或工业界,对教学感兴趣,有数学或理科方面的教育背景,未受过任何正规的教学法训练的人员)。

莱因哈特(Leinhardt)及其同事在一个历经多年的研究方案

中,与一小部分小学专家与新手教师一起工作,密切合作,考察了他们在数学教学方面的专长。专家教师的挑选标准是:以五年作为一个周期,他们的学生的数学成绩始终保持不同寻常的提高;选出的新手教师都是尚处于职前教师培养阶段的最后一年,并被他们大学的视导员视为最好的实习教师。研究人员通过课堂观察以及参与就有关他们的教学和数学知识进行面谈来收集数据。根据这些数据,研究人员发展了认知过程和知识的理论模式,这就为有效地开展教学提供了基础。

博科及其同事对一部分专家与新手数学和理科教师的教学计划、教学和课后反思情况进行了比较,以此来调查教师的教学专长的性质。新手教师是指在数学或理科方面的课程以及学科教学法课程中成绩优秀的实习教师。担任他们合作教师的专家教师则是由学校行政和县教师中心的协调员推荐的。研究人员对参与者的教学情况进行为期一周的观察;在每节观察课之前,要与他们就其教学计划进行面谈,并且在课后,与他们就其教学反思进行面谈。

以上有关教学专长的研究以及其他一些研究结果表明,专家教师具备专长的特征,同样可以在诸如解决物理问题和下国际象棋之类的复杂认知过程领域中看到。简单地说,专家教师要比新手教师表现出具有更多的教学知识、内容知识和教学法内容知识。进一步讲,他们用于组织和贮存这些知识的理性框架或认知图式也要比新手教师的图式更为精巧详尽,更具关联性,更易于理解。因而,专家教师在教学计划和教学交互中阶段对信息的处理手段要比新手教师更为有效。

专家教师要比新手教师更多地在大脑中作计划,他们运用自创的心理行动计划来指导授课方向。同时在计划的速度和效率方面也要比新手教师来得快和高,因为他们能将现存教学图式中的有关信息进行组合以适应每节课的具体要求。相比之下,新手教师常常不得不发展或者至少得要修改和细化现存的教学图式。新

手教师在教学法内容知识方面的图式看来尤为有限。而专家教师的图式中却有大量的贮存,包括很多有效的解释、论证和实例,利用这些图式可以将学科知识向学生表述清楚。新手教师则必须在订每节课的计划时就把这些表述手段考虑到。此外,由于他们的教学分析技巧没有专家教师那么强,因而这种计划本身的实施情况也往往要大打折扣。

专家教师在教学交互中阶段要比新手教师更多地运用教学和控制方面的一些惯例。由于教师和学生都知道这些惯例,因而实施这些惯例就很少或不需要进行解释或监控,也用不着特别去注意它,这样就减轻了对教师的认知要求。此外,专家教师更善于挑选自己所需要的信息,能将注意力只集中到与教学决策有关的课堂教学方面,从而减少了教学交互中阶段的认知负担。通过减轻认知要求,使专家教师得以解脱,于是他们能把注意力更多地集中于与上课内容有关的重要的和(或)动态的特征上,集中于学生对如何改进授课的反馈信息上。此外,当这些信息让他们感到课上得不好之时,或者当学生的提问与评论使他们偏离心理行动计划之时,专家教师要比新手教师更能成功地改变授课方向,也就是搞即兴发挥。专家教师在即兴发挥方面能取得较大成功,这取决于他们有较为广泛的相互关联的、易于通达的认知图式网络;而新手教师可利用的图式就没那么多了,也没那么成熟。

前面我们已经强调过,专家教师与新手教师在思维和行为方面存在的差异性,能帮助我们理解有关学习教学的结果而不是过程。伯利纳提出了有关教学专长的发展理论,从而向理解这些过程迈出了第一步。他借用了一个技能发展的一般模型,从理论上说明了教师在通往教学专长的历程中要经过五个阶段:新手阶段,高级入门阶段,称职阶段,精通阶段,专家阶段。然而,他强调指出,该理论是“从人工智能领域中研究有关专家系统如何创立的结果中推导出来的。它能否在教学上应用还是未知数”。下而一节



所讨论的有关学习教学的研究工作将为评估伯利纳的等级模式的效用提供经验上的依据。

**有关新手教师学习教学的研究工作** 我们选择五个研究方案作为基础,讨论有关学习数学的职前阶段的研究工作。这些方案都是根据以下标准进行挑选的:该方案对学习教学问题作了多年的纵向考察;该方案具体研究了教师认知的内容和(或)过程;该方案是在实际的大学或公立学校的环境中开展的;该方案运用了多种收集数据的策略。事实上,符合以上标准的研究工作中只有两个方案是集中于研究学习数学教学方面的,而且也只有一些初步的数据适用于那些调查。

我们详细讨论的研究方案包括:全美师范教育研究中心(NCRTE)关于师范教育对学习教学的作用方面的调查;在NCRTE进行的革新数学和教学法课程的纵向研究;博科及其在弗吉尼亚技术学院和马里兰大学的同事对新手教师的教学计划、实施和评估所作的考察;密执安州立大学费曼-内姆舍探索职前教师向教学思维转变问题的协调方案;舒尔曼及其同事在斯坦福大学开展的有关学科内容知识的发展问题的研究方案。我们先从考察两个明确以学习数学教学为研究着眼点的方案开始讨论。

**师范教育和学习教学研究。**第一个研究方案由设在密执安大学的全美师范教育研究中心(NCRTE)设计进行,它调查了师范教育在学习教学中所起的作用。该方案总的目的在于:分析确认帮助教师学习教学的不同方法,并阐述这些不同的方法对教师的学习所能产生的影响。该研究在设计时,将教师培养方案的个案研究与教师学习的纵向研究结合起来,使得NCRTE能够描述不同教师培养方案的目的和特征,能够确定参与者的观念和实践是否在方案的全过程中发生了变化以及如何发生了变化。该研究还考察了学习机会与学习成果之间的关系。

有十一项方案作为该研究工作的背景,每个方案代表了不同类型的学习机会。这一样本包括职前、入门、在职以及替代方案,从而使 NCRTE 得以对整个教师生涯中不同阶段的学习教学情况进行考察。在每个阶段中,研究人员都对一组教师样本进行了长期跟踪,考察他们在接受师范教育过程中以及进入独立执教阶段后,在知识、技能和个性方面所发生的变化。研究人员集中于研究两个学科领域中学习教学的情况:数学和写作。他们认为将这两个学科领域进行比较,能够加深对学科内容与教学之间关系的理解。

在每个阶段中,我们都运用了三种类型的数据收集手段:书面问卷调查、面谈和课堂观察。问卷调查用来衡量答卷人对有关教与学、学习者、知识本质、学习教学以及教师培养方案方面的信念和知识,并收集人员统计数据。在每个阶段中,都要与一小部分师生进行面谈,了解参与者在数学和写作的教与学方面的各种看法和思维方式。课堂观察则是收集教师教学个性和师生相互作用技巧方面数据的主要来源,也是对参与者的知识和信念进行分析的数据来源。

鲍尔对 19 名小学和中学数学教学候选人进行了问卷调查和面谈,通过对得到的一部分基本数据的分析,阐述了参与者接受师范教育过程中对数学的理解情况以及他们对教学、学习、学生和教师的作用的看法。她根据这些候选教师对真值、合法性和相互联系的理解程度,分析了他们对数学的理解。总的来说,参与者更多地是给出正确答案,而不是解释其答案为何是正确的。研究结果表明,在参与者的回答中几乎没有将数学中的不同课题进行联系的迹象;例如,给他们三道除法问题,除一名要上岗的教师之外,他们都按所需的特定数学知识——分数的除法,被零除,或解含有除法的代数方程回答了每一道问题。他们对除法的知识看来更多地是建立在记忆基础之上,而不是出于对概念的理解。他们往往会

为了回答一个问题,就去搜寻记忆中某些特定的规则,而不是着眼于问题的根本涵义或者依据除法的一般涵义。

鲍尔根据以上研究结果得出结论:即将上岗的教师对于构成适合教学的数学程序之基础的基本原理并不理解。同时,他们还未能充分地将自己的数学知识联系起来,从而无法摆脱将各种课题隔裂开来进行数学教学和学习这种惯用的办法。最后,她指出学科内容知识应当成为教师培养方案的核心。而为了让教师更有效地教好数学,需要给他们更多的知识以帮助教师积累和发展其对数学的理解。

在革新数学和教学法课程中学习教学。第二项纵向研究也是由设在密执安州立大学的 NCRTE 开展的,它对三门革新数学课程、一门配套的数学教学法课程以及大学本科主修科目的课程研讨的实施情况作了一番考察。在职前教师学习了这些革新课程后,研究人员对他们进行了跟踪调查,考察了其在数学、数学学习和数学教学方面的信念和知识发生变化的性质和程度。

24 名职前教师于 1987 年秋参与了密执安州立大学组织的教学学习方案。在他们为期两年的受训期间以及参加教学工作第一年中,研究人员收集了大量相关的数据。他们对数学和数学教学法课程的上课情况作了现场记录并拍了录像,同时在整个方案实施过程中多次对参与者作了问卷调查。另外,一小部分教师被选中作为深入调查的样本——第一年选了六名,第二年和第三年又对这六名中的四名作了调查。这些调查的数据包括面谈的音像资料、书面作业、测试、对教学实习的观察、与导师以及现场调查的指导教师进行讨论的音像资料,以及对他们第一年教学进行观察和面谈的情况。

研究人员提出了三个研究问题,作为对第一年和第二年中的数据进行分析的基础:(1)什么才叫懂得数学?(2)怎样才能学会数学?(3)教师在为学生创设有效的数学经历中起什么作用?研

究人员制订了一个分析框架,阐述了与数学的教与学的不同定位相对应的三个层次。这些层次为分析参与者受训过程中在数学、数学学习和数学教学方面的信念和知识所发生的变化提供了一个方法。

目前,对第一年和第二年中数据的初步分析已经完成。第一年期间,参与者开始学习系列课程中的第一门数学课程。从第一堂课起,指导教师就开始营造一种教学氛围,让学生在其中共同学习,相互合作,进行数学质疑,学习理解数学的各种新方法。他们常常设置问题情境引入数学概念,要求学生分组探索和证实解决问题情境中各种可能的答案,并要学生运用多种表达形式来考察平行的关系,确认各种数学概念之间的相互关系;然后鼓励学生归纳自己的解题方法,相互交流对数学概念的探索结果。

刚上这门课程时,学生受到传统观念的影响,把数学看作是抽象的、机械的、毫无意义的一组符号和规则,但上完这门课以后,大多数学生开始对这一观点产生疑问,并形成了对于数学的更为理性的理解。对于自己的学习,他们开始认识到围绕问题解决而组织的协作学习的价值,并进行小组合作,共同探讨数学。然而,尽管看来该课程已极大地影响了他们自己对数学思维方式的看法,却未能影响他们对儿童数学思维方式的看法。调查发现,几乎近一半的参与者仍然认为小学数学的基础是:诸如数字事实,整数运算,分级有序的学习内容,在学问题解决前先要掌握计算技能,以及从一个学习层次到下一个学习层次的渐序前进的这种强制性序列观点等等。研究人员认为参与者在有关自己数学学习的思维变化应归结于该门课程的特点。但同时他们也指出,仅仅依靠一门为期十周的课程还不足以使教师摆脱传统观念的束缚,妨碍他们对小学数学教学的理性认识。

第二年收集的数据中得出的结果建立在前两门数学课程、数学方法课程和实习教学的基础之上。随看参与者对数学教学的日

益变化的理性定位,研究人员继而发现这些教师对什么才叫懂得数学以及怎样才能学会数学的信念发生了极大的变化。然而,在教学实习中,研究人员还是发现,参与者将自己视为数学的成人学习者的观点与他们在教孩子学习数学的实践之间存在着紧张的冲突。此外,参与者在为孩子确定的数学目标,提供的学习机会以及在理性理解或算法思维方面所集中的教学努力程度也各不相同。这些研究结果进一步证实,要改变即将上岗的教师对数学、数学学习和数学教学方面的信念和知识,这一过程非常复杂。

新手教师交互前和交互中的教学。第三个研究方案由博科与弗吉尼亚技术学院和马里兰大学的同事合作开展。方案集中研究了新手教师在教学交互前和交互中阶段的思维情况。该研究方案依据的假设是:决策是教学中的核心技能。要理解教学,就必须理解教师在制订计划和交互中阶段所作的决策,以及影响那些决策的因素。

在一项调查中,研究人员对小学新手教师最后一年本科阶段的受训情况进行了跟踪考察。他们对这些实习教师这一年专业实习期间保存的日记加以分析。在日记中,实习教师叙述并评价了自己一周内上得最成功和最不成功的几节课。他们还对两名能力较差和两名能力较强的四名参与者在阅读课的计划 and 评估方面作了深入的研究。研究人员对每位参与者实习期间所上的阅读课进行了四次观察,并拍了录像。每次观察之前,研究人员还与该名实习教师就这节课的计划进行面谈。每次观察之后,又要求她对这节课作出评估。

研究结果表明,实习教师不管能力强弱,对所谓成功的课有相似的看法。并且,这种看法在为期一年的实习过程中未曾发生过变化。研究发现,所有的实习教师在日记中对成功的课都作了相似的记录。而参与观察研究的四名教师也采用相似的方法对基础阅读课作了修改和补充。然而,能力较差的实习教师认为自己所

上的课中不成功的较多。而这些不成功的课与大家对成功教学的共同看法大相径庭。能力较强的实习教师做教学计划时更为细致,在计划中考虑到更多的方面,同时运用问题解决的方法及时预见问题,并制订计划以减少或避免这些问题的产生。

在马里兰大学随后进行的一项研究中,博科及其同事通过对每位教师连续进行两天的观察和面谈,对 12 名小学和中学实习教师的教学计划和课后的反思进行了考察。得到的数据模式揭示出与参与者的教学计划和课后反思相关的四个因素:学科内容和教学法知识,内容领域的影响,在几个小班里教同一门课程,实习教师的责任心和控制能力。学科内容知识与计划和教学的特征之间的关系证明,充分准备相关内容是很重要的。例如,教师对内容准备得越充分,每天用于计划的时间和精力就越少,他们就可以把更多的注意力集中于计划教学的策略上,而较少放在相关内容的学习上。这样一来,他们在计划和教学时就会更灵活,教起课来也更充满信心。内容领域对教科书、课程指导、课堂教学中的个人知识和经验有着相对的影响。教科书和课程指导在数学教学计划中要比在其他学科领域的教学中起着更为核心的作用;相比之下,戏剧艺术和文学课的实习教师在设计课堂教学时要比上数学课的实习教师更多地依赖个人知识、经验和兴趣。中学实习教师可以有所选择地利用在几个小班教同一门课程的机会,获取合作教师的反馈信息,及时对几个章节的教学进行修改,从中获得最大的收益。最后,那些意识到自己对课堂活动负有责任并加以控制的实习教师,能更自如地采取积极的步骤改进各种问题情境,从而提高其教学水平。

该方案的研究可以得出这样的结论:学习教学上的成功取决于下列几个因素:细致详尽的教学计划,能结合各种减少潜在问题的策略;充分的学科内容准备,使新手教师能将精力有效地集中在教学计划上;有共同的观点,即不管是新手教师及其同事,还是管

理者都认为新手教师对课堂活动负有责任并要加以控制。

在学习教学中运用知识。第四个研究方案由密执安州立大学的费曼-内姆舍(Feiman - Nemser)负责总协调。方案考察了职前教师接受正规师范教育期间的各种学习经历,以及这些经历促进和妨碍他们向“教学思维”过渡的各种方式。费曼-内姆舍及其同事认为向教学思维过渡是学习数学过程中的一个主要组成部分。他们把教学思维定义为着重于满足学生需求的教学的思维,而不是只针对于教师本身或者学科内容的思维。为了了解这一过渡,他们对职前教师受训期间从课程及实习中学到的东西作了描述和分析。他们还试图确定构成职前教师受训期间的各种经历总括起来是否以及怎样为教学工作作准备。

在1982年和1984年之间,研究小组成员对六名接受过两年大学师范教育的小学教育专业的学生进行了跟踪调查。他们将参与者安排在两个截然不同的方案之中:学术性方案,它强调的是理论和学科内容知识、理解式教学、理性变化;决策性方案,它强调的是一般的教学方法和以研究为基础的决策。每学期研究人员都与参与者面谈一次,其内容包括,他们从课程和实习中学到了哪些知识以及他们认为这些经历如何帮助自己提高教学水平。研究人员还对每个方案的一门核心课程进行了观察,对相关内容、活动和师生间相互作用的情况作了现场观察记录。在该方案安排的第二年中的教学实习期间,研究人员每周都去实习教师的班级听课,观察并记录他们的活动,并与实习教师、合作教师以及大学视导员进行非正式面谈。在教学实习进行之前和之后,研究人员还与每一位实习教师进行正式面谈。研究报告主要集中于第一年中的两个个案和第二年中的两个个案。

在正规的师范教育第一年中,大学课程占支配地位。两个方案中的参与者在向教学思维过渡的过程中都遇到了困难,其原因至少部分应归咎于他们在学科内容和教学知识方面的局限性。教

师培养方案中的相关课程并没有消除其在学科内容方面的知识缺陷,也没有为他们提供足够的“教师培训”——教学、监督、实践和反思,以充实丰富他们的教学知识。两名参与者均想依靠自己的学校教育、教科书和在学习教学中的实践经验来弥补自己有限的知识。

第二年的个案研究集中于两名参与者的实习教学经历。这时,向教学思维过渡这一主题作为一个重要因素出现了。两名实习教师在区分完成教学活动(如检查家庭作业、在黑板前讲解以及布置作业等)与这些活动和学生课外应学的知识的联系时,遇到了困难。他们通常对自己精心安排的课堂活动中出现的一些潜在学习机会未能加以利用。

费曼-内姆舍及其同事根据他们的研究结果,得出了这样的结论:在没有指导的情况下,职前教师要实现向教学思维的过渡是困难的。他们自己很难看出什么是自己想要做的,什么是需要去做的或者什么是课堂环境要求他们做的。我们不能指望他们在设法满足课堂需求的同时,还要他们对自己作出教学决策所凭借的知识和信念,或者对作出这些决策的理由进行分析。研究人员建议教师培训者——在该方案中指的是大学的教师及合作教师——在指导职前的教学思维和行为方面应起到更积极的作用,比如可以向职前教师演示教学行为和表述教学思维,或者激励他们对自己的教学行为和决策进行分析和探讨。

教学中的知识增长。第五个研究项目由舒尔曼及其同事在斯坦福大学进行,它主要集中于“教师是怎样学会将自己对学科内容的理解转变为使学生能理解的各种表述和讲授形式”。他们对 20 名实习教师在 1984—1985 学年期间的情况加以研究,这些参与者都是来自加利福尼亚州三个教师培养方案中第五学年的学生,其学科领域涉及英语、社会学、生物学及数学。研究人员还跟踪调查了其中 12 名参与者从事教学工作第一年的情况。



调查的第一年期间,研究人员与参与者进行了--系列的面谈。面谈内容集中在有关他们的智力发展过程、学科领域的一般知识、担任教学的具体课程知识、--般的教学法知识以及特定学科内容的教学法知识方面。在某些面谈中,研究人员通过--些经过预先构造的任务了解参与者有关学科内容的知识及其与教学知识和实践的关系。他们还通过--系列的计划——观察——反思周期性地--进行数据收集。每个周期都包括说出设想的计划和就计划进行面谈,面谈集中于内容知识以及参与者要学生学习的相关内容知识上。这一周期还包括就观察的教学情况作面谈,找出参与者在学科内容知识和教学法知识方面所发生的变化以及发生变化的原因。研究人员对那些作跟踪调查的参与者的第一年教学情况进行观察,并与他们就观察课进行面谈。观察之前的面谈强调的是教师要讲授的内容知识,对讲授内容的准备情况,对学生潜在困难的预计情况,以及为适应不同类型的学生拟对内容作出修改的设想。每次观察结束后,研究人员都要求参与者对这一节课的上课情况,学生的表现和他们自己的教学进行反思。

以第一年收集的数据为基础,舒尔曼及其同事发展了在本章前面提到过的两个理论框架,它们描述了教师专长和教学分析过程的各个方面。他们运用这两个理论框架对参与者的教学和学习教学的各种模式作出了解释。

教师的学科内容知识会在许多方面影响课堂教学。例如,“以前在某一内容领域中的学科内容知识和背景影响着教师对教学内容的选择和组织,影响着他们为学生活动的选择和作业的布置,影响着他们对教科书和其他课程材料的使用”。参与者在学科内容知识方面的深度和特点影响着他们的教学风格和教学实体。丰富的学科内容知识能使教师将某一学科中的各种课题联系起来,并提供理性解释,而不是纯算法式解释。在数学学科中,具有较多学科内容知识的参与者更倾向于把问题解决视为数学教学的核心,

并强调理性的教学方式。与数学知识较少的教师比起来,他们会  
对某些方法为何奏效或不奏效作出更多的解释;他们会通过阐明  
各种概念间的关系和呈现所学教材的应用,向学生更多地表达数  
学的性质;他们会以更抽象的形式呈现教材;他们会让学生更多地  
参与问题解决的活动。类似地,具有较多学科内容知识的理科教  
师,也更可能强调教学过程中进行科学质疑的重要性。在这些学  
科领域中,参与者在教类似课题时,更可能鼓励学生提出各种问  
题,并让他们作开放式的讨论。

几乎所有的参与者通过教学和备课都增长了学科内容知识,  
因为他们在备课时常常需要回顾相关的内容。此外,由于在诸如  
理科和社会学科的一些领域中,大学里所学的专业与中学课程相  
距甚远,故而从这些专业毕业的教师在对自己从未学过的教材进  
行备课时,扩大了他们的学科内容知识。

参与者在试图向学生表达自己的理解的同时,也开始发展教  
学法内容知识——用教学上行之有效的方法将相关内容传授给学  
生的知识。正如舒尔曼和格罗斯曼所解释的那样,“他们的学科内  
容知识中充满了他们的关于学生的知识,关于教学的知识以及课  
程的知识,这样便形成了他们所从事教学工作中特有的学科知  
识”。例如,参与者形成了思考特定学科教学的多种框架(比如,把  
数学看作问题解决进行教学)。他们还获得了有关学生对某一学  
科理解和误解的知识,以及适用于特定学科教学的课程指导和可  
用教材方面的知识。在他们寻找将学科内容表述给学生的各种方  
法时,他们有时候会归纳出一些便于学生理解的表述方式或变换  
方式。这些表述方式形式各异,包括类比、比喻、演示、实例和图  
示。

除了形成这种新类型的知识外,实习教师还发展了教学分析  
技能,即帮助他们形成学科内容转换的新思维方式。舒尔曼及其  
同事认为,实习教师努力寻找向学生传授知识的方法,以设法运用

自己正在形成的教学分析技能和教学知识,将自己的知识转换为学生易于接受的形式。

参与者通过许多不同的来源获得教学法内容知识和教学分析技能。他们对教学的最初概念是基于对自己上中学时的任课教师所用教学方法的回忆。在接受师范教育时,他们通过听课和实习学到教学方面的知识。他们通常更多地认为,听课对其形成一般教学法知识和对学科内容的概念有影响;而实习则对其形成课程知识和关于学生理解方面的知识有影响。

有关职前教师学习数学教学研究的模式。在针对职前教师学习教学的经历所开展的一系列多种形式的研究工作中,明显贯穿了几种模式。研究表明职前教师在教学法内容知识和教学分析技能方面,以及对教师职业来说是独一无二的思维和知识各部分都存在局限性。此外,研究中还描述了知识、思维和课堂行为之间的相互联系。例如,职前教师的学科内容知识和教学法内容知识的局限性造成他们向教学思维过渡时的困难;造成他们不能将课堂教学中的各种课题进行联系;造成他们注重程序性理解而不是理性理解等。我们将在本章的后面对有关新手教师学习教学经历方面的模式作更详细的探讨。

**有关在职教师学习教学的研究** 学习教学是一个终生的过程,在这一过程中,职前准备只是其中的一个阶段。从理想化的观点看,这一阶段出现的能力强的新手教师都具备了易于继续这一终生学习过程的技能和个性。在职教师培训方案应当帮助他们成为“称职”的教师,并帮助一部分教师达到专家水平。

在本章的这一部分中,我们将对旨在促进在职教师继续学习的两项研究方案作一些阐述。因为在职教师培养方案不是本章关注的焦点,因而这里只限于对专门针对学习数学教学并着重研究教师知识和(或)思维技能的方案作一些讨论。

认知指导的教学。认知指导的教学(Cognitively Guided Instruction, 简称为 CGI)项目,是在卡彭特,芬内玛和彼得森主持下开展的跨年度、分阶段的课程发展和研究方案。该项目的设计思想是:向小学各低年级教师提供认知科学在儿童学习数学方面研究的最新结果,促使教师改变自己的数学教学,以鼓励儿童的问题解决。在该项目的第一阶段中,研究人员试图了解和描述一年级教师的教学法内容信念、教学法内容知识、教学方法和学生数学成绩之间的关系。项目第二阶段,研究人员对教师的知识及其有关学生数学知识的信念,教师在课堂上的数学教学,与学生在数学计算及问题解决方面的成绩之间的关系进行了实验性调查。由于在职教师研讨班在第二阶段中举行,故我们将对该阶段作详细论述。

项目第二阶段提出的主要问题是:从课堂和实验室里研究教学和学习教学所得到的知识能否改善教师的课堂教学,提高儿童的学业成绩。有 40 名一年级教师参与这一阶段的研究。研究人员随机指定 20 名教师组成实验组,参加为期四周的 CGI 暑期研讨班;余下的 20 名教师组成控制组,参加为期半天的问题解决研讨班。在整个学年中,对教师和学生进行了 16 天的观察。研究人员用问卷和面谈的方式对教师的知识及其有关学生知识的信念进行了评估。他们还编制了计算和问题解决方面的标准化测题,要求学生完成,并与学生面谈,以此对学生的问题解决策略、自信心以及对数学的理解情况作出评估。

实验组教师参加的研讨班按照有关教师认知和学生认知方面的假设进行设计。研讨班的内容基于对儿童解决加减法问题的研究工作。这一设计方式依据的假设是:教师是有思想的专业人员,能够形成他们自己的知识和理解。研讨班给教师提供了各种机会,让他们接触到加减法问题各种类型的知识,使他们了解到儿童是如何学习和形成加减法概念和问题解决技能的。参与者或者一起工作,或者单独工作,设计出以上述信息为基础的教学方案。当

然,研究人员并不对他们作特殊技能的训练,以改变他们的教学和课程。

尽管 CGI 研讨班并未指定运用哪些教学方法,然而实验组的教师在教学中,要比控制组教师更有意识地多讲问题解决方面的内容,较少讲数学事实方面的内容。同时,实验组教师也更频繁地向学生提出各种问题,鼓励学生更多地运用问题解决策略,并更经常地倾听学生讲述其解决问题的过程。他们比控制组教师更相信教学应建立在现有知识基础上的这一观点,同时,也更了解学生掌握的有关数字事实和问题解决的策略。实验组的学生在数字事实知识和一些问题解决测试方面的成绩超过了控制组的学生。他们对自己解决数学问题的能力也要比控制组学生更为自信,另外,他们对数学所显示出的理解也更充分。

然而教和学的某些方面并不适合这些一般模式。例如,当我们评估实验组和控制组教师对学生解决复杂的加减法文字题以及各种难题的成绩所作出的预测时,发现他们的有关学生问题解决能力方面的知识没有多大差别。同时,两组教师都越来越赞同儿童形成自己的数学知识这一观点,并在对儿童进行测试后,两组教师在支持这一观点的程度上也并没有什么区别。至于在学生的成绩方面,两组学生所在班级在计算题测试和解决难题方面显示出相似的成绩。

我们单单对实验组教师收集的数据作相关分析,可以进一步了解到教师的教学法内容知识、数学教学和学生的成绩之间存在着一定的关系。教师的有关学生问题解决能力方面的知识与学生数学问题解决的成绩是显著正相关的,并且与教师对学生问题解决过程进行提问和倾听也呈正相关关系。这一研究表明,有经验的教师在教学法内容知识和对教学内容的信念方面会受到在职期间有关研讨班的影响,而这种变化总是伴随着课堂教学而变化,并促进学生增强对数学的理解和提高问题解决的能力。

二年级课堂教学项目。科布(Cobb)、伍德(Wood)和亚克尔(Yackel)进行的二年级课堂教学项目,考察了二年级学生在课堂教学环境中形成的数学知识结构。该项目的主要目的在于:形成一种与构成主义理论相一致的,并且在公立学校体系约束下可行的教育实践形式。项目有个部分包含了一个教学实验。实验中,研究人员与一位教师一起在她的课堂上实施以认知为基础的教学活动。在随后的一部分中,研究人员根据实验获得的部分信息,设计并实施了一个在职教师方案,以帮助教师发展与构成主义相一致的课堂实践。

在进行这一课堂教学实验之前的春季,研究人员与参与的这名教师交谈讨论儿童学习数学的各种认知模式。但是,他们不久就发现这位教师并未努力去理解儿童的数学活动和思维过程。只是在她渐渐意识到自己目前的教学实践出现问题时,才与研究人员建立起真正的合作关系,并积极地改变自己的课堂实践。这时,她才开始根据自己的实用知识,而不是按研究人员设计的正规认知模式,设法形成理解自己与学生之间相互作用的方式。于是,她对自己作为一名教师的角色以及儿童作为学习者的角色的理性认识有所改变,朝着与构成主义理论更为一致的方向变化。

在这一实践的基础上,研究人员将教师的教学知识构成与学生的数学知识构成进行了类比。他们推理的结论是:要帮助教师形成与构成主义的数学学习方式相一致的课堂实践,就必须让他们认识到以课本为基础的教学的确存在问题,并鼓励他们通过重组教学法内容知识和信念,修改课堂实践来解决这些有问题的方面。研究人员在这种意识的指导下,设计了一个在职教师培养方案,以鼓励教师增强自主意识,帮助他形成自己能证实的合理的实践形式。这一方案由几个部分组成,包括:举办为期一周的暑期短训班;研究人员第一年中每两周至少安排一次到参与者班级听课;每周举行一次小组会,让参与的教师讨论一下各自的教学经历;学

年中安排四次校外研究会。暑期短训班的目的在于:营造研究问题的氛围,促使教师对有关儿童如何形成数学知识和他们自己目前如何教学的种种设想提出疑问。听课期间,研究人员关注教师的实际做法是帮助他们发现教学中他们还未意识到的问题。校外研究会由教师提议举行,集中讨论儿童用于解决计算问题的各种方法。

有 18 名教师参加了第一轮的教师培训;其中有 10 名教师参与了项目的评估。研究人员将同一学校里 10 个参与项目的班级与另外 8 个不参与项目的班级收集来的数据进行比较。结果发现:参与项目的教师在教学法内容方面的信念要比不参与的其他同事更符合构成主义的观点。学年结束时,参与项目的学生尽管在计算熟练程度方面与其他班级的差不多,但在概念的理解方面则要突出一些。此外,这些学生比其他人更加确信有关理解和合作的重要性,而对自己的解答方法与别人是否一致这一点并不看重。他们更具竞争性,更能为取得的成功寻找作业之外的原因。

有关在职教师学习教学的模式。从两个研究项目中得出的结果均表明,在职教师培训能够影响教师的教学法内容知识和信念,这些知识和信念的变化是与课堂教学实践和学生学业成绩的变化结合在一起的。尽管我们在看待这些研究结果时肯定持乐观态度,但是也应对一些情况引起警惕:由于没有收集到有关教师知识及其思维过程或者有关其在课堂教学实践本质方面的系统数据,因而在二年级研究所得出的有关教师发生变化方面的结论就带有局限性。此外,由于实验组教师都是自愿参加,因而参与和不参与的教师其最初的信念就可能不同。在 CGI 研究中,实验组教师和学生某些信念和知识的水准上并不比控制组中的强。

在密苏里数学效率项目及其他内容领域方面的调查中所得到的资料支持了这些混合式研究成果得出的模式。密苏里数学效率项目是一个历时多年、分阶段开展的研究方案。在这一方案中,古

德(Good)、格劳斯(Grouws)及其同事制定并测试了一个全班数学教学模型。这种模型和相关研究集中于研究有效的数学教学实践,而不是教师知识或思维过程。在一次实验性的调查中,实验组的教师通过一本手册和两次 90 分钟的研讨会学会了这一模型。结果发现,他们要比控制组的教师更频繁地实施这一方案中的教学要素。同时,实际上实验组的学生也要比控制组的学生取得的成绩好得多。这一模式中有一主要例外,即实验组的教师在按要求对一堂课分配时间中遇到了困难。古德和格劳斯推测这种低水准的情况可能是因为“教师可能不具备管理相对较长的时间所必需的知识基础”。构成这一方案的手册和研讨会还不能使教师在内容知识或教学法内容知识得到足够的增长,而这些知识对于较大程度地改变教师表述新技能和概念的方式正是必要的。

有关理科教育的两个研究方案表明:教师参加了在职培训后,其知识的增长同样是有限的。克拉西克(Krajcik)和莱曼(Layman)发现那些参加了为期三周的关于热能和温度概念教学的暑期研讨班的中学理科教师,在对这些概念(内容知识)的理解以及如何教这些概念(教学法内容知识)的思想方面有一定程度的提高。但是,许多参与者仍然表现出莫衷一是或理解偏差,尤其在考虑如何教热能这一概念时更是如此。类似地,史密斯和尼尔(Neale)在一个为期四周的有关小学理科班概念变更教学的暑期研讨班中,对参与者的学科内容知识和教学法内容知识作了一些考察。这些教师在内容知识方面的增长相当富有戏剧性;然而他们在教学法内容知识方面发生的变化就不同了。尽管多数教师运用概念教学策略增多了,但是他们上的多数课仍然缺少强有力的实例、比喻及其他表述内容的方法。

总之,这些研究结果表明,有经验的教师可以通过参加在职培训方案来增长自己数理概念的内容知识和教学法内容知识。然而帮助教师改善这些领域知识的过程需要更多的时间进行精心准



备。

## 有关学习教学的模式及其意义

本章的这一节,我们将对前面讨论的各种研究方案中出现的关于学习教学过程的模式作一个总结。为了与本章关注的焦点相一致,我们着重对从职前教师学习教学的研究中总结出来的各种模式进行讨论,并强调对专家-新手教师之间的差异性和在职教师学习经历这两者的研究是如何支持和(或)充实这些模式的。我们讨论的模式围绕着下面三个问题进行组织:(1)内容知识对教学的影响;(2)新手教师对教学法内容知识的学习;(3)学习教学分析技能遇到的困难。这些问题与认知心理学的理论框架有关,其中内容知识和教学法内容知识被视为教师职业知识的关键方面,而教学分析技能则被视为教学思维和行为中的核心过程。另外,教学法内容知识和教学分析还被看作是教学职业所特有的两个认知方面。在对有关学习教学的研究工作进行分析的过程中,出现了以上这些问题,这一事实表明该理论框架是帮助我们理解学习教学过程的有效工具。

**内容知识** 从几个研究方案中得出的结论都证实了在实习教学之前充分备好学科内容的重要性。如果没有足够的内容知识,实习教师就会把许多有限的用于计划的时间放在学习内容知识上,而不是用来计划如何将内容讲得使学生易于理解。而对学科内容作了充分准备的实习教师在教学中则更具灵活性,更能满足学生的需求,也会更多地作理性解释而不是单纯作一些程序性解释。同时,他们也往往更注重学科知识的组织和相互联系,而很少偏重对具体知识的介绍。实习教师若没有足够的内容知识,就可能对自己上好课的能力缺乏信心。很显然,教师必须具备足够的内容知识,并以 NCTM 倡导的(也是本章认同的)好的教学方式进

行教学。

遗憾的是,这些研究同时也指出即将上岗的教师在开始进行教学实习时,通常并不具备足够的内容知识。那么足够的内容是由什么构成的呢?安德森(C. Anderson)借鉴贝莱特(Bereiter)和斯坎达马利亚(Scardamalia)的提法,运用文化程度高低的概念来处理这个问题。他将“从事连续性分析工作或进行创造性工作所必须的高文化程度与在我们的社会中从事基本工作所必须的技能和知识,即低文化程度”进行了对比,并指出教师应当“充分做好准备,帮助他们的学生达到其可以攀登的高文化程度”。为了达到这个目的,教师本身必须十分精通自己所教的学科。他们必须能够“深入灵活地思考构成学科知识结构的各种事实、概念和程序之间的关系,思考所教的学科内容在课堂内外可能具有的多种用途,思考学生形成学科知识过程中表现出来的各种不同的理解形式或程度”。他指出大多数实习教师具有“高度发达的低文化程度”,甚至能力最强的教师也只不过具有“潜在的高文化程度”。鲍尔关于即将上岗的教师对数学的理解方面的研究成果以及她对这些教师所下的缺乏教学知识的结论支持了这一分析。

安德森进一步指出,不管是目前的学术性课程还是专业教育课程,在帮助即将上岗的教师形成学科内容领域中的高文化程度方面都无能为力。如同鲍尔一样,他也建议对这两方面课程作改进应该成为师范教育改革中的一个重点,这一点并不令人觉得奇怪;而且我们也同意这一观点。

**教学法内容知识** 因为教学法内容知识是教学职业所特有的,所以我们估计新手教师在这方面的知识相对来说是不太成熟的,因为我们认为应当把它作为新手教师各种教育经历中的一个主要关注焦点。一些考察过的研究工作可以证实下列这些推测:在许多研究中,都有证据表明新手教师通过教学和备课,增长了教

学法内容知识。通过观察和面谈也可以看出知识增长的过程并不总是很容易的。实习教师努力去寻找向学生表述学科知识的各种有效方式,但有时会失败。而且,他们所作的努力经常是既费时、又无效的。

在研究专家-新手教师的差异性以及在职教师各种学习经历时,教学法内容知识也是一个不可缺少的重要解释。专家-新手教师在教学技能方面的许多差异,可以用下述假设作出解释,即新手教师的教学法内容知识图式要比专家教师的图式更为简单、更缺乏关联性、更不易被理解。此外,有关有经验的在职教师培训的研究也表明,这些教师在努力扩充自己的教学法内容知识基础时,也很可能会障碍重重。实际上,对有经验的教师来说,内容知识的增长似乎要比教学法内容知识的增长来得容易。这些研究结果的模式支持了下面提出的建议,即应当将获取教学法内容知识视为职前教师培训方案中优先考虑的核心部分,并在贯穿于整个教学生涯的各种在职教师培训方案中继续予以重视。

**教学分析** 教学分析的过程,是将内容知识转换成教学上有效、并能适应特定学生需要的各种形式的过程,它是教学取得成功的核心所在。如同教学法内容知识一样,新手教师在这方面的知识也是相对不成熟的。而且研究证据表明,学习教学过程中最困难的方面之一是把个人定位转换为关于如何组织和表述促进学生理解学科内容的思维训练。在一些研究方案中,职前教师在向教学分析转换时遇到了困难。或许更为麻烦的是,有证据表明,在某些情况下,这些教师甚至还没有意识到他们正面临着问题。

专家-新手教师的研究工作指出,教学分析技能方面的差异构成了区分专家-新手教师的又一个因素。科布及其同事开展的研究工作建议,为了促使课堂教学实践与 NCIM 倡导的好的教学概念相一致,教师培养方案必须帮助教师认识到目前的做法是有问

题的,并采用新的方法分析数学教学。因此,教学分析应当成为教师培训方案中的核心,这一点看来是显而易见的。

## 教师社会化

本章的这一节将讨论有关教师社会化方面的研究工作。首先对大多数教师社会化方面的研究工作所涉及的三种观点作一番回顾,然后再介绍一些代表每种传统观点的研究工作。最后总结一下从教师社会化研究结果中得出的各种模式。

有关教师社会化的研究将教师看作是某种职业文化群落中的一名成员,于是成为一名教师的过程也就是成为这种文化群落中一员的过程。因此,有关教师社会化的研究工作试图要解答这样一个问题:“教师是怎样获得或形成教师文化群落的各种信念、价值观和看法的?”有关教师社会化的研究假设了一些影响教师成为文化群落成员的各种外部力量、人物和机制。蔡奇纳(Zeichner)和戈尔(Gore)在研究时已认识到有三种主要的传统观点:机能主义理论,译释主义理论和批判主义理论。

许多有关教师社会化的研究工作都假设了一种机能主义的模式,其强调的观点是社会化使得个人适应社会。机能主义模式的假设是:社会化过程都具有一个特定的结果,这一结果就是成为一名完全成熟的,能在社会中找到自己的位置,并且保持这一现状的人。机能主义对教师社会化进行解释时,把新手教师描述成相对被动的群体,经常屈从于学校中的一些社会化力量。

最近开展的一些有关教师社会化的研究工作已经开始向这种机能主义观点的决定论特征提出了挑战,强调个体教师在形成职业本体时所起的作用。根据这种译释主义的观点,教师社会化是一个个人选择与外部约束之间、个体因素与公众因素之间不断地相互作用的过程。在社会化过程中,个体教师不纯粹是被动的接

受者;而是在自己的职业发展过程中发挥着积极的作用。

有关教师社会化问题的一个新兴观点是批判主义理论。它试图将诸如阶级、性别、种族、公正和平等之类的问题摆到最重要的位置上。以批判主义理论为指导的研究工作,其目标是进行社会变革。它所持的观点比译释主义观点更为激进,它认为“必须把人看成是他们所生存的社会情境的创造者和产物”(博尔斯特(Bolster))。

本节中,我们挑选了一些涉及这三种传统观点的研究工作进行讨论。我们的讨论不是全面而详尽的,而是选择那些代表每种观点中所提问题、所用方法论、所得结果的研究。为了与本章关注的个体成为一名教师的焦点保持一致,我们将对关注教师社会化过程中的各种经历方面的研究工作作一些回顾,而对有关促使教师社会化的公众或文化方面的研究工作则不作讨论。由于我们对个体的兴趣,以及对个体成为一名教师过程中教师是积极参与者的信念,使得我们特别强调以译释主义和批判主义观点所开展的社会化研究,尽管由于研究工作的缺乏,我们只能有限地对以批判主义观点为指导的教师社会化研究加以讨论。

### 从机能主义角度看教师社会化

从机能主义角度开展的教师社会化研究试图以各种预言式、概括性的方式来解释现状。由于把教师看成是处于被动地位,而把外部影响看成是具有决定性的,故而从这一角度进行的研究,通常集中于描述外部因素及其对新手教师的影响。下面我们将对这一领域中研究人员关心的两个基本问题的研究情况作一些讨论:(1)在正规师范教育之前发生的经历所产生的影响;(2)学校实践的各种因素对新手教师的影响。我们选择这些研究工作,原因在于虽然它们试图对整个教师群体作一般化讨论而不考虑背景或个体差异,但是它们关注新手教师的经历,而不是关注作用于新手教

师的机构的经历。

**正规师范教育之前的经历** 众所周知,职前教师在接受教师培训前并非白纸一张,而是带着在学生时代就已形成的有关数学和教学方面的知识、信念和看法。洛蒂(Lortie)在六个学区进行了一项教师社会化方面的研究,以说明教师的确受到其学生时代的影响。他在这六个学区中通过深入的面谈、观察和调查收集资料,对其加以分析,并运用其他研究所得到的数据,结果发现,对教师产生的最重大影响之一,用他的话来说,就是观察见习期。他认为“做一名学生很多地方就像处于教学见习期一样;学生与固定的教师之间长期延续着面对面的、间接的相互作用”。洛蒂认为在观察见习期,各种教学模式变得内在化,学生学习“扮演”教师。

洛蒂的研究项目中,要求面谈的教师描述自己遇到的一个杰出教师,结果他们都不由自主地叙述自己目前的教学工作如何受到以前接受的教学的影响。接受面谈的教师中有42%的人还不仅仅对此简单描述一番,而且把自己在教学上的做法与他们提到的教师的做法联系了起来。这一研究证实,早在他们担负教师角色之前,或者甚至在开始接受正规师范教育之前,那些教学计划就已经形成了关于教学本质的明确概念。然而洛蒂认为在观察见习期没有灌输一种教学是疑难的意识,其原因在于学生的各种见解还有局限性。因此,当他们进入教师职业时往往对他们的角色带有简单化的想法。

佩蒂(Petty)和霍格本(Hogben)对一些有经验的小学教师、实习教师和非教育专业的学生进行了为期两年的研究。他们运用语义分化手段来收集关于那些被研究者官方和专业定位的数据,并允许他们用相当综合的方法来描述教学的涵义。结果表明“几组调查对象的因素结构都有相似之处,即关注当前的教学实践占主导地位,并在为期两年的研究期间始终保持不变”。他们认为这些

结果表明:三组参与者对教学具有共同看法。这支持了洛蒂的论点,即在接受正规师范教育之前已经发生了大量社会化,并且这些社会化没有受到师范教育或教学经历的大影响。

赖特和图斯卡进一步考察了对儿童来说意义重大的另外一些人物(母亲、父亲、教师),他们对儿童做出当一名教师的决定以及对实际教学实践所产生的影响。在妇女职业发展期间:教学实习之前,教学实习之后,教学工作第一年结束前,研究人员对 508 名妇女作了三次教学态度问卷调查,收集了有关数据。这一问卷调查是用来记录每个被试对自我和作为教师这一角色的概念。研究结果指出早期经历很大程度上影响着来日的教师所具有的教师和教学的想象,甚至在他们自己做了教师以后,这些想象仍继续影响着他们。这一研究表明,除非正规的教育能改变这些早已存在的想象,不然教师将会运用类似于他们自己的教师用过的方法来进行教学。

当我们考虑试图朝着与过去的实践完全不同的方向改革目前的数学教学时,我们发现上述这些研究结果对此是有问题的。这里所回顾的研究工作让人联想到,经过多年传统教学影响的新手教师会被社会化,而采用传统的教学方式,因而,可能就很难为新手和有经验教师设计相关的经历,以帮助他们发展对数学教学的不同概念化。

**学校实践各种因素的影响** 从机能主义角度开展的若干研究工作考察了课堂经历对教师社会化过程产生的影响。这些研究工作通常调查实习教师和刚上岗的教师在教学态度上发生的变化。结果发现,变化的趋势是大学或学院学习期间形成的革新、开明的态度减弱了,而在实际工作中则变得更保守(现实)。

霍伊(Hoy)有关学生控制意识(PCI)的研究就是这类研究中典型的一个。控制意识是沿着从人本主义到监护式的一系列变化而

形成的概念。人本主义的定位是指“一种可以接受的、相信学生具有自律能力和责任心的观点”。监护式的定位是指“强调维持秩序;不相信学生;一种惩罚性和说教性的定位”。有 175 名中小学教师四个时间段里填写了有 20 个栏目的 PCI 表格,具体是在:实习教学之前,为期八周的实习教学结束的时候,实习教学结束后的一年,实习教学结束后的二年。对数据的分析表明:

不考虑教学层次,也就是说,不管是小学还是中学,在实习教学结束后和从事教学工作后的第一年里,刚上岗教师的 PCI 逐渐变得具有相当的监护性质。然而,在教师经过了第二年的教学之后,他们的 PCI 实质上不再有什么变化了。

其他有关教学态度发生变化的研究工作也表明,教师完成培训,迈进课堂之后,他们对教学的看法就变得更为传统和实用主义。

从机能主义角度来看,新手教师发生的变化是某些外部影响的结果。通常来说,合作教师及其他同事已被视为主要的影响来源,尽管这一点在研究中还没有得到充分证实。某些研究工作提出,实习教师实际上在实习教学期间,其态度和行为已经在向他们的合作教师靠拢。但我们还不清楚靠拢的原因以及靠拢的程度。

科普兰做了一次实验研究,考察了合作教师与实习教师之间传递课堂行为的过程。他设计这一研究是要测试课堂生态系统对实习教师产生的影响。他以“提出探索性问题”技能的“高”和“低”为标准,将合作教师划分为两类,并运用一种相当复杂的方法将实习教师分配给这些合作教师。他指派八名实习教师去观察一位技能“高”的合作教师,同时又指派八名实习教师去观察一位技能“低”的合作教师,观察时间为三周。三周以后,他安排每一组中的四名实习教师到另一组中的合作教师的班级里任课。而每组剩下



的另外四名则安排在本组中的合作教师的班级里任课。

科普兰发现不仅合作教师的行为与实习教师使用特定技能有关,而且这种技能的运用程度也是课堂生态系统的一个因变量。也就是说,如果课堂上的学生接触并能迅速接受这一“提出探索性问题”特定技能水平,那么他们将会强化实习教师进一步运用这一技能。科普兰认为合作教师在课堂上运用特定技能也会受到课堂生态系统的影响——也就是受到学生所作反应的影响。他的结论是:实习教师向类似于合作教师的教学风格靠拢,主要应归因于课堂生态系统,而不是直接受合作教师的影响。其他一些研究也用有关数据资料论证了学生行为对新手教师的行为所产生的影响,这些研究进一步支持了科普兰的研究结果,即学生的行为是一种很强的社会化动因。

大多数关于新手教师发生变化的研究工作都持有一个基本假设,即正规师范教育是以开明的方式影响着职前教师。但是这一假设已遭到了挑战,有研究表明,教师培训事实上具有保守的影响力。巴塞洛缪(Bartholomew)对英国的教师培养情况作了分析,得出这样的结论,把大学看作具有开明影响的观点是把教师培训中的态度和课堂中的实践进行对比的产物:

如果我们把大学里得到的理论或态度与大学中的实践对比一下,我们就会发现在开明的理论与保守的实践之间存在着一条鸿沟,而这在大学与中学之间同样也是存在的。因为人们只是根据理论或态度,而不是实际做法来看待大学,因而看上去好像很开明,但这一表面现象掩盖了与之不同的另外一个现实。

中学和大学两者强调的都是知识的传播,这里讲的知识对于教师和学生来说是有区别的。对学生来说,要求他们掌握这些知识,而这些知识基本上与实践相脱离:“关键是作为一名学生……

[教师]从来不会在实践中经历他在理论上可以自由表达的开明思想。向保守态度变化只不过表明了实际做法中的一贯情况”。这些研究结果进一步促成机能主义的如下解释:新手教师倾向于运用以前教过自己的、且在当前学校中占主导地位的传统方法进行教学。

**机能主义研究中的各种模式** 从机能主义角度开展的有关教师社会化的研究工作,都设想存在外部力量,促使新手教师适应当前学校教学环境。尽管我们这里所回顾的每个研究项目其侧重点不同,它们分别对成为一名数学教师过程中可能会遇到的各不相同的社会化动因进行了研究,但是这些研究结果和其他从机能主义角度开展的研究结果却是一致的。它们都认为新手教师的行为和态度朝着目前从事实际教学的教师的方向变化。此外,它们还指出影响着新手教师的主要因素——过去的经历、教师培训和课堂经历——不断地促使刚上岗的教师适应现状。

从机能主义角度看社会化的研究人员描述了社会化动因对新手教师的影响以及因此发生的变化,并对研究结果作出了解释。因为这些研究工作报告了新手教师变化的一般趋势,并没有调查个体有关社会化过程中经历的细节,所以研究没有提供任何信息以说明新手教师发生变化的原因。机能主义的研究工作也没有考虑新手教师社会化时所处环境的差异性。尽管有以上这些局限因素,但是这些研究确实表明,刚上岗的教师具有形成学校现有文化群落中占主导地位的态度和行为的趋势。对于那些希望看到数学教学改革的人来说,这些研究结果不免令人沮丧,因为它们认为新手教师最不可能对数学课程和教学实践进行变革,除非这些变革也是他们学习过的,是他们正在教学和学习的学校文化群落的一个组成部分。

## 从译释主义角度看教师社会化

与机能主义不同,译释主义对教师社会化的研究工作通常“旨在形成一个社会化过程的模式,其中由于个体所作的选择和所用的策略,可能会引发个体的自动变化”(莱西(Lacey))。最近许多译释主义方面的研究都受到莱西工作的启迪,他是利用观察参与者和分析问卷调查数据,从实习教师的角度来了解他们的各种经历。莱西提出了社会策略这个概念,它对于解释刚上岗教师的社会化问题是个关键:“社会策略包括……选择各种观点和行为,分清它们在特定的情境中复杂的相互关系(行为-观点系统)。作为一名学生[教师],从一种情境发展到另一种情境,对这些行为-观点系统的选择无需前后一致”。莱西称刚上岗的教师运用了三种不同的社会策略,来对付他们担负教师角色时所面对的各种机构约束。

第一个策略是内在化调节,即个体遵从情境施加的约束,并相信这些约束是出于好意。个体运用这个策略使自己的行为迎合环境的要求,并作出价值观认同的承诺,从而表现出环境所期望的各种特性。

第二个策略是策略性服从,指的是这样一种反应,即个体教师服从情境的约束,但怎么做,则持个人保留意见。他们的行为从某种意义上讲与自己的信念并不一致;在行为上的服从只不过是一种适应性反应,价值观念并没有发生相应改变。

第三个策略是策略性再定义,它是另一种反应,即个体成功地改变了情境,尽管他或她并不具备正式权力进行这样的改变。这种改变是通过促使那些拥有正式权力的人对什么才是适合于这一情境的问题进行重新定义来实现的。运用莱西的理论框架时,人们必须考虑到教师社会化时所处情境的各种约束,以及个体教师在这一情境中的目的。他的理论意味着我们教师的各种观点和行为只有在特定的情境背景中才可以被解释。

蔡奇纳及其同事的研究项目是从译释主义角度开展的又一个有关教师社会化的研究工作,他们考察了刚上岗教师的教学观(念)发生变化所显示的教学社会化情况。这一方案分为两个阶段研究,为期两年。第一阶段对正在一所大学参加教师培训的13名实习教师进行观察,试图找出实习教师的经历影响教学观念发展的各种方式以及影响这些变化的各种因素。第二阶段,对原先13名参与者中的4名继续进行跟踪调查,考察他们从事教学第一年的情况。其目的在于,揭示出刚上岗教师在第一年教学中,他们的特点、个性和能力以及学校中各种人和机构的特点是如何影响他们教学观念发展的。贝克尔(Becker)、吉尔(Geer)、休斯(Hughes)和斯特劳斯(Strauss)对这里提到的观念的定义是:人们在处理一些问题情境时所运用的一系列相互协调的观点和行为。他们认为教师的行为和思维是不可分割的,两者均反映了教学观念。

经他们挑选的第一阶段中的13名参与者是一组职前教师,他们似乎在教师信念表(TBI)测试的每个方面上都表现出各异的信念。教师信念表(TBI)有47个栏目,将实习教师的信念从六种具体方面进行评估:(1)教师的作用;(2)教师-学生之间的关系;(3)知识和课程;(4)学生的差异;(5)社区在学校事务中的作用;(6)学校在社会中的作用(最后两个方面对研究确实并无用处)。在实习教学期间,研究人员对参与者作了观察和面谈;为了确定实习教师各种观念的本质和范围以及他们在这一学期中观念变化的方式和程度,研究人员还与大学视导员和合作教师进行了面谈。

研究发现,参与者教学观变化的主导趋势是朝着与实习教师早已形成的隐在的文化修养相一致的方向发展。正如蔡奇纳及其同事所述的那样,“数据清楚地表明,实习教学并没有带来教学观念的统一……相反,除了三名实习生外,经过15周的实习教学,各种教学观念反而得到了巩固,没有发生根本性变化”。

尽管研究中没有发现实习教师的教学观念本质发生重大变

化,但是大多数参与者确实也有某些变化。比如,他们对教学工作  
和教师作用的想法似乎更现实了;他们对自己运用他们喜爱的风格  
处理课堂事务的能力变得更加充满自信,同时对涉及到自己教学的  
观察和评估也不再有过多的焦虑。

有三名实习生没有按照与自己早已形成的观念相一致的方式进行  
实习教学,他们运用了莱西所谓的“策略性服从”的策略。这些实  
习教师遭到了学校的各种严格约束,使他们无法作出强烈反应。由  
于他们在学校作为实习教师的地位和机构的约束力量,他们在公开  
场合只好按环境要求的方式行事,然而私下里则对自己的行为始终  
持有强烈的保留意见。经过一学期的研究,发现这三名实习教师的  
教学观念并没有发展变化。

研究发现,大多数实习教师自己有目的地选择与其教学观点相  
一致的情境,以便能按某些自己喜爱的方式行事。因而,有 10 名  
教师的教学观念没有发生根本性的变化,对此人们就不会感到奇怪  
了。当然,即使把实习教师安排在相同的学校里,面对同样的机构约  
束,每个人对环境作出的反应多少还是有点不同的,但是仍然与他们  
早已形成的观念相一致,这点也是事实。这些结果似乎与机能主义  
所持的人们对机构力量的反应是被动的这一观点相抵触。

蔡奇纳及其同事对四名参与者的第一年教学作了跟踪调查,结  
果发现,他们在第一次上课时表现出的教学观念表面上比较相像。  
在他们中间有三名教师教学第一年所处的环境与实习教学时的环  
境截然不同,而这三名教师中又有两名试图用类似于实习教学时  
还管用的教学风格进行教学;只有一名教师为适应不同机构的要求,  
大大改变了她的观念。研究指出,在某些情况下,刚上岗教师能够  
保持与所在学校里占主导地位机构文化群落相背离的观念。他们  
能抵挡住机构的压力,仍保持自己的观念,对此可以作这样的解释:  
学校里存在着各种不同的文化群落。蔡奇纳和他的

同事发现学校里存在着各种亚文化群落,它们有时会试图以相互对立的方式影响刚上岗的教师。这种相互对立的现象似乎为新手教师确立自己对教学的看法提供了机会。研究人员同时还指出,对学校环境里存在的各种非正式文化群落所作的更细致考察,可能会对刚上岗教师在社会化过程中表现的个体差异提供进一步的解释。

其他一些研究工作支持了这个观点,即了解教师、学生和学校中的各种非正式文化群落,对于理解实习教师和刚上岗教师的社会化是重要的。例如,布朗在研究一位中学数学教师教学的社会化问题时,考察了学校环境中的各种非正式文化群落。这项研究调查了这位教师在教学第一年期间,在数学教学概念方面所发生的变化。这里所讲的数学教学概念包含三部分内容:对数学的概念;对数学课选择适当目标和任务的见解;对涉及动机、训练和评估的师生相关责任的看法。

这项研究基于象征性交互主义观点之上。这一观点假设:教师和学生共同决定了课堂情境,它受到师生的背景以及融入课堂的有形的、暂存的和组织化的背景的制约(德拉蒙特(Delamont))。在对观察和面谈得到的数据作了分析之后,研究人员确定了新手教师发生变化的程度以及影响这些变化的各种因素。

学生言行中显露的关于数学教学的概念是影响新手教师发展数学教学概念的最重要因素之一。例如,新手教师通过讲述他认为什么是他的学生能够做的或者乐意做的,来反复证明自己课堂行为的合理性。他对自己学生的看法与他通过中学和大学学习形成的数学教学概念是不一致的。布朗给我们描述了这样一种情形,即学生是如何通过一年的持续性行为,创设一种情境,使得新手教师不得不改变他的教学思维方式和课堂实践方式。

尽管这些看法促使新手教师改变了自己在所处情境中的思维和行为,但他却没有改变自己对数学和教学的最基本的概念。这

一模式符合莱西的策略性服从这一概念;教师虽然让自己的行为去迎合学生的各种期望,但仍然保留着对数学教学的各种设想,当然他认为在目前的环境中这些设想还不可能得以实施。

**译释主义研究中的各种模式** 从译释主义角度开展的教师社会化研究工作表明,对刚上岗教师作出选择和约束所产生的影响是多方面的。这些调查绝大多数是个案研究,深入细致地考察了与教师群体的总趋势相对的个体教师的经历。研究表明,新手教师间的个体差异取决于其所处环境(诸如学生、同事、机构或组织)中各种因素的影响方式。尽管这些因素对个体教师的影响有差别,但它们对于教师社会化过程的影响无疑都是重要的。

本节我们提到的研究工作并没有提供信息,说明为什么不同的新手教师会对社会化过程中的各种因素作出不同反应。我们也不知道,为什么一位新手教师在教学中坚持把问题解决作为核心,而另一位教师却面对机构压力,放弃自己的设想,去教一些“基本技能”。对数学的理解深度会不会是一个因素?是不是与支持问题解决是很重要的这一信念的强度有关?译释主义的研究工作对这些问题还未作出解答。

尽管本节所回顾的这些研究工作阐述了个体与学校文化群落中各种因素之间的关系,但这些研究却与其他从译释主义角度所作的研究一样,都把重点放在教师如何受到影响方面,而不是放在文化群落如何发生变化方面。译释主义观点认为,社会化是相互作用的过程,因而研究人员应引起注意,不仅要考察个体的社会化经历,而且还要考察机构、同事和学生是如何受到新手教师的影响的。

## 从批判主义角度看教师社会化

从批判主义角度对教师社会化的研究,主要有两个目的:(1)

在广阔的社会背景中理解社会化过程；(2)变革社会化过程，使之摆脱种族、性别和阶级关系的不平等。从批判主义角度撰写出版的大多数著作是理论性或是思辩性的。目前有关这方面的经验性研究极少。

金斯伯格(Ginsburg)对职前教师的社会化问题进行了两年的观察研究，这是批判主义传统领域中仅有的几个成功的经验性研究例子之一。为了准确地研究“师范教育，师范教育的组织结构，课程内容以及实际经历”，金斯伯格与职前教师一起走进课堂。更具体地说，他想更好地了解师范教育与再现财富、权力、地位以及性别、种族和社会阶层的不平等性之间的关系。研究工作收集的数据主要来自现场记录、与学生和讲师的面谈以及课堂上发的印刷品、布置的作业等等。金斯伯格描述道，他所研究的师范教育中有许多方面维持了现状。例如，他认为当前正在进行的职前教师培训“照搬了现成的一些课程知识”。某些学生在接受培训过程中，越来越不愿意对现有的课程指导和教科书提出挑战。他还认为“绝大多数女性正在‘提前丧失技能’，这可能不是巧合”。她们的教师培养方案似乎是让这些女性职前准备好，一辈子接受那些绝大多数由男性教师制订和实施的课程。

金斯伯格在他的著作的最后一章中，对教师培训者的现状进行了批判主义探讨，他认为所有接触职前教师的大学教员在教学中都有责任更积极地提出重要的社会问题。作为一名典型的批判主义理论工作者，金斯伯格将教师培养过程置于更为广阔的政治和社会背景中，其目的在于批判师范教育现状中那些想当然的简单做法。

登斯莫尔(Densmore)研究了两名女教师教学第一年中社会化情况，考察了教师如何形成对教学职业的理解。他对贝思(Beth)和萨拉(Sarah)这两名教师作了一年的观察和面谈。另外，对校长、其他教师、父母和学生也作了观察和面谈，收集了相关数据。



研究中,用教学工作中若干组织和思想手段作为控制作用于这两名教师:知识体系设计,课程方案,教员准则,职业思想基本要素,会议次数和议事日程,家长压力,校长作用,缺少真正的教师集中机会,繁重的工作量等。登斯莫尔认为教师对教学职业特性的理解就是他们对自己工作环境中这些因素所作出的各种反应。

对贝思来说,职业特性就是坚持机构中公认的准则。到年中时,由于她承担的责任太重,已不能很好应付,因而教学对她来说已成为一种“任务”,自己主动投入就更少了。贝思的主要精力集中于完成她的任务;成为一名专业人员就是意味着要满足管理部门、学生和家长的各种期望,而不是自己决定教什么,怎么教。

对萨拉来说,职业特性在一定程度上就是做学校的一名代表,通常也就是对家长的代表。萨拉所在学校中开展的教学组织活动使她在工作中丧失了许多责任、技能和知识。她认为自己是专业人员,进而是一名专家,不能让家长将控制权从自己手中夺走。一年下来,她对职业特性的意识和家长的压力使她不得不增加创造课来充实课程。这样一来,原本就相当可观的工作量又增加了。

贝思和萨拉感到在教学中很少有自主权,她们将对课程的控制权交给了别人,而自己的工作负担却很重。她们在定义教师职业特性时,似乎更接近于作出“教师是工人而不是专业人员”的反应。根据这一分析,登斯莫尔提出了一种把教师看作工人而不是看作专业人员的概念。她认为教学工作中的职业思想与教学环境的现实相互冲突,并指出师范教育和学校,提起职业特性来总是夸大其辞,实际上却仍然把教师视为工人。

在一次典型的从批判主义角度研究教师社会化问题的讨论中,登斯莫尔将教学置于资本主义社会中更为一般的劳动过程这一背景之中。她呼吁要对学校进行变革,但要在变革剥削的社会关系这一需要更为广泛努力的背景中进行,她认为教师必须组织起来,一致行动,在学校中争取自己更大的权力,同时还要协助变

革教师培训,使之进一步摆脱社会不平等现象。

**批判主义研究中的各种模式** 批判主义研究想要把阶级、种族和性别关系在教师社会化中所起的作用作一个清楚的揭示。他们通过揭露当前教育体制中的不平等性,向这一体制的价值观提出挑战,试图激发人们对现状进行改革,从而在更广阔的社会背景中对教师社会化问题作出解释。例如,他们认为,由于男性教师培训人员及学校管理人员对绝大多数女性新手教师拥有支配权,这就造成了不平等。他们还指出,尽管教师培养机构和学校口口声声要给教师自主权,但研究表明这种自主权非常有限。从批判主义角度所做的调查揭示出新手教师所在机构,其结构和思想的复杂性,并指出了这些结构和思想控制新手教师的各种方式。

尽管批判主义研究基于这样一种假设,即人们既是自己所处社会环境的创造者,又是这一社会环境的产物。但是目前的研究,强调得更多的是社会环境如何对新手教师产生影响,而不是新手教师如何对自己所处的环境产生影响。金斯伯格和登斯莫尔都没有提及,新手教师的参与如何导致教师培养和学校方面的变化。看来研究人员很有必要收集有关数据资料,来论证新手教师或有经验教师影响师范教育和学校的各种方式,以便我们更好地了解教师对机构进行变革的进程。

### 教师社会化的各种模式和意义

社会化研究认为,当教师成为教学文化群落中的一员时,各种外部力量对教师起影响作用。机能主义观点把这种影响看作是决定新手教师发展的“最终产物”。译释主义和批判主义的观点在解释这些影响时,则认为教师也起积极作用,并在一定程度上改变着这些影响。总的来说,这些研究都同意这个观点:新手教师经历中的某些方面在成为一名教师的过程中是重要的。

有关社会化的研究文献证实,职前教师在接受正规教师培训前就已形成了对教学的各种概念。在他们孩提时代以及学生时代的各种经历中,就已形成了对教师这一角色的概念,这些概念正是许多新手教师所追求的。目前,关于正规教师培训能在多大程度上激发教师改变业已形成的各种信念,还有不少争议。

合作教师和其他同事是影响新手教师的思维和行为模式的潜在因素。然而,在一所学校里似乎不止一种教学文化群落,确切地说,不同类型的教师群体组成不同的亚文化群落。由于缺乏一致性、实习教学经历短促、再加上新手教师与同事之间相对独立,因此有可能使得同事对刚上岗教师社会化的影响力受到限制。遗憾的是,因为很少有研究工作提供有关同事的这种非正规而又很微妙的影响的敏感数据,因而目前开展的研究也就未能揭示出这种影响的广泛性和持久性。

有证据表明,学生的行为和新手教师对学生能力及动机的知觉也对新手教师的课堂行为产生影响。这些因素不仅是约束教师课堂行为的主要因素,而且似乎还影响到新手教师如何来看待课堂。大多数有关社会化的研究对学生的作用不敏感;所以对于优秀学生影响新手教师的程度和强度方面,还没有一个明确的说法。

社会化研究中的某些结论,也让那些赞同以 NCTM 标准行事的数学以及其他专业的师范教育工作者遇到了潜在的麻烦,因为新手教师学生时代经历的大多数数学教学并不符合这些标准。他们在做学生时,接受了 12 年到 14 年的课堂教学,受到了强有力的社会化影响。即使他们参加了日后的正规教师培训方案,这种影响也不易克服,甚至当他们自己做了教师之后,也是如此。

不过,要是教师培养方案和早先的课堂教学经历给新手教师呈现的是同样的教学文化群落,那么他们所受的影响就大大增强了。例如,如果大学中的各种教师培训方案,实习教师的合作教师,刚上岗教师的导师和同事都支持 NCTM 文件提倡的那些好的

教学方法,那么新手教师就更有可能被那种教学文化群落社会化。然而,要让新手教师在自己的课堂上实行和保持这种好的教学方式是比较困难的,除非他们做学生时经历过这种好的数学教学,看到过自己所尊敬的教师仿效过这种教学方式,并且自己所处的教学文化群落接受和实践这种好的教学方式。这一连串分析,可以推出这样的结论:学校作为实施教师培训的场所,对教师职业发展具有潜在的价值。

对于教师社会化问题,不管人们持哪一种观点,大家很少对下面的观点有争议,即在刚上岗教师所处的环境中,目前存在着强有力的、具有竞争性的影响因素。同时,大家也对另一个观点越来越形成共识,即社会化过程具有相互作用的性质,新手教师在进行各种选择和影响所处的文化群落上,也起着一定的作用。但是很少有研究去考虑学校环境以外的因素对教师社会化的影响。此外,有关教师社会化的研究还没有很好地将种族、社会阶层、性别和其他更广泛的社会问题结合进去。由于社会开始认同数学教育对所有学生的重要性,而且认识到必须撇开种族、性别或社会阶层。研究人员必须关注社会化在再现这些领域的不平等性上所起的作用,这点看来是重要的。

## 教师发展

有关教师发展的研究工作基于这样一个观点,教师是成人学习者,教师发展是认知结构变化的结果。我们假设这些认知结构是人赖以与环境联系的思维模式。下面几个不同的发展阶段理论为我们研究教师如何组织他们领域的问题提供了各种框架:(1)皮亚杰(Piaget)(1972年)的认知发展理论;(2)科尔伯格(Kohlberg)(1969年)的道德决策理论;(3)洛文杰(Loevinger)(1976年)的自我发展理论;(4)亨特(Hunt)(1971年)的概念形成理论;(5)佩里

(Perry)(1970年)的智力和伦理发展理论;(6)富勒(Fuller)(1969年)关心的阶段理论。所有的发展理论都假定发展阶段是存在着的,并以分级、连续、恒定的顺序出现。从教师发展的观点来看,成为一名教师包括从简单阶段向复杂阶段发展的过程。

本章的这一节,我们将考察三个以发展阶段理论为基础的研究方案:(1)以佩里的理论为基础的有关数学教师发展的研究工作;(2)以富勒教师发展是通过关心的各阶段的过程这一理论为基础的研究工作;(3)以洛文杰的理论为基础的有关师范教育或教师发展努力的研究。我们之所以选择这三个研究工作,主要因为它们是与本章的主题个体成为数学教师的过程协调一致的。同时它们也代表了从发展角度促进了解新手教师发展的主要研究方案。在许多关于数学教师的研究中都运用了佩里的方案。对刚上岗教师的考察则常常用到富勒的教师关心的阶段理论。许多研究人员在研究影响师范教育或教师发展的因素时,运用了洛文杰的理论,这一理论可以说是各种发展理论中最具综合性的理论之一。

### 佩里的方案

佩里的认识论和伦理发展理论可能是运用于有关数学教师培养研究工作中唯一的一个发展阶段理论。佩里的方案描述了学生根据自己大学时代的各种经历对生活所作解释的演变情况。本世纪五、六十年代,在哈佛大学举办的咨询活动中,研究人员与男性学生进行了长时间、开放式的面谈,佩里的方案就是从分析面谈而得到的模式中发展起来的。这一方案试图抓住大学生世界观的发展本质,尽管该方案似乎也适用于研究其他人群的世界观。

整个方案包含了9种人们看待世界的立场。佩里把他研究的大学生描述成在这些立场中有序地发展,尽管其中有些会出现颠倒——大多数发展理论不会赞同的现象。通常把9种立场归纳为四类:简单二元论(二元论),复杂二元论(多元论),相对论和信奉

论。

持有二元论的人认为任何一个问题都有一个答案,也就是说对任何一个问题都有一种解决方法,并且存在一个权威或专家知道并能给出答案。如果权威没有给出答案,有两种可能性,要么他不称职,要么他想让学生自己找出答案。这个看法与数学中的典型观点一致:即在数学中有对和错两种答案,教师应当知道如何区分。

对世界持有多元论观点的人认为,所有的观点同样合乎逻辑,权威的作用是想让学生自己去思考。没有人知道“真理”,因而,任何观点都值得思考和信任。这一观点在数学中则表现为形式主义,它认为每个人都有权利组建一种公理体系,而且每种公理体系同样站得住脚,因为数学只是各种符号的系统化运用。

对世界持有相对论观点的人认为,并非所有的观点都是正确的。要考虑其性质,因为在不同的评估背景中,存在着评估各种观念和行为的不同的标准。对数学问题的解法可能很精确,但却又是抽象的,而其他解法作为技巧的例子可能更好,更易于理解。

最后,达到信奉论的人意识到只能在不确定的基础上作出各种决策,并存在一定的风险。处在这个阶段的人愿意接受各种替代观点,并认识到知识是个人解释经历的一种结构。处于该阶段的数学教师大多乐意接受有关学习和教学的构成主义观点。

有几项研究把佩里的方案当作一种理论观点来运用,它们考察了职前和在职教师对数学和数学教学的各种观点。迈耶森(Meyerson)曾试图解答这样两个问题:“有没有可能按照佩里的体系找到人们对数学知识和数学教学的概念?”以及“有没有可能创造一个鼓励人们沿佩里方案发展的课堂氛围?”他在研究中专门设计了数学教学法课程,鼓励学生沿着佩里的方案发展,并考察了其对于职前教师的有关数学和数学教学方面的概念所产生的影响。他首先对学生有关数学知识和数学教学概念体系方面所持的见解作

了调查分析,然后给他们布置一些用来鼓励他们沿着这一体系继续发展的练习,这些练习包括运用了数学误差、惊奇、疑惑、重新考察有关教学的普遍信念、感觉、个体差异和提问。另外,形成了一些个案研究,收集了一些数据,包括学生日记、正式面谈、非正式讨论、课堂练习、家庭作业、期末课题、考试等,并以这些数据为基础阐述了调查分析和发展过程。

迈耶森评述疑惑是人们得以在佩里的方案中发展的关键因素。通过在课堂上创设能引起学生困惑并制造争议的数学情境,引起学生的疑惑;而当学生被迫面对困惑,并去解决争议时,有些学生改变了是什么构成数学权威的观点。迈耶森还评述道,在他试图鼓励学生沿着佩里的方案发展的时候,出现了一些混合的结果。他假定:学生对数学的各种观点是在多年的课堂数学学习中形成的,并且认为不能指望通过一门课程的学习,就使得这些长期持有的观点发生很大的改变。

麦克利亚德(McGalliard)在对四名有经验的中学几何教师进行的研究中,通过与他们交流教学、几何教学目的和对学生的评估情况,考察了他们对几何知识的概念。他在考察中作一些课堂事件的观察、面谈和问卷调查,以此形成了个体教师课堂活动的个案研究。麦克利亚德发现教师的课堂实践一般可以归述为代表一种权威的“二元论”观点。然而,当观察课上涉及几何证明时,其教学却又多少带有多元论的迹象。遗憾的是,这一研究未能设法将教师的教学实践直接与他们自己在佩里方案的相应发展水平挂钩。

欧文斯(Owens)在最近的一次研究中,运用了凯利(Kelly)的个性形成理论和佩里的方案,考察了各种构念和世界观,它们影响着实习教师对中学数学学科内容的概念,也影响着他们对有关教学和成为一名教师的作用的概念。在研究中,四名职前中学数学教师都分别完成了七次面谈,每次一个小时,面谈中引出了各种构念和要素。这些面谈为探索经验的、数学的和教学法的框架提供了

数据,参与者从这些框架中考察自己的大学经历,并预测自己作为数学教师的作用。欧文斯借用佩里的方案来解释实习教师的数学和数学教学的思维方式。他假定:在数学和教学理解上的差异性取决于个体如何看待与“权威”的关系。

佩里在自己的研究中指出,在大学生涯结束时,很少有本科生达到了信奉论水平。类似地,欧文斯所研究的教师中也只有一位达到了相对论水平。研究发现,苏珊(Susan)这名教师的工作生涯似乎介于实现内部权威和不断对外部结构的需求之间。就数学而言,对外部结构的需求似乎相当强烈。欧文斯研究的其他三位参与者则处于佩里方案中的多元论水平。例如,劳拉(Laura)常常谈到各种不同的学习或教学方法,尽管她很少能提供阐明自己观点的实例,并始终回避在各种具有竞争性的观点之间作出选择;这种认识到可以作出选择,但又回避表态具体选择意见的现象是多元论阶段的特征。劳拉看来需要一位权威来替她作出选择;她需要校长来“确定需要做些什么”,需要指导教师来“告诉我该上些什么课程”,需要教授来“教我们如何进行教学”,需要课本来确定合适的解题方法。这次研究的另外两名参与者埃伦(Ellen)和提姆(Tim)也是处于多元论水平,因为两人在实习教学期间,丝毫没有对自己的行为进行反思并证实其合理的意思。

**以佩里方案为基础的研究中的各种模式** 以佩里的方案为基础的研究工作表明,不管是有经验的教师还是新手教师,都倾向于依赖外部权威对课程内容和教学策略作出决策。教师常常处于佩里方案中的低级水平,而要使教师发展到方案中的更高级水平,是有难度的。因此,这一研究工作指出数学新手教师在领会有关数学的教和学的构成论概念,把数学知识的权威置于包括学生在内的所有个体之中时,可能会遇到困难。

目前还没有研究工作试图把教师在佩里方案中所处的位置与



他们对革新方案的接受或实施情况联系起来。因此要推测佩里方案中各种高低水平的教师对 NCTM 为课程、评估和教学提出的建议作出何种反应,还是困难的。看来,那些在佩里方案中处于低水平的教师——他们寻找外部专家作为权威——会依赖自己的知觉看待 NCTM 的权威问题。如果他们认为这要比教科书,国家课程指导,以及学校指定的课程计划之类的比较传统的课程与教学策略源泉更为“内行”,那么教师就会比较愿意接受和实施。另一方面,在佩里方案中处于高水平的教师——他们认为存在多种观点,并认识到知识存在于个体之中——可能不愿接受 NCTM 作为权威,除非他们把它看作是代表自己观点的一个组织。如果 NCTM 被看成是一个抽象的实体,它试图对教师的课堂活动加以专家控制,那么处于佩里方案高水平的教师可能会对 NCTM 的建议置之不理。但是对于那些已经达到佩里方案中相对论或信奉论水平的教师,如果他们觉得 NCTM 的建议与自己的观点相一致,我们就应该吸引他们全面了解 NCTM 关于数学教学的各种建议。

### 教师所关心的事

富勒受到她对职前教师信念的激发,形成了教师关心(的事)阶段理论。富勒注意到师范教育并不能满足职前教师的需求,因为各种教师培养方案并未考虑到职前教师作为学员的特点。

最初的理论(富勒,1969年),根据有关实习教师对师范教育经历的看法、不满意言论的基本情况以及他们接受职业培养时业已形成的学习动机方面的数据,确认并阐述了新手教师在教学上关心的事。她通过制作与实习教师一起开展的小组咨询活动的录音录像,并让实习教师写下自己关心的事,来收集数据。富勒还重新分析了来自其他有关新手教师面临问题研究的数据。

富勒和鲍恩后来创立了更为成熟的理论,其中提出了在学习教学中有四个发展阶段,每个阶段教师都有自己特定关心的事。

第一阶段是关心有关教学前期的事阶段,在这一阶段中从未教过课的学生尚不关心教学工作,而是关心自己如何做学生。第二阶段主要是关心有关自我的事,即关心自己能否当得成一名教师,能否适应课堂环境,能否控制得住全班,能否得到学生的喜爱,以及如何接受考察、评估、表扬和批评。富勒声称职前教师似乎要比在职教师更普遍地关心有关自我的事。第三阶段的特点是关心有关工作的事,即关心教学情境,时间压力,呆板的情境,太多的学生,太少的材料,太多的非教学性任务,等等。一般来说,在实际教学环境中,在职教师能够经受工作上的挫折,而职前教师与此不同。第四阶段由关心有关学生的事构成,即关心学生的社会需求和情感需求、公正性,以及课和课堂教学对个体的适用性。

从发展角度看,关心有关自我的事要比关心有关学生的事显得更不成熟、更不可取。教师关心的事得以发展的原因在于:人类有追求基本需求(生存)直到满足的普遍倾向。所以,研究人员认为教师只有在解决了与自身生存和教学情境有关的事之后,才能达到关心有关学生的事这一更为成熟、更为可取的阶段。富勒认为教师关心的事是通过一系列唤起和解决的步骤而发展的;教师关心的事的唤起看来是由情感经历引起的,而解决关心的事则更多地说成是一种认知活动,它要求教师发展更多的知识和技能。

马索(Marso)和皮杰(Pigge)进行了一项研究,调查并进一步证实了富勒的关心阶段理论,研究还希望证实在教学中关心的事所发生的任何变化是否能与一些挑选出来的教学领域——小学、中学、特殊教育以及诸如美术、音乐和体育教育之类的专门领域——或者性别联系起来。有六组职前教师和在职教师参加了这个研究项目。接受师范教育的学生(职前教师)被分成了三组,其中一组由 559 名正在上一门教育方面必修课的学生组成,一组由 151 名即将开始实习教学的学生组成,还有一组由 162 名刚刚结束实习教学的学生组成。在职教师由 94 名具有一年教龄的教师,104 名

具有三年教龄的教师,和 123 名具有五年教龄的教师组成。参与者完成了教师关心的事问卷调查,教学态度职业量表,以及包括性别和教学领域的人口统计信息问卷调查。

研究人员确认教师在职前和在职期间关心的事可以分为三个模式:职前阶段的早期,对特定工作关心的事甚少;当未来的教师在大学里期望教学工作时,对特定工作关心的事增加了;当从事专职教学,实际经历复杂的教学任务时,对特定工作关心的事进一步增加。同时,随着教学经验的丰富,教师对自我关心的事减少了。总的来说,这些变化往往相对活跃,可以预见,与富勒的理论相一致。

然而每个特定小组所发生的变化性质差别很大。例如,每一阶段的中学教师要比其他教师更有可能关心教学环境,认为太一成不变,缺乏灵活性。随着师范教育的加强和早期教学经验的增加,教师对教学和自我关心的事减少了,同时,随着教学工作的开展,教师由最初时对相关工作关心得少发展到逐步关心得多了。这一点也符合富勒的理论。然而,研究表明,中学教师对工作和自我关心的事在职前学习期间的四个教学领域中处于最低的水平,但到了在职教学期间却发展到各个小组中的最高水平。同时,中学教师在从职前培养发展到在职教学的过程中,他们关心的对学生产生影响的事也随之减少了。

在马索和皮杰开展的研究中,所有教师对学生的关心的事没有变化,并且是三类关心的事中最多的,这一点与富勒模式相背。但这一模式与其他一些考察教师关心的事方面的,源于富勒的模式的研究工作相一致,它通过一个为期五年的职前教师培训,报告了教师对自我关心的事方面发生的变化,但对关心有关工作或学生的事方面的变化却讲得很少或者根本没提。

亚当斯(Adams)在一次为期六年的纵向研究中,对教师认识的问题、关心的事和课堂行为方面发生的变化进行了调查,并把收集

到的资料作为肯塔基西部大学教师培养评估方案(TPEP)的一部分。亚当斯用了两种工具,教师培养评估目录和教师关心的事一览表。同时分别在四个时间点作了课堂观察:在实习教学期间以及在教学第一年、第三年和第五年临近结束时。研究数据表明,所有教师关心的对教学影响的事是最多的,不过,小学在职教师要比中学在职教师这方面的关心更多一些。总的来说,从实习教学开始到教学第五年结束的过程中,教师对自我关心的事减少了,而对教学关心的事却随着教学经验的丰富而增加了。这两个方面都证实了富勒的理论。但是教师在所有关心的事中,最关心的莫过于有关对学生的影响,并且在教师经历的各种水平中都没有改变。这一点与富勒理论中认为只有成熟的教师才会关心对学生的影响这一观点相背离。

**有关教师关心的事的研究工作中的各种模式** 尽管以富勒(教师关心的事理论)模式为基础开展的研究工作没有得到一致的结果,也没能充分地证实富勒的模式,但这些结果的确表明,教师在接受师范教育一直到从事教学最初几年的过程中他们关心的事方面发生了变化。富勒的框架使我们得以完整了解教师关心的事方面发生的各种变化。但是这一框架显然无法对新手教师关心的事的复杂网络作出解释。本节回顾的这些具有代表性的纵向研究工作也表明,教师关心的事方面发生的变化并不像富勒最初提出的那样有固定的先后顺序。教师在成为一名教师的所有阶段中都具有在自我、工作和学生方面关心的事;其关心的程度随时随刻也在发生变化。在职前培训和在职教学最初几年中,显然对自我关心的程度最高,但随着经验的丰富会逐步降低。所有的教师,不管其经历水平的高低,在影响学生方面关心的事似乎要比在课堂工作方面关心的事更多一些。这些研究还表明,中学教师和小学教师关心的事互不相同,而且男性教师和女性教师关心的事或许也

是各有差异。但是现有的数据还不足以说明差异的复杂性和造成差异的原因。

现有的关于教师关心的事方面如何变化的资料主要得自大规模的统计研究,从这些研究中我们可以了解所研究的大群体的一般倾向。现在看来有必要更细致地考察一下个体教师经历了职前培训和最初几年的教学后,他所关心的事以及关心的事方面的变化。对个体教师作更深入、突出重点的研究或许能够帮助我们了解新手数学教师所关心的事及其在成为一名数学教师过程中所起的作用。目前的研究没有涉及小学教师对自己的数学知识关心的事,也没有涉及中学教师在完成指定的数学课程方面关心的事。教师对这些方面关心的事可能会影响他们实施数学教学的改革。目前知道的研究结果也没有指出促使教师从关心的事的较低级阶段向更为成熟的高级阶段发展的各种方法,也没有指出唤起教师关心的事并帮助教师解决它们的各种办法。

**洛文杰的自我发展理论和师范教育/教师发展理论** 洛文杰的自我发展理论是一种整体论观点,它包括道德和个性发展,认知复杂程度和人际风格。该模式的前两个阶段,即前社会阶段(I-1)和冲动阶段(I-2)在成人中很少见。后几个阶段,在成人中则较为普遍,它们包括:

遵从阶段(I-3),其特点是对世界持有一种传统的、刻板观点;自知阶段(I-3/4),其特点是对内在感觉和思维多样性日益增强的意识;良知阶段(I-4),其特点是对自我和他人的不同的思维方式;自有阶段(I-4/5),其特点是对内在冲突和容忍矛盾日益增强的意识;自主阶段(I-5),其特点是认为个体有差异性,并容忍两可概念;整合阶段(I-6),其特点是对内心冲突进行整合。

洛文杰认为这些自我发展阶段是以恒定的、不可逆的顺序出现的。他指出人们通过与其所在环境之间相互作用,成长或达到自我发展的较高水平。

有几项研究工作已经对教师的自我发展水平与他们对师范教育或教师发展方面工作所作的反应之间的关系进行了考察,其中包括斯帕蒂格(Spatig)、金斯伯格和利伯曼(Liberman)的研究工作,卡明斯(Cummings)和默里(Murray)的研究工作,以及奥贾(Oja)及其同事的研究工作。只有斯帕蒂格等人集中于研究新手教师,不过其他几项研究也帮助我们更加完整地了解所涉及的一些问题,所运用的一些方法以及从发展论角度所作研究发现的一些结果。

斯帕蒂格、金斯伯格和利伯曼运用自我发展理论,对职前教师的教学定位受他们的讲师影响程度作了一番考察,这些教学定位包括在训导和控制方面(遵从训导),学生参与课堂决策方面(遵从学生),以及教学目标定位的、与学生的兴趣相对的事实(遵从事实)。研究人员假设:处于自我发展遵从阶段的学生要比处于良知阶段的学生更有可能接受讲师的观点和态度。参加这一项目的有57名正在听一门题为“教学职业导论”课程的学生。研究人员运用完成命题测试法对他们自我发展水平进行分级。他们还运用17个五分制的利克特(Likert)等级表条目测量了学生和讲师的教学定位。

与处于良知阶段的学生相比,处于遵从阶段的学生在教学定位上变化不大,比较接近于自己讲师的教学定位。这一模式在一定程度上证实了研究人员的假设。不过,这一模式只反映了教师对课堂控制的定位情况(遵从训导)。斯帕蒂格、金斯伯格和利伯曼还在社会化的框架中,对这些结果作了解释,并指出从机能主义和译释主义观点看社会化问题都有可能正确;也就是说,尽管看起来有些职前教师受到自己讲师的影响,但另外一些职前教师“似乎创造性地构造起自己的职业本体,或者至少没有让自己的讲师决

定自己的本体,或者没有受到讲师的重大影响”。

卡明斯和默里对自我发展与教师关于各种师范教育方面的看法之间的相互关系进行了研究,并使用完成命题测试法对两种概念进行了测量。这个研究还对自我水平能否预测接受大学职业培养课程的教师的参与情况和学业成绩作了考察,其中课程成绩用评分等级测量,学生参与情况由教师评定,评分时运用了以布卢姆(Bloom)教育目标分类学为基础的一系列等级表。参试者是58名参加一个大学组织的暑期指导咨询方案的教师,他们的教龄从0到24年不等。

他们发现自我发展与用布卢姆评分等级表测试的认知和情感成绩之间,以及自我发展与关于师范教育的看法之间相关性很弱,尽管这在统计上有意义。出乎研究人员意料的是,自我水平与评分等级或学生的参与竟然毫不相干。然而,学生参与却与等级和布卢姆的评定结果都有着显著相关。

尽管这些研究结果并没有表明自我发展理论具有多强的预测能力,但是研究人员认为它们为将来的调查研究指明了各种潜在的有效的途径。例如,处于自我发展遵从阶段的教师在对“一位好教师”这个词干完成命题时,可以看出他们的理解是,一位好教师的作用只是信息的陈述者或者是儿童的照管者。只有当这些教师发展到自我发展良知阶段时,才会出现关心教学方法的多样化、教学工作的个别化以及教学手段的新颖化。

奥贾在自己有关教员发展的研究方案中,运用了洛文杰、科尔伯格和亨特的发展阶段理论。该方案不仅能帮助我们更好地理解教师的发展水平是如何与他们关于教员发展机会方面所作的反应相联系的,而且还提出了帮助教师沿着发展理论中的阶段成长的方法。奥贾报告叙述了一个题为“学校中发生变化的行为研究”(ARCS)的教员发展项目,并论述了它与参与教师的人生阶段、职业生涯和发展阶段之间的关系。ARCS教员发展方案分三个阶段

进行,经历了一个夏季和秋季。

第一阶段。在小组内形成相互支持的人际关系,创造一个发展成长所必须的环境。

第二阶段。学习适应于担负更复杂任务的新技能。例如人际交往实用技能、间接教学技能、个别化教学技能、监督指导技能。要让教师熟悉成长阶段发展理论。

第三阶段。将新学的技能和理论运用于自己的课堂环境中,同时对小组不间断地进行监督指导,并在个别讨论中提出建议。

在研究中,要求教师参加三次测试,对他们在道德判断、自我发展和概念复杂性方面所处的阶段进行测量。奥贾还把教师发展水平与个体教师参与 ARCS 教员发展项目以及对该项目活动的看法之间联系了起来。

奥贾代表不同发展阶段的教师以及他们参与 ARCS 方案的情况。例如,埃利奥特(Elliot)表现出自有发展阶段所具有的特点;他在向小组履行义务时能够保留自己的需要和目的。奥贾把埃利奥特与一名处于良知发展阶段的小组成员进行了比较,发现那名参与者如果不牺牲自己的目的,她就很难继续为小组尽义务了。

处于良知阶段的弗洛伦斯(Florence)在一项学校指定的教员发展方案中遭受了挫折。弗洛伦斯在这个方案涉及的领域中已学过有关的知识,并觉得自己在这方面已相当熟练。但是学校没有为像弗洛伦斯这样的教师提供替代方案,相反,还强迫所有的教师都得参加同一个研讨班。弗洛伦斯感到自己被人视为异己,于是抵制了这个可能本该热情支持的方案。

奥贾得出这样的结论:年龄、人生阶段和教学经验能帮助我们解释教师的人生和职业中的一些关键问题,而且通常可以解释为什么教师会选择参与某些教员发展活动。当然,教师在参与一项特定的教员发展活动时,他们的表现、思维、问题求解和小组行为看来与他们所处的认知-发展阶段有关(奥贾,1989年)。奥贾认



为,教师的表现不仅仅是一种基于个体的、反映个人习性的行为。更确切地说,认知-发展阶段特征能帮助我们解释某些教师在教员发展活动中是如何进行思维和表现的。根据这一分析,奥贾得出结论,注重参与教师所处发展阶段特征的教员发展方案要比忽视教师发展情况的方案更能成功地达到它们的目标。因此,按照奥贾的观点,设计教员发展方案时,应当让处于不同发展阶段的教师参加,同时还要创造可靠的环境,确保教师得以进一步发展。课堂研究结果证实了帮助教师达到更高发展阶段的重要性。这些研究提供的证据是:一般地说,“……被判断为处于较高发展阶段的人,能做更复杂的工作,能掌握更广泛的行为技能,能更全面地理解问题,能更准确地对他人的需求作出反应并产生共鸣”。例如,亨特研究了教师在课堂中的表现,发现那些呈现出处于较高发展阶段的教师,其教学风格更具适应性、灵活性和容忍性。同时,这些教师还运用了各种教学方法,如讲座、小组讨论、质疑以及角色演习。

**自我发展研究工作中的各种模式** 本节讨论的研究工作中几乎没有什么模式。尽管研究人员发现了教师的自我发展水平与他们对职前和在职培养方案所作的反应之间的关系,但大多数关系是很微弱的。处于自我发展较低水平的新手教师要比处于较高水平的新手教师更有可能遵从课程讲师所持有的教学定位。然而,处于低发展水平的教师对教师作用的概念却要比处于高水平的教师狭隘得多。

从这些研究结果中,我们很难预料,教师的发展水平如何可能与有接受能力的教师学习和实施 NCTM 两大标准倡导的好的数学教学联系起来。处于自我发展较低水平的教师,对于教师要运用各种数学教学方法或者要让学生在课堂上独立学习之类的建议可能根本接受不了。因此,向数学教师提供一些鼓励他们发展成长的经历可能是很重要的,而且这些经历要与 NCTM 标准相一致,其

至在提供有关经历之前,就更直接地与实施 NCTM 标准衔接起来。这就意味着,以改进数学教学为目的的各种教师发展方案不仅要考虑到数学和教学法,还要创造可靠的环境,确保教师在完善自我、增强道德伦理分析原则性和提高概念复杂程度方面得到发展。

为适应不同发展水平教师的需要而设计的那些教员发展方案要比忽视这些需要的方案更能成功地达到它们的目标。如果教师处于不同的发展水平,却非要训练他们都来实施新课程,只会造成适得其反的后果;那些已成功运用问题解决或小组讨论教学法达十年之久的教师就极有可能抱怨这种在职培养方案,而它们也许对那些不知道这些教学技巧的教师来说是新的,令人兴奋的。

### 教师发展的各种模式及其意义

本节的最后部分,我们对前面讨论过的三个研究方案中明显存在的教师发展阶段模式进行一下考察。作为研究方案基础的理论,都预先假设发展阶段是以分级、连续和恒定的顺序出现的,并从较不复杂或较不成熟发展到较复杂或较成熟阶段。总的来说,我们回顾的研究都指出,教师在发展阶段方面确实存在着差异,但导致这些差异的原因却不见得都是年龄和经历因素。

同时,也有证据表明,发展阶段的推进并非如理论所述的那样成线性趋势。个体教师都同时具有几个阶段的特征。例如,一位教师对有关权威的信念是有区别的,这要看研究人员调查他或她的教学中的哪个方面。另外,个体教师还可能同时对有关自我的事、工作的事和影响学生方面的事进行关心,因而就要对付这些竞争性方面的事。研究发现,新手教师关心自己能否在课堂上站得住脚,同时仍然关心他们对学生学习的影响。

本节回顾的研究结果表明,新手教师在发展过程中,有时候不愿承担好的数学教师应具有的作用。他们寻找除自己以外的教学法和数学方面的权威,但是可能除了教科书或课程指导之外,他们

不知道还有其他什么“内行”。NCTM 有关文件要求教师与自己的学生一起工作,鼓励学生在课堂上形成自己对数学意义的理解。然而,目前的教科书和国家规定的评价手段,这些更为传统的外部权威却鼓励教师采用各种与 NCTM 标准相背离的方法进行教学。就佩里方案或洛文杰发展理论而言,处于低水平的教师看来很难接受教学方法的多样化或者与传统背离的观点;这意味着这些教师往往会拒绝变革,坚持传统的数学教学方法。这一领域中的一个重要研究课题是,怎样来设计一些帮助教师达到较高发展阶段的经历,确保他们能够教好数学。

但是,我们要强烈地提出告诫:不要从这些经历中指望太多。这里介绍的研究中所发现的有关发展方面的变化大多数仅具有统计学上的意义,它们既没有指出这么多的发展水平是如何变动的,也没有说明这么多教师是如何达到高级发展水平的。缺乏大的变化,这可能有部分原因是研究总体上不是纵向的。较长时间的介入课堂或者提供更多的课堂经历可能会导致发生比较大的发展变化。另外,也很少有证据表明这些研究所提到的变化是持久性的还是暂时性的。只有更多地纵向介入考察才可能解决目前研究中的这些缺陷。

## 学习数学教学项目

在我们用讨论研究工作对实践和研究的意义来结束本章之前,先简单介绍一下目前我们正在做的一项研究。我们在设计这项研究时,充分考虑到本章前面已讨论过的有关研究中存在的局限性。本项目从多个角度进行了研究,从师范教育最后一年到从事教学第一年,对教师进行了两年的跟踪调查;对教师课堂行为和认知方面发生的变化进行了考察。因而,我们相信,这一研究实例能够增强我们对成为一名数学教师所要经历的这一过程的复杂性

的理解。

这一学习数学教学项目(博科等人)从人类学、认知心理学和数学教育几个角度,对成为一名数学教师所要经历的过程进行了研究。项目对一小部分新手教师在大学接受教师培养方案的最后一年和从事教学第一年期间的情况进行了考察。当我们试图描述和解释教师在知识、信念、思维和行为方面发生的变化时,考虑了成为一名数学教师必需的一般和数学特有的两个部分。我们所要解释的主要是:参与前在大学及公立学校的各种经历所产生的影响,其中包括这两种环境中的教学文化群落和数学教学的社会组织,大学和公立学校中的关键人物对有关学习教学的期望和行为。

有8名正在接受小学教师培养方案的四年级学生参加了第一年的调研工作。这8名学生都是女学生,她们正开始最后一年的培训,打算培训后从事初中数学教学。为了拿到毕业证书,她们把数学当作需“专注的领域”来对待。这一方案的设计,要求学生在一年内到四个不同的班级里进行实习教学(每学期安排两次,每次安排七周时间)。前面三个班的实习,她们只教半天课,同时还要修处于中心地位的大学教员任教的教学法课程。

研究人员还设计了一些数据收集手段,从多种角度,用多种方法来考察这一学习数学教学的过程。例如,第一年研究期间,在整个学年中选择了三个时间点,对她们作问卷调查和部分有安排的面谈,以此来评估她们在数学、数学教学法、一般教学法和学习教学方面的知识和信念。这三个观察周期给我们提供了有关参与者在课堂上的思维和行为方面的信息。在每个周期期间,我们对每一位参与者进行了一周的教学观察,并在每节观察课之前和之后都与她作了面谈。我们还对参与者与她们各自的合作教师以及大学视导员之间进行的讨论会作了一番观察,并与每个人就讨论会期间相互作用问题进行了面谈。为收集有关参与者所在学区、学校和班级中的社会文化环境方面的信息,我们与实习教师以及包

括校长、合作教师 and 大学视导员在内的各种人进行了面谈。为了收集有关大学培养方案的社会文化环境方面的信息,我们与实习教师以及包括项目(方案)主任,讲师和大学视导员在内的各种大学工作人员进行了类似的面谈。此外,我们对所有班级的数学教学法课程上课情况进行了观察,并与参与者和课程讲师就课程目的、目标和内容方面进行了面谈。我们运用类似的数据收集计划,对四名参与者从事初中数学教学第一年的情况作了跟踪调查。

我们正在运用一个框架分析这些数据,考察我们感兴趣的四个主要方面:参与者的知识和信念;参与者在课堂上的思维和行为;公立学校的社会文化环境;以及大学教师培养方案的社会文化环境。在第一阶段的分析中,我们分别对这一框架的每个组成部分进行了考察。然后,我们把这四组分析放在一起考察,以便了解学习教学的过程以及大学和公立学校中的各种经历对这一过程的影响。迄今为止,我们对两名参与者——丹尼尔斯(Daniels)女士和詹金斯(Jenkins)女士——在实习教学和数学教学法课程的第一学期中的各种经历作了详细的分析。

我们在对参与者就知识和信念方面所作的面谈进行分析时,发现丹尼尔斯和詹金斯对初中数学都具有较强的程序性理解,但缺乏较强的理性理解;她们对于通常用于理性理解方面的各种促进教学的技巧的了解也是有限的。她俩认为数学教学目的应包括,帮助学生理解数学为什么有用以及怎样做数学,但她们意识到自己由于缺乏理性理解,使得她们难以实现这些教学目的。

从这些数据中发现的又一个主题是,她们想把数学课上得让学生感到有趣,并把做游戏作为一种实现这个愿望的潜在解决方法。谈起游戏和活动,她们看样子并不在乎自己的学生能从中学到多少数学,而更关心怎么才能通过这些游戏活动,使数学课变得更有趣、刺激。

理性理解相对程序性理解,使数学课上得有趣些,这些问题在

我们对观察周期中收集到的数据进行分析时,也很明显。当然,这些数据表明,对通常运用于理性理解教学方面的各种技巧,这两名实习教师都表现出理解上的局限性,这一点她们自己也承认。此外,她们在教学时所做的解释几乎都是程序性的。

丹尼尔斯和詹金斯为了把数学课上得有趣,她们总是对那些学生喜欢的,能帮助他们发展对数学的积极态度的课优先做好准备。她们的教学也反映了这一优先性;所观察的课通常都包括一些游戏和其他动手活动。

参与者指望从数学教学法课程中找到关于如何教数学的观点,尤其关注那些能将具体和半具体的表述结合到课堂活动中的策略。然而上数学教学法课程的讲师把这些观点作为策略提出,其目的是为了便于阐述数学程序的各种理性基础,但是实习教师却把它们主要当作激发和吸引学生的方法来运用了。遗憾的是,她们有时候并没有帮助学生分清具体或半具体的表述与她们应当阐明的数学概念之间的相互联系;相反,她们的表述集中于活动的程序性方面,比如怎样折纸,如何涂上阴影部分来表示分数的乘法。

我们在对大学经历进行分析后,提出师范教育要求实习教师平衡好作为大学生和作为公立学校教师双重角色,相当生硬地将她们与自己熟悉的作为大学生的角色分离开来。例如,实习教师必须认真听课,学习大学课程,同时还要胜任一名教师。师范教育认为实习教师有责任协调所期望的这些要求,尽管这些期望有时相互间还有对抗性。

此外,她们在实习教学的同时,还要学习教学法课程,其课程内容包括理论和应用两个部分。大学方面认为这两个部分都是重要的;然而,理论学习应占据优先地位。另一方面,在公立学校中,几乎所有的实习教师,尤其是她们的合作教师都认为应当优先学习课堂上管用的观点——她们大学课程中的应用部分——而对学

习那些她们认为无关重要的理论则表现出很不耐烦。

难怪实习教师要说自己已是脚踏大学和公立学校两个世界。面对一大堆相互对抗的期望,她们要求教给她们一些课堂上管用的观点;比如集中讲述程序性内容时,能够讲吸引学生注意力的各种技巧。她们发现大学经历很少有实用价值,并认为教学法课程中绝大多数知识理论性太强,对她们的课堂教学没有什么帮助。同时,参与者过分强调大学必修课程的学习常常与实习教学备课所需的时间发生冲突。

因而,大学培养方案在许多重要方面看来都不管用。首先,如果它的目的是要把教师培养成能按数学教育界公认的好的数学教学进行教学,那么它是不会奏效的。其次,如果它的目标是要培养酷爱钻研、见多识广和充满自信的教师,那么它也是达不到的。我们从认知心理学和人类学角度来考察一下它不成功的可能原因。

在学习教学一节中,我们强调了从认知心理学角度理解学习的三个核心概念:学科内容知识,教学法内容知识和教学分析技能。那一节中阐述的这些概念和结论能够帮助我们解释丹尼尔斯和詹金斯的教学模式。同其他缺乏足够学科内容知识的实习教师一样,她俩在教学上都表现出进行程序性解释的特征,而不是理性解释的特征,她们还缺乏有能力上好课的信心。此外,丹尼尔斯和詹金斯通常不会运用各种有效的方法,将数学这门学科表述给自己的学生。由于她们把自己有限的用于计划的时间花在了设计各种趣味性活动上,而且又缺乏以概念为基础的学科内容知识,因而就难怪她们在充实自己的教学内容知识基础时困难重重了。

怀特(White)的模式是把实习教学看作是一种“必经仪式”——由教学职业通过分阶段再现自身来实现的一个方案——可以帮助我们理解培养方案欠成功的原因,我们是根据实习教师对大学和公立学校中各种竞争性要求所作的反应来理解上述原因的。按照她的模式,“必经仪式”的程序包括三个阶段:分离阶段

(旧的社会网络瓦解,当前社会同一性削弱);过渡阶段(试图重组新手教师的行为、外表和思维方式,使它们与该职业中各种惯例一致),合并阶段(给他们新的身份贴上标签和凭证)。从这个角度来看,大学在促进学生向教师过渡方面,只是取得了部分的成功。它确实在瓦解旧的社会网络,确立向过渡阶段发展需要方面做了精心安排。但是,在很大程度上它却将适应所处社会文化方式这一培养任务转交给了强调获取实践知识而不是理论知识的公立学校。这样,大学就创造了这样一种情境:实习教师接收到的关于如何像专业人员一样重组自己的思维和行为方式这方面的信息相互冲突;同时实习教师还接收到这样一个信息,即大学期望他们自己去解决两种机构对他们提出的具有竞争性的要求;从而大学就不能成为协助实习教师进行过渡的一个源泉。

这种情境施加的约束,看来逼得实习教师迫不及待地需要和要求一些“权宜之计”,来处理他们面对的各种学习教学活动。若是明天就要讲解一道数学问题,而自己对这一问题的理解还停留在程序性上,那么哪有时间形成对这个问题的理性解释呢?如果只剩下几个小时准备明天的课,那么又哪有时间对今天所上的课进行反思呢?面对这些问题,难怪实习教师要求教给他们一些课堂上管用的观点,或者教给他们可以有选择地将注意力集中实践方面的相关观点,而要求忽略那些大学课程定位的概念性方面的内容。

## 实践和研究的意义

本章所介绍的研究工作在内容和观点方面都有所不同。这些研究就像通过不同的镜头(角度)拍摄了新手教师的各种快照。透过每个镜头都能看到一些模式,但是有些模式透过任何镜头都可以看到。不管我们是否把成为一名教师看成是一个学习、社会化



和发展的过程,这一过程很明显是一个复杂的、受多种因素影响的过程。此外,在成为一名教师的早期阶段,各种经历——专业课程学习、实习教学和最初几年的课堂教学——是关键性的。当新手教师迈进通向专长的漫长职业途程时,这些经历会带来一些重要的变化。

在这里用摄影作比喻恰如其分,这不仅仅是因为在研究中运用了不同的镜头(或者理论框架),还因为现有的研究工作中关于成为一名教师这一过程方面的数据真是少之又少。在为本章作准备时,我们找遍了有关考察教师培养介入作用方面的各种纵向调研方案。我们发现,尽管教师培训人员和研究人员对成为一名教师是一个终生的过程这个观点持一致意见,但是事实上对新手教师进行两年以上跟踪调查的纵向研究几乎不存在。我们还发现包含介入部分的研究方案极少。今天,我们对有关成为一名数学教师的过程所知道的要比十年前多。下面一节实践的意义反映了这些新的理解;但是这些理解仍是十分有限的。本章的最后一节将提出一些研究方向,旨在最终消除这种局限。

## 实践的意义

长期以来,我们一直持有这样的观点;为了设计有效的教学方案,教师需要了解儿童是怎样学习数学的。同样,本章所回顾的研究工作也指出,设计有效的职前或在职教师培养方案,有赖于设计者对教师的学习、发展和社会化方面的了解。成为一名教师的研究,给我们设计和实施教师培训提出了哪些建议呢?

有关学习教学方面的文献资料指出,教师培训应当提供各种机会,使教师在内容知识、教学法内容知识和教学分析方面得到发展。为了把适当的数学教好,NCTM 的两个标准针对教师必须了解的有关内容和教学法方面提供了一些指导,为学校数学改革指出了方向,但没有提出具体做法;然而,NCTM 的两份文件都没有

很好地建立在系统研究的基础上,尽管在这些课题方面,它们代表了数学教育界的“最好的思想”,并已被广泛地接受为指导原则。有关学习教学的研究工作为设计符合这些指导原则的教师培养方案提供了一些初步的思想。例如,由施拉姆及其同事设计的研究方案阐明了能增强教师对数学的理性理解的数学和教学法课程方面各种类型的经历。

有关社会化的研究工作以及鲍尔对即将上岗的教师在接受培养时具有的知识、信念和性格的分析都指出,教师培养方案在帮助参与者学习时,有时候必须帮助他们“抛弃学过的东西”。也就是说,对数学教师的培养必须帮助教师抛弃他们接受职前和在职培养方案时,在数学和教学法方面业已形成的一些知识、信念和个性。

有关教师社会化的研究工作还指出,为了使学校中的各种经历以积极的方式影响新手教师的社会化,学校中必须形成一个团结一致的教学文化群落。如果把实习教学安排在一个存在着几个教学文化群落的学校中,那么这种实习安排不可能产生多大的社会化效果。因而,我们应当仔细地选择实习教学的场所,确保在合作教师的课堂里,以及在整个学校中普遍存在的知识、信念和态度与教师培训的目标相吻合。学校和大学应该共同工作,确定一个与教师培训目标一致的教学文化群落,同时还应当通力合作,为教师设计一些鼓励他们向着这一文化群落社会化的经历。

最后,有关教师发展的研究工作指出,参与者在教师培训中可能处于不同的发展阶段,对给予他们的帮助有着不同的需求。例如,对于是否把问题解决作为学校数学教学的一个焦点这个问题,处于佩里方案中二元论阶段的教师与处于多元论阶段的教师所作出的反应可能就截然不同。类似地,处于自我发展低水平的教师可能不愿把合作学习看作是一种切实可行的数学教学方法,而倾向于学习那些更多以教师为中心的课堂教学风格。

从发展论的角度看,为了使教师培养方案更有效——即帮助学生达到更高的发展阶段——方案必须评估参与者所处的发展水平,然后提供与他们所处发展水平相当或者在发展等级中高一个阶段的相应各种经历。尽管有一些证据证明处于较高发展水平的教师在教学中比较灵活、不直截了当、能动之以情。但很少有证据表明他们事实上就是比较优秀的数学教师。

遗憾的是,目前可利用的研究工作还不足以产生一些教师培养设计方案,来解决研究中提出的所有问题。研究工作常常告诉我们哪些东西是错误的,但没有给我们提供如何纠正错误的具体建议。此外,大多数调查在考察成为一名教师这一问题时,只运用了单一的框架,因而眼光就带有局限性,就不可能深入认识这一过程的复杂性。下面对研究工作所提出的一些建议就涉及到这些局限性。

## 研究的意义

目前有关成为一名数学教师方面的大多数研究工作本质上都是描述性的,因此为设计和实施好的数学教师培养方案所能提供的依据就有限。然而,正如我们在前面一节指出的那样,这些研究工作确实也表明,具有某些要素的教师培养方案有助于成为一名好的数学教师的进程。从逻辑发展的角度看,研究人员下一步所要做的是为教师设计、实施和研究结合这些要素的各种方案。在这样的方案中,对教师的各种经历以及他们在知识、信念、个性、思维和行为方面所发生的变化进行细致、如实的记录,将有利于我们进一步深入了解成为一名数学教师所要经历的过程。

我们回顾的这些研究工作证实,学习、社会化和发展是长期的、复杂的过程。然而,大多数研究工作只对成为一名教师过程中很短的几段时间作了一些考察。最长的研究是对新手教师进行了五年的跟踪调查,不过也只是集中于对教师关心的事所发生的变

化进行了考察;因而为了加深对成为一名教师所要经历的过程的了解,有必要开展一些较长时间的纵向研究。研究人员不仅要在介入教学期间研究介入问题,而且对介入教学的影响还要继续作若干年的研究。这是我们得以了解在师范教育方面的变革,所产生的影响是否具有持续性,是否经受得住课堂和学校文化群落压力的唯一途径。

在设计和实施介入教学研究时,研究人员要更集中于教师的课堂行为,这一点也很重要。我们这里介绍的大多数研究工作都描述了教师的信念、知识、个性或思维;而很少强调教师的课堂行为。从有关教师知识和信念的研究中,我们清楚地认识到认知并非总是反映在课堂行为中的。如果有关成为一名数学教师的研究工作,其目标在于帮助数学教师如同 NCTM 文件所期望的那样,把教学搞得更好,那么研究教师的行为如同研究教师的认知一样重要,教师在认知方面的变化很可能同时伴随着课堂行为的变化,认识这种情况也很重要。

介入教学研究还需要提出成为一名数学教师这一过程的复杂性问题。我们以学习、社会化和发展的观点来组织本章的内容;与大多数教学研究人员一样,我们把这些观点看作是不同的理性框架,而实际上,发展、社会化和学习过程是同步进行的。为了更好地了解成为一名数学教师所要经历过程的复杂性,我们必须从多种角度开展研究,必须设法分清成为一名教师各个方面之间的相互关系。这些研究工作将抽调集中不同研究领域的研究人员,如数学、心理学、人类学和社会学,每种研究都运用不同的框架来考察成为一名教师这一过程。

最后,在设计介入教学研究时,研究人员和教师培训者应该结合 NCTM 有关好的数学教学的指导原则,运用有关促进成为一名数学教师的各种因素的研究依据。NCTM 描述的数学和教学法应该成为教师培训中各种学习、社会化和发展经历的目标。正如我

们在构成本章内容的几个假设中所说的那样,成为一名数学教师包括一般的和数学特有的两个方面,这两个方面都必须是研究的对象。

当研究人员和教师培训人员继续寻求了解和促进成为一名数学教师这一过程的各种方式时,他们应当努力合作,共同设计以研究为基础的教师培养方案。应当对参与方案的教师经历作较长时间的研究。研究人员应当互相配合,从多种角度对成为一名数学教师这一复杂的过程进行深入研究。

## 八、学会数学地思维：数学中的 问题解决、超认知和数学意识

Alan H. Schoenfeld \*

本章的目标在于：(1)对“数学地思维”这一概念进行概述和证实；(2)对与理解数学思维和问题解决方面有关的文献进行总结；(3)为与这里所概述的教学目标和出现的对数学思维的理解相一致的有关研究、开发和评估工作指明新的方向。

本章所用的标题“学会数学地思维”，是经过了深思熟虑后选定的。本章原定对有关问题解决以及超认知(亦译作元认知——译者注)方面的文献作一番回顾，但这些文献中的各种定义本身有点儿不明确，依据也不充分。从这些文献的有关总结中，可以清楚地看出，“问题解决”这个词具有多重含义，从“问题解决就是做生搬硬套的练习”到“问题解决就是像数学家那样做数学”，各种定义都有；而超认知也有好多各不相干的含义(从“它是关于人们思维过程方面的知识”到“它是问题解决期间进行的一种自我调节”)，很难把它作为一个概念来使用。本章对认定是这两个术语的一些含义作了概述，对它们在数学思维中所起的作用作了探讨。作者对文献的回顾不是传统的那种百科全书式的引经据典、注明出处，简化对个别论文和研究结果的讨论，而是列举各种相关实例，进行深入细致的探讨，择其要点加以阐述。

---

\* 作者舍恩菲尔德(Alan H. Schoenfeld)是美国加利福尼亚-伯克利大学数学和教育教授。

正如全美数学教师理事会(NCTM)在其 1980 年年鉴中所预测的那样(克鲁利克(Kndlik)),问题解决已经成为 80 年代的主题。这个十年的开始,是 NCTM 在《行动纲领》(Agenda for Action)文件中广为人知的宣言“问题解决必须成为学校数学的焦点”,这个十年的结束,是《人人都会算》(Everybody Counts)(NRC, 1989 年)和《学校数学课程和评估标准》(NCTM, 1989 年)这两个文件的出版,其中都重点强调“问题解决”。于是,也许有人会推断,人们可以广泛地接受这样一个观点,即数学教学的首要目标应该是将学生培养成合格的问题解决者。然而,由于人们对问题解决这个词有着多种解释,使得这个目标难以明确。同样,对问题解决的作用是什么也不明确,一旦确定其特征,就要在更广泛的学校数学背景中发挥作用。那么,数学教学的目标到底是什么,问题解决又是如何来适应这些目标的呢?

这些问题很复杂。数学教学的目标是什么,取决于人们对“什么是数学”以及“什么叫懂数学”的认识,这些认识可谓形形色色。其中有一类认识是把数学看作是处理数量、大小和形状及其相互关系的一组事实和步骤;掌握了这些事实和步骤就等于懂得了数学;另一类认识则是把数学看作是“模式的科学”,即(几乎是)建筑在经验之上,寻求模式的一种科学。

作者认为基于第一种理解会使数学贫乏;以掌握一系列数学事实和步骤为基础的一门课程是非常贫乏的——就像太注重语法问题的英语课程一样,会让人觉得很贫乏。作者对数学这门学科作如下描述:

数学是一种固有的社会活动。在这一活动中,训练有素的实践者(数学家)以观察、研究和实践为基础,进行各种系统尝试,从事模式科学。他们在各种公理化或理论化体系(“纯数学”)或者在各种从现实世界中抽象出的系统模式(“应用数学”)中,确定其本质或内在规律。数学工具包括抽象、符号

表示和符号操作。然而训练人们运用这些数学工具并不意味着他们就能数学地思维了,这不像手艺人运用手艺那么简单。学会数学地思维意味着:(a)形成一种数学观点——重视数学化和抽象过程,并偏爱运用它们;(b)发展运用数学工具的能力,以此来达到理想结构——数学意识形成的目标。

数学界近年来抓住几个问题开展研究,努力解决了一系列问题,如“什么叫懂数学”,“怎样为世界科技的迅猛发展作好数学上的准备”,这使得上面提到的关于数学的观点日益在数学界流行起来。以下一段出自《人人都会算》中的话就体现了这一观点,它反映了 NCTM“标准”和“变革学校数学”(NRC)中的主题。

数学是一门富有活力的学科。它寻求理解遍及我们周围的物质世界,以及我们思想中的各种模式。尽管数学语言必须以人们学会的规则为基础,但是激发学生超越这些规则,并能用数学语言进行表达的动机,是很重要的。这种转变要求改变相应的课程内容以及教学风格。它包括进一步作出努力,并集中力量做好以下几项工作:

- 探寻解法,不单是记忆步骤;
- 探索模式,不单是记忆公式;
- 形成猜测,不单是做些习题。

当教学中反映出这些重点时,学生就有机会把数学作为一门探索性的、动态的、发展的学科来学习,而不是把它作为一堆死板的、绝对的、封闭的定律来记忆。他们就能得到鼓励,将数学看作是一门科学,而不是一整套准则,并确切地认识到数学是关于模式而不单是关于数的科学。

从这一角度看,学习数学能使能力得到提高。数学能力强的学生对数量比较敏感。他们能够对日常生活中遇到的大量的量化数据作出解释,并据此作出合理判断。他们能在实际生活中运用数学,诸如对方或比例模型进行比例推理之类的简单运用到复



杂的预算规划、统计分析和计算机模型设计。他们思想活跃、多才多艺,善于处理新情况、新问题,他们有分析能力,能全面考察自己的问题和别人提出的论点。

本章由三个主要部分构成,前面两个部分是主体。第一部分,“通往对‘数学地思维’的理解”主要从历史和理论的角度澄清如问题、问题解决以及做数学之类的术语。首先介绍“当前的背景:20世纪后叶的课程发展动向”,简要概述课程动向和问题解决是80年代数学教学主要目标的社会必然性。接着在第二节,“关于问题和问题解决:各种对立的定义”中,考察文献中对问题和问题解决这两个术语的各种对立的用法,以及由于多种定义和构成这些定义的认识论观点而引起的各种矛盾。“对所处社会文化方式的适应和认知”一节对最近的一些研究结果作了概述,这些研究结果指出各种文化因素在形成个体理解时所起的重要作用。在“认识论、本体论和与之相联系的教学法”一节中,对当前的一些探究工作作了描述,这些工作探究了数学思维和认知的性质,以及这些探究本身对数学教学的意义。最后用“教学目标和教学必要措施”一节作为总结。

第二部分,在“理解数学认知的框架”一节中,更多地是对一些典型的经验性文献作了回顾。为了考察过去十年来形成的数学思想,“框架”简要描述了一个总的结构。核心知识、解题策略、个人资源的充分利用,数学观点的采用,做数学的实践活动,所有这些范畴都是数学地思维的根本方面。在随后的几节中,对这一框架所包含的范畴中开展的经验性研究工作作了阐述。在“个人资源”一节中,描述了我们目前对认知结构的理解,包括:认知结构特性、认知构筑、记忆及其进入其中的途径。在“启发法”一节中,描述了有关解题策略的文献。在“监督和控制”一节中,对在自我调节的超认知方面所开展的一些研究工作进行了描述。在“信念和情感”一节中,考察了个体与其所处数学情景之间的关系,以及个体所持

有的观点对数学行为和数学运用产生的影响。最后,在“实践”这一节中,集中对第一部分已讨论过的社会化问题的实践部分作了探讨,对通过创造数学实践的微观世界、培养学生数学思维方式的教學努力作了描述。

第三部分,“问题”,提出了将来在实践和理论方面必须关注的几个问题。首先讨论了一些需澄清的问题和术语,接着指出了探索问题解决时了解方法论工具的必要性。然后继续对第二部分框架中讨论过的每个范畴尚未解决的一些问题进行了探讨。最后简要地对一些方案设计、实施和评估中存在的重要问题作了评述。确定新的数学教学目标,使之符合当前我们对数学思维的理解,这就使得我们必须制订一些具体的评估方法——即确定学生是否达到这些目标的方法。在这方面,作者考虑了一些初步的步骤。

## 通往对“数学思维”的理解

### 当前的背景:20世纪后叶的课程发展动向

美国数学教育正经受广泛而细致的考察,要求重新查核目前的数学教学体系,并进行彻底的革新,其原因多且深,主要有几个方面:

- 美国学生在国际性学生能力比较中表现较差。在对数学“基础知识”进行的客观性测试中,美国学生的得分总是排在最后几名,常常被归入第三世界国家这一类。此外,美国的数学教育基础与那些学生得分名列前茅的亚洲国家差距很大。亚洲国家的学生学习的数学知识比较多,而且不论在学校还是在家里,都要求他们达到相当高的数学标准。
- 放弃数学学习的比率。从八年级开始,有一半美国学生放弃学习数学课程。例如,1972年有360万九年级学生学习数学课程,1976年只有不到30万的学生选学大学低年级数学课程;1980年有11 000名学生获得数学学士学位,1982年有2 700名学生

获得数学硕士学位,而到 1986 年只有 400 名学生获得数学博士学位。

- 公平性问题。在那些放弃数学课程的学生中,女学生和少数民族学生所占比例较高。结果造成在这个科技日新月异的社会中,有相当比例的女性和少数民族被高收入职业拒之门外。
- 人口统计数据。“目前,8%的劳动力是科学家和工程师;其中绝大多数是男性白人。但是,到本世纪末,新增劳动力中,只有 15%是男性白人。人口统计数据的变化为全体美国人进一步指出其利害关系”。社会对劳动力的教育和科技方面的要求越来越高,而对那些以数学为基础的领域中的多数学生来说并不利。

当然,美国 80 年代宣布国内数学教育正“处于危机”中在历史上并非第一次。在 1957 年 10 月 4 日,由于苏联成功地发射了第一颗人造地球卫星,美国的数学和自然科学课程进行了大规模的变革。由于担心苏联不日而至的技术和军事上的优势,科学家和数学家参与了设计新教材的繁重工作。当时,人们通常把这些教材统称为基础课程(在数学中有 SMSG 教材,在生物学中有 BSCS 教材,在物理学中有 PSSC 教材)。在数学方面,所谓的“新数学”曾在 60 年代红极一时,但后来被认为是一次失败。总的看法是,当时的学生不仅没有掌握新数学中那些要求他们努力掌握的抽象概念,而且也没有掌握前几届学生已经成功地掌握了的一些基本技能。在一次戏剧性的摆动中,新数学被“回到基础”运动取而代之。道理很简单,构成新数学的那些需要高度技巧的理论性概念并不奏效。作为一个民族,我们应该保证我们的学生掌握一些基本原理,以便为掌握更高层次的思维技能打好基础。

到 70 年代末,“回到基础”运动显然也失败了。在这十年中,数学课程集中于那些死记硬背的机械技能,于是造就的一代学生缺乏数学探究和经历,思维方式和问题解决表现不高明。更令人不安的是,他们实际上同当年学习基础课程的学生一样,对基本原

理的掌握情况并不理想。钟摆开始向“问题解决”这一相反方向摆动。全美数学视导员协会于 1977 年第一次就这一发展方向发出了大声疾呼。随后在全美数学教师理事会(1980 年)发表的“行动纲领”中,第一次建议把问题解决作为学校数学的焦点。就像当时人们宣布“回到基础”运动是 70 年代的主题一样,问题解决被宣布为 80 年代的主题。彻底改变这一观点的步骤很简单:在 1978 年制订关于 1980 年国际数学教育大会(加利福尼亚,伯克利,第四届国际数学教育大会)的草案时,计划只举办一次讨论问题解决的会议,而且还被列为“课程中特殊方面”的问题。四年以后,问题解决就成了下届国际大会(澳大利亚,阿德雷得,第五届国际数学教育大会)中的七大主题之一。同样,在 70 年代后期形成的“超认知”问题在 80 年代早期的数学教育文献中只是偶尔论之,然而在这十年中,频频亮相。在本文的标题中,两个最重要的词语:问题解决和超认知,也许是 80 年代中用得最滥,而含义又最不明确的两个时髦用词。

本章指出,一方面,在 80 年代以问题解决为名开展的大部分研究相当肤浅,要不是因为当时的“危机”,说不定钟摆不会向这个相反方向摆动。但另一方面说来,我们现在对数学思维、数学学习以及问题解决所知道的要比苏联发射人造地球卫星之后的几年中知道的多得多,而且如果要对问题解决和以问题解决作为指导的数学课程重新进行理性认识,是完全可能的。这很大程度上归功于过去十年中取得的一些进展:对思维和学习、问题解决策略和超认知的性质有了细致的了解;逐步形成了把数学看作是“模式的科学”的观点,把做数学看作是形成意识的行为,以及有了认知见习期和“学习的文化群落”的概念。

### 关于问题和问题解决:各种对立的定义

斯塔尼克(Stanic)和基尔帕特里克(1988 年)从历史角度对问

题解决在数学课程中的作用作了如下简要的概述:

自古以来,各种问题就在学校数学课程中占据核心地位,但问题解决并非如此。只是最近,数学教育工作者才接受了这样的一个观点:问题解决能力的开发应当得到特别关注。随着焦点集中到问题解决上之后,困惑也就产生了。问题解决一词成了一句包揽不同观点的口号,如,什么是教育,什么是学校教育,什么是数学,为什么在进行数学教学时尤其要重视问题解决。

近几年来,“问题”和“问题解决”确实存在多种含义,并且这些含义相互矛盾——这使得我们很难对文献进行解释。例如,1983年对若干所大学的数学系作了一次调查,要求调查对象对把“问题解决”作为课程目标问题作出回答,结果出现了以下不同说法:

- 训练学生“创造性思维”和(或)“开发问题解决能力”(通常集中于启发式策略);
- 培养学生为数学竞赛作准备,如普特南考试,全国性或国际性的奥林匹克比赛;
- 为有潜力的教师提供小范围的启发式策略教学;
- 学会特定领域中的标准技巧,最常见的领域有数学模型设计等;
- 为数学补习(基本技能)提供一种新的方式,或努力培养“批判思维”或“分析推理”技能。

在这次调查中,“问题”这一术语的含义存在两个极端,在韦伯斯特(Webster)对问题的定义中对此作了恰如其分的表述。

定义一:“在数学中,问题是那些要求作出解答的任何事物”。

定义二:“问题……是让人感到费解或困难的东西”。

**作为常规练习的各种问题** 上面引用的韦伯斯特的第一个定义,体现了传统数学教学赋予问题的一种含义。几乎自有了关于数学的书面记录起,我们就碰到过各种数学作业——作为教学工

具,作为实践方式,以及作为获得数学技能的衡量标准。通常,这些大量的作业绝对不是第二种定义中所讲的那种问题。确切地说,它们是一些常规练习,是给学生提供一些实践机会,让他们熟练掌握自己学过的某些特定数学知识。本节开头,我们先对这类问题详作考察,集中研究问题的性质、问题的结构和表象所依据的假设,以及不排除的话,以这些问题集为广泛基础所产生的教学结果。讨论为选择另一种可能的观点建立了背景。

斯塔尼克和基尔帕特里克为寻找这类数学问题实例,追溯至古代。以下实例摘自 19 世纪后期, W.J. 米尔恩(W.J. Milne)的《心算》(1897 年)一书。读者在没看米尔恩对第 52 题的解法之前,也许就想心算出这道题的答案吧。

52. 以每英亩 3.75 美元的价格犁 32 英亩地,需要多少钱?

解: 3.75 美元是 10 美元的  $\frac{3}{8}$ 。以每英亩 10 美元的价格犁地,需要 320 美元,但由于 3.75 美元是 10 美元的  $\frac{3}{8}$ ,故需要花 320 美元的  $\frac{3}{8}$ ,即 120 美元。因此,等等。

53. 每头羊的价格是 6.25 美元,那么 72 头羊值多少钱?

54. 一位面包师以每桶 3.75 美元的价格买了 88 桶面粉。他一共付了多少钱?

55. 若每 cord(译者注:每 cord 为 128 立方英尺)木头的价格是  $6.66\frac{2}{3}$  美元,那么 18cord 木头值多少钱?

[在本页下面和后面几页中还会摘录这类练习。]

第 52 题的解法,教科书是打算让学生掌握的一种特定技巧。在所有的练习中,均要求学生求出  $(A \times B)$  的积,其中已知  $A$  为两位小数,它代表美元价格。出题者对小数值作了选择,从而使得小数形式的  $A$  中蕴含一个简单的比例,即  $A = r \times C$ ,其中  $r$  是一个简分数,而  $C$  是 10 的幂。因此  $(A \times B)$  可以用  $r \times (C \times B)$  来计

算。于是,教师希望学生模仿第 52 题的解法,按以下方式求解 53 题:

$$\begin{aligned}(6.25 \times 72) &= \left( \left[ \frac{5}{8} \times 10 \right] \times 72 \right) = \left( \frac{5}{8} \times [10 \times 72] \right) \\ &= \left( \frac{5}{8} \times 720 \right) = 5 \times 90 = 450.\end{aligned}$$

运用这种算法,学生可以解出教科书这一节中的所有问题。当问题中的条件略有变化时(在 52 至 60 题中 C 的值是 10,但在 61 题中它的值 10 变为 100),教科书会给学生一个提示,帮助他们将所学的解题步骤进行扩展:

61. 列车卧车服务生每月可得收入 37.50 美元,那么 16 个月他能挣多少钱?

提示: 37.50 美元是 100 美元的  $\frac{3}{8}$ 。

在这节后面,我们要对问题结构依据的假设和反复接触这些问题对学生的影响进行详细的考察。现在,我们简单地说明本节总的结构以及它所依据的教学和认识论方面的基本假设。

结构:

1. 通过一个作业引出一种技巧。
2. 对这一技巧进行说明。
3. 提供更多的作业,以便学生对这种技巧进行实践。

基本假设:

学生做了这些练习后,他们的数学工具百宝箱中又多了一种新的技巧。这些技巧(课程)的总和大致反映了学生对数学掌握的全部情况;在学生已经掌握的一系列技巧中包括学生的数学知识和对数学的理解。

**“问题解决”传统意义上的运用(从要求做这个意义上讲):具有明确目标的手段** 斯塔尼克和基尔帕特里克从历史角度对问题

解决进行回顾时,指出运用问题解决主要有三个主题。在第一个主题中,他们把“问题解决当作一种背景”,把问题作为实现其他课程目标的工具。他们指出问题具有五个作用:

1. 作为数学教学的正当理由。“自古以来,问题解决就一直是数学课程中的一个组成部分,因为问题提供了数学教学的根本理由。在数学课程中,至少存在那些与现实生活中的各种经历有着某种联系的问题,能使学生和教师相信数学是有价值的”。

2. 为学科课题提供具体的学习动力。教师在介绍各种课题时,通常会运用各种问题,含蓄或明确地让学生懂得这样一个道理:如果掌握了下节课内容,就能解决这类问题。

3. 作为娱乐。娱乐性问题是用来激发学生的学习兴趣的,它要比第2点中包含的意义更广泛。这些问题表明“数学很有趣”,而且学生掌握的技能还可以用于娱乐。

4. 作为开发新技能的手段。运用循序渐进的问题,可以将学生引导到新的学科知识中,并为他们提供一个可以讨论学科知识技巧的背景。

5. 作为实践。米尔恩的练习以及大多数学校的数学作业均属于这一类型。先教学生一种技巧,然后提出一些问题,让他们进行实践,直到最后掌握这一技巧。

在所有这五个作用中,问题都被看作是相当乏味的客观存在(回想一下韦伯斯特对问题所下的第一个定义),是被用来达到以上所列各个目标的工具。也就是说,通常问题解决本身并不被看作是一种目的,而是被用来达到其他目的的一个手段。问题解决有一个最起码的解释:完成布置的作业。

斯塔尼克和基尔帕特里克指出的第二个主题是“把问题解决当作是一种技能”。这一主题源于对桑代克(Thorndike)研究工作的反应。桑代克在研究中驳斥了“智力训练”这一简单化的概念。这一概念认为数学领域中学到的推理技能一般能提高其他领域中



的推理能力。说数学问题解决很重要,一般不是因为它能使一个人成为好的问题解决者,而是因为解决数学问题本身具有重要价值。这就导致问题解决被看作是一种技能——这仍然是相当狭隘的定义(也就是说,能够解答提出的各种问题),但就其教学本身来说,还是有价值的。尽管在这个问题上可能有不同看法,但作者认为80年代以“问题解决”为名所作的绝大多数课程开发和实施工作均属于这一类型。

人们通常认为问题解决是学校课程要教给学生的若干技能之一。根据这一观点,并不一定要把问题解决单单看作一种技能,但对这一技能要有一个明确的定位……

如果把问题解决置于要求学生掌握的一系列技能等级体系中,那么它在课程中所起的作用就会产生某些特定的结果……解决常规和非常规问题是有区别的。也就是说,解决非常规问题需要一种较高水平的技能,这种技能只有在学会解决常规问题的技能(而解决常规问题的技能是在学生掌握了基本数学概念和技能之后获得的)之后才会形成。(斯塔尼克和基尔帕特里克)。

必须强调,即便第二种解释中讲问题解决本身被看作是一种技能,但是这一主题中,教学和认识论方面的基本假设恰恰与前面米尔恩的各种实例中的假设是一样的。有代表性的是,教师将问题解决的技巧(如作图,当 $n=1,2,3,4,\dots$ 时,找出其模式)作为学科内容教给学生,并布置一些问题让他们进行实践,以便他们掌握这些技巧。可以推知,学生通过接受这种类型的教学(在课程中通常单独作为一个部分),在他们的“数学工具百宝箱”中,除了已经学习的各种事实和步骤之外,还增加了问题解决的技能。这一扩展了的知识体系还大致包括学生的数学知识和对数学的理解。

斯塔尼克和基尔帕特里克指出的第三个主题是“把问题解决看作是一种技艺”。这一观点认为解决实际问题(即解决那种“令

人费解”的问题)如果不能代表数学本身的话,也起码是数学的核心,它与前两个观点形成鲜明对照。这个观点是由一些著名的数学家和哲学家提出来的。现在我们就来看看这个观点的主要内容。

**关于构成问题的观点:数学家的观点** 我们在前面已经提到过,数学家对问题解决的各种概念难以相互一致。大学里各种问题解决方面的课程也具有不同的目标,其范围涉及到从补习到发展批判思维和创造力等。然而,那些做数学工作的人,对问题在其生活中所起的作用,都存在着一个特定的数学的观点。

数学家的工作就是不断地解决问题——即那种“令人费解或困难”的问题,这是一个统一的主题。哈尔莫斯(Halmos)简明扼要地把问题解决说成是“数学的核心”。

数学到底是由什么组成的?是各种公理(如平行公设)吗?是各种定理(如代数基本定理)吗?是各种证明(如哥德尔(Gödel)不可判定性定理的证明)吗?是各种定义(如门格(Menger)对维数的定义)吗?是各种理论(如范畴论)吗?是各种公式(如柯西(Cauchy)积分公式)吗?是各种方法(如逐次逼近法)吗?

没有以上这些组成部分,数学当然也就不存在了;它们都是必不可少的。然而,这些组成部分中没有一个是该学科的核心所在。数学家之所以得以存在的主要原因在于解决各种问题,故而真正构成数学的是问题和问题解决,这个观点是站得住脚的。

例如,某些著名的数学问题的命名就带有“问题”两字,四色问题(这一问题得到解决之后,便成了四色定理)。其他有些数学问题是以假设(如黎曼(Riemann)假设)或猜想(哥德巴赫(Goldbach)猜想,这一猜想认为任何一个大于2的偶数,都可以写成两个奇素数的和)来命名的。有些问题因对现实生活中,实践或理论的关心

而激发(应用性问题),另外一些问题则是由于一些抽象的关心而激发。(例如,两个素数的分布情况如何?)以上提到的是几十年来悬而未决的“大”问题,对这些问题的解法引起了数学家的极大关注。而这些问题与数学家在日常数学活动中遇到的问题唯一区别在于规模大小罢了。不管是纯理论的还是应用性的问题,对我们都是挑战。要取得进展,都需要我们花上几个星期、几个月,甚至几年的时间。有鉴于此,哈尔莫斯认为,学生的数学经历中应让他们准备迎接这一挑战。也就是说,学生应该参与“实际”问题的解决,在学校学习期间,学会解决各种具有相当难度和复杂性的问题。

我确实认为问题是数学的核心,同时我也希望我们作为教师,不管是在课堂里,研讨会上,还是在我们撰写的书籍和文章中,都要更多地强调这一点。我们还要训练我们的学生,让他们胜过我们,使他们更善于提出问题并解决这些问题。

把数学视为一门问题解决的学科,并把问题解决作为数学教学的焦点,在这方面作出努力的,最有名的数学家要算波利亚(Pólya)了。过去20年中,在问题解决这一工作方面建树颇多,很大程度上的确是建立在波利亚的工作基础之上。数学教育界最熟悉波利亚撰写的那本导引性书籍《如何解题》。他在书中引进“现代启发法”这一术语来阐述问题解决这一技艺。以及他后来写的两本两卷集:《数学和似真推理》(1954年),《数学发现》(1962, 1965/1981),书中他对这一主题作了详尽的阐述。其实,早在波利亚和舍哥(Szegő)撰写的《分析中的问题和定理》一书出版时,波利亚在问题解决方面的工作所采用的“方法”就很明显了。在这节中,我们集中对与波利亚这方面工作交织在一起的广泛的数学和哲学主题作一番考察。同时,对实施启发法策略的详细情况作一

番回顾。

我们很有必要了解波利亚的这样一个观点,他认为数学是一种活动。早在 20 年代,波利亚就对数学启发法产生了兴趣。他和舍哥在《分析中的问题和定理》(1925 年)中,向学生提出了运用一些启发法(以箴言的形式出现)的建议,指导他们解决一系列难题。波利亚认为,如果可能,每个人都应该参与数学,亲自体验一下数学,这一点很重要。

我们还不知道,在思维训练方面有哪些最实用的一般规则能详细地表述。就算知道这些规则能用公式表示,也不会有多大用处……[因为]我们必须对这些规则进行实际的消化,并乐意不断运用……独立解决富有挑战性的问题,对读者的帮助远远要比那些箴言多。尽管一开始,这些箴言对读者并没有什么危害。

在波利亚看来,参与数学在一定程度上就是积极地参与发现工作,并且在很大程度上是通过猜测来实现的。波利亚认为应避免把数学理解为一种常规的、形式主义的演绎学科,应类似于自然科学,取决于猜测、顿悟和发现。

对一名积极从事研究工作的数学家来说,数学有时似乎是一种猜测的游戏;你在证明一条数学定理之前,必须进行猜测,你在深入细致地完成证明之前,也必须进行猜测。

我想,对一名思想较为开放的哲学家来说,一切获取知识的明智做法有时似乎也应该是一种猜测的游戏。在科学领域中就像我们在日常生活中一样,如果我们遇到了一种新情况,那么就会开始作些猜测。初次猜测可能还达不到预期的目标,但是我们不断地进行尝试,根据成功程度,对这一猜测作些修改。最后,经过几次尝试和几次修改,通过观察和类推,可能会得到较为满意的猜想。外行人对博物学家用这种方法工作并不为怪……外行人听说博物学家像他自己一样在作猜测也不会感到奇怪。但外行人听说数学家也

在作猜测就可能会觉得有点怪了。数学家创造性工作的结果就是进行论证推理和证明,并通过似真推理和猜测来发现证明的方法。

人们先是对各种数学事实进行猜测,然后再对它们进行证明,本书每一页几乎都在努力表明这是一种常用的步骤。如果要把学习数学与数学发现联系起来的话,那么就必须给学生提供一些解决问题的机会,让他们对一些适合于自己水平的数学事实先进行猜测,然后再加以证明。

在波利亚看来,数学认识论和数学教学法是紧密相连的。波利亚认为,要让学生认识到数学的艰巨复杂,那么提供的经历就必须与我们做数学的方式相一致。把认识论和教学法联系起来同样也是本章的一大主题。在下一节中,我们将详细阐述一种特定的数学思维观点——探讨数学作为形成数学意识的行为,而这种行为是在社会环境中构成和传播的。这一数学思维观点指出学生在学习数学的时候(主要是在课堂上)形成数学意识,进而形成运用数学的方式。那么,如果学生要以各种有意义的方式理解并运用数学的话,在课堂上就必须反映出这种作为形成数学意识活动的数学意识。

### 对所处社会文化方式的适应和认知

在最新一些文献中认为数学学习是一种社会固有的活动(也是认知活动),它本质上是构成性活动而不是吸纳性活动。

当代在对文献的错误概念进行研究过程中,出现了构成主义者观点。这一观点起源于皮亚杰的研究工作(1954年),到80年代中期,它已被研究界广泛接受。人们认为这一观点已有稳固基础。龙伯格(Romberg)和卡彭特(Carpenter)直接地阐述了这样一个事实:“研究表明学习是一个构成过程,而不是一个吸纳过程”。构成主义观点遍及本书的字里行间。然而,我们在前面一段中指出过,构成主义这一概念已经从大多数研究工作开展纯认知领域

扩展到了社会领域。于是构成主义便渗透了一些来自社会领域方面文献中的一些理论性概念。雷斯尼克从当代一直追溯到乔治·赫伯特·米德(George Herbert Mead)(1934年)和列夫·维果茨基(Lev Vygotsky)(1978年)的研究工作,并指出“认知过程是一种社会化过程而不是一种教学过程,某些认知论和研究工作表明,人们在进行解释和有意义地构成时,不断地形成各种习惯和技能”。

雷斯尼克所指的社会化这个概念(亦称对所处社会文化方式的适应——进入一个阶层或一种文化群落,并从中获取各种价值观念)是核心所在。它强调,很重要的一点是把各种观点作为知识的核心部分。例如,数学地思维的一个根本组成部分是要具有一种数学观点,也就是说要以数学家的世界观来看世界。

近来,人们就认知过程的性质展开了一系列研究工作,对思维和学习进行了重新认识,并指出要成为好的数学问题解决者——要在任何领域中成为好的思维者,可能最重要的是在获取各种特定技能、策略和知识的同时,不断养成一种习惯和个性,对事物作出解释,理解其中的意义。如果情况确实如此的话,我们更好的作法也许是,不应老是把数学教育看作是一个教学过程(传统意义上的那种把各类具体、明确的技能或知识点教给学生的做法),而应把它看作是一个社会化过程。这样一来,在人们形成的各种观点和行为模式中,就会表现出性别角色,种族和家庭文化,以及其他一些社会特征。当我们用儿童向这些思维、情感和行为模式进行社会化发展的方式来描述这个过程时,我们描述了一些在社会环境中相互作用和参与的长期模式。

这种文化观点是建立在稳固的人类学基础之上的,但是在数学教育文献中,却是一种相对新颖的观点。这一观点主要认为,决定认知的根本因素是人的观点,而人是在属于自己的那个阶层中形成自己的观点的。克利福德·格尔茨(Clifford Geertz)对此作了颇有说服力的阐述。

请想一想……埃文斯·普里查德(Evans - Pritchard)对阿桑德(Azande)魔法所作的著名讨论。他明确认为,思维常识——即阿桑德思维常识——是魔法观点得以产生的一般背景……但似乎没有人注意到这一点。

他说,有一个具有阿桑德思维常识的小男孩,他的脚被一根树桩绊着后,发炎了。这个男孩便说是有人施了魔法。埃文斯·普里查德出于自己传统的思维常识说道:胡说八道,你只不过是太粗心罢了;走路时应看看脚下。我确实看了脚下,到处都是树桩,男孩说——要不是我被魔法迷住了,我肯定会看见那根树桩的。另外,一般的伤口用不了几天就能愈合,这是由伤口的性质决定的。但是他的这个伤口却化脓了。于是,他肯定地说有人施了魔法。

我们再来看看一位具有阿桑德思维常识的制陶工人。他的技术非常高明,但在烧制陶器时,偶尔会有一只罐破裂。于是,他便喊道“有人施了魔法!”“胡说八道!”埃文斯·普里查德说。每一位稍具常识的人种论学者都会认为:罐在烧制过程中,有时当然会发生爆裂现象;万物就是这样运动着的。但是,这位陶工却说,我仔细地挑选了黏土,尽量把石子儿和污物都拣掉,慢慢地把黏土捏成罐,而且在前一天夜里,我克制住自己没有与老婆同床,可这个罐还是破了。除了被人施了魔法外还会有什么原因呢?

格尔茨认为,埃文斯·普里查德与非洲部落中的小男孩和陶工都承认以上发生的事实(他们作出解释的两件事),但是他们对这两件事所作的解释却完全不同。每个人作出的解释都来源于自己所特有的文化中,他们看起来都很有常识。这位西方人类学家和生活在家乡草原上的两名非洲人各自形成了与他们所处社会主流相一致的观点,并且,那些文化确定的观点决定了他们对所见事物的解释。

同样,对于应用阶层的成员也是如此。他们在自己的文化群落中同样努力从事特定的工作。这里列举三种类型的阶层,包括琼·莱夫(正在编纂中)研究的利比里亚蒙罗维亚“裁缝巷”中的裁缝阶层,应用数学家阶层以及白天在学校念书的学生阶层。在每个阶层中,成员的“各种习惯和个性(见上文所引雷斯尼克的一段

话)受到特定文化的制约,同时又对其个人行为的形式产生很大的影响。在这里我们先讨论前两个阶层,第三个阶层留在下一节再作讨论。首先,莱夫的研究(这一研究在很大程度上促成了对认知见习期的研究,我们将在下面作些探讨)考察了一种见习期体系,蒙罗维亚的裁缝即通过此体系学习各种技能。莱夫对“学做裁缝”过程中包含哪几层意思有着自己的看法。舍恩菲尔德将莱夫的这一看法概述如下:

做一名裁缝不仅需要掌握一系列裁缝技能,还需要掌握一种思维方式,一种理解方法以及一系列价值观和观点。在裁缝巷,学习裁缝课程和学做一名裁缝是不可分割的两个组成部分:学徒在裁缝阶层中是边干边学的。他们周围都是短工、裁缝师傅,他们向这些前辈学习各种技能——并在生活的这个环境中,向前辈学习各种价值观和观点。尽管在正规的裁缝课程中并没有这些价值观和观点,但是它们在这个环境中、在学徒学习的东西中具有决定性作用。学徒不断学艺,设法进入裁缝阶层。而他们学成之后,不仅掌握了一系列技能,还学会了一种观点,这两部分决定了他们成为一个裁缝。[如果这种说法有些牵强的话,那么再来想想我们社会中的那些律师、医生、汽车销售员或大学教授,他们的情况又是怎样的。在这些阶层中,存在着各种政治(或其他)方面的陈规和观点,这就说明要成为这些阶层中的一员,仅仅拥有一张证书和掌握相关的技能是不够的。]

其次,还有一种说法是“用数学家眼光看世界”。应用数学家波拉克(Henry Pollak)在此发表了两点意见。

亚里桑那州有多少树形仙人掌的高度超过6英尺?我从书上看到树形仙人掌是一种危险植物。开发商建造新公寓时,要把这些仙人掌都砍光。二三年前,我去亚里桑那州时,便想估算一下还剩多少仙人掌没被砍掉。我算出的答案是 $10^8$ 。我来给你们说说,我是怎样算出这个答案的。这些仙人掌的生长布局似乎很有规则,株距差不多都是50英尺左右,那么每一英里长就



有  $10^2$  棵仙人掌,也就是说每平方英里有  $10^4$  棵。而生长有仙人掌的地区至少有  $50 \times 200$  平方英里的面积。于是,我便得出  $10^4 \times 10^4$  这个答案。我请亚里桑那州的一些教师也来估算一下,结果他们却茫然不知所措,不知如何入手。

如果你走进一家超市,通常会看到在几个付款柜台中,有一个标有“快速付款通道”的柜台,上面写着:您购买的商品在  $x$  件以下,请在此付款。如果你观察一下  $x$  这个数,会发现每家超市的  $x$  值各不相同。在我的家乡,A&P 超市规定为 6 件;Shop - Rite 超市规定为 8 件;而 Kings 超市则规定为 10 件。我还发现全国各地的超市对  $x$  值的规定从 5 到 15 件都有。 $x$  值变化如此之不同,让我们无法判断哪个数值更正确。我们不禁要问,允许在快速付款通道付款的商品件数到底应该是几件呢?

这两段内容均反映出这位数学家的习惯和个性。波拉克听说树形仙人掌是种危险植物后,几乎出于本能反应便提出这样一个问题:那里还有多少树形仙人掌;然后他便根据可以获得的数据大概作了估计。这种量化和模型化的偏好行为当然是数学家个性的一部分,非数学家阶层的人员不具备这种典型个性。(波拉克确实注意到,对那些与他讨论过这一问题的教师来说,不管是对问题本身还是用于解决此问题的数学工具,看来都不是出于本能。)由于波拉克的语言,在他所讲的第二个实例中,更能清楚地发现这种个性。请注意:波拉克把超市看成一个数学背景——同样,一般人几乎不会具有这种观点。对大多数人来说,允许从快速付款通道通过几件商品只不过是该超市的特权而已。但在波拉克看来,这个数是个变量,而确定这个变量的“正确”数值是一个最优化问题。这种以数学方式来观察各种现象的习惯也是数学家个性的一部分。

简言之,波拉克是以一种数学观点来观察世界的。别人可能根本不会注意的东西,在他看来却是饶有趣味的数学问题。他提出的各种问题对大多数人来说并不具有什么数学背景,实际上,像

超市付款通道和沙漠地带等问题,却具有内在的数学意义。他所使用的语言(“ $x$  件或少于  $x$  件”)是一种数学语言。他对这些问题(超市中的最优化问题,树形仙人掌数量的估算问题)进行概念化的方法,运用了典型的数学推理模式。当然,还有各种各样的数学观。若要了解这些观点,可参见戴维斯(Davis)和赫什(Hersh)(1981年)的文章。他们对大量的数学观点作了形象生动、深入浅出的阐述。

### 认识论、本体论和与之联系的教学法

简而言之,从前面一节的讨论中可得出这样一个要点:学习受到文化群落的影响和制约;人们在特定的“应用阶层”中,从事各种艰巨复杂的工作,并形成自己对这一工作的理解。目前学生所上的数学课具有广泛的文化背景,他们在课上所学到的远远超出了那些数学事实和步骤(明确的课程内容)的范围。正如霍夫曼(Hoffman)指出的那样,这种理解让我们进一步认识到探讨认识论问题的重要性。他发现,不管一个人是否呈现明确的认识论观点,他对数学的看法都将使他形成自己创造那些类型的数学环境,从而他的学生也形成了相应类型的理解数学的方式。

在此,用两种方法找出认识论与教学法之间的联系。首先,我们选择米尔恩(1897年)的《心算》练习作些详细评析,对这些练习所依据的假设以及以这些假设为基础的课程相应结果作一番阐述。尽管这一评析与文献内容相一致,但它并非从文献中推导出来的。我作这一分析的意图是想为回顾文献资料确立一种背景,特别是在选择有关信念和背景方面的文献时。其次,我们对数学认识论和本体论中的一些问题进行了考察。正如霍夫曼观察到的那样,如果一个人要设计一些课堂实践活动来帮助学生形成正确的数学观点,那么他对做数学的理解是很重要的。在这节中,认识论方面的探索工作为我们在本章后面部分所提的各种教学建议奠

定了基础。

**实践中的问题:米尔恩问题集的评析** 选择本章前面介绍的米尔恩心算练习作评析具有这样一个优点:尽管这些练习已经过时,但又具有现代特征。由于它们所处的时代因素,人们对它们考察时,总觉得有些隔膜,但人们还会发现几乎国内每个课堂中都能找到类似的练习。因而,我们应当对这些练习作详尽的考察。

回忆米尔恩提出的第一个问题:“以每英亩 3.75 美元的价格犁 32 英亩地,要花多少钱?”他在解答中,将 3.75 美元按以下方式转换成 10 美元的一个分数。“3.75 美元是 10 美元的  $\frac{3}{8}$ 。以每英亩 10 美元的价格犁地,需要 320 美元,但由于 3.75 美元是 10 美元的  $\frac{3}{8}$ ,故需要 320 美元的  $\frac{3}{8}$ ,即 120 美元。”然后,他就把这一解法推广应用到后面所有的问题中去。

把教学时间花在米尔恩演示的这种技巧确实很明智,也很有用。从实践角度来看,这一技巧似乎也很有道理。学生运用这种技巧可能在计算此类问题时最容易。从数学角度来看,这种技巧也相当合理。能够将  $A \times B$  看作是  $(r \times C) \times B = r \times (BC)$ ,这样计算起来就较容易了。学生完成这种计算表明,他多少已经理解分数和乘法结构了;同时,人们也希望通过数学教学,学生能发展理解能力。以下所作评论并非要对米尔恩练习的数学潜在价值和实用性提出异义,而是对课题的处理方面说一点意见。

**第一个问题:表面效度。**初看起来,米尔恩在第 52 题中演示的这种技巧似乎很实用,对随后几个问题的解答似乎也很恰当。正如前面强调的那样,人们希望学生具有相当强的数学意识,不用纸笔就能计算  $32 \times 3.75$ 。但是有一个严峻问题:人们是否真正希望学生运用米尔恩的技巧来解答这些问题。作者撰写本章时,作了次小小调查,请四名同事心算出 52 题的答案来,结果四种解法中有三种确实将 3.75 美元中的“.75”转换成一个等值分数,但这

四种解法都没有用米尔恩的方法来运用分数。而第四种解法根本没用到分数,也没有用标准算法。这四种解法如下:

- 其中有两人将 3.75 转换成  $3\frac{3}{4}$ , 然后用分配律算出:

$$(3\frac{3}{4} \times 32) = (3 + \frac{3}{4})(32) = 96 + (\frac{3}{4})(32) = 96 + 24 = 120$$

- 有一人把 3.75 看作  $(4 - \frac{1}{4})$ , 然后按以下方式进行分配:

$$(4 - \frac{1}{4})(32) = 128 - (\frac{1}{4})(32) = 128 - 8 = 120$$

- 有一人注意到 32 是 2 的一个幂。他用 2 进行多次除法和乘法运算,一直到算术变得很平凡。

$$(32)(3.75) = (16)(7.5) = (8)(15) = (4)(30) = 120$$

从心算简便性角度来看,我们认为,每种方法都与米尔恩的方法一样容易。

第二个问题:发明设计解说现成数学方法的各种实例。在现实生活中,人们就算会碰到像  $6.66\frac{2}{3}$  美元这样的单价,也是很难得的。(而我们通常看到的却是像“3 个 20.00 美元”这种价格。)很显然,55 题和其他问题中用到的数字是经过挑选的,这样学生就能成功地用课上教的算法进行解题。一方面,用这种方式来挑选数字,便于学生对课上教的技巧进行实践。另一方面,这种选择又使得问题本身失去了真实性。而且,学生很快便会发现为这些问题设置的背景(木头的 cord 数,羊的价格等等)只是装饰门面,使这些问题看起来像真的,而实际上这种问题并无实际意义。于是,这些实例的人为性就使得这些练习大全从实用和合理的王国进入到人造的王国。

第三个问题:米尔恩之所以运用这些练习是建立在他的认识论观点的基础之上的。我们在介绍米尔恩的例题时,对在课程中安排这些问题所依据的教学上的假设作一些讨论。在此,让我们

追寻一下这些假设派生了些什么。

几乎所有的西方教育,尤其是数学教育和教学,在认识论方面,都是基于一种传统的哲学观点之上。它是这样定义的,即认识论是“关于方法或知识基础的理论或科学”(《牛津英语辞典》,第884页)。认识论的根本涉及认识和知识的本质。“认识,从最一般的意义上讲,可以这样来定义,即坚信掌握真理或事实,并拥有(被掌握对象)适当的客观基础”(《牛津英语辞典》,第1549页),用比较通俗的话来讲,人们具有的一般观点——通常是未经明确说明或较含蓄,却具有强大影响力——是:我们认识的东西就是那些我们能够证明为真实的东西;而我们的知识就是我们所认识的东西的总和。也就是说,一个人的数学知识就是他能够可靠地、正确地加以运用的一系列数学事实和步骤。吉姆·格里诺(Jim Greeno)在对本章的评论中指出,大多数教学工作对数学知识的“可以证明性”认识不够。也就是说,教学在集中于运用各种技巧时,很少注重培养学生深入证明数学中各种步骤的正当性。他指出如果从较深刻的意义上运用证明的话,那么它可能是一个重要的课程目标。

以上讲的这种观点认为,传统的教学工作集中于知识的内容方面。从传统上看,人们是根据大量的学科内容来规定学生应该了解什么,并根据学生掌握的内容多少来判断他了解了什么知识。(长期以来一直存在的布卢姆(Bloom)分类学和标准化课程和考试,足以说明这一观点的普遍性。)这种观点看上去如同“把知识看作是实体”的观点一样,自然无伤大雅。同时,这一观点的存在具有很大的必然性(见第四个问题)。这种观点认为,“学习数学”就是以某种连贯的顺序掌握一系列事实和步骤,这些内容构成了数学的主体。学习途径包括:将学生必须掌握的学科知识尽可能表述清楚,把它们划分成小的几部分,针对每一部分提供明确的教学和实践,以便学生能掌握这些内容。从内容上看,一个学生对数学的全部理解恰好就是这些部分的总和。

数学通常与确定性联系在一起;懂数学意味着能迅速找到正确答案。这些文化方面的假设是通过学生的学校经历形成的。学校经历中,做数学就是遵循教师制订的各种计划;懂数学就是记住这些规则,并在教师提问时正确运用这些规则;在教师正式认可答案后,就确定了数学的真实性。学生在学校中通过多年的观察、听课和实践,对怎么做数学以及什么叫懂数学形成了各种观念。(兰帕特)

显然,以上这些假设在米尔恩练习中得以很好体现。学生所掌握的是一种特定的、相当狭隘的技巧。对于这一技巧的应用范围,我们已很清楚:开始,它应用于可以写成 $(a/b) \times 10$ 的小数形式;然后又推广到另外可以写成 $(a/b) \times 100$ 的小数形式。学生受到这一技巧的束缚,当他们掌握了这一技巧之后,再继续学习另外一种技巧。对于许多学生来说,他们在学习数学的过程中唯一碰到过的就是这种类型的问题。

第四个问题:这类练习集所产生的影响。就像兰帕特强调的那样,学生最初的数学经历——它们构成了对数学学科的理解基础——是在课堂上接触到数学。他们在学校里不停地做大量这类练习。这些练习给他们的印象是,对于给定的问题只有一种解答方法是正确的——而这种方法则是由课本或教师提供的。我们在讨论第一个问题时已经指出,实际情况显然并非如此;有许多求解方法。然而,在特定的教学背景中似乎只有一种方法是合理的。学生不断接触这类问题就必然产生许多后果。

课程中把各种数学事实和步骤分成小的几个部分,会产生这样的后果:使得学生意识到,教科书或教师会向他们提供问题的答案和解法;于是也就无法指望学生自己寻找解题方法。久而久之,大多数学生就会处于一种被动地位,认为数学是从专家那里“传递下来”要他们记忆的一门学科。

由于这些“问题”具有非或然性,便产生了第二个后果:学生渐渐地相信在数学中,(1)对于每一个给定问题,都应有一种现成解法,(2)这一解法应能迅速给出此问题的答案。在1983年进行的一次全国性评估工作中,被调查的学生中约有一半同意“学习数学大多数是记忆”这一说法。四分之三的学生同意“做数学需要遵循各种规则,进行大量实践”这一说法。又有十分之九的学生同意“解题总能找到一条规则”这一说法(全美教育进展评估协会)。持有这些信念的学生如果找不到现成解法,那么他们自己就不会设法去想办法,或者是在尝试了几分钟后,若仍解不出这道题,那他们就会放弃努力。

更重要的是,教师和课本强加于学生解题方法似乎有些独断专行,而且可能会与学生通过自身努力想出的方法发生矛盾。例如,米尔恩设计的所有数学问题在一般情况下都可以有多种解法,然而,在米尔恩的课本中,只认可了一种方法。回想一下,有些问题明显是人为加工过的,从而抹煞了数学具有实践性这一优点。学生有了类似数学经历后,可能会放弃形成数学意识的努力。他们会把这些问题看作是一些意义不大的练习,尽管它们打着应用性这一旗号;他们会逐渐相信数学并没有什么意义,而几乎是一种很专制的学科(或者至少认为数学中的那些富有意义的东西对他们来说是难以达到的)。于是,如果要对付它们,只需把数学记住就行了,根本不用考虑其中的意义。我们将在信念体系这一节中对此详作探讨。

**数学科学** 在过去20年中,数学的面目发生了翻天覆地的变化(其范围和实现手段),同时在数学家阶层中,人们对什么叫懂数学和做数学的理解也发生了重大变化。最近一系列文章和报告正力图阐明当代数学的特性,并指出人们对数学的重新认识导致了教学上的各种变化。这种重新认识主要是从广义上把数学理解为

“关于模式的科学”。

### 数学——探求各种模式的科学。

数学揭示各种隐藏着的模式,帮助我们理解周围的世界。如今的数学远非只是算术和几何,而是由许多部分组成的一门学科。它处理各种数据、度和科学观察;进行推理、演绎和证明;形成关于各种自然现象、人类行为和社会体系的数学模型。

人们在从数据到演绎再到应用这个周而复始的周期中运用着数学;从日常生活,如计划一次长途汽车旅行到一些大型管理问题,如安排航空交通或设计投资组合。“做数学”的方法远非只是计算或演绎;还包括观察模式,验证猜想和估计结果。

从实际角度来看,数学是一门关于模式和序的科学。它所涉及的领域不是分子和细胞,而是数字、可能性、形状、算法和变换。数学作为一门抽象科学,依靠的是逻辑而不是观察来作为真理的标准,然而它运用观察、模拟甚至实验来作为发现真理的手段。(全美研究会)

在这段话中,我们可以发现,人们对数学的认识发生了重大变化:从前面探讨过的那种传统的集中于数学的内容方面(注意力集中于人们“了解”的数学内容上)转变到数学的过程方面(即“做数学”)。确实,当注意的焦点转向具体的思维方式时,对于内容方面的东西只是附带而已。

数学除了提供各种定理和理论之外,还提供各种特定的思维方式,它们有着多种用途,也很有效,包括模型设计、抽象化、最优化、逻辑分析、数据推断、符号运用。通过学习各种数学思维方式,逐步形成数学能力——这在当今这个科技时代中日益显得重要。它能使人们批判地阅读资料、识别谬误、发现偏差、估测风险、并提出替代方法。数学使我们能更好地理解我们居住的这个信息爆炸的世界。(NRC)



于是出现了第一个主要变化:当人们讲到什么是数学,希望学生从数学中学到些什么时,不再集中于数学内容,而是更好地集中于数学方法。从这个意义上讲,如果说过去人们仅仅集中于数学的学科内容,那么现在数学似乎要比以前更像一门科学。的确,“关于模式的科学”看起来像是广义的定义,它让数学中的那些核心内容显得黯然无光。什么是数学呢,就是那些抽象化或模型化,以及通常所选用的一些工具和方法。这里再重复一下数学的定义,数学就是“以观察、研究和实验为基础所进行的各种系统化尝试。在各种公理化或理论化的体系(纯数学)中或者在各种从现实物质世界中抽象出来的系统模式(应用数学)中,确定内在规律或基本原理。数学工具包括抽象化、符号表示和符号运算”。(舍恩菲尔德)

第二个主要变化是:“数学是依靠逻辑而非依靠观察来作为真理的标准,然而它运用观察、模拟甚至实验来作为发现真理的手段”(NRC)。这一变化表明,人们逐渐把数学理解为一种有关分类的经验学科。在其中,数学实践家运用科学家一样的方法收集数据。我们在拉卡托斯(Lakatos)的文章中可以看到这种思想。他认为数学并非人们想象的那样,必然要经过从几条公理演绎开来这一过程;确切地说,是由数学家阶层来确定那些公理的,如果人们一直沿用的公理最终被证实与事实相违背,那么数学家阶层就要对此重作定义。第三个变化是:人们越来越把做数学看作是一种社会性的、相互合作的行为。斯蒂恩列举了在数学领域中取得重大进展的一些实例——在数论(大数的因子分解,素数检验都需要相互合作的计算机网络)方面;在获得了诺贝尔奖的运用氦嬗变提供计算机辅助x线断层成相(CAT)扫描技术所用到的数学知识方面;在最近解决的一些数学猜想方面,如四色定理——所有这些实例无一不是高度合作的结果。人们在“数学近况”文献中,频频探讨到以个体为基础开展的相互合作。如摘自阿伯斯(Albers)和亚

历山德森(Alexanderson)的《数学人：心理侧面图和面谈》的两段文字中，就对此作了探讨。彼得·希尔顿(Peter Hilton)把相互合作的好处阐述如下：

首先，我得说我确实喜欢这种方法。我非常喜欢同朋友们进行合作。其次，我认为这样做很有效果。因为……如果一个人只是自己单干的话，那么[他可能会]干得精疲力尽……但是，如果两个人一起干的话，往往会发生下面的情况，当其中一个人感到情绪低落时，另一个人就会激励他……再者，如果一个人选择的合作伙伴并不是重复你能做的工作，而是起到了一种相互补充作用的话，那么可能会产生一种更好的结果。

迪亚科尼斯(Persi Diaconis)这样说：

同一位很好的合作者一起工作具有极大好处，既刺激又有趣。我发现在数学领域中，越来越多的人在相互合作。数学家喜欢相互交谈……相互合作能使一个人的工作超越他的平常水平。格雷厄姆(Ron Graham)将这点表达得淋漓尽致。他说，如果一个人与另一个人合作写一篇论文，两名作者都付出75%的努力，那就差不多可成了……对我来说，相互合作意味着同别人交谈。谈遇到过哪些挫折，这就是个性的相互渗透。它对我来说是一个很大、很大的乐趣。

对这些人和在斯蒂恩所举例子中那些相互合作的人来说，成为数学家阶层中的一员毫无疑问是其数学生涯中的一个重要组成部分。然而，目前出现的一种新认识论观点提出，在数学领域中开展合作和交流，其所具有的作用要比以上引用的几段文字中所讲的还要重要。根据这一观点，成为数学应用阶层中的一员是构成数学思维和认识的一部分。格里诺强调指出，人们对这一观点还有个习惯过程。

这种[相互合作的]实践观点与我们思考知识的标准方式形成了对照。我们通常把知识看作是人们大脑中的某些内容,包括心理结构和程序。相反,实践是一种日常活动,它在具有社会意义的背景中进行。在这个背景中,人们通过与他人进行交流和合作,并利用各种有效的信息来源来开展活动……

基彻(Kitcher)列举了一个重要的[哲学和历史方面的]实例。基彻的目标是要形成一种数学认识论。在他的认识论中,有一个关键性概念就是数学实践的观点。他认为数学知识就是数学实践的知识。而数学实践包括理解数学实践的语言以及目前已被公众所接受的各种结果。它还包括当前数学领域中存在的涉及一些重要问题的相关知识,用于推导各种新结果的有效推理方法,以及各种元数学观点(包括数学研究的一般目标方面的知识和对各类重要准则特征和精确性的鉴赏)。

也就是说,“具有一种数学观点”以及“成为数学家阶层中的一员”是具有数学知识的两个核心方面。舍恩菲尔德对此作了如下阐述:

我记得在我们刚开始从事数学工作的时候,我曾经与一些同事讨论过成为一名数学家要做到些什么。撇开那些明显的个体差异,我们对成为一名数学家应具有什么特征形成了共识——一种思考数学的特殊方式,看待数学的特殊方式,做数学的特殊方式等。我们学会的远非只是一系列技能,而是一种观察世界和从事实践的方式。我们逐步意识到自己经历了一个同化的过程,其间我们成为一个特殊阶层的一员,并接受了这一阶层的价值观念。经过长期的数学见习期,最终在世界观意义上成为一名数学家,这一结果也符合定义中描述的各种情况(我们受训的那个环境以及谋生的那个阶层)。

我们在此探讨的认识论观点与本章前面讨论过的对所处社会文化方式的适应这一观点紧密相连。回想一下雷斯尼克讲过的话“要成为一名好的数学问题解决者——要成为在任何领域中一个好的思维者——可能就是要在获取各种特殊技能、策略和知识的

同时,不断养成对事物作出解释和形成数学意识的习惯和个性。”关键在于,不管是在数学背景中,还是在学校背景中,人们都是通过同化过程,通过成为某一特殊应用阶层中的一员,形成自己观点的。

## 教学目标和教学法的必然性

最近美国数学会大学本科数学教学委员会出版了一本《大学数学教学原始资料读物》(舍恩菲尔德)。这本“原始资料读物”开头就提出几种教学目标。作者认为在此有必要对它再作探讨。

### 数学教学目标

数学教学应该培养学生形成一种学科意识——对数学学科的范围、作用、应用以及历史的一种意识,并在一种适合于学生经历和理解的水平上,培养他们形成什么是数学和如何做数学的意识。通过教学实践,学生应该学会认识数学的价值,并对自己做数学的能力富有信心。

数学教学应该培养学生理解核心内容中那些适合他们水平的重要概念……教学的目的应该是培养学生的概念理解能力,而不是教给他们纯粹的机械技能;还应该是培养学生形成随机应变运用所学知识的能力。

数学教学应该为学生创设便于他们探索的各种问题和问题情景,包括各种练习、开放性问题 and 探索性情景。它应该向学生提供处理这些问题的各种途径和技巧(包括运用简单的计算方法、逼近法、模型设计技巧,以及启发式问题解决的策略)。

数学教学应该帮助学生形成一种所谓的“数学观”——一种分析和理解的偏好、一种理解结构和结构关系的偏好、一种观察事物相应适应的偏好。(注意这些联系可能是纯理论性的、也可能是应用性的。)它应该帮助学生形成各种分析技能,形成在大量论据中进行推理的能力。

数学教学应该帮助学生形成书面和口头表达的严谨性。它应该帮助学生学会以各种条理清晰的论据表达自己的分析,并在表述中表现出与其数学水平相当的数学风格和严密性。学生应该学会运用数学语言与师生交谈。

数学教学应该帮助学生形成阅读和运用课本及其他数学资料的能力。它应该尽可能地培养学生独立地学习、解释和运用数学。

根据在《人人都会算》中开展的讨论,我们想把下列内容作为第二种目标:数学教学应该帮助学生形成运用特定数学思维模式的能力,这些思维模式用途多且有效,包括模型化、抽象化、最优化、逻辑分析、数据推理和符号运用。

如果这些数学目标确实有道理,那么人们会问,我们要采用哪些类型的教学才能实现这些目标。本章这部分所回顾的文献,特别是有关社会化和认识论方面的文献,实际上提出了一种教学法的必然性:

如果人们希望学生能够达到这里提到的各种目标,尤其是养成解释事物和形成数学意识的习惯和个性,以及相应的数学思维模式——那么学生所处的这一特殊数学应用阶层必须反映出这些思维模式,并支持这些思维模式。也就是说,课堂必须成为我们希望学生形成数学意识的实践场所。

## 探求数学知识的框架

### 框架

本章第一部分,我们集中探讨了数学科学——《人人都会算》中所指的“做”数学问题。下面我们所集中讨论的则是数学思维过程——数学行为的心理支持结构。讨论的重点集中了过去 25 年中的发展情况。如果我们对过去 2000 年中与数学思维和问题解决方面有关的哲学和心理学视而不见,看来显得有些目光短浅,所以我们先对有关历史作个简短回顾,为探讨当代的研究工作作个铺垫,同时对为何将讨论的重点放在过去几十年加以解释。为了便于参阅,我们将数学科学总的纳入“心理学研究”中,包括教育研

究家、心理学家、社会科学家、哲学家以及认知科学家等等所作的各项研究。本节先对总的趋势作一些探讨,然后在后面几节中再对数学思维的详细内容作深入探讨。

当代关于思维和学习方面的研究,寻根探源可以追溯到柏拉图和亚里士多德的哲学著作中。更直接地说,笛卡尔(Descartes)的《思维定向规则》可以看作是波利亚在问题解决方面尝试的直接前身。然而,直到19世纪后期,人们才开始借助于经验学科来研究思维和思维的运作。这一学科的由来通常可追溯到1879年,旺德(Wundt)在德国莱比锡开设的一个实验室。“旺德是现代第一位心理学家——第一个将实验心理学看作是一门科学的人……旺德从一些生理学家身上汲取了灵感,他对方法论忠贞不渝的程度不亚于那些生理学家……他赞同方法论中的客观主义,并努力把经验进行量化,以便他人可以重复其步骤……旺德将内省与实验这两种方法相结合,形成了经验主义”(沃森(Watson))。旺德及其同事运用实验和内省(自我叙述智力活动过程)两种方法,收集相关数据,了解思维运作情况。这些方法本可以将心理学引向经验主义领域,但很快遇到了麻烦;不同实验室的研究人员报告的内省种类各不相同(每个实验室对内省所持的理论不同),这就导致了研究结果的可靠性和复现性方面出现了严重问题。

美国的心理学起源于19世纪末20世纪初,它更富有哲学色彩,并和实用主义和机能主义紧密相关。人们通常认为,威廉·詹姆斯(William James)是美国第一位大心理学家,他的《心理学原理》(1890年)是美国式心理学的经典著作。詹姆斯的学生桑代克一开始从事动物研究,后来转向人类认知研究。桑代克的工作特别对数学认知理论产生了巨大影响。

我们追溯到柏拉图时代,当时人们认为进行数学教学的一大原因就是为了解进行思维训练。简单地说,人们认为擅长数学的人往往也善于思考;受过数学训练的人更会思考。从理论上讲,锻炼

和训练使机体得到了训练,而结合做数学的思维训练则使思维得到了训练,从而使人们更加善于思考。桑代克向这一假设提出了挑战。他拿出了实验依据,指出思维训练的作用是有限的,他认为数学学习的各种好处是相互联系的;具有较好推理技能的学生往往会选修数学课程。他根据自己对动物和人类开展的研究,提出了“效果律”。这一定律的内容是:实际上“人们在实践中从事哪项工作,他们做这项工作的能力便会得到提高,其间并不存在太多的转换”。他在“练习律”中详细指出了学习发挥实践功能时发生的各种方式(近因效应和频率效应)。彼得斯(Peters)强调指出,“不管怎样,很少有人会反对把这两条定律中的第一条作为学习的必要条件;但如果把两条定律都作为学习的充分条件的话,那就不太妥当了”。

遗憾的是,当时把这两条定律作为学习的充分条件的意见一度占据上风。在欧洲大陆上,研究表明旺德的内省方法在方法论上不可信,同时心灵主义这种概念也遭到越来越多的抨击。在俄国,巴甫洛夫在条件反射方面的研究取得了震惊世界的结果,在他的实验中根本不需要什么思维概念。最后,思维、意识和所有相关现象全被行为主义者排除在外了。沃森是行为主义思想的主要代表,而斯金纳(B.F. Skinner)是这一思想的积极拥护者。行为主义者猛烈抨击心灵主义,但同样也遭到强烈的反击。

沃森和其他一些行为主义者不仅对内省主义发动进攻,而且还对形成心理运作方面理论的任何企图进行猛烈攻击。在行为主义者看来,心理学完全是与外在行为有关的科学,根本不用去分析构成这一行为时的思维运作情况:

行为主义宣称意识这个概念既不明确也不实用。由于行为主义者在接受训练时,被灌输的一直是自己是个实验者的观念,他们进一步认为有人相信意识存在的原因是这种观点早在迷信和巫术时代

就已形成了。

……行为主义者完全扫荡了中世纪的各种概念,开始形成自己对心理学问题的看法。他们将所有的主观术语,如感觉、知觉、表象、欲望、意志都从自己的科学词库中剔除了,甚至对思维和情绪之类的词汇也不例外,因为他们认为这些术语都带有主观性。

行为主义方案和它着眼的问题,几乎有 40 年时间都对认知心理学中开展的任何重大研究不作考虑。老鼠取代了人成为实验室的主要研究对象,而心理学转而通过研究动物的学习和动机,来发现什么是可以学习的学科。

行为主义在前台居主导地位的时代,幕后还存在着其他观点。皮亚杰的研究工作为构成主义观点奠定了基础。这种观点现在已经得到公认,它认为人不是直接认识世界,而是通过自己业已形成的解释性框架,来认识它所传递的解释,进而认识这个世界。但是,与皮亚杰同时代的一些美国同行却认为他的研究不严密。完形心理学家,尤其是邓克尔(Duncker),哈达玛德(Hadamard)和沃特海姆(Wertheimer),对高度有序的思维和问题解决很感兴趣。对完形心理学家来说,1945 年是摇旗呐喊的一年。“邓克尔的《关于问题解决》一书的英文版出版了,同时哈达玛德的《关于数学领域中新发现方面的心理学随笔》[该书详细解释了庞加莱(Poincare) Fuchsian 函数结构的发现]以及沃特海姆的《创造性思维》[该书中有沃特海姆对“平行四边形问题”的著名讨论,与爱因斯坦就相对论的起源问题进行的谈话],这些著作的英文版也相继出版了。这些著作继续体现出了沃拉斯(Graham Wallas)《思维艺术》一书的精神。沃拉斯在书中把完形心理学的问题解决模式整理为四个步骤:饱和、孵化、灵感和证实。完形心理学家,特别是沃特海姆,很注重结构与深层理解。遗憾的是,他们主要运用内省这一方法论工具,但这种方法论缺乏可靠性和正确性,所以极易招致攻击。(他们容易受攻击的另一个原因是因为他们没有可信的心理机制理论,而行为主义者则宣称,刺激-反应链是在神经元的相互联系



中形成的。)1945年年末,波利亚《如何解题》一书也出版了。这本书与完形心理学家开展的工作是一致的,但在笛卡尔看来,此书在风格上规定性太强。

在50年代中期,行为主义衰落,心灵主义兴起,并以信息处理认知方式的面目出现。用人工智能程序解决问题的发展,比如纽厄尔(Newell)和西蒙(Simon)的《一般问题解决者》一书,使得行为主义者搬起石头砸了自己的脚。

本世纪50年代出现的模拟模型,一方面是来自符号逻辑和控制论中各种观点相结合的产物,另一方面也是来自符茨堡(Würzburg)心理学和完形心理学中各种观点相结合的产物。从符号逻辑和控制论中形成了这样一个观点:信息的转换和传递可以用正式规定的符号操作系统的行为来阐述。而从符茨堡心理学和完形心理学中则形成了这样的观点:长时记忆是对有向联想的组织,而问题解决则是一个有向的、有目标的搜寻过程(西蒙)。

注意,西蒙讨论的信息处理工作绝对符合行为主义的标准:问题解决程序(模拟模型和人工智能程序)形成了问题解决的行为,这些程序的所有运用情况都可以公开接受检验。同时,信息处理流派的理论和方法论基本上都属于心灵主义性质的——以心灵主义心理学的理论为基础,通过对人们解决问题的活动进行观察,来推断他们(思维)问题解决策略的结构。尽管这方面的工作至少在十年之前就对处于主流地位的实验心理学产生过影响,但直到1980年西蒙及其同事才撰写了一些评论文章,希望能证明运用问题解决方面的科学实验报告,这种做法是完全合理的,强调稳定出现的认知过程,并开始在关于思维的心理学研究中占据主导地位。

早期的信息处理(IP)方面的研究工作关注的内容极其狭隘,部分原因是当时希望研究得到明确的科学结果。对许多人来说,检验一种理论唯一可接受的方法是把理论创始人认为应该做的工

作编成一个可运行的计算机程序。早期有关信息处理的研究工作集中于智力测试题领域(像河内塔之类的问题),其原因在于在这些简单的领域中,人们可以集中于形成各种策略。后来,研究又转到语义更丰富的领域中。随着工具的发展,研究工作从智力测试题和游戏(例如逻辑、密码算术、国际象棋)发展到更开放的问题,集中于诸如物理和数学教科书上的作业题(后来,研究领域又发展到医学诊断法、质谱分析法和和其他领域)。尽管如此,在信息处理传统领域开展的研究工作一度仍然很狭隘,研究焦点仍集中于“认知的结构”(和机器);记忆结构、知识表述结构、知识恢复机制结构和问题解决规则结构。

与此同时(由弗拉维尔(Flavell),弗里德里克(Friedrichs)和霍伊特(Hoyt)撰写的第一篇研究超记忆的论文于1970年发表;这一课题在80年代中期达到高峰),超认知成了主要的研究课题。同时,这方面文献也相当混乱,弗拉维尔在一篇早期论文中,将此术语作了如下定义:

超认知是指人们对有关自己认知过程方面的知识或与此相关的知识,比如信息或数据中与学习有关的属性。例如:假如我能注意到自己在学习A的时候遇到的困难要比学习B时遇到的多;假如我在接受C这个事实之前能想到还应该再复核一下C中内容;假如我在做多项选择题前能意识到应把每个答案细看一遍后再作判断……那么我就处于超认知状态中……超认知是指:通常为达到某些具体[问题解决]的目的或目标,对与认知客体或数据有关的过程进行积极监督、合理调整与组合。

这种带有激进现实主义色彩的定义包括许多范畴,为了研究需要,这些范畴曾一度被分类为更具机能主义色彩的范畴:(1)个体对自己的认知过程方面的知识进行陈述,(2)自我调节程序,包括监督和“即时”作出决策,(3)各种信念和情感以及它们对行为的

影响。(在 80 年代早期,有关认知和情感方面的文献彼此分离,互不一致。到 80 年代中期,由于强调要扩大认知方面的研究范围,这就要求这方面研究至少应与情感方面研究相一致,于是人们看到这两方面有统一起来的迹象。从那以后,前面讨论过的那种适应所处社会文化方式的观点又使这两方面的联系更紧密了。)以下评述的框架中会考虑到这些范畴。

到 80 年代末,在适应所处社会文化方式这一主题指导下,人类行为的社会观点和认知观点的统一便成为可能。这一观点最低说法,认为学习是在社会背景中发展的一种社会行为;人们必须把学习环境看作是文化背景,必须把学习看作是一种文化行为。(这一观点最高说法,认为认知和社会观点的统一意味着人们会把“个体大脑内部活动”和“分布的认知”看作是同一事物的两个方面。当然,这一观点还有待于从理论上进行证实。)由于受莱夫有关见习期研究的启发,科林斯等人从创造性学习环境中抽象出阅读、写作和数学中的一些共同要素。通过个案研究,他们发现了一种共同、广义上领域知识的概念化,它不仅包括对领域知识本身的详细说明,而且包括对策略和超认知行为的理解。另外,他们还发现三个研究方案都有“知识熟练应用文化群落”的某些性质,其中设计的环境,充分利用社会相互作用,使学生以与实践家相一致的行为方式经历着完形心理学的训练。

一般来说,有关数学教育的研究工作在观点和方法论上经历了类似的发展过程。在 60 年代和 70 年代,关于思维、学习和问题解决的“科学”研究占据主导地位,开展的研究有“方法 A 对方法 B”的相关性研究,因子分析研究和统计方面的比较研究。然而,到 70 年代中期,研究人士对数学行为研究方面得到的各类有限结果表示“失望”。例如,基尔帕特里克将当时美国流行的研究方法 with 克鲁捷斯基(Krutetskii)及其同事在苏联开展的各类定性研究进行了比较。他认为,美国的研究工作“严密”,但效果不佳。研究人

员刻意追求实验的严密性时,却与真正有意义的数学行为失之交臂。相比之下,苏联对数学能力的研究,尽管不够严密(如果不说不科学的话),但它们集中于具有表面效度的行为和能力,这些是数学思维的重要方面。基尔帕特里克建议研究界应扩大研究范围,并运用更多的方法开展研究。

在 70 年代后期和 80 年代,数学教育研究人员确实更多地转向对过程的研究。大多数此类研究工作受到了前面提到的心理学研究方面趋势的影响,但是它们也有自己的特点。前面我们强调过,心理学研究往往集中于“认知结构”——记忆结构、表述结构等等的研究。从心理学角度看,数学作业作为研究背景非常吸引人,因为数学具有形式性和(明显的)背景独立性。也就是说,文献或历史上的课题会受到现实世界知识的“污染”而“失真”,因而要精确地控制学生已经具有的知识和在实验环境中学到的知识,就难了。但是,人们可以把数学中那些纯形式课题(例如,基数为 10 的加减法运算、含一个变量的线性方程的求解规则)作为纯形式运算教给学生,这样就可避免因“污染”而导致的研究上的困难。例如,纽厄尔和西蒙早期在一次对问题解决进行的信息处理研究中,对学生解决符号逻辑问题时的行为作了分析。通过观察,他们对符号运算中的成功模式作了抽象化处理,并编写成计算机程序。当然,纽厄尔和西蒙的样本对任何了解符号含义的被试明确排斥(例如,“ $P \rightarrow Q$ ”意思是“若  $P$  为真,则  $Q$  为真”),由于他们的目标是要发现符号运算的生成模式,面无需理解这些符号,因而他们打算编写的那些计算机程序并不能根据这些符号的含义进行推理。相反,大多数数学教育者的基本任务当然是要让学生理解各种步骤及其含义。因此当数学教育出于不同目的,采用信息处理工作时,它便呈现出某些新的特征。

西尔弗(Silver)编写的《数学问题解决的教与学:多种研究观点》,查尔斯(Charles)和西尔弗撰写的《数学问题解决的教与评

估》——这两本出色的总结性著作代表了 80 年代早期和晚期的最新发展水平。西尔弗的这本书源于 1983 年召开的一次讨论会,会上集中了许多学科的研究人员,他们一起探讨问题解决方面的各种研究结果和研究方向。研究人员面临的大量困惑、差异性和许多有潜在价值的观点在书中随处可见。例如,人们对“问题解决”的基本定义还存在一些困惑。又如,基尔帕特里克给出了一系列定义和实例,其中包括本章第一部分已谈到的一些。他在书中各章节都以明确或含蓄的方式对这些定义作了举例说明。在另一方面,卡彭特在自己写的那章中一开始就讨论了以下这个问题:“詹姆斯有 13 只玻璃球,他丢了 8 只,还剩几只?”卡彭特强调指出:“我们在探讨问题解决时,通常不讨论这类问题,因为孩子可以运用常规的单一算法求出答案。论文的核心前提在于问题的求解,尤其是孩子所作的解答确实包含了解决实际问题的行为”。赫勒(Heller)和亨盖特(Hungate)像迈耶(Mayer)一样,将他们对问题解决的定义含蓄地表述为:学生学完标准教科书一章内容后,便能解答各种练习。另一方面,“在卡普特、莱什(Lesh)、舍恩菲尔德和肖内西(Mike Shaughnessy)撰写的论文中反映出认识论问题(例如,信念、概念以及错误的概念)的重要性。”这几章都对问题解决和数学思维进行了相当广泛的研究。同样,这些章节揭示出问题解决方法的多样性和相应的应用。卡彭特写的一章中详细阐述了儿童在求解上面所提类型的文字问题时,运用各种策略的具有典型性的数据。赫勒和亨盖特研究了“专家-新手”教师的范例,找出善于解题的那些教师所表现出的创造性行为,并把这些行为作为新手教师的教学指导。迈耶在研究专家-新手教师的范例时,还探讨了对图式理论的应用情况。卡普特对表述的基本问题和在理解上的作用作了讨论,肖内西对各种错误概念作了探讨。舍恩菲尔德对超认知和信念的作用进行了解释。汤姆森(Alba Thompson)研究了教师信念及其对教学的影响。同样,他们运用了多种方法;实验方

法,对专家-新手教师的研究、客观的面谈、实验报告分析以及课堂观察等等。这一领域的研究工作已呈显出繁荣景象,同时新的研究层出不穷。

查尔斯和西尔弗合写的著作反映出这一领域的研究工作已趋于成熟,并继续得到发展。80年代以来,人们对这方面的方法论和观点作了较详细的研究,并融入数学思维研究中,西尔弗在其著作中对其中的大多数作了初步考察。例如,信息处理方式以及专家-新手教师的范例可以为考察个体知识的组织与发展提供某些信息,但这是众多复杂问题中的一方面。随着方法论工具的不断增加,使我们有可能再次采取一种广义观点,例如,集中于把历史和认识论作为考察数学思维的基本背景。在查尔斯和西尔弗的著作中,可以看出社会相互关系以及对所处社会文化方式的适应这些主题是人们关心的核心内容,而在西尔弗早期写的一本著作中,尽管强调过这些主题,但却置之一边,视之为“我们实际上并不准备处理的事情”。人们看到的只是一些普遍框架的演变情况,如认知见习期,它研究个体在社会背景中的学习情况。格里诺、莱夫等人和雷斯尼克等的工作均考察了这些主题。目前还未形成条理清晰的解释性体系——所指的是,对数学思维和问题解决的不同方面是如何相互适应的原因作原则性解释时所需要的一种体系。当然,确实人们对探索数学思维和问题解决的必要范围形成了共识。尽管具体细节有所不同[科林斯等人把最后两种范畴纳入对“文化群落”的讨论中;莱斯特(Lester)、加诺法罗(Garofalo)和克罗尔(Kroll)将问题解决策略纳入“知识基础”中,仍把信念和情感划分为两个范畴],但人们似乎已形成共识,对以下五个认知方面的重要性形成普遍的一致意见。

- 知识基础
- 问题解决策略
- 监督与控制

- 信念与情感
- 实践

这五个方面为以下回顾工作的布局提供了基本框架。

## 知识基础

过去 25 年中,关于人类认知过程的研究,主要集中于考察人们是如何组织和进入记忆中被控制的信息的。简单地说,人们研究的基本问题是,信息是如何在大脑中进行组织和贮存的;理解包含了什么?个体是如何进入相关信息的。主流的观点是:人类是信息的加工者,人类在自己的大脑中对世界构造符号表述。根据这一观点,对世界所作的思考和所采取的行为分别意味着对这些表述进行心理操作,并采取外部行为,而这些行为是与我们大脑内部活动的结果相一致的。尽管这些观点和以下提到的观点占主流地位,但是应特别指出的是,人们对这些观点还存在着争议。例如有一种分布认知理论(皮(Pea)),认为知识定位于“大脑中”的说法不妥当——知识存在于各种阶层中,存在于这些阶层的制造物中,存在于个体和环境(环境中包括其他人)之间的相互关系中。认知定位概念基于的基本假设是,心理表述是不完整的,思维是利用人们赖以生活的世界中存在的各种特征得以实现的,而不是通过对世界进行抽象化来实现的。而且,即使人们接受这种内在化的认知表述概念,但对表述的性质和功能或者对什么是“理解”这一问题存在多种观点。下面对“基本一致”的观点作一些阐述。

假如一个人发现他或她自己处于一种需要运用数学的情境中,不管是为了进行数学化解释或者是为了解决问题。为了理解个体的行为——用何种方式作出选择——人们需要知道他或她手头有哪些数学工具可以使用。简单地说,这些问题关系到个体的知识基础:个体拥有哪些与这一数学情境或问题有关的信息?个体如何获得和使用这些信息?

这两个问题看似密不可分,实际上从某种意义上讲它们几乎是相互独立的。不妨作个类推,考虑一下图书馆内部的东西是否与这两个问题类似:图书馆内部有什么,图书馆如何获得这些东西?第一个问题的答案就在图书馆的图书目录中:图书馆拥有的各种书籍、唱片、磁带和其他资料的一份清单。如果你遇到一个具体问题或需要某些资料,那么你就会对目录感兴趣,至于这些书籍是怎样编目分类或怎样才能获得这些书籍,对他们来说就不太重要了(尤其是目录中没有你想要的书)。另一方面,一旦你想在目录中寻找和使用一些材料的话,情况就会发生变化。这时候图书馆实际如何运作就成为关键性问题:你必须了解借书的程序,先在书架上找书,然后拿到出借柜台办理借书手续等等。顺便强调一句:这些程序独立于图书馆内部的东西之外。人们租借任何两本书时,都要遵循这些相同步骤。

个体解决问题时,同样要对其知识基础作出估计。例如,对问题解决过程进行分析最常涉及的一些核心问题包括:个体知道些什么内容(记忆的内容)和如何调用这些知识。比如对问题解决过程所作决策进行评估时,需要了解求解者能够选择哪些办法。他们没采用某些特定办法确实是因为疏忽呢,还是确实因为根本不知道这些办法的存在?前一种情形说明其超认知上遇到了困难或者是没看出正确的“联系”。后一种情形说明其不具备正确的工具。对于那些试图了解求解行为的观察者或实验者来说,主要的一项任务就是要描述个体的知识基础。有一点很重要,必须强调,在这种背景下,知识基础中可能存在一些非真实的内容。在问题情境中,个体可能会带来各种错误的概念和曲解的事实;了解他们通常运用的求解工具是很有必要的。

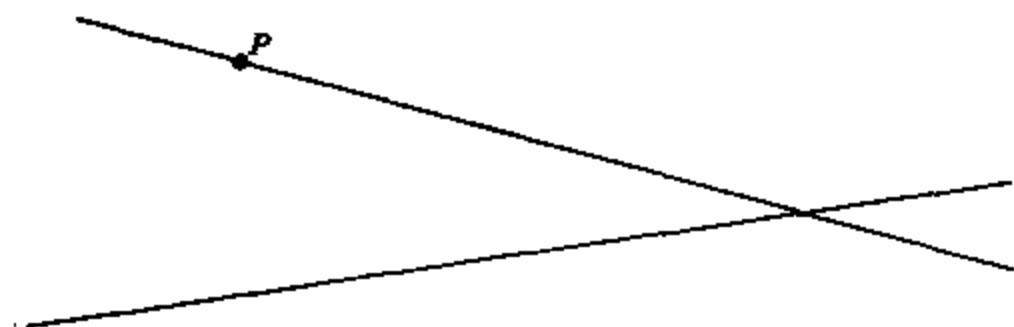
**知识清单(记忆内容)** 从广义上讲,在某一领域中有效工作所需的知识基础包括有关这一领域的非形式的直觉知识;各种事



实、定义和同类物等;各种运算步骤;各种常规步骤;各种相关能力,以及在这一领域中进行交流时要遵循的各种规则。例如,请你们想一下,某人在解决下面问题时,可能会采用哪些方法:

### 问题

已知两条相交直线,点  $P$  在其中一条直线上,如下图所示。用直尺和圆规作一个圆使其与两条直线相切,且点  $P$  为该圆与其中一条直线的切点,试问如何作图。



人们在解题时,可能会用到一些非形式的知识,包括对圆和切线的一般直觉,以及与相切有关的“紧密拟合”的概念,还包括一些感性偏向,如对观察两条直线上切点之间的对称性有强烈的偏向(随着顶角增大,这一特征就会变得越加不明显,最终使人无法觉察这一特征)。欧几里得几何显然是一种形式游戏;人们在运用规则作图时,必须辅以这些非形式的理解。前面已经强调过,个体带到问题情境中来的各种事实、定义和运算可能正确,也可能不正确;他们可能绝对地(但可能不正确)相信这些知识,也可能很不相信。这一知识清单中的部分内容如表 8-1 所示。

常规步骤和相关能力与事实、定义和运算步骤是有区别的,因为人们对于前者的运用不用作什么事先准备。事实有正确,也有错误的。如果算法用对了,这方法肯定奏效。常规步骤则可能奏效,但没有保证。例如,前面那个问题,看起来是道作图题,但基本上是属于一道证明题。人们要知道所求的圆具有哪些特性;而要

确定这些特性,最直接的方法是在已经作出该圆的图中(见图 8.1)证明  $PV$  和  $QV$  等长,且  $CV$  平分  $\angle PVQ$ 。

表 8-1 个体做作图题时,所运用知识的部分清单

| 知识等级<br>学生是否;              | 的 | 事实                             | 及 | 步骤                     |
|----------------------------|---|--------------------------------|---|------------------------|
| a. 不知道                     | [ | 圆的切线与过切点的                      | ] | 平分一个角的(正确)             |
| b. 知道有这么一个事实存在,但不知道细节      |   | 半径相垂直(真)                       |   | 步骤                     |
| c. 回忆起部分细节或对这些细节有所察觉,但很不明确 |   | 任何两个可构成的轨迹就能确定一个点的位置(在有限条件下为真) |   | 从直线外一点作这条直线的垂线的(正确)步骤  |
| d. 自信地认为                   |   | 三角形内切圆的圆心为中线的交点(假)             |   | 过直线上给定一点作该直线的垂线(不正确)步骤 |

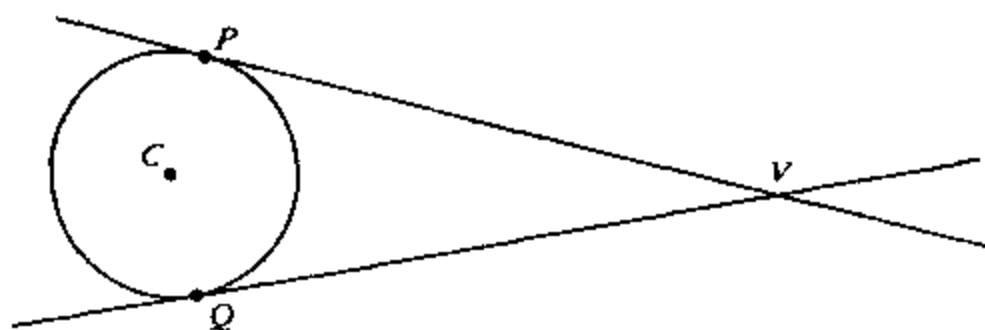


图 8.1 所求的图形

相关的证明技巧并非算法,它们在一定程度上是常规的。此方面有经验的人都知道,应该找到全等三角形。这里作出线段  $CV$ ,  $CP$  和  $CQ$ ,找出并运用一种标准方法证明三角形全等( $SSS$ ,  $ASA$ ,  $AAS$ ,或斜边一直角边);以及人们应在寻求全等三角形时运用这些知识。注意,在表 8-1 中,我们所作评论中若干提到了知识来源的正确性和解题者对相关步骤和常规能力的确信程度——个体确信为真的内容被考虑在内。最后,我们强调一下理解这一领域中交流规则的重要性。前面已经强调过,欧几里得几何是一种形式游戏,人们必须遵循一定的游戏规则。例如,我们不能用目

测的方法“画出”一条切线来,不能通过尺子得到圆的最长弦,然后确定其为圆的直径。按这些步骤可能会得到经验上认为正确的答案,但在形式领域中对此是禁止的。理解这一点的人与不理解的人表现出的行为截然不同。

**获得信息资源(记忆的结构)** 现在我们要看一看,人们是如何组织、获得和处理记忆中的内容的。图 8.2(西尔弗)为下面的讨论提供了一个总括性结构。有关讨论的全部内容,可参见诺曼(Norman)或安德森的评论。

这里简单探讨一下图 8.2 中心阶段涉及的一些主要问题。首先介绍一个概念:人类是信息加工者,他们把自己在这个世界上经历的各种刺激编成代码,然后根据这些代码采取相应行为。也就是说,人们把各种经历——视觉的、听觉的、触觉的——记录在各种感觉缓冲器中,然后再把它们(如果这些经历没被遗忘的话)转换成活动方式和长时记忆所运用的形式。感觉缓冲器(也叫映像记忆,因为其中大部分内容都是以各种表象的形式出现的)能够记

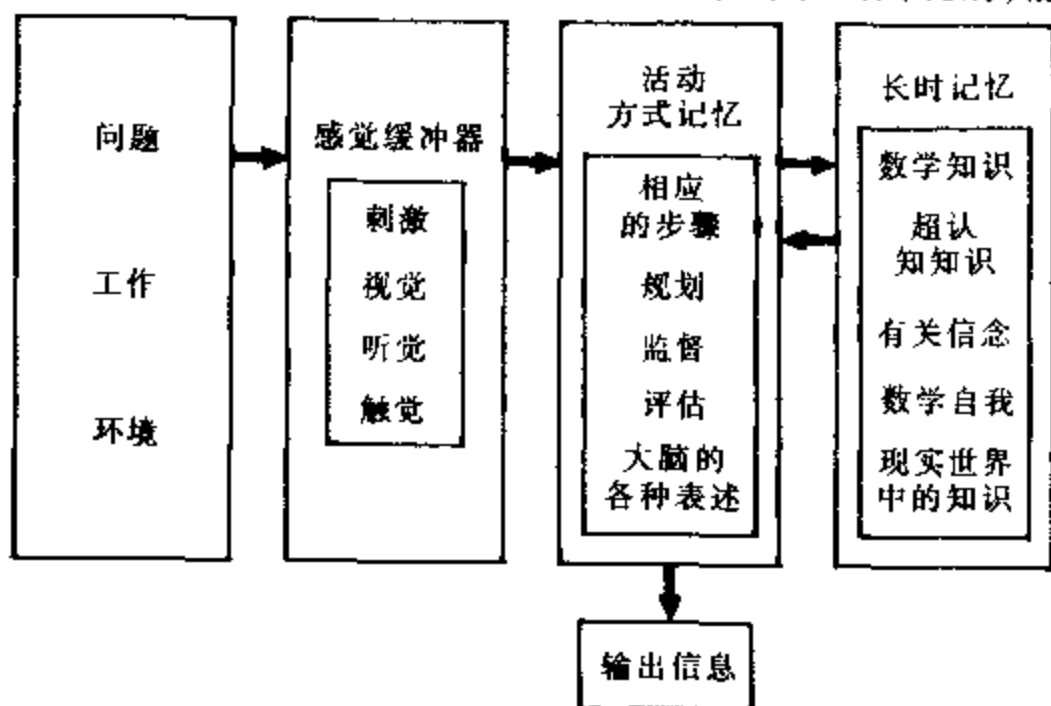


图 8.2 记忆的结构

录大量信息,但这种记录只能保留很短时间。其中有些信息会丢失,而有些信息则会转换成活动方式记忆(人们可以在感性上接受一个很大场景,但只能再现其中一小部分内容)。通俗地说,思维是在活动方式的记忆或短时记忆中形成的。活动方式记忆是从两个来源吸收相关内容的——感觉缓冲器和长时记忆。

活动方式记忆或短时记忆(STM)中最重要的一个方面是它们的容量有限。米勒(Miller)在早期开展的研究工作中指出,尽管人类通过这两种记忆——一般可以记住大量的信息,但是在短时记忆只能保持和运作大约七“块”信息。例如,除非个体经过特殊训练,否则让他心算 637 和 829 之积几乎不可能;由于他要记住的部分积数目太多,短时记忆无法容下这个数。在这个算术实例中,短时记忆中的信息相对比较简单。然而,短时记忆中的  $7 \pm 2$  块内容,每一块都颇为复杂。如同西蒙(1980 年)指出的那样。

一个块的内容就是一种人们熟悉的、并能加以识别的感性结构(视觉的、听觉的等)。对我们懂英语的人来说,口语词汇和书面词汇就是各种信息块……对一个在日本学校学习过的人来说,几千个汉字中的任何一个就是一个块(不仅仅是一些复杂的线条和草体字),甚至许多成对汉字也可以构成许多单个的块。对一名有经验的国际象棋手来说,“黑子的王从侧翼出动,与车易位”这步棋就是一个块,分别确定了六个或七个黑子的位置。

简言之,短时记忆结构对人们心理运作过程的种类和数量造成很大的制约。人们可以通过块与块之间的组合来获取短时记忆狭缝中的各种复杂实体,而这种组合只能略微缓和短时记忆的制约因素。如果人们在解决问题时,要在大脑中同时保持多种概念,那么“活动方式记忆容量”确实是一个很大的问题。活动方式记忆所具有的局限性还包括:对于“知识丰富型”的领域来说[如国际象棋(见下文),当然数学也是一种],人们能够“想出的内容”在数量

方面存在很大的局限性,而知识基础中的各种内容却是很重要的。

长时记忆是人们固定的知识存放库。人们对于长时记忆的详细运作情况仍然存在很多争议,这里我们无法对之作详细探讨,但似乎还存在比较一致的一种观点:即认为存在某种“神经网络”——这些网络的顶点(节)代表记忆中的各个块,而网络的相互连结则代表块与块之间的相互联系。除了这些结构上的问题之外,我们应作探讨的基本问题还包括:知识的性质、知识结构的获得(即带入短时记忆中)和应用。

赖尔(Ryle)指出,在讨论以上问题之前,应该注意两种类型的知识,即“知其然”和“知其所以然”之间长期存在着的区别。安德森则把这两种知识分别称为“陈述性”知识和“程序性”知识——比较现代的叫法。它们之间的关系如何还不清楚,若要了解有关这方面的当代研究工作,可参见希伯特(Hiebert)(1985年)的工作。

国际象棋是有关记忆内容方面最值得详加阐述的一个领域。德·格鲁特(De Groot)考察了若干国际象棋大师具备的弈棋能力,试图用“空间能力”来解释他们对棋盘进行快速“构思”的能力,以及同时下几盘棋的能力。他让几位专业棋手和新手棋手快速看几盘具有典型中盘阵式的棋局,然后要他们在旁边的棋盘上将这些阵式回忆出来。大师的表现几乎完美无缺;而新手的表现却很差。然而,如果要这两组棋手将随机置于棋盘上的棋子位置回忆出来的话,那么专业棋手并不比新手好多少,而且如果要他们回忆那些几乎标准的阵式时,大师的回忆往往是其希望出现的那些标准阵式。也就是说,专业棋手具有棋子阵式方面的“词汇”,他们能对约50 000种易于识别的布局作出自动的反应。这些词汇构成了他们弈棋能力的基础(但非全部)。

以上情况适用于所有的领域,包括数学。根据形成的知识结构,知识块可以是指行动计划、框架或图式。不管怎样,他们所依据的观点是一致的:人们对自己的经历进行抽象化,并把它们编

码。当人们遇到与那些被抽象化和编码的经历相关新情况时,这些代码便形成了人们所看到的那些东西以及相应的行为方式。欣斯利(Hinsley)、海斯(Hayes)和西蒙在这一领域中的研究工作具有普遍性。例如,在他们的一部分研究中,他们首先向被试宣读一个问题中很少几个词,再让被试对这个问题进行归类——说说他们期望这个问题提供什么信息,他们可能会被问些什么问题。

其中一名被试在听到一道有关河流流速的问题中“一艘汽船”这几个字之后,说“这个问题要讲的是有关河流的逆水、顺水以及静水等方面的情况。这道题要把逆水和顺水情况的时间作比较——或者如果时间为常数,要我们算出距离。”……另一名被试在听到一道有关三角形问题中五个字之后,说“这道题可能是要用毕达哥拉斯定理来算他离目标还有多远?”(1977年)

现将欣斯利、海斯和西蒙的研究结果概述如下:

1. 人们能够将问题归成几种类型。
2. 人们在未能完全明确表达需解答的问题时,就能将问题进行归类。如果这种归类是要引出一个相关图式,以对该问题作明确表达的话,那么必须在明确表达完成之前,就要获得这个图式。
3. 人们对每类问题都具有一个信息体,它对人们明确表达这类问题具有潜在的价值,……将直接关注重要问题的要素,进行相关判断,获得涉及相关的均衡信息等。
4. 在实际解决问题的过程中,人们通过类别辨识来明确表达问题。

总而言之,在诸如国际象棋和数学等领域中取得的研究结果明显表明知识基础的重要性和影响力。首先研究认为,要形成各种领域中的专门知识,人们必须获得长时记忆中的大约 50 000 个知识块。由于每个知识块要植入长时记忆中,都需花费一定的时间(复述最简单的术语也许要花 10 秒钟时间),若要进行知识之间

的相互联系,则需花更长时间,这就是专门知识为什么需要较长时间才能形成的一个原因。其次,有许多情况看似在运用策略,实际上是在运用这类已相当完善的知识块了,“在充分地认出这个环境之后,采取相应的措施”。不管怎样,不能因为这些知识图式确实起到词库作用——在熟悉的领域中进行常规操作的基础,就夸大其影响,这点很重要。国际象棋手在自己能力有限的情况下,确实会自动地借助于他们在棋子阵式方面的词汇,并同时也作重大的策划。同样,数学家在遇到那些超出常规的问题(这些当然是数学家所关注的问题)时,也会直接地调用大量知识,并且同时也运用着多种策略。当然,数学教育界对那种简单地认为数学教学应该集中于问题图式的做法,显然不能接受,其原因很简单。我们在作历史回顾时就强调过,信息处理工作往往集中于实际运作,而不必集中于对这一工作的理解。由于各种图式出现的形式是粗略的——“如果在某个问题中出现这种特征,就请采用这种方法”——因而,就产生这样的问题,有些善于解决问题的行为其实是表而性的。如果操作过程不是建立在对其程序的基本原理进行理解的基础之上,那么这种操作就容易出错,而且也容易遗忘。于是,许多教育工作者指出,人们在应用图式理论的研究结果时,要特别小心。若要详细了解一些基本心理学观点,以及数学教育界的反应,可以参阅迈耶(1985年)和索德(Sowder)(1985年)写的论文。

**问题解决策略(启发法)** 要探讨数学问题解决策略或启发法,必须从波利亚说起。简单地说,《如何解题》一书为问题解决“运动”播下了种子。这一运动在80年代达到了成熟阶段:翻开全美数学教师理事会1980年的年鉴,在任何一页上都有可能看到波利亚这个名字,讨论到问题解决的实例时,都会直接或间接地说起他。年鉴首先在扉页中介绍了《如何解题》书中讲的解题计划,然后详细探讨了如何在课堂上实施波利亚式的各种策略。波利亚的

影响并不局限于数学教育领域。如果我们粗略地回顾一下有关文献的话,便会发现在《美国政治学评价》、《心理学年度评论》、《人工智能》、《计算机和化学》、《计算机和教育》、《交谈过程》、《教育的领导地位》、《高等教育》以及《人类的学习》等书中,都引用了他在问题解决方面的研究工作。然而,如果我们仔细地考察一下这些文献的话,便会发现尽管他的名字出现的频率很高,但是他的观点通常却被人们轻描淡写,一笔带过。很少有人既引用波利亚的名字,又体现其精神实质。这里,我们简单介绍两方面的内容:考察启发法的功效或解题策略方面的研究工作,以及“现实世界”中对问题解决教学的实施情况。

使启发法发挥作用。波利亚在《如何解题》中探讨的那些启发式策略,如他在“简明启发法术语大全”中提到的(运用)类比、辅助元素、分解和重组、归纳法、特殊化、变分和倒推法等策略的科学地位还成问题,尽管在过去十年中有迹象表明人们已转向波利亚的观点了。

毫无疑问,波利亚对问题解决的阐述具有表面效度,在具有丰富数学经验的人看来似乎很真实。然而,在70年代,人们根据自己的经验却很少支持把启发法作为一种手段来提高人们解决问题的能力。例如,威尔逊(Wilson)和史密斯发现学生学到的启发法,尽管表面上具有通用性,但并不适用于各种新的领域。坎托斯基(Kantowski)、基尔帕特里克和卢卡斯(Lucas)对各种问题解决的行为进行了研究之后,确实也指出,学生的一些能力测试和特殊构造问题的测试中运用启发式策略,成绩正相关;然而,这些影响相对来说不很明显。哈维(Harvey)和龙伯格在汇编了70年代有关问题解决方面的学术研究后,指出将解题策略教给学生这种教学是“大有可为的”,但是还有待证实。而贝格尔(Begle)对1979年中的最新发展情况所作的评估则较为悲观:



人们费尽心机试图找出学生在解决数学问题时所运用的各种策略。……研究结果并未为数学教学指出明确的发展方向。其实,有足够的迹象表明解题策略既因人而异,又因问题不同而有所变化。如果我们找出一种(或几种)策略,把它们教给所有(或大多数)学生的话,这种做法实在太过于简单化了。

在其他一些领域中,如人工智能领域,人们相当偏重于启发式策略,而这些领域一般都不采用波利亚式策略。纽厄尔将波利亚的影响概述如下:

本章将对乔治·波利亚在启发法上的研究工作与人工智能领域的关系作些探索,可以用一句简单的话将其中的主题表达出来:人们既敬重波利亚,又忽视波利亚。敬重他是因为他在人工智能领域重新将启发法置于智能之中;忽视他是因为在人工智能领域没有人正式把他的研究作为理论基础……

在人工智能领域,至少是在解决问题和一般推理这2块中,每个研究人员都知道波利亚其人。他们认为波利亚的观点明智且振奋人心,正如明斯基(Minsky)所说的,“每个人都应该了解波利亚在问题解决方面的研究工作”。但是,他们同时也认为波利亚的研究工作是非形式的,不能作为一种理论基础。亨特说过“类比推理是一种具有潜在效果的手段。实际上,波利亚将他撰写的两部著作中的一部全部用于探讨类比和数学归纳法。遗憾的是,他列举的各种实例只具有特殊性,不具备普遍性的规则”。

在波利亚看来,80年代对启发法来说是颇为看好的时期。简言之,人们在评论《如何解题》和续集所罗列的策略时,认为它们更多的是具有描述性特征而不是规定性特征。也就是说,这种特征能使人们识别所用的策略。然而,波利亚并未提供这些特征的细节,无法让不熟悉这些策略的人也能够运用这些策略。例如,像“考察特例”这类策略看似简单,但只是表面现象。

为了更好地理解一道不熟悉的问题,我们可以通过考察各种特例来增强对这道题的理解。这样就为解题提供了方向,或许还能提供一种较合理解法。

现在让我们考虑一下以下三个问题的求解。

第一题:求下列级数的和:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$$

第二题:设  $P(x)$  和  $Q(x)$  是系数相同,但排列顺序相反的多项式:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \text{ 和}$$

$$Q(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_0x^n$$

请问  $P(x)$  和  $Q(x)$  的根之间存在着什么关系,并证明之。

第三题:已知  $a_0$  和  $a_1$  两个实数,序列  $\{a_n\}$  为

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-2} + a_{n-1}) (n \geq 2)$$

请问序列  $\{a_n\}$  是否收敛? 若收敛,其值为多少?

我们在此不作详细解答。然而,以下的观察很重要。对第一道题来说,整数参数  $n$  依次取值  $1, 2, 3, \cdots$  时会出现什么情况,而这些特例有助于对问题进行考察,也就是说,我们可以通过归纳法得到一般的模式。但是,如果在第二道题中仍以同样的方法试图找出特例的话,那么就会陷入困境:考察  $n = 1, 2, 3, \cdots$  是徒劳之举。在第二题中,我们要找的  $P(x)$  和  $Q(x)$  中的那些“正确”特例是那些易于因式分解的多项式。例如,对  $P(x) = (2x+1)(x+4) \times (3x-2)$ , 我们可以发现它的“反向序”也能毫不费力地进行因式分解,这样要比较  $P$  和  $Q$  的根就容易了,结果(用这种方法证明最容易)也就显而易见了。但是第三题的特例本质上有所不同。选择  $a_0 = 0$  和  $a_1 = 1$ , 我们可以得到由这两个值确定的序列。从

这一特例中得到的模式可以推出一般的规律(如果画一张确切的图的话,就更明显了),从而得到该题的解。

这三个问题中的每一个都代表某一大类的问题,也代表了采取不同特例的一种策略。如:

策略 1: 如果整数参数  $n$  在题目中起着重要作用的话,那么我们在解答时,可以依次考察  $n = 1, 2, 3, \dots$ , 找出其中的模式。

策略 2: 如果题目中涉及到求多项式的根时,那么我们在解答时,可以先考察一下易于因式分解的多项式。

策略 3: 如果题目中涉及逆归构造的序列或级数的话,那么我们在解题时,在不破坏一般性的前提下,可以试探一下考察 0 和 1 两个初始值的情况。

不用说,这三种策略无法涵盖所有的“特例”。像这类分析水平——实施策略所必须的水平——我们还能找到许多。波利亚的所有策略几乎都属于这种情况。他指出,学生能够学会这些需细心揣摩的策略。

一般来说,如果详细研究类似情况也能得出同样的结果。例如,西尔弗指出“利用相关问题”要比表面上看起来复杂得多。赫勒和亨盖特在探讨数学和理科中的各种(常规)问题的解法时指出,若要关心纽厄尔在人工智能中探讨过的那种条理清晰的细节内容,就要考虑到描述学生能够学会并在解题时可以用到的各种策略。他们详细地对认知作了研究,并提出以下几条建议:(1)将默示的过程明确化;(2)让学生就这些过程进行讨论;(3)提供有指导的实践活动;(4)确保学生学会每个步骤;(5)既要注重定性理解,也要注重具体步骤。这些建议看起来不仅适用于赫勒和亨盖特探讨的那些常规技巧,也适用于各种启发式策略。同样,里斯兰(Rissland)在他关于人工智能和数学教育方面撰写的“专业论文”中,也指出类似情况,他认为对学生解题操作过程进行详细分析能

够带来这些好处。现在关于解题策略详细的、规定特征方面的基本知识已经有了一些。

学校课程中的“问题解决”。遗憾的是,在课堂实践中,在问题解决方面,听到的更多的是教师就此发表的大话,而实质性举措却看不到。以下是多塞(Dossey)、穆利斯(Mullis)、林奎斯特(Lindquist)和钱伯斯(Chambers)在数学报告卡上写的总结。

数学课上的教学特征就是,教师讲解课文,黑板上演示解题过程,让学生独立解答各种数学问题——这一特征在1978年至1986年的8年时间里,没有改变过。

人们在目前普遍开展的研究中指出:先听教师讲解,再以老一套方式对自己所听内容进行实践,这种学习方法不可取,学生应该采用更有效的方法学习数学。确实迫切需要对这种教学进行改革。学生需要学会把自己新学会的各种数学技能运用到调研中,而他们的反映却表明其很少有机会参与这样的活动。

从数学报告卡上,我们可以发现,数学课上绝大多数使用教科书、练习册和活页,上课类型通常属于伯克哈特(Burkhardt)指出的那种“讲解、实例、练习”模式。而问题解决课差不多也是这样上的。实际上,在所有主流教科书中,“问题解决”都是作为一种独立活动来加以强调的。一般来说,问题解决是以下列两种方式出现在教科书上的。第一、在课本中偶尔穿插一些“问题解决”作业,(并把这些作业说成)作为一种奖赏或娱乐。用这种安排方式,弦外之音就是“你们刚才上数学课时一定累了,现在休息片刻,放松一下吧”。第二,许多课本中“问题解决”一栏,先简单讲述上节中讨论过的各种解题策略,然后给学生提供一些练习和实践。教科书里的一般做法是:教学生一种策略(比如先依次取值 $n=1,2,3,4$ ,“找出相关模式”,再推测一般的结果),让他们运用这种策略做

些练习,再布置一些家庭作业去继续练习,然后测试他们掌握这种策略的情况。请注意,这种教解题策略的方式不再是波利亚所指那种意义上的启发式了,而是纯粹的运算方法。波利亚主张的问题解决是指:要让学生在不知道相关解法(甚至只是部分掌握)的情况下,学会解决不熟悉的新问题。如果我们按这里所讲的解题步骤训练学生的话,那么他们是不会形成波利亚和其他数学家所珍爱的那些数学思维技能的。

即使我们用了很好的教学材料(以及可以获得各类问题的更多资料)进行启发式教学,要学生形成波利亚所指的那些灵活技能,有时候也不那么尽如人意。正如伯克哈特指出的,要教师用下列方法进行问题解决教学,是比较困难的:

在数学方面:教师必须理解学生解题时运用的各种方法是否有效,若无效,就要分析导致无效的原因。

在教学方面:教师本质上必须让学生自己解题,但要适时地指导学生,提出一些建议,帮助他们解题,并针对班里每个学生或每组学生都采取这种方式。

在个人方面:对包括数学教师在内的许多教师来说,他们常常会陷入一种不知道该怎么做的尴尬局面;教师要在不知答案的情况下做好工作,则需要经验、自信和自我意识。

也就是说,真正的问题解决,不仅对学生是个要求,对教师也有这个要求——一旦学会这种方法,要比当今大多数课程中的那些无力的模仿有意义得多。

**自我调节或监督和控制** 自我调节或监督和控制是超认知这一术语中的三大方面之一。要对这一概念作广泛的历史回顾,可参见布朗(1987年)的工作。简单地说,这是一个关于认知活动以及解题期间分配资源的问题。下面我们列举几个一般实例来介绍这

一概念。

当你看了一些说明性文章后,你的理解也许仍会模糊不清;你或许会把文章再读一遍,或许干脆置之一边,然后举些解释性实例来证实自己已经领会文章的要点。你在写文章中间,也许会注意到,自己已经偏离了原来的提纲。你可能会删去已写好的几个段落,重新回到原来的提纲上,或者按照已写好的内容,对提纲作出修改。或者当你在解一道数学题时,可能会注意到,这道题比自己当初想象的要复杂。也许最好的办法是将题目再读一遍,看看自己是否完全理解题意。请注意,人们在阅读、写作和数学这三个领域中的行为,其描述水平程度是一样的。在智力活动(广义上理解的“问题解决”)中间,你密切关注事态的进展情况,如果情况好像进展得比较顺利,那么你就会继续沿着这条路走下去;要是情况看来有点不妙,那么你会仔细地进行检查,并考虑其他方案。“即时”进行监督和评估,并实时对进展中评估采取相应行为,这是自我调节中的核心部分。

在70年代,至少有三个领域中的研究工作——有关发展文献、人工智能和数学教育——都趋向同一结果,即把自我调节作为一个重要课题来研究。一般来说,有关发展文献表明,儿童随着年龄增长,越来越擅长对要求其做的工作进行规划,同样也越来越擅长根据反馈信息作出纠正性判断。(注意:研究把不同年龄层次的儿童分成几组,把他们的思维情况作对比,因而这些研究结果通常具有典型性,但是很少有研究是针对个体学生或具有共性的团队的。)代表这些结果的一个主要实例就是卡米罗夫-史密斯(Karmiloff-Smith)对4岁~9岁儿童进行的一项研究,他给这些孩子一个建造一条铁轨的任务。给孩子几块厚硬纸板,代表铁轨的轨段,要求他们把所有的轨段都拼接起来,组成一条环形铁轨,并使火车在上面顺利运行而不脱轨。他把问题中的条件反复讲给孩子听,直到确信他们已明白,在拼铁轨时要怎样才能满足这些约束

条件。研究中发现四、五岁的孩子通常一下子就投入进去了,拿起一块拼一块,多少有些随意性,谈不上按照什么次序拼接。而年龄稍大一点的孩子,如八九岁的在做这项工作时,就做了大量计划。他们把轨段进行分类(直线的和曲线的),并且有系统地从各类轨段中进行挑选(交替选择曲线和直线轨段,或者先挑两段直线的,再挑两段曲线的),把这条环形铁轨建好。一般来说,他们完成任务的效率较高。简单地说,制订计划、按照计划办事,并在实施计划时不断考虑反馈信息的能力和偏好,似乎随着年龄的增长而不断地形成。

几乎在同一时期,人工智能领域中的研究人员也意识到有必要在自己的研究工作中“实行控制”。随着问题解决程序(和专家系统)日益复杂,人工智能领域中的研究人员越来越懂得“资源管理”的重要性。人们在特定领域制订计划并解决各种问题,而资源分配这个问题则会随着特定领域中具体情况的不同而差异很大。例如,萨舍多蒂(Sacerdoti)很关心人们实施计划时的时间顺序——如果人们严格按照以下指令的顺序执行的话,“把鞋子和袜子穿好”或“把梯子和天花板油漆一下”,那么时间顺序问题就很明显了。他设计的行为等级体系网络(NOAH)这一结构,就是用来帮助人们有效地进行规划决策,从而避免在实施计划时遇到障碍。在实施 NOAH 的计划时,要从最一般的水平往下不断完善这一计划,但只在必要时,才充实一些具体内容。根据不同领域,也可以采用从具体到总体的模式,或其他一些模式,其中最著名的就是 B. 海斯-罗思和 E. 海斯-罗思(Hayes - Roth)的“机会主义规划模式”(OPM),这一模式中的顺序是混合式的——在具体做法上带有一些从总体到具体的特征,但在适当时,也会在局部这一级上开展工作。B. 海斯-罗思和 E. 海斯-罗思的工作,在许多方面与人们在问题解决领域中的工作相似。他们让被试对一天中要做的工作,按照优先顺序排列,确定工作的优先次序。他们给被试一张(假想

的)城市简图和一张工作清单,如果有可能,应该在当天完成所有工作。这些工作有些属于琐碎的、易于延误的事情(如预定一本书),也有一些事情很重要(如到药房买药)。由于他们要做的事情很多,因此他们得确定这些工作的优先次序,找出排序的合理有效的方法,然后逐个加以完成。以下这段内容将这方面的研究结果和立场作个概述,这些研究结果和立场与人工智能方面的文献中那些具有明确等级的模式形成了对比。

人们的规划活动具有不少机会主义色彩,也就是说,在规划过程中每一个时间点,规划者当时所作决定和观察都会形成各种不同机会,规划者就是根据这些机会进行规划的。规划者再根据自己所选择的机会作出相应决策。有时候,这些决策过程具有一定顺序,并呈现一种从总体到具体的明确趋势……然而,他们通过某些决策和观察形成的机会并无太多次序。例如,对如何作出规划的活动所作决策,可能会对规划以后的活动产生某种制约,并使规划者重新关注规划中的那个阶段。同样,对以前所作出的抽象规划进行某些低水平加工有可能会形成另一种抽象规划,从而取代原来的规划。(B. 海斯-罗思和 E. 海斯-罗思)

在数学教育方面的文献也不断出现类似研究结果。在 80 年代早期,西尔弗、布兰卡(Branca)、亚当斯以及加诺法罗、莱斯特指出这一构念对数学教育工作很有价值;莱什集中研究了学生对问题和问题情景形成概念的不稳定性及其产生的后果。不太确切地说,所有研究处理的都是同样一些问题:有效而丰富的问题解决行为。他们得到的各种结果,可以概述如下:不是要你知道什么知识,而是要你知道怎样运用、何时运用和是否运用这些知识。这里集中探讨两组有关帮助学生在解数学问题时形成自我调节技能的研究工作。我们选择它们讨论的原因是(1)两组研究都明确地集中考察自我调节这一课题,(2)每组研究都在帮助学生形成这些技能过程中投入了大量时间,(3)每组研究都对其中的成败之处有详



细的反思。

舍恩菲尔德在大学开设的各门问题解决课程的主要目标之一是形成可实施或控制规划的各种技能。以下为作者做的一个简要小结。

图 8.3 和 8.4 已经呈现了一些主要问题。图 8.3 是关于两组学生团队合作进行问题解决的情况。这些学生被要求把问题读了一遍之后,便立刻选择一种方法开始解题,并坚持用那种解题方法。尽管已有明显迹象表明他们坚持这么做并未获得什么进展,但是,他们还是足足干了 20 分钟,把规定时间全都用在这个方法上了。20 分钟后,我们问他们是如何用此解法的,他们无法作答。

活动

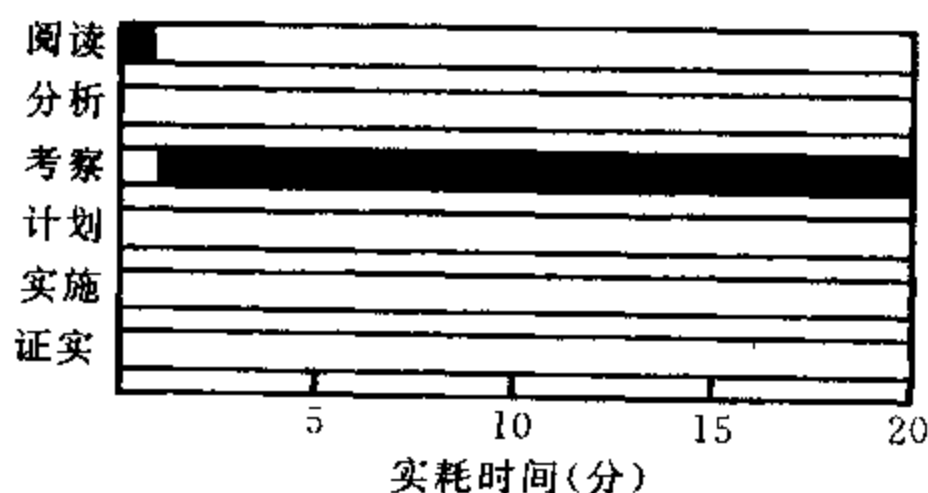


图 8.3 学生在试图求解非标准问题过程中典型时间线图

读者也许不常看到这种类型的行为。学生平常做练习时,通常不会出现这种行为,因为这种情况下,问题情景中会告诉他们该用哪些技巧解题。(例如,在有关二次方程的单元测验中,学生都知道要用到二次公式来解题。)但是当学生在解决现实问题时,在没有上下文的情况下,要对付一个不熟悉的问题时,他们就会表现上述行为。本人收集的一些录像带中(100 多盘),约有 60% 的大中学生在解答各种不熟悉的问题时,“先把问题读一遍,然后很快

作出决策,不管多大困难,就沿着这个方向进行解题”。只读了一遍题目,便匆匆作出错误决策,如果不重新考虑并彻底改变这一决策的话,当然必败无疑。

图 8.4 与图 8.3 形成了鲜明对比,该图考察了一名数学教员试图解决一道由两部分组成的难题的情况。值得注意的第一点是,这位数学工作者把一半以上分配给他的解题时间花在审题上。他并未死盯住一种解题方向不放,而是进行大量的分析和(有条理的)考察——他没有把时间浪费在漫无条理的考察上,在对某一解题方向无十分把握的情况下,他不会贸然去解。值得注意的第二点是,图 8.4 中的每个倒置小三角形表示他对自己解题状况所作的一个明确判断,如“嗯,我不太清楚如何下手”(然后对问题作了两分钟分析)或“有了,我只需用[一种特殊技巧]就行了”(然后便开始解题)。有一个有趣现象,那就是这位教员在解题时,很少需要现成的解题事实和步骤,而我们研究的大多数学生其情况却恰恰相反。同时,这位教员在解题过程中遇到了足以使他手忙脚乱的许多潜在的迷魂阵,但是,他没被迷惑住,而是仔细地监控着解题过程——寻找各种有趣的线索,不断放弃走不通的途径——最后成功地解出此题,而绝大多数学生却未能成功。

总的来说,这两个实例分别代表了成年学生和“专家”在解决不熟悉问题时表现出来的典型行为。学生不知道或不会用专家擅长的解题技巧来解题。然而,如果我们把教学的重点明确放在数学思维中的超认知方面,学生是可以学会这些技能的。我们在教学中要采取“教练”方式,在学生解题过程中积极地进行指导性介入。

在作者设计的各种解题课上,约有三分之一时间是让学生在小组中解题。全班分成由三至四名学生组成的若干小组,解答分配给他们的题目,教员则在教室里巡视,作为“巡视顾问”。他在教室里走动时,有权在任何时间提出以下三个问题:

你正在做些什么？（你能否明确地讲述一下？）

你为什么要这样做？（你这样做能否求出答案？）

这样做对你有什么帮助？（如果你得出结果后，会做些什么？）

## 活动

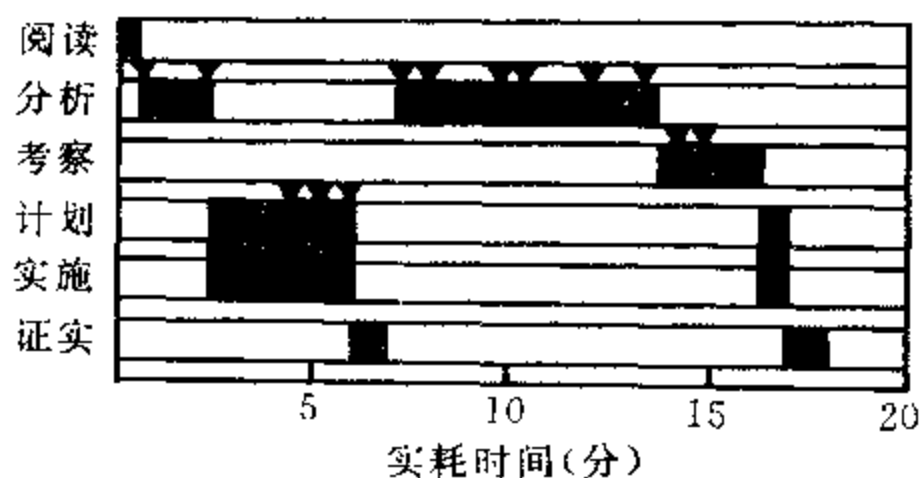


图 8.4 一位数学教员解一道难题中的时间线图

## 活动

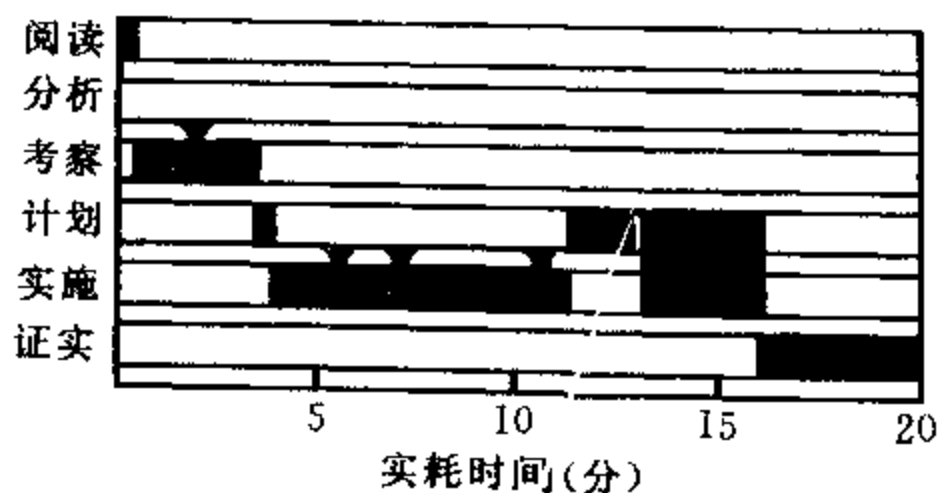


图 8.5 学生受过明确的监督和控制方面训练后，  
解题中的时间线图

教员早在学期开学时就开始问学生这三个问题。当他提问时，学生通常会茫然不知所措，不知如何作答。可以看到学生有点

不自在,但他并未停止提问,还是不断地问这三个问题。于是,学生可以为自己辩解,认为要他们探讨这些问题还为时过早。到学期结束时,这种行为已成习惯。(但是,请注意,要让学生在这方面发生变化,必须要经过大半个学期后才有可能。)

图 8.5 将这种介入教学的结果表述得很清楚,该图讲的是两个学生在上了问题解决课程之后,在解题时的各种情况。他们先把题目读一遍,然后一下就想到了—种解法,然而遗憾的是,这一方法并无事实根据。几分钟之后,他们便意识到这一点,并决定再试试别的方法。这次选择的方法也是错误的,让他们陷入了复杂的计算之中,前后共花费他们  $8\frac{1}{2}$  分的时间。但此时,他们又停了下来。其中有一位学生说,“不行,这样做下去会一事无成的[我们现在的解法不正确]……别再用这个方法了,我们重新开始吧。”于是,他们便改变了做法,并立即找到了正确解法。

从标准意义上讲,很难说学生的解题是专家式的,因为他们很晚才找到“正确”的方法。然而,他们在解题过程中表现出来的行为更多地类似于图 8.4 中的数学教员的行为,而不再是图 8.3 中那种典型的学生行为了。这里的关键问题并不是学生成功地解出了这一问题,因为在很大程度上,解决非标准问题靠的是运气和事先积累的知识。关键问题则是,学生通过很好的自我调节,为自己提供了解出问题的机会。他们在开始解题后不久,便排除了可能出现的迷魂阵,避免了在解题中间的大量计算。如果他们没能这么做的话(他们和大多数同学在上这门课之前,确实没有这么做),那么就永远不会有机会找到正确解法。从这一点上讲,他们的行为确实是专家式的。同时,他们的求解也典型地反映了学生受过类似的训练。在学生未上这门课之前,有 60% 的学生是“一下子便投入一种解法,并且不管多大困难坚持用自己选择的这一解法求解”,而相比之下,在受过这类训练之后,只有 20% 不到的学生

才会这么做,解题的成功率也相应提高了。

莱斯特等人最近完成了一次大规模调研工作,对初中生进行了介入教学研究。研究的设计是为了“考察超认知(即关于认知的知识和对认知的控制)对七年级学生数学问题解决所起的作用”。在七年级的一个数学“常规”班和一个数学“提高”班中,引进相应的教学,其目标是要培养学生形成超认知。实现这一目标的具体方法是让教师(1)做学生解题期间的外部监督员,(2)鼓励学生对形成内在化和超认知技能有重要促进的这些行为进行讨论,(3)让学生模仿好的解题行为。表8·2列出了要求教师在教学中做到的一些行为。集中于培养学生超认知方面的实验教学。

表8-2 解题课上要求教师具备的教学行为

| 教学行为                           | 目的                                 |
|--------------------------------|------------------------------------|
| 解 题 前                          |                                    |
| 1. 把问题读一下——讨论一下学生可能不理解的一些词汇或短语 | 向学生说明仔细审题的重要性;集中于特殊词汇              |
| 2. 让全班讨论理解题意的重要性               | 集中于重要数据,澄清过程                       |
| 3. (供选择)让全班讨论可能用到的解题策略         | 引出可能的解决问题思想                        |
| 解 题 中                          |                                    |
| 4. 通过观察和提问的方式来确定学生的解题进展        | 判断学生在解题中的成功与不足之处                   |
| 5. 提供必要的提示                     | 帮助学生排除各种障碍                         |
| 6. 对问题进行必要的展开                  | 要求提前完成的学生作概括                       |
| 7. 要求已经找到答案的学生“回答问题”           | 要求学生再仔细地检查一下,看看自己是否真对了             |
| 解 题 后                          |                                    |
| 8. 将学生的各种答案提出来进行讨论             | 向学生讲解在解题中用到的各种策略                   |
| 9. 联系先前解答过的问题或让学生进一步展开         | 向学生演示解题策略的通用性<br>向学生指出某些特征是如何影响解法的 |
| 10. 讨论一些特殊的特征,如图形              |                                    |

总课时为 16.1 小时,分 12 周上完,平均占整个数学教学课时的  $\frac{1}{3}$ (35.7%)强。

教学中既包括解决一些“常规”问题,又包括解决一些“非常规”问题。以下为一道常规问题的实例,这类问题是要让学生体验如何将口头表述转化为用数学语言来表述。

劳拉和贝思于周一开始阅读同一本书。劳拉每天读 19 页,而贝思读 4 页。当劳拉读到 133 页时,贝思读到第几页?

研究中所用的各种非常规问题包括“过程问题”(根据已知条件无法找到算法的问题)以及各种条件多余和条件不足的问题。教学集中于可以运用特定策略来检验的问题(猜测和检验、倒推、寻找模式),同时做一些集体性游戏。在教学前、教学中和教学后运用的评估数据和手段包括书面测试、客观性面谈、对个体或一对学生解题情况进行观察,对课堂教学进行摄像等。莱斯特等人得出的一些主要结论如下:

- 在数学概念和运用这些概念解题的过程(包括超认知过程)之间存在着一种动态的相互关系,即在理解数学概念的同时,也形成了各种控制过程和认知过程。
- 为了提高学生的解题能力,他们必须在较长一段时间内,经常解答各种类型的问题。
- 在一种特定领域的背景中进行超认知教学最为有效。
- 在教师指导下,系统地、有组织地进行解题教学,尤其是超认知教学,很可能最有效。
- 面对课堂中的现实情况,尤其是当学生在一些基本学科内容上产生困难时,教师要想继续保持监督者、提供帮助者以及榜样的地位是很难的。
- 人们对小组活动的动态课堂模式的理解并不像想象的那样充分,尚未证实“小组之间的相互作用是一种最好的形式”这一常

见假设。对于“理想的”问题解决课堂布局这一问题,还需我们作进一步思考和实验。

- 评估时一定要表扬那些按照我们的要求进行学习的学生,并鼓励学生的这种行为。

简单地说,这节所探讨的研究结果均表明:在复杂的学科内容领域中形成自我调节技能是较难的,通常需要修正学生的行为——让学生“抛弃”在实施这种教学之前形成的各种不恰当的控制行为。通过教学,我们可以根本改变学生的这种行为,但这需花较长时间,并要不断地注意学生的认知和超认知过程。创设一种“正确的”教学背景,让学生进行适当的模仿,并向他们提供合适的指导,这项任务对教师是个挑战,需要精湛的技艺。这里引用的两项研究(莱斯特等人,1989;舍恩菲尔德,1989)指出了一些有效的教师行为和课堂实践,可以培养学生形成自我调节的技能。然而,这些研究只不过才刚刚开始。研究对那些研究人员设计的教学努力作了如实叙述。他们对这些问题作了深入思考,并设计了相应的教学。从这种“证明存在”(尽管这些做法还存在一定问题)转化到标准课堂行为,还需要进行大量的认识 and 教学策划。

## 信念和情感

有资料表明,从前在认知和情感两个领域之间存在显著区分。布卢姆撰写的《教育目标分类学》中有两卷书就反映了这一现象。例如,在情感领域中明显存在数学焦虑等概念,并通过对个体进行“你对数学有何感想”的问卷调查估测这些概念。而在认知领域中则存在数学成绩和问题解决等概念,并通过集中于学科内容知识的测验这种唯一手段,对这些概念进行评估。然而,我们越来越清楚地看到,这两个领域之间的界限日益变得模糊。

由于篇幅限制,我们不可能对这方面的相关文献作回顾,甚至想把它们理清楚都不可能。幸好,我们可以把本卷中由麦克劳德

(McLeod)撰写的第23章内容以及由麦克劳德和亚当斯合写的《情感和数学问题解决：一种新观点》看作是探讨情感这一领域的权威性起点。下面我们将对各种类型的信念作简单的讨论。人们把这些信念解释为个体的各种理解和感觉，它们形成了个体认识数学行为和从事数学工作的方式。我们分三个部分进行讨论：学生关于做数学的信念，教师关于做数学的信念，以及一般社会关于做数学的信念。第一部分的文献相当广泛，第二部分的文献数量还可以，并仍在不断增加，而第三部分的文献则较少。我们对这三部分内容进行探讨时所用篇幅长短与这方面文献的多少无关。

**学生关于做数学的信念** 在介绍这一话题之前，我们先回忆一下兰帕特的一段评论：

数学通常与确定性联系在一起，了解数学就能求出正确答案。这种文化方面的假设是学生在学校中学习经历所形成的。他们在学习中认识到做数学就是遵循教师制订的各种规则，知道数学就是记住这些规则，并在教师提问时正确运用它们。在教师正式认可答案后就确定了数学的“真”。学生在学校中通过多年的观察、听课和实践，对怎样做数学和什么才叫了解数学形成了各种观念。

表8-3对兰帕特提到的各种信念作了展开，其中还包括她在原始资料中引用过的学生的其他一些信念。

在本章第一部分中，我们已提及学生信念方面的一些基本依据。下面，举一实例来看看学生的某一特定信念是如何形成的以及形成这一信念后产生的后果。这个实例讲的是学生在解答数学问题时，认为应该花多少时间解题才较为恰当。其中的数据来自我们对中学几何课进行的一次为期一年的观察活动。



表 8-3 学生对数学性质所持有的各种典型信念

数学

- 数学问题有且只有一个正确答案。
- 任何数学问题只有一种正确解法——通常要运用教师最近经常演示的那条规则。
- 普通学生要想理解数学没指望；他们最多只能背些数学知识，而不是理解它们，同时他们只能机械地运用自己学过的数学知识。
- 数学是一种独立活动，只能以单干形式出现。
- 如果理解自己学过的数学知识，学生就能在 5 分钟之内、甚至更短时间内解答出任何指定的数学问题。
- 学校里学的数学与现实世界没有或很少有关系。
- 形式证明与发现或发明过程互不相干。

在整个学年期间，我们观察的 12 个班级中没有一个学生所做的数学作业可以称得上是严格意义上的数学问题。学生做的都是些练习；设计这些作业的目的是要让学生掌握相应的小部分学科内容，同时还要求他们在短时间内完成这些练习。例如，在一次为期一周的考察中，我们发现教师每天布置给 28, 45, 27 和 30 道“问题”作为家庭作业。……教师的[一种特殊]做法是让学生尽可能多地在黑板上演示解答家庭作业中每道问题。他根据所布置家庭作业的数量，要学生能在 54 分钟的一堂课中做完 20 道或更多的“问题”。的确，在一次有关轨迹和作图题的单元测验中（由全校 10 个班级参加的一次统一数学考试），竟有 25 道问题——学生得在平均每 2 分 10 秒的时间内就要解答一道题。教师给学生的建议是：“你们最好非常熟悉所有的作图题，这样就不必再花什么时间去考虑这些问题了”（着重号是加上去的）……

总的来说，学生在完成 12 年的数学学习过程中，得做成千上万道“问题”——而实际上，对于每道题，教师都希望学生只用几分钟时间就能完成。布置这些作业的基本假设是：如果学生理解了教材，那么就做得出这些练习。如果学生不能在合理时间内做完练习，那就说明还没有理解教材。也就是说还应该寻求帮助。

不管教师是否打算把这一信息传递给学生，学生都在不断地接受着这方

面的影响。我们对九到十二年级的 12 个中学数学班进行了一次问卷调查：“如果你理解了教材，那么你认为要解答家庭作业中的一道问题应该花多少时间？在知道这种解法不能奏效之前你认为要花多少时间解这个问题才算合理？”对这两个问题的回答平均分别是 2.2 分钟( $n = 221$ )和 11.7 分钟( $n = 227$ )。(舍恩菲尔德, 1988 年)

遗憾的是，这一信念会导致一种行为上的必然结果。具有这种信念的学生解题时，如果经过几分钟尝试未能成功，便会放弃努力。而实际上只要他能锲而不舍地做下去，往往是可以解出来的。

表 8-3 列举的每种信念，在其形成和产生的结果方面都存在着类似的现象。例如，请回想一下，本章第一部分提到了米尔恩的心算问题，我们探讨了其中的人为因素。人们认为这些问题实质上都是些计算练习，经过大量实践后，学生会认识到这些问题中的“潜台词”。久而久之，他们便会忽略这些潜台词，只考虑其中的“结果”，把题目计算好后，再把答案写下来。这种行为产生了令人吃惊的后果。在第三届全美教育进展评估中广泛引用这种行为。许多学生算出正确数值之后，忽略了问题中的潜台词，解答中竟然将一道题中要求的公共汽车数写成了“31 余 12”。总之：

1. 学生很大程度上是在课堂学习经历中形成自己对形式数学的信念和对这一学科的感觉。

2. 学生具有的信念会非常强烈地(通常是消极地)影响着自己的行为。

**教师关于做数学的信念** 信念结构不仅对学生来说很重要，对教师来说也不例外。简单地说，教师对数学学科的意识决定了他所创设的课堂环境的性质。这一环境反过来影响学生对数学性质的信念。在此我们简单列举两项有关这方面的研究，引用一些资料对此作些清晰说明。库尼(Cooney)对一位刚上岗教师的课堂

行为进行了讨论,这位教师对“问题解决”具有一种特殊的信念。这位教师基本上这样认为,让学生做一些“有趣的”或非标准性问题——这位教师对问题解决的见解——尽管问题具有娱乐性,并能激发学生的学习兴趣,但是最终还得服从这样一个目的:让学生掌握相关的学科内容。在学科内容的压力下,这位教师在教学中牺牲了(实质上是肤浅的)各种解决问题的目的,而更直接地把训练学生,让他们掌握应该掌握的内容作为教学目的。

汤姆森开展了两项个案研究,论说了教师的信念在课堂教学中得以实现的各种方式,其中一个研究对象名叫珍妮。

珍妮认为数学内容是固定的和预先确定的由物质世界所支配的。不管是在(汤姆森观察的)课堂还是与她的面谈中,珍妮从未提到过数学形成的过程。看来很明显,她把数学看作是人们可以消化吸收的完美的产品……

谈到对数学教学的看法是,她认为自己承担的角色是教好学科内容,而学生的角色则是学好这些学科内容。粗略地说,她的任务是传播信息,而其学生的任务则是接受这些信息。

这些信念贯穿于珍妮的教学工作之中。她认为,教师的任务是把已经备好的课上好,在上课过程中不偏离备课内容,不做无效的变动。而她的学生由于不断接受这种严格死板的教学,便形成了前面讲到的学生所持有的某些信念。

汤姆森的第二位研究对象名叫凯。凯对数学和教学所持的信念如下:

- 数学勿宁说是一门关于各种事实的学科,不如说是一门关于各种思想和心理过程的学科。
- 理解数学最好的方法可能是重新发现数学的思想。
- 发现和证实是数学中两个必不可少的步骤。
- 人们研究数学的主要目标是形成问题解决所必需的各种推理技

能。

- 教师必须创造并保持一种开放的、非形式的课堂气氛,确保学生能够自由地提出各种问题,探索自己的思想。
- 教师应该鼓励学生进行猜想和推测,允许他们按照自己的方式进行推理,而不是把怎样解题或答案告诉他们。
- 为了让数学有意义,教师在讲解教材时,应该求助于学生的各种直觉和经历。

凯的教学法与她持有的信念是一致的,她创设的课堂氛围对她的学生形成问题解决能力,至少具有潜在的促进作用。

当然,有人会问,教师是从哪儿获得自己对数学性质的观点以及相应的数学教学方法的呢?汤姆森强调指出:“研究证据表明,教师的观念和实践,尤其对刚上岗教师来说,很大程度上受到自己在学习教学法课程之前接受的学校教育之影响。”这一说法并不在人们意料之外。因此教师所持有的信念往往会影响到几代教师,于是在很大程度上便形成了一种教学/认知的恶性循环。

**社会关于做数学的信念** 施蒂格勒和佩里就一系列跨文化的研究工作写了一份报告。这些研究着重考察了美国、日本和中国在数学方面的一些信念。

家长、教师和孩子关于学习数学的本质所持有的信念有着很大的文化差异。我们可以把这些信念划分为三大类:关于什么是可能的信念(即不同年龄的孩子能够学习哪些数学知识);关于什么是可取的信念(即孩子应该学些什么数学知识);关于什么是最好的数学教学方法的信念(即应该怎样教孩子学数学)。

关于什么是可能的信念,研究指出,美国人要比日本人更相信这个观点,即孩子在数学方面成功与否取决于他们的天赋(与后天

努力相对)。这种信念会产生很多重要影响。首先,那些相信“要么你能行,要么你不行”的家长和学生与那些相信“如果你努力去做,你就能成功”的家长和学生相比,前者可能更少鼓励学生去努力学习数学。其次,美国的数学教科书一律反映出对学生期望值较低。“在美国的小学课本中,在引进大数方面要比日本、中国或苏联的教科书慢得多,同时在引进加减法中的重组方面也比其他国家的晚得多”。关于什么是可取的信念,研究指出,美国的家长认为各种课程应重点强调阅读而不是数学,在国际上进行过这方面的比较研究。最后,关于教学方法:

在美国,特别是关于教学方法的信念,人们往往认为理解等同于顿悟。人们常常会听到数学教师对孩子这样说,“要么理解,要么不理解”。这句话表明,孩子在解数学题时,要么很快就能解出来,要么根本无法解答……在日本和中国,人们则更多地认为,理解是一种循序渐进的过程,人们越是努力地理解,就越能达到理解的深度。也许出于这个原因,人们看到日本和中国的教师给学生布置的难题比较多,有时题目竟会难到用整整一节课时间都无法解出来。

总之,不管我们承认与否,也不管我们是否意识到:人的信念影响其数学行为,信念从人们的经历和所处文化群落中抽象出来。这就引出了下面要谈的问题——数学实践。

## 实践

在介绍这部分内容之前,我们先回忆一下雷斯尼克对数学教学的几点评论:

要成为好的数学问题解决者——在任何领域中成为一个好的思维者——可能就是要获得各种特定技能、策略和知识的同时,不断养成一种习惯和个性,解释事物和形成数学意识。如果情况确实如此,我们可能更多

地会把数学教育看作是一个社会化过程,而不是把它看作是一个教学过程(传统意义上的那种把具体的、确定的技能或知识点教给学生的做法)。

前面关于信念和情感一节中,我们描述了由于陷入一种错误数学实践——“学校数学”实践之中以后产生的种种不幸后果。这里我们要考察一些正面例子。研究人员设计的这些课堂环境反映了数学界选择了一些方面,以让学生以促进数学思维的方式(与其他同学以及数学学科)相互影响。我们按照由低年级向高年级的顺序逐个来讲述。

兰帕特明确地引用了一种波利亚-拉卡托斯式的认识论观点来研究五年级学生的指数课,同时以这一认识论观点为基础形成了相应的教学方法。她写道:

我设计了一个教学研究和开发项目,来考察下面问题,即通过有意改变教师和学生课堂交谈中的地位和责任,看看是否有可能使得目前学校中让学生了解数学的实际做法更接近该学科的要求,以及如何使之成为可能……我从该项目中所上指数课中选取一例[具有代表性的]指数教学实例,并从数学、教学和社会语言学的角度对这一实例进行描述和解释。为了改变学校中对了解数学和学习数学意义的理解,教师便根据学生的猜测让他们进行数学讨论,发起并鼓励学生进行社会化交互作用。学生在参加这类活动过程中,提出对数学结构的假设并对之进行考察,而这些假设则构成了学生解题的基础。这类活动与学校中传统的数学活动形成了对比。

兰帕特描述了一系列指数课。在这些课上,学生先找出自然数经过平方后其末尾数字的模式,然后再考察一些大数的末尾数。(如  $7^5$  的末尾数是多少?)学生在课堂讨论过程中寻找模式、作出定义、进行推理,并最终依据数学知识为自己的主张作辩护。例如,一位名叫萨姆的学生断定  $7^5$  的末尾数是 7,而其他学生则认为 1 或 9。

[兰帕特]说：“萨姆，你肯定在脑子里已经验证过了，”接着[她]问道：“阿瑟，你为什么认为是1？”

学生对 $7^5$ 的末尾数是多少这个问题有着多种猜测，于是他们得确定哪个是正确答案。[在讨论中]有的学生一会儿认为应是7，一会儿又认为阿瑟和萨拉的猜测是正确的。他们一会儿观察几个特定值，一会儿对指数和数字的一般规律进行归纳。学生对自己的假设作考察，也对同学的假设作考察。[兰帕特]在学生的讨论中扮演管理者角色，有时也参与辩论，将某个学生的主张驳倒。

这节课接近尾声时，全班同学考察了一些确定 $7^8$ 和 $7^{16}$ 的末尾数的简易方法。

有些学生得出的推理结果已经接近 $(n^a)(n^b) = n^{a+b}$ 这一重要指数定律，而这一定律要到后面几节课中才会明确解释并加以证明。同时，他们得到了计算“末尾数”的模式，它适用于具有不同底数的指数，于是他们对指数的特征进一步作了归纳。

请注意，兰帕特并未向学生“揭示真实情况”，而只是作为一位有见识的参与者与学生交谈。她是作为数学界的一位代表，而非无所不知式的权威。她主要是向学生提出一些针对性问题，帮助他们作出正确的数学判断。她在教学上采用的做法是：把教师身上过分的权威搬开，而把作出(具有约束的)数学判断的重担移到了学生的肩上。

巴拉谢夫(Balacheff)采用另一种方式，让学生利用社会作用，当然他想达到的认识论目的与兰帕特相似。他讲述了七年级学生上的一些数学课，上课内容是“三角形内角之和等于 $180^\circ$ ”这一定理。开始上课时，他把全班分成若干小组，分给每个小组一张练习纸，上面印有相同的一个三角形，并要求学生算出其内角之和。接

下来,每个小组报告他们的答案结果,差别很大——从最小的  $100^\circ$  到最大的  $300^\circ$  都有! 由于学生知道他们测量的是同一个三角形,于是就必然要达成一致意见;他们重新进行计算,最后得到一个数值大家一致同意。接着,巴拉谢夫再发给每个小组另一个三角形,让他们在测量之前先猜测其内角之和为多少。每个小组都把他們得到的结果进行比较,并复述彼此的猜测结果。结果,在小组内部和小组之间都发生了矛盾,最后通过讨论解决了矛盾。在讨论过程中,学生加强了对相关数学问题的理解,为后面从理论上(对某种类似的辩证特征)进行讨论做好了智力上的准备。

福西特(Fawcett)讲述了他于 30 年代在俄亥俄州立大学实验学校教过的一门两年制的平面几何课程,他开展的这项研究明显有先锋派精神。福西特的目标是要让学生充分理解几何学科内容,形成一种认识数学的正确观点,并培养学生将几何课上所学到的推理技巧运用于课堂之外情景中的意识。为了实现以上目标,他认为(1)学生得用与他的数学认识论观点相一致的方式做数学,(2)得把学生课内数学推理和课外数学推理明确联系起来,(3)学生除了要反思自己做数学的情况之外,还要对课堂内外两种背景下的推理之联系进行反思。

例如,在数学中定义问题是很重要的。福西特指出,定义决定结果:例如,他们学校要对“最好的教师”颁奖。有许多学生很喜欢图书管理员——但图书管理员是教师吗? 他还引用体育中例子作类比,例如,在棒球中人们对“界外球”可能会有几种不同定义,(碰到界杆的腾空球算好球还是界外球?)但是一旦规则确定下来,比赛的进行也就可以连贯一致了。通过这些讨论,福西特强调指出“规则不过是一群志趣相投的人所达成的一种协议,根据规则可以得到确定的结论,要使学生意识到这一点并没有什么困难”。在数学领域中,他让学生讨论各种定义的性质和用途。例如,他并不把“邻角”的定义讲给学生听,而是要求全班同学自己定义,并说出理



由。第一种定义是“具有公共边的角”，图 8.6(a) 排除了此定义。第二种定义是“具有公共顶点的角”，图 8.6(b) 也排除了此定义。许多人都支持的定义是“具有公共边和公共顶点的角”，但最终也被图 8.6(c) 所排除。最后全班达成了正确的数学定义。

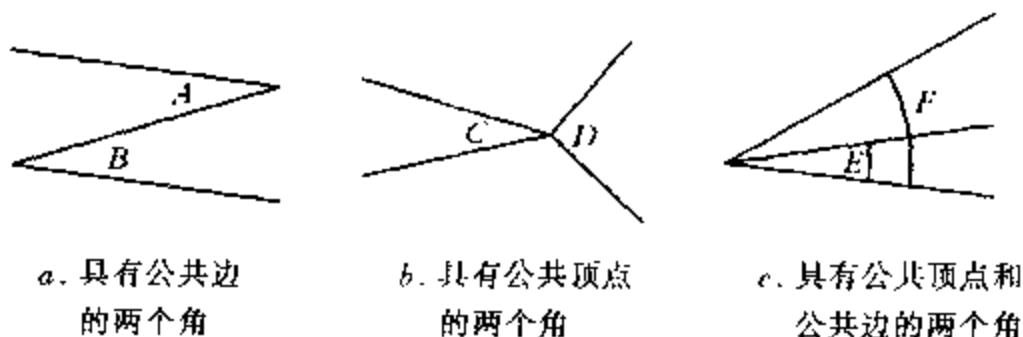


图 8.6 福西特(1938 年)所讨论的学生对“邻角”下的各种定义

请回忆一下波利亚对做数学的本质说过的一段话，“对一名积极从事数学研究的数学家来说，数学有时就是一种猜测的游戏；在你证明一条数学定理之前必须先作猜测，在你深入细致完成证明之前，也必须先对证明的思想作出猜测。”福西特就是根据这些思想设计数学课的。他从来不用下列形式给学生布置作业：

证明平行四边形的对角线相互平分，但不一定相互垂直；

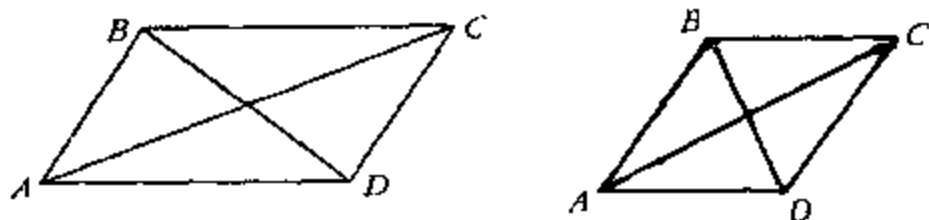
同时证明菱形的对角线相互垂直。

他用以下形式向学生提出问题：

1. 已知平行四边形  $ABCD$  中， $AC$ ， $BD$  为两条对角线，如图 8.7(a) 所示。请说出这一图形具有的所有特征，并证明你的结论。

2. 假设  $AB = BC$ ，那么四边形  $ABCD$  则为菱形[图 8.7(b)]。请说出这一图形除了具有以上各种特征外还具有一些什么特征，并证明你的结论。

不用说，不同学生对这两个图形具有什么特征所持的观点各不相同。福西特让持有不同观点的学生分别证明自己的结论——也就是说让他们从数学上证明这两个图形具有的每个特征。全班



a.  $ABCD$  为一平行四边形,  
你认为它具有哪些特征?

b.  $ABCD$  为一菱形,除了前面的特征外,  
你认为它还具有哪些特征?

图 8.7 以福西特(1938 年)的风格提出的两道问题

师生(福西特在其中充当一名“有见识的成员”,而不是充当唯一的权威)就是“评判委员会”。在课堂讨论中,全班不仅要讨论孰是孰非(即这一图形是否具有某种特征?),还对论证本身的性质进行反思:归纳证明是否在任何情况下都有效?逆命题是否总为真?等等。总之,福西特班里的学生运用自己这一课堂中的有限知识,做得像数学家一样内行。

我们继续介绍大学里的两个实例。亚里贝特(Alibert)及其同事根据以下基本原则,在格勒诺布尔(法国)的大学里,开设了一门微积分课程:

1. 认真处理不确定性是学习微积分过程中的一个主要部分。
2. 数学证明(“科学讨论”的产物)的一个主要任务是先要说服自己相信一种猜测的真实性,然后再说服别人。
3. 人们是在解决各种复杂问题过程中逐步发展数学工具的,而这些问题通常源于自然科学。
4. 应该引导学生对自己的思维过程进行反思。

他们根据以上前提,在课程中通过介绍自然科学中各种具有重要意义的问题(例如他们让学生确定大理石上一根棍子产生的重力引力是多少,从而引进了黎曼积分)引入一些主要数学话题。格勒诺布尔课程确定按照那些基本原则进行数学教学,而在通常的微积分课上教师根本不会提到这个历史故事,只是以单调乏味的方式讲解学科内容。与我们在兰帕特和福西特进行的研究实例

中提到的一样,全班都参与讨论,他们系统地阐述这一数学问题,并设法解决这个问题。在讨论中,全班同学提出各种不同的观点,教师则细心予以指点。在这一过程中,教师起的作用是帮助学生,并在关键时刻作些指导,而不是直接演示和告诉他们该怎么做。

亚里贝特认为,学生通过这类讨论能逐步形成一些基本的数学观点。亚里贝特强调指出,学生上完这门课程后,“他们对数学形成了有趣的观念,这对他们的学习很重要。绝大多数学生能从认识论高度来回答‘数学对你来说意味着什么’这一问题;他们在学校中形成的认识论几乎已经消失殆尽。”

最后,作者在大学里开设的各类问题解决课程也具有许多类似特性。就像福西特的提问方式那样,作者从来不以“证明……”的形式提问;所有的问题都是以“你认为哪些是对的?为什么?”的形式出现。作者明确地将教师这种权威地位转向学生之中,不轻易吐露自己对解题过程的理解(有许多题目,全班努力了几天,甚至几个星期才解答出来,而我只要用10分钟时间就能把解题过程讲清楚),使全班学生形成一种重要的数学论证意识,作为一个层次,依据数学作出判断:接受或拒绝同学提出的建议。

例如,在一次讨论毕达哥拉斯定理的过程中,作者提出一个问题,要求学生找出方程  $a^2 + b^2 = c^2$  的所有整数解。当时,作者并未把已知的解题过程讲给学生听。全班学生作了如下一系列观察:

1. 要求出已知解的倍数(如直角三角形  $\{6, 8, 10\}$  是  $\{3, 4, 5\}$  的倍数)很容易,但这无关重要。学生集中研究具有互素边的三角形。

2. 学生通过观察和猜测,发现在互素的解中,  $c$  的值总是奇数,并证实了这一现象。

3. 学生通过观察发现,在他们知道的所有互素的解中—— $\{3, 4, 5\}$ ,  $\{5, 12, 13\}$ ,  $\{7, 24, 25\}$ ,  $\{8, 15, 17\}$ ,  $\{12, 35, 37\}$ ——长直

角边( $b$ )与斜边( $c$ )之间相差1或2。于是,他的猜测,存在无穷个这样的直角三角形,其中 $b$ 与 $c$ 之间相差1或2,而且不存在其他情况。

4. 他们证明存在无穷个 $b$ 与 $c$ 之间相差1或2的解;他们证明 $b$ 与 $c$ 之间相差3的解不存在。当时有一名学生问道,如果这一模式继续下去(即,如果他们能够证明自己的猜测),那么他们是否可以将这一定理发表。

对这名学生所提问题的回答当然是否定的。首先这种猜测是错误的:例如存在像 $\{20, 21, 29\}$ 这样的直角三角形。其次,所有毕达哥拉斯三条边的形式为 $\{m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2\}$ ——这是数学界长期公认的无可争议的著名结果。但是全然不考虑学生所得的结果,对他们来说就不公平了。其实他们在上述四点中证明的三个结果对教师来说都是新内容。学生正是在自己这一层次尚未开拓的领域中研究着数学。

这一节所探讨的实例中,教师均按照自己对数学的认识论观点设计各种课堂环境,他们通过猜测和论证这些辩证逻辑来认识数学、理解数学的意义。总而言之,研究人员提供了一些在研究中获得成功的轶事以及从经验角度来说比较“客观的”文献。然而,这些实例的存在表明研究人员提出的问题远比它已经答的问题要多。下一节中要集中讨论一些在本章讨论的研究工作中所提到的问题。

## 问 题

最后,我们对本章涉及到的每个领域中的最新研究状况作一下评估,并指出需要我们引起注意和加以澄清的各种理论和实践问题。这里所作的评述代表了作者的观点,可能也不同程度地反映了研究界大多数人的看法。

本章集中探讨了对数学思维一种新的理解,它建立在多种认识论基础之上。在这些认识论中,领域知识这一传统概念的作用发生了变化,并被削弱了,甚至在这一概念得到发展,包含了问题解决策略的情况下,也发生了此种变化。这一新兴观点认为,超认知、信念和数学实践是用数学方式进行思维的三个关键方面。当然还有其他方面。以数学方式进行思维的人具有一种特殊的观察世界、表述世界和分析世界的方法。只有在这种包罗万象的背景中,知识基础、策略、控制、信念和实践这几个部分才会相互协调地结合起来。我们先对这种结合的意义作些评述。

有一种能够帮助我们分析和理解复杂系统的有用观点:将这一系统进行分解。这一观点认为,为了深入理解一个庞大、复杂的系统,可以先从中抽象细分出几个子系统,通过对子系统的分析并把它们组合起来,便形成了对整个系统的分析。人类生理学的研究工作提供了一个我们所熟悉的例子。我们对生理学的理解取得重大进步是通过对循环、呼吸、消化等系统的分析达到的。以上分析使我们极为深入地了解这些系统,并进一步帮助我们整体上理解人类生理学。然而,只停留在对子系统作深入了解这一水平上是不够的。我们还必须考虑各子系统之间的相互关系,整个系统显然远远大于各个子系统的总和。

作者觉得肯定有人会这样认为,本章第二部分中确认和探讨过的基本框架中存在的这些范畴,是对数学思维(或者至少是数学行为)的一种连贯的、相对综合的分解。每个范畴都是相互协调的。人们通过研究这些范畴(获得了不同程度的成功),形成了一些特定的观点,而这些观点又构成了各种方法的基础。但是,研究界对这些范畴之间的相互关系却知之甚少,至于这些范畴如何相互协调——尤其是对于个体在这些范畴中的学习如何与他的数学学科意识和“数学观点”相结合,他们了解得就更少了。作者个人认为,这一问题的关键在于要对人们对所处社会文化方式的适应

情况和人们进入数学阶层的情况进行研究。人们多半是通过与别人之间的相互作用,形成自己对各种重大活动的意识——它可以是宗教信仰,对音乐的态度,作为专业人员或工人表现出的个性,把自己作为读者(或非读者)的一种意识,或者对数学的意识。如果我们要了解学生如何形成自己的数学观点,就必须考察他们生活的那些数学层次,考察构成这些层次的各种实践活动。我们在了解学习的过程中,不管是了解人们如何学习某一领域中的具体内容,还是了解更广泛的他们如何形成各种观点和价值标准的问题,考察个体与他人之间的相互关系所产生的影响都将是核心。我们在有关实践这一节中,还将对这一主题作进一步考察。现在我们继续讨论有关研究、教学和评估方面的一些问题。

在问题解决这一总体领域中以及本章第二部分涉及的各个特定领域中,还存在着一些根本性问题没有提出来或者未得到解决。首先,需进一步澄清“问题解决”这一术语的含义。它仿佛一顶保护伞,在它的庇护下已开展了各种各样完全不同的研究工作。至少在实践中应该有这么一条规定(目前尚未形成):在有关问题解决的每项研究或探讨过程中,都要对这一术语下一个操作性定义,并列举相应实例,表明作者对它的理解——不管是在学完本章内容后就能做这些练习,如果参加帕特南考试还能取得好成绩,还是本章所讨论的“形成一种数学观点和相应数学工具”。尽管人们都不愿提那些晦涩难懂的建议,但是对研究人员来说,关于问题解决方面形成一致性定义这一点上,他们的动作看来是太慢了。同一术语存在多重含义,概念不明确,甚至相互矛盾,真让人莫衷一是,困惑不少。

根据同样的思路,我们还有必要进一步澄清各种研究方法。人们一般能接受的所有研究方法有:(1)只提出问题解决行为中特定的某些方面,而对其他方面只字不提;(2)将某些行为分成轮廓分明的几种类型,再对这些行为作严密分析;(3)面对其他一些

行为不是将它们混淆,就是将它们歪曲。在研究人员的工具百宝箱里不仅有着太多的常见的 70 年代的统计和实验方法(比较研究、回归分析等),还增加了目前用到的大量对客观科学实验报告的分析、模拟实验和计算机模型设计方法,但这类方法并没用好或者是使用不当。对于那些我们理解得比较透彻的研究方法,也许应以下面这种“用户指南”的形式出现:“本方法适用于考察 *A*、*B* 和 *C*,但使用时要注意下列几个事项;或者用这种方法来考察 *D*、*E* 和 *F* 的可靠性还未得到证实。”这里举一例子:

研究人员从有关非介入式解题课中收集了一些科学实验报告,通过分析形成了图 8.3,8.4 和 8.5。这些报告对于说明解题过程中是否实施过决策以及阐述实施决策所产生的后果方面是有益的。当然,这种方法可能只适用于韦伯斯特提到的第二种类型的问题——“令人费解或困难的”问题。在问题中,个体进行策略选择会遇到困难。(而当人们做日常练习或计算题时,未必有必要进行行为控制。)此外,这种方法没有或很少提到哪些是较成功的监督和评估途径,哪些是失败的途径。我们确实有必要运用更多的介入式教学方法来探索解题过程中,为什么人们选择或不选择某些特定的方法。这些因素当然会影响解题的流畅,因而再用这里讲的方法分析这方面的科学实验报告就不太恰当了。

有关当前各种研究方法的使用指南对开展研究工作来说的确是非常有用的工具。

关于各种信息资源(领域知识),我们要求注意两大问题:(1)要能充分阐述和表述各种认知结构,(2)要能详述信息资源与数学问题解题行为中其他方面之间的动态关系。在过去十年中,研究人员已形成了一些表述方式,详细阐述了各种数学结构。但是,要使知识结构的表述方法和对这些结构在现象学上如何运作的理解这两者实现完全一致,还需做大量工作。同时,我们还不很了解这些结构是如何结合在一起的。信息资源如何与策略、控制、信念和

实践之间发生交互作用？

关于问题解决策略方面已经有大量的理论研究工作；接下来的问题是要在实践和实施策略这一水平上开展更多的研究。我们为详述现有各种解题策略作了艰苦繁重的准备工作，目前蓝图已现。研究表明，我们可将各种解题策略详加表述，而且人们也能学会这些策略。进一步的工作，我们需要仔细收集一些受控的研究数据，对培训性质、培训时间和问题类型进行研究，考察人们如何获得特定的策略（以及获得这些需花多长时间）。这是一项要求很高，但理论上来说并不难的工作。

关于控制方面的研究取得的进展微乎其微。解题时采用适当的控制行为，人们已经认识到它的重要性，而且也已形成一些相应的方法论工具。此外，研究表明教师可以教会学生（至少在高中生和大学生中）形成各种特定的控制行为，尽管实际上只能在经扩展的教学中改变他们的行为。然而，目前还存在一些基本问题有待解决。

第一个问题是机制问题。我们对控制特征的阐述尚不充分。也就是说，我们还不具备完善的理论模式来回答什么是控制和控制是如何运作的之类问题。例如我们不清楚控制是否取决于特定领域；同时，我们也不清楚将控制决策与领域知识相联系的途径。第二个问题是发展问题。我们知道在某些领域中，孩子能表现出惊人精巧的自我调节行为。例如在社会环境中，他们能获得行为和交谈方面的线索，判断是否要选择某些特定的话题与父母进行交谈，以及如何挑选这样话题。在社会领域中，孩子是怎样以及何时发展这些技能的？在数学领域中，他们是如何以及何时发展（或未能发展）类似各种技能的？这些相似之处仅仅是表面现象，抑或是具有某些共同基础？我们在回答时几乎无线索可寻。

目前信念和情感领域又重新成为人们研究的焦点，它需要我们倾注全力地去关注。对这一领域的认识基本还未形成概念化体



系,需要寻找新的方法论和新的解释性框架。在情感方面的文献中找到的那些老式测量手段和概念太过简单化,不能满足研究的需要;它们并未提供具体的途径,通常只告诉我们在这一领域中发生了哪些事情,并没有解释这些事情如何发生以及为什么会发生。最近,关于信念方面的研究工作指出了介于认知和情感这两个领域之间的一些重要问题,但是其中大多数研究仍然停留在“讲一个好故事”的水平上,尚未作出较有根据的解释。尽管近几年来我们在理论上取得了一些进展,对这一课题的兴趣也日趋浓厚,但是将认知和情感有机结合起来,形成统一的观点,或者如果这种统一无法实现,就阐明其中的原因,要做到这些,为时尚早。

有关实践方面以及通过什么方式来学习——适应社会文化方式——存在的问题可能更多。对于这里提到的这些问题最终可能成为我们理解数学思维发展的最重要方面之一,而我们却似乎知之最少。我们已经认识到适应社会文化方式的重要性,但迄今为止最多只能拿出为数不多的几个阐述较详细的个案研究。当然,这些研究对于内在机制也只是做了些肤浅提示。一方面认知研究者可运用的手段得用来考察与适应社会文化方式的研究工作明显相关的各种社会问题——如人们如何获得特定亚文化群落成员共同具有的各种倾向和观点。另一方面可以运用的理论手段在诸如适应社会文化方式等现象讨论方面还无法作出详尽研究,也还无法对人们学习的内容(如数学)以及为什么要学习这些内容进行卓有成效的探讨。在考察以上问题用到的理论手段方面存在着一些线索,如莱夫和温格的“合理的外围参与”等概念。这一观点的大致内容是:人们通过接触特定的阶层获得对某一学科的理解;在人们与这一阶层中成员相互影响并深深扎根于这一阶层的过程中,学会了其中的语言,获得了其中的观点。至于这些手段如何形成以及它们是否发挥效果,当然还有待于我们进行研究。

说到实践方面的情况,人们会注意到,在教学和评估方面尚有

许多问题没有提出或没有解决。作者认为,美国将会沿着新课程的方向迅速发展,其中有些新课程是根据本章提到的思路进行设计的。从全国范围看,《人人都会算》(NRC)代表了数学科学教育委员会的努力,集中探讨了数学教育中存在的各种问题。该文件明确指出保持现状就是一种灾难性的失败,它呼吁进行大规模变革。全美数学教师理事会制订的标准反映出全国上下形成了一致观点:所有的学生都应该在中学里学习(至少)三年共同的核心课程。《革新学校数学》(NRC)支持这一观点,并为集中发展学生数学能力的课程提供了哲学依据。在全国范围形成一致观点的背景下,有些州正在迅速实施这类课程。例如加利福尼亚州在1985年的《数学框架》中宣称,“必须把数学能力作为数学教育中的核心内容,它包括:辨别数学的联系,进行逻辑推理,有效运用数学技巧”。这一文件建议教师在课堂中做到以下几点:

- 尽可能让学生模仿问题解决行为,并与他们一起进行观察和实验。
- 创设一种课堂氛围,让学生自由试验和考察自己的观点。
- 请学生解释其解题各个阶段中的思维情况。
- 要考虑到这种情况,即解决一个给定问题可能需要一种以上策略,而且所给问题可能要求独创性解法。
- 向学生提供各种问题情景,并设法使之在内涵和复杂性方面与真实情景更贴近,以便使学生在课堂上获得的经历具有可迁移性。

目前正处于草拟阶段的1991年《数学框架》以上述内容为基础,并进一步沿着本章提到的方向作了重大发展。文件建议上课内容要分成相互一致的几大块。课程中每个单元的授课时间应为2~6周,并穿插一些能激发学生兴趣的实际问题与相应学科内容结合起来(例如出些题目,要求学生同时运用代数和几何知识,而不要把几何作为单独学科来教,好像这时代数不存在似的);要让

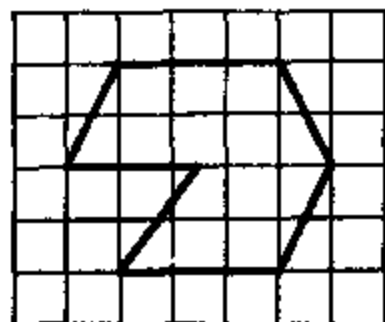
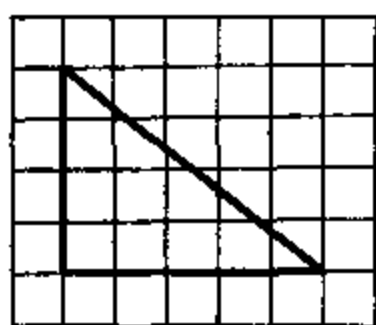
学生相互合作,小组学习,并经常给他们布置一些需花上几天甚至个把星期才能完成的项目。试验计划在加利福尼亚州挑选了一些中学,并于1989年9月在这些学校的九至十一年级中实施了试点项目。这些项目均采用全新的中学课程,课程中体现了以上讲到的各种观点。

伴随着这些项目的出现和可能的推广,实践和理论上都有一大堆问题在等着我们。例如大规模实施这种课程对教师来说哪些知识和行为是必需的?人们在研究中会看到一些模糊概念,但总的来说,我们对如何进行数学思维教学的认识必然落后于对什么是数学思维的认识。目前似乎有了一些进展的迹象。例如有少数研究指出,教师通过适当的在职培训(参加几周时间的集中学习,而不是仅仅一天的研讨班)是可以学到足够的有关学生如何改变课堂行为的知识的。我们很有必要就教师的信念——它们是如何形成和演变的?——进行更多的研究。我们还需对教育体系层次上作研究,比如,学校和学区结构要作什么调整才能支持教师在课堂中实现所要求的变化?

接下来我们要简单讨论和评估一下激发变革最有力的武器:评估。《人人都会算》直截了当地提出:“测试什么,就教什么。测试必须测试那些最重要的内容。”直言不讳地说,目前的评估方法(尤其是许多管理人员都认为“能说明问题的”标准化多重选择测试)只测试一部分本章所提到的有关数学能力的微不足道的技能和观点。要形成个体、学校或学区层次上都比较合适的评估方法,这不管是在实践上还是理论上都是对我们的一个挑战。下面,我们来看一些相关问题:

从“开放式问题”中我们可以搜集到哪些类型的信息,采取哪些类型的评分方法对评估者以及被评估者来说都是可靠的、并能说明问题的?下面从《思维问题》(加利福尼亚州教育部)一书中选取一个代表一类有趣问题的例子。

假设你正在电话里与一名同班同学通话,要这名同学画一些图形。[比如这些图形是从家庭作业中挑选出来的。]这名同学不能看这些图形。请你描述一下以下两个图形,让这名同学能完全按这两个图形画出来。



要充分解答这个问题,你必须了解如何对这些图形作几何表述,并能用数学语言进行交流。尽管这种问题仍受到相当限制,但其目标很明确,不是要求简单地“掌握”学科内容。如果大量收集这种问题,至少能丰富我们通常评估学生的那些内容。但是这种做法只是第一步。下面我们再来讨论另外两种目前研究人员正在(加利福尼亚评估方案等)探索的做法。

假如我们要求学生将自己做得最好的数学作业装订成册,那么如何进行排列才能最好地反映出这名学生学过哪些知识?应该包括哪些项目(一道“最让我得意的问题解法”,参加一个小组合作项目的记录,一个班级项目中对这个学生作用的评述)以及怎样才能对它们作出公正的评估?

下一步我们怎样才能确定学生在某一数学方案中学到了哪些合作技能?假如在学年将近结束时,从一个数学班中随机抽选四名同学,让他们解一道开放式难题,并把他们历时一个小时的解题过程拍成录像。我们从录像中能得出哪些可靠的结论?有一种说法认为,受到训练的观察者看了几分钟录像后就能确定这些学生在数学学习中是否有过广泛的合作经历。那些没有这种经历的学生最有可能在相互协调方面遇到困难,而那些经常开展合作的学

生(正如人们所希望的)很容易表现出各种合作行为。这些说法有没有道理?我们怎样才能找到可靠的方法检验这些说法?另外一种说法认为,学生在运用多种方法解决难题方面的熟练程度传递这样的信息:他们接受了哪些类型的教学以及在数学行为的策略和实施方面是否取得成功。但是,人们非常容易提出这样的问题:这种信息是什么样的信息,其可靠程度有多少?

总而言之,即将实施的各种课程,不管是在教学上,还是在哲学上都有各种雄心勃勃的目标,同时也不可避免地会派生出在理论和实践上都很困难的问题。很清楚,有一大堆问题等着我们去做,而在过去十年中取得的进步至少为我们提供了一个争取成功的机会,这一点也是不容置疑的。

## 九、学校代数的学习和教学

Carolyn Kieran<sup>\*</sup>

在全国教育进展评议处(NAEP)对七和十一年级美国学生的第4次数学评估结果的报告中,布朗(Brown)等人的结论是:

中学生,一般说,好像有一些关于基础的代数和几何概念和技巧的知识。然而,本次评估的结果表明了,就像历次的评估结果那样,学生往往不能够把这种知识应用于解题,而且看起来并不能理解作为这些数学概念和技巧的基础的许多结构。

为了掩盖他们缺乏理解,看来学生们靠的是背规则和方法,他们最终相信这个活动就代表了代数学的实质。布朗等人在报告中说在NAEP的研究中大多数学生感到数学是以规则为基础的,并且大约有一半学生认为学习数学主要是背记。这些结果并不仅仅限于NAEP的估价,也已经记载在无数个其他国家进行的研究中。

是什么迫使许多学生去依靠背记代数的规则?是什么使得大多数学生感到学校代数的理解是件困难的事?代数学的内容是问题的根源吗?还是它的教学的方式使得学生不能够弄懂这个科目?还是学生接触代数作业的方法不是适合于学习这个科目的?

---

<sup>\*</sup> 作者基兰(C. Kieran)是魁北克大学(蒙特利亚)数学和计算机科学系的数学教育教授。

在这一章中将会回顾与这些问题有关的研究文章,并且指出前面提到的三点(内容、教学、学习)中的每一点如何造成了学生学习代数中的困难。本章从分析代数学的发展历史开始,接着是对学校代数内容的描述,以及数学内容对学习代数者所提出的心理学上的要求。接着再提供一个关于教学观点的简短概述。对代数的教和学研究的主要结果的讨论是联系到前面几节中的历史的心理学上的框架来进行的。本章最后以基于上述三点的综合以及包括了对今后研究的一些建议作为结束。

## 历史 的分析

下面的关于代数符号体系的发展和它的变换规则的历史记述,主要突出了用字母来表示求解方程中的未知数和用字母来表示一般解中的已知量和作为决定数值关系的规则的证明工具的区别。它也强调了在从问题的情况及其解的一般的语言描述当改变到符号表示和方法时,其固有意义的逐渐消失。因而,本文的主要着重点是围绕着代数符号体系的发展的结果。然而历史的总结提示了代数符号体系的发展允许从方法性的观点变动到结构性的观点来看代数学。这个方法性的和结构性的区分是贯穿于这几节的主题,也被用来解释本章主要部分中所表示的许多研究的结果。

学习学校代数时涉及到的一些过程的根源在于代数学作为一个符号体系处于历史的发展中。我把它总结成代数学发展的三个阶段。语言表述性阶段是在丢番图(Diophantus)前的时期,它的特征是用通常的语言描述来求解特定类型的问题,并没有运用符号或特别的记号来表示未知量。第二阶段——缩记代数是由丢番图创始的。他引进了使用字母来代表未知量。哈珀(Harper)曾指出在3世纪~16世纪,代数学者主要关心的是字母身份的发现而不是要试图去表示一般式。丢番图没有什么一般的方法,他的《算

术》(Arithmetica)中的 189 个问题,每个是用不同的方法来求解的。克莱因(Kline)曾经评论过丢番图的工作“读起来像埃及人和巴比伦人的方法性的教本,它们告诉我们如何去做一些事情”。要注意丢番图引人的缩记符号体系一直到 17 世纪初并没有多大的发展。到 7 世纪穆斯林崛起之后,阿拉伯数学家保持了希腊和印度的数学,然而他们的代数学主要还是语言表述性的。这个风格保持在以后的几个世纪,在此期间阿拉伯代数传到了欧洲。在文艺复兴时,一些改变的记号被采用,诸如利用正常用词的缩写(如  $p$  表示加, $m$  表示减)和其他一些特殊的术语,但是还是没有发生主要的符号上的进展。

在 16 世纪初丢番图的工作被译成拉丁文,并且开始以印刷本的形式在欧洲的数学家中间流传。韦达(Vieta)读了这本书就直接受到它的影响。这导致了韦达开始运用一个字母去代表已知(以及未知)量,从而进入了代数符号体系发展中的关键的第三阶段,符号代数。到了这个时候就有可能来表示一般解以及应用代数作为工具来证明决定数值关系的规则。在接下来的几个世纪中,符号体系的增长以及对多余的细节的修剪携手并进。事实上,这也就方便了其他的数学概念(如函数的概念)的发展。

克莱纳(Kleiner)指出:虽说对函数概念来说必要的一件事是创立符号代数(另一个是代数和几何的结合),函数概念发展的关键阶段涉及到自变量和因变量的概念。这个概念在 1755 年由欧拉(Euler)精确化。函数的早期概念是作为输入-输出过程的记号,不久它就由更结构性的概念来替代。欧拉的函数概念在 18 世纪 30 年代被狄利克雷(Dirichlet)所改变。他把函数看作实数间的任意确定的对应。又过了一百年之后再由布尔巴基(Bourbaki)作了推广,他把函数定义作为两个集合之间的一个关系。

在代数符号体系的发展中隐含了结构性概念的逐渐的演化。一直等到韦达发明了一个真正的符号代数,语言表述性的和缩记



性的代数的本质就是用语言上的规定(包含有自然语言和特定字体符号的混合物)来求解某些类型的问题。换句话说,这些规定基本上是计算过程的描述。韦达所发明的那种特别凝聚的记号使得代数可以不仅是一个方法性的工具,它使得符号形式可以结构性地用来作为对象。正像我们已经看到,这终于引到了函数概念的建立,之后它又经历了它的方法性的-结构性的周期。过去 150 年的代数学结构性的发展不仅是对代数学家如何看待代数有一个相当大的冲击,同时对学校教材中它的表现方式也是如此。(关于代数学和学校代数的关系的另一个观点,参见达维多夫(Davydov)。)

## 学校代数学

对代数学历史的发展的研究显示,目前代数学被认为是数学的一支,它涉及到一般的数值关系和数学结构的符号化,以及在这些结构上的运算。多数美国的数学教本中描述代数的方式响应了这个结构性的观点。(目前在小学教材中还极少有代数,只是偶然出现在填空题中作为占位符号的字母。在后面一节中会提出对这种情况的一些例外,因而这一节中的评论主要是针对了中学教本。)典型的题目包括:(a)实数和复数的性质,(b)含一个未知量的一次、二次方程的形成和求解,(c)多项式和有理式的化简,(d)线性、二次、指数、对数和三角函数的符号表示以及它们的图象,(e)数列和级数。不是所有的学生都要学习这些课题,较高级的主题只是为要上大学的学生而设。通常在八年级或九年级开始学习代数,预备上大学的学生一般说可学完相当于 2 年的代数。

历年来中学的代数内容变动很少。在本世纪初开始的代数课程一般包括文字式的化简,线性和二次方程的形成和求解,应用这些解法去求问题的答案,关于比、比例,幂和根的练习。在这之后的几十年中曾经尝试过包括一些应用方面和图象方法的运用。在

60年代的早期,中学所教的数学与作为大学后在核物理、空间探索、通讯和计算机技术领域工作所要求的数学科目之间的差距日益扩大和明显。这种观察结果就引起了新数学运动的开展。在修订后的代数课程中要编进新的课题,如不等式,要强调统一的概念,如集合和函数,在教法上要使得其结构和演绎性明显。然而现在还维持在今日的代数课程内的变化,更多还只是装饰性的而非实质性的。

不管怎样,在本世纪初已呈明显的结构性的特性被保存下来了。传统的中学代数课程的结构性方面包括了代数式的化简和分解因式,在等式的两边作同样的运算来求解方程以及处理如函数方程  $y = v + (x - b)^3$  中的参数来产生函数族。多数教本的引言部分强调了对算术的联系。代数表示式被看作为算术中运算的一般化陈述,也就是在方法上以数值代到代数表示式中去得出特定的输出值。然而,一旦这个相对来说顺溜的引言完成后,立刻就把代数表示式看作为数学的对象,在它上面可以实现一些结构性的运算,如合并文字项,分解因式或者在方程的两边减去相同的项。

在此区分本章内所用的术语方法性的和结构性的很为重要。方法性的指的是在数上实施的得出数的算术运算。例如,当我们取代数式  $3x + y$ ,分别用4和5代替  $x$  和  $y$ ,结果是17。另一个例子是求解  $2x + 5 = 11$ ,代入不同的  $x$  值直到找到正确的值。在这两个外表看来是代数的例子中,运算的对象并不是代数式而是它们的数值实例。此外,在这些数上实现的运算是计算性的——产生一个数值的结果。因而,这两个例子都阐明了代数学中方法性的观点。

而术语结构性的指的则是另一套运算,不是在数上面是在代数式上。例如,取代数式  $3x + y + 8x$ ,它可以被化简为  $11x + y$ ,或除以  $z$ ,得到  $(11x + y)/z$ 。解像  $5x + 5 = 2x - 4$  的方程时,可以从两边各减去  $2x$ ,得出  $5x - 2x + 5 = 2x - 2x - 4$ ,又可以继续化简

为  $3x + 5 = -4$ 。在这两个例子中,运算的对象是代数式而不是数值的例子,所实施的运算也不是计算性的。另外,结果仍然是代数式。

如同我已经指出过,在大多数的代数教本中,在引入代数对象时往往加上一个方法性的外貌,如提供几个练习题——涉及到以数代入代数式和不同的求解代数方程的算术方法。这些方法使学生可以在某种意义下绕过代数符号系统。然而,只要用到正规的方法来化简表达式和求解方程,这种伪装很快就失掉了。学校代数的固有的目标是结构性的。在下一节中将讨论学生可能会试着去绕过或可能没有准备去处理课程的结构性的意图。涉及到以代数式为对象的,又是与算术运算迥然不同的运算的认知要求清楚地使我们联想到,在代数学的历史发展期间的那场学术上的争论,当时方法性的解释是让位给结构性的。

## 心理学上的考虑因素

斯法德(Sfard)建议可以用两种迥然不同的方式来形成抽象的数学概念:构造性的(作为对象)或运算性的(作为过程)。她认为运算性的概念对大多数人来说,是获得新的数学概念的第一步。从一个“过程的”概念到一个“对象的”概念的过渡是既慢又有很大困难的。两种概念当充分建成后都在数学的活动中起着重要的作用。(注意,在学校代数的内容中,我所用的方法性一词的意思是和斯法德所用的运算性相同的。)

斯法德把两种概念区别如下:

在运算性的和结构性的概念之间存在着一个深深的本体论的间隙。把一个数学实体看作一个对象的意思是可以作为一个实际的东西——一个静止的结构来谈及它。它存在于空间和时间的某处。这也意味着可以把它一

眼就认出来,并且可以把它作为一个整体来处理而不必进入到细节。相比之下,将一个概念解释为一个过程就意味着把它看成为一个潜在的而不是现实的实体,它在经过了一系列动作后可以作为实体而存在。因此,结构性的概念是静止的、即时的和综合的,而运算性的概念则是动态的、继起的和详细的。

由于不同的数学概念,如数和函数,从运算性的进化到结构性的,存在历史性的阶段,这就引发了斯法德创立了一个平行的概念发展的三阶段的模型。我们立即可以看到有若干个研究的结果都支持了这一点。在第一阶段(称为内部化)中在熟悉的数学对象上实施了某些过程。在第二阶段(称为凝聚化)中,这个运算或过程被挤入一个更可处理的单元。这个凝聚的阶段会持续下去,只要一个新的实体还只是方法性地或运算式地在孕育着。第三阶段——物体化。涉及到突然有能力用一种新的见解去看一件熟悉的事物。内部化和凝聚化是个漫长的一系列渐变的、定量的而不是定性的变化,而物体化看来是一次跳跃。一个过程凝固进一个对象,一个静止的结构。这个新的实体从产生它的过程脱离出来。譬如说斯法德曾称“就函数的情况来看,要表明物体化的,可以是求解以函数为未知量的方程(如微分方程、函数方程、含参量方程)的熟练程度,可以是那种谈论在函数上所实施的不同步骤(如复合和取逆)的一般性质的能力,也可以是最终确认对于被看作是函数的有序对的集合而言,可计算性并不是它的必要的特征”。

上述历史性的分析使我们得以将代数的发展看作一个方法性的-结构性的进化的周期。同样地,学校代数的学习也可以理解为一系列的过程-客体(即方法性-结构性)的调整,学生必须做到这样才能懂得代数学的结构性的侧面。我已经简要地讨论过,学生在开始学习代数式和方程时必须做的调整工作,学生不再能把这些实体理解为在一些数上的算术运算,而必须很快地学会把它

们看作独立的客体,在其上实施高一级的过程(运算)的客体。换句话说,学生必须很快意识到运算的对象是代数式而不是数,再者实施的运算是化简,分解因式,分母有理化,求解,求导等等而不是简单的算术中的加、减、乘、除。塔尔(Tall)曾经指出过, $2(a+b)$ 作为一个过程是和 $2a+2b$ 很不相同的。按照塔尔的说法,除非一个学生能够把一个代数式看成为一个数学对象而不是一个过程,代数的操作就会是冲突的根源。

在学会处理代数的结构时,特别是在数值关系作符号表示时,初学代数的学生需要做的另一个调整工作是如何把问题的情境翻译成方程。代数方程是一个涉及到非算术观点的结构表示式,非算术性表现在等号的运用以及所描绘的运算的性质。注意在下面的例子中,要做的从算术的到代数的观点的改变可以理解为一个方法性的到结构性的概念的移动。

在小学中更多的是用等号来显示一个结果而不是表示一种对称的和传递的关系。试看问题:

丹尼尔去看望他的祖母,她给了他 1.50 元,然后他买了一本书,书的价格是 3.20 元。如果他还剩有 2.30 元,那么在看望祖母前他有多少钱?

六年级的学生往往会写成  $2.30 + 3.20 = 5.50 - 1.50 = 4.00$ ,破坏了等号的对称性和传递性。等号被读成“得出”,也就是一个自左到右的方向的信号。在代数学中必须出现对等号的理解的转移正好就是要遵守等号的对称性和传递性。

上面的例子也说明了小学生是怎样得出他们的答案的,他们用了线性的、系列的方法,包括了一串逆运算,而常常是没有形成正式的问题情境或求解方法。在算术中,目标是找出答案,而完成这个目标时,往往是通过一系列的算术运算,或是对问题中给出的数,或是对从那儿得出的中间的数值。

和算术不同,这种由答案驱动的,倒过来做的方法在代数中常

常是不好用的。考虑下面的问题：

西山录像带店提供两种租借的办法。第一个方案是每年收费 22.50 元，加上每租一盘收费 2.00 元。第二种办法是一年期间对会员免费而每租一盘带收费 3.25 元。问租多少带时这两种办法的收费恰好相同？

对这类的题目，学生一般说不再能依靠算术中所用的方法。菲洛伊(Filloy)和罗杰诺(Rojano)曾经强调指出，对于像这样的可以用形如  $ax \pm b = cx \pm d$  的方程来作模型的问题就会发生一次决裂。学生不仅必须开始用以前的运算来建立方程，而且还必须采用一种在方程的两边作运算的求解方法，也就是说在一个代数对象上进行运算。莱什(Lesh)、波斯特(Post)和贝尔(Behr)在区分代数问题求解和算术问题求解时，指出了在代数中要求“先做描绘，然后计算”。

但是，即便在求解代数问题的描绘活动中，可以或用方法性的或用结构性的办法。克莱门特(Clement)和他的同事们对大学生所作的一组研究中提供了一个很好的例子来说明这两者的差别。如今已是经典的学生-教授问题就是：“在这个大学里，学生数是教授数的 6 倍，用 S 表示学生数，用 P 表示教授数，试写出用变量 S 和 P 的方程来表示上述说法。”对于这个问题的结构性的理解要求得出一个方程，其中字母描述为变量，等号用来表示等价性。同一问题的方法性解释的形式会是：“已知下面的说法：‘在这个大学里，学生数是教授数的 6 倍。’试写出一个用 BASIC 指令码的计算机程序来表示当在用户输入端提供了教授数时能输出学生数。”在这个情况下方法性处理方式的一个特点是一个涉及到数值的输入和输出的解释。因而虽说计算机程序涉及到了文字项，学生仍能把它们理解为数，在其上进行规定的算术运算以便得出一个数值的输出。在后面一节中将讨论到已经发现学生对方法性的解法（它规定一个算法来用一个量计算出另一个量）要比结构性的解法

(它规定了一个变量间的相等关系)用得更好。

上面的例子提示我们,即使是大学水平的代数,学生对于基于数值解释的方法性的表示比结构性的表示更理解。我们已经看到在历史上方法性的表示如何持续了几个世纪。惠勒(Wheeler)曾经指出过:当一个特定的符号语言建立起来时,相当多的构成基础的意义就消失了。一直到第16世纪以前表述性的和缩记性的代数都是相当容易领会和理解的,之后符号开始变得用文字来理解太复杂。但是进入到符号体系后就使个别项目的以及甚至作用于其上的运算的意义也消除了。符号语言之强有力在于它去掉了许多方言所保持的区别,并且大大地推广了它的可应用性。惠勒强调说符号语言在词义上是极弱的,它对学习的人带来的困难是,由于要适合多种内容,这种语言就不属于任一内容。

这样一来,对学习代数的学生来说,认知方面的要求是,一方面要把符号表示(只有很少或是没有词义内容的)当作数学对象,并在它们上面作一些一般不是得出数值解的运算过程;另一方面要改变他们原先对某些符号的理解,并且开始用运算来表示文字题的关系。这些运算往往正是在算术中求解相似问题中几乎自动地运用的那些运算的逆。在代数领域内经历这些发展花费了好几个世纪。可是对学生在开始学习代数课程时,就要求他们能几乎立刻把代数式物体化。在下面描述的几个研究中将展示出在整个代数课程中学生是怎样试图去应付这些认知的要求的。

## 教学的观点

前面考虑的是学的一面,现在让我们来看看教的一面。不幸的是,关于代数教学的范本和关于代数教师的想法和态度的文字记载都是严重缺乏的。在多数情况下,在数学教学的资料中并没有把代数应该考虑的教学方式描述得和几何的或算术的有所不

同。这些研究工作的重点并不在于按各科的区别而不同,却是放在数学课教学的共同之处,如整班教学和课堂作业的时间分配;机械记忆的教学和理解的数学;复习的作用;教学的建构主义方法;激发学习兴趣;课堂的社会动力学等等。在许多数学教学的研究文章中所表述的真正内容一般是可变动的。从少数几份可以看到的专门谈论代数教师的报告中,所得到的结论是就像其他数学课程的教师一样,代数教师主要关心的是如何安排课堂和教材。他们倾向于按照教本上的章节教,对给出的例子作解说来表示强调,然后布置家庭作业(第二次国际数学研究的总结报告中也记录了这个倾向性)。许多代数教师也倾向于把自己看作是提供信息的:

当我教一个传统的代数 I 的班时,我经常有这样的感觉,我可以雇用任何一个人、一个数学研究生——有科学基础的人,把当天的课,如分解因式求解二次方程,讲授 15 分钟,你能和我同样地做到,在教室内兜上 15 分钟圈子,确信人人已经开始做了,就是这样。没有会话,没有对话,我作了讲课。

在另一份研究工作中谈到一位新教师,他认为解题就是数学的主要活动。库尼描述了这位教师把解题方法结合进他的代数教学中的一些尝试。然而,他对解题的看法是限于用趣味题(主要从解题所提供的乐趣来挑选题目)作为在讨论实质问题之前来激发学习兴趣。最终,“教本是确定他的课程的首要因素,也是他的讲授方式的大部分”。虽说上一个世纪的改革强调了一些对已经保持相当稳定的课程的教学上的变动(如有目的的学习理论),根据韦弗(Weaver)和苏伊丹(Suydam)的说法,在中学里这些变动从未像在小学里那样理解清楚。此外,直到最近教材的作者对课程所做的决断并不是根据科学研究的结果。然而已经有迹象表明情况正在改变,正在建立起一些新的代数课程,它们能够反映代数学的教和学。但是拉克林(Rachlin)强调“不管社会各界指定什么作为



代数的内容,都需要在学生的和教师的两个水平上来研究课程的学习和讲授”。拉克林又指出,如果要从实质上改变代数的教学,看来只是改变教材是不够的。他提议“我们必须熟悉教师的信念和认识的性质,意识到当教师给学生上新课程时这些信念和认识在教师所作的决断中的作用”。不幸的是关于代数教师的信念和认识还只有极少量的文章。

关系到教师如何理解和改动教本上的材料的另一个因素是他们对学生的认识力和行为的作用的理解。拉克林在一个针对发展教师对他的教学效果的意识的研究中采用了一种方法,它看来是很有益的。拉克林先要求教师对他的学生做某一组作业的求解过程作估计,然后让教师去复看做研究的人和他的学生面谈的记录带,去评论学生的做法和错误,去指出在原方案中所未料到的以及去提出一些对其他教师可能有帮助的建议。这是使教师意识到真实情况的一种很好的方法。原先认为有些概念和方法已经在班上教得很恰当了,实际上却没有处理到足够的深度。教师受到启发后评论说,“有时候(可能是时常)我们教的并不是他们所学到的”。

虽说研究团体很少知道代数教师是如何教代数以及他们对自己的学生学习的概念是什么,这并不就认为没有相当多关于教代数的新的方法的研究——还是有的。然而结果的分析往往是针对学习现象中的细节而不是提出教的各个方面。(参见基兰关于苏联教学实验的描述,这是在许多关于学习现象的研究中常用的方法。)由于强调代数讲授中教师在课堂上的作用的研究极少,在下面的几节中将按照研究中各个代数内容的次序讨论现有的少量的研究成果。

## 在代数的学和教中的认知研究

前面几节是集中在历史的-心理的因素上,我认为这些因素对

学校代数的教和学的研究是关键的。代数符号的历史演变是从词句上的规定到未知量的表示,再到一般关系的表达——一个用方法性-结构性术语来描述的演变,以及一个由斯法德建立起来的心理学模型。它假设了从运算性(方法性)到结构性概念需要有一个漫长的转移时期,它提示了我们应该按照代数专题向学生提出的次序来组织研究成果。这样一来,我们可以随着代数学习的进展并按照方法性的-结构性的考虑来寻找思想的演化。

许多第一年的代数课程是从文字项以及和数值对象的关系开始,首先是在代数式尔后在方程的范围内。经过一个短短的在代数式和方程中作数值代入的时期后,课程一般就进行到不同数系的性质,代数式的化简和方程的正规解法。不久便是对不同复杂程度的多项式和有理式的运算和因式分解。在不同的章节内分散地安排了文字题,它们是作为刚学过的代数方法的实际应用。学生终于见到了函数和它们的代数的、表格的和图象的表示。所涉及到的函数通常包括线性的、二次的、三次的,指数的,对数的和三角函数。

一般认为上述的课题就是学校代数的核心,在这儿就把它作为本章各节的一个组成框架:文字项和式、式的化简、方程、方程求解、文字题和函数及图象。除了按照课题来描述研究的结果,本章内还考虑到是否要作教学上的插入。关于组成还要说一点:涉及到计算机的运用以及关于教师的看法的研究都不另外作讨论,而是融合在整个章内。

## 文字项和式

有时中学代数被称为推广了的算术,就是说是表示规定的算术规则和运算的一般的记载。根据这个中学代数的特征布思(Booth)曾经提出过,如果小学生(6岁~12岁)不能认得两个集合(假定分别有5个和8个项目的)项目的总数可以写成 $5+8$ (而不

是 13),那么他们会认得  $a + b$  表示了两个集合(分别含有  $a$  个和  $b$  个项目)内的项目总数就更不可能了。换句话说,能够把  $a + b$  看成代数学的一个对象是要有一些直觉的算术的前身。代数学要求学生能够认得  $a + b - c$  是和  $a - b + c$  是不同的(除非  $b = c$ )。

在算术中学生能否认得同样的结构上的限制?有证据提示了学生并不意识到算术运算以及它们的性质的基本结构。蔡克林(Chaiklin)和莱斯戈尔德(Lesgold)和 5 个六年级学生合作,学生的作业是不计算总和,判定这种含有一个加法和-一个减法的三项的算术式是否等价(如:  $685 - 492 + 947$ ,  $947 + 492 - 685$ ,  $947 - 685 + 492$ ,  $947 - 492 + 685$ )。他们发现学生要用几种不同的办法去归并这些数值项,即使是在同一个表达式内,也要看与之作比较的表达式来定。他们还注意到学生宁愿做计算来判定表达式是否为等价。这表明了小学生还没有达到那个不用计算来判定等价性的状态。考兹尼尔-马迈奇(Cauzinille - Marneche)、马蒂厄(Mathieu)和雷斯尼克(Resnick)也报告过类似的结果。

科利斯(Collis)利用一个含有求□的值的作业,如  $(235 + \square) + (679 - 122) = 235 + 679$  来调查究竟学生能否认得各种运算之间的关系式,还是要靠计算。他用了三种格式:小数,大数(如上所示)及字母。科利斯发现年龄小的孩子只会对小的数做对,因为他们仅有的方法是计算。他把这种不用计算化简直接利用表达式的能力称为“缺少闭合性的接受”。

布思进行了关于学生对符号和代数的结构的直觉基础的其他调查。有一次她利用一个书面测验,其中包括一些摘自中学数学和科学中的概念(CSMS)评估中的项目,就像求图 9.1 中所示的矩形的面积——这个项目在 CSMS 的调查中有 42% 的 13 岁的被测者的回答是  $7f3$  或  $f21$  或  $f + 21$ 。然后她和她研究中的那些和在 CSMS 中犯同样的记号错误的学生面谈,以便去了解他们是否意识到其中所用的求矩形面积的方法,是的话,他们的困难究竟是否和

理解代数符号体系的记法有关。布思的结论是用语言来描述一个方法的能力并不必然要求能辨认出那个方法的正确的符号化。

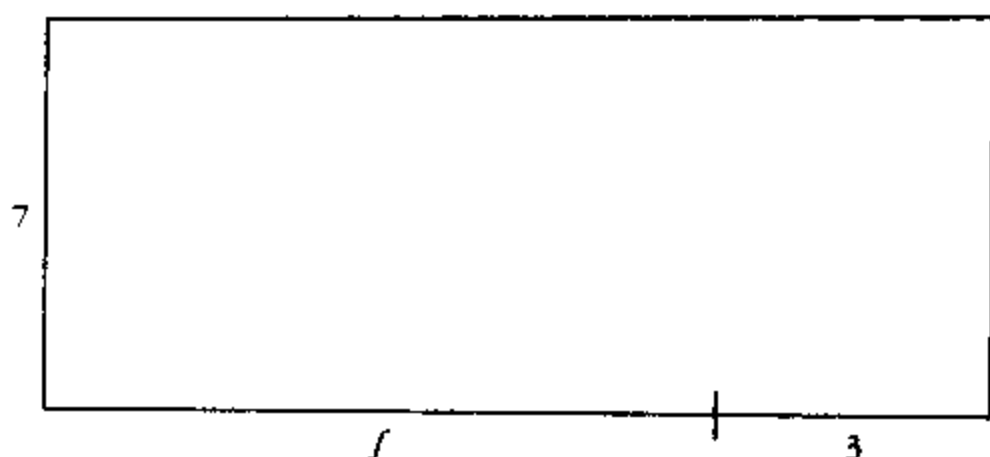


图 9.1 从 CSMS 测验题改编,要求学生确定所示矩形的面积

在代数学中区分各种可以应用字母的方式会是学生感到困难之处。库奇曼(Küchemann)在 1976 年进行了一个大规模的关于学生对字母项的理解的研究作为 CSMS 的计划的一个部分。他对 3 000 名 13 岁~15 岁的英国中学生进行了一次 51 项的笔试。利用了科利斯建立的分类,库奇曼把每个项目分到对字母的理解的下列 6 个水平之一(按照做对所需要的最低的水平)。

- (a) 字母求值:一开始就对字母规定一个数值。
- (b) 字母没予以考虑:不顾这个字母,或者虽然承认它但不赋予意义。
- (c) 字母作为一个具体的物体:认为字母是一个具体物体的速记或作为一个真正的物体。
- (d) 字母作为一个特定的未知量:把字母看作一个特定的但是未知的数。
- (e) 字母作为一个推广了的数:把字母看成表示或至少可以取得几个而不只是一个值。
- (f) 字母作为一个变量:把字母看成代表一组未指定的值,并且在两组这样的值之间存在一个成体系的关系式。

库奇曼发现:虽然说学生所选择的解释部分地依赖于问题的性质和复杂度,只有很小比例的 13 到 15 岁的小学生能够将字母考虑为一个推广了的数——即便他们有过在课堂内把数式表示成一般化陈述句的经验。能够把字母解释成变量(按照库奇曼的分类法)的人就更少了。能够理解字母是特定的未知量的小学生较多(与理解为推广了的数相比之下)。然而大多数的学生(即 13 岁中的 73%、14 岁中的 59%和 15 岁中的 53%)或是把字母当作具体的对象,或者就不管它们。采用斯法德的方法性-结构性的模型时库奇曼的发现也提示着,在被测试的学生中有许多还没有开始用数字的输入输出过程来解释文字式——就是斯法德所设的代数式的结构性概念的建立的进化过程的第一个阶段。

有些证据说明长期的 Logo 程序方面的经验可以帮助学生建立起这种关于变量和代数式的理解。Logo 数学项目是英国的一个研究,它包括有 4 对学生前后经历有 3 年时间在正常的数学课期间参加到 Logo 编程序活动中。它的一个目的是去建立和测试一些资料,是用来帮助学生将他们在 Logo 中的对变量概念的理解联系到笔和纸代数中的变量的理解。研究者负责在研究期间的各种 Logo 的插入。在计划结束后紧跟着对学生(在研究开始时是 11 岁)作一个结构性的面谈来作纵向的研究。在面谈时,要求小学生:(a)作一个推广并且就一个代数的内容使之正规化,(b)作一个推广并且就 Logo 的内容使之正规化,(c)回答有关字母的意义的代数问题(取自 CSMS 问卷),(d)回答有关变量名称的意义的 Logo 问题,(e)用 Logo 和代数表示一个函数。结果表明了,案例中的学生比非 Logo 班的学生和在 CSMS 项目中测试过的学生要好得多。在 12 岁孩子中的 BASIC 程序活动的结果也表明了可以得出一种更深的对变量概念的理解。关于学生们学习把他们的 Logo 经验与他们的纸-笔代数联系起来的 Logo 数学项目的肯定的结果和罗伯茨(Roberts)、卡特(Carter)、戴维斯和福厄蔡格(Feurzeig)的结果

形成了对比。后者报道了他们的六年级学生在半个学年内(比 Logo 数学项目学生用的时间短得多)一般说来还不能够把在 Logo 环境下学到的代数转换成为较传统的代数。

要注意在 Logo 程序中变量项的应用包括了:(a)对输入变量要执行的显式运算的语句,(b)过程的函数的输入-输出表示式,(c)表示量之间关系的一般语句。Logo 数学规划的两个方面看起来是关键的,一个是在程序活动上所花的相当长的时间,另一个就是活动的性质,即其中有许多活动是花在建立表示输入-输出关系的程序上。萨瑟兰(Sutherland)报道说,虽然在涉及到用字母作为特定的未知量和推广了的数的问题上,他的研究对象用 CSMS 测试比库奇曼的对象要好得多,但他们还是不能在最高水准的问题上取得成功。在这些问题中字母代表一个未经指明的值的范围以及在两个这样的值的集合之间存在一个有系统的关系。换句话说,长期的程序方面的经验看起来并未能让所研究的学生获得认知工具来处理那些需要对文字项和式有结构性的概念的 CSMS 问题。

蔡卢(Chalouh)和赫斯科维克斯(Herscovics)实践了一个研究:对一组六至七年级学生引出代数式的讲授单元。在教学实验中涉及的问题包括了点的矩形排列、线分成线段和矩形块的面积——在所有这些问题中,有一个尺寸或者隐去了,或是用另一个未知量来表示的。譬如说,给学生出的一个问题就是:“你能否写出这个矩形的面积?”(见图 9.2)讲授的系列允许学生对如  $4x + 4y$  这样的代数式去构成一种程序上的意义。然而学生总认为这些表示式还有点不完全,除非把它们表示成等式的一部分,诸如“面积 =  $4x + 4y$ ”或“ $4x + 4y = \text{某物}$ ”。——暗示一个代数表达式的程序上的解释需要部分地指明执行程序的结果。

相类似地,瓦格纳(Wagner)、拉克林(Rachlin)和詹森(Jensen)发现许多学生对要求他们去简化的表达式,会试着去加上“= 0”。

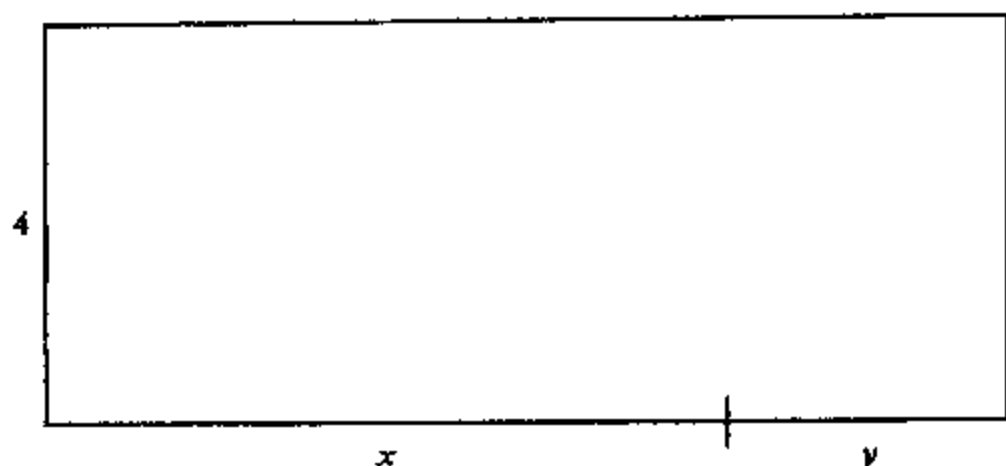


图 9.2 从蔡卢 赫斯科维克斯的研究中改编的矩形图

基兰的一个研究结果也说明了这种把表达式变成为方程的要求。她发现有些学生对  $a + 3$  式中的  $a$  说不出什么意义,因为这个式缺少等号和右方的项。

## 式的化简

上一节中的研究结果描述了学生对字母项和式的最初的方法性的概念,其中显然没有结构性的概念。然而,不久就要求学生在代数课上去化简式,这种活动最初可以针对简单的式,联系到式的一个数值的、方法性的概念,但是却不能一直停留在这个水平之上。式的复杂程度和简化的性质很快就使这种作业变得不好做,除非学生能形成一个把代数式作为一个数学对象的感觉,可以在它上面作种种运算。这种结构性的概念就涉及到对式而不是对数来应用各种性质。学生,包括刚开始学的和已有经历的,所遇到的各种困难在许多的研究工作中都有所记载。

格里诺(Greeno)曾经提到,解题的过程包括了对问题中关系的结构的理解。为了对这个想法作试验,格里诺进行了一次研究,关系到刚刚开始学代数的学生做式的作业。他发现学生演算看起来有相当的偶然性(至少在短时期内是如此),他们的运算步骤中充满了没有系统的差错,表明了对代数的结构性特征方面的知识

的缺乏。从他们把代数式分组的方式上也可以看出这种混乱。按照格里诺的结果,这些初学代数的学生做一些运算时,在事先要检查条件以及在具体运算过程中,往往表现出前后是不一致的。譬如说,他们会有一次把  $4(6x - 3y) + 5x$  简化成  $4(6x - 3y + 5x)$ , 而在另一次又去做了别的。温格(Wenger)曾经描述过一些学了相当多代数的学生的蹩脚的决策——这些决策使他们在简化式时老是兜圈子,因为他们老是“找”不到式中正确的东西。甚至发现一些已能掌握某一种类型的代数式,如多项式的化简方法的学生,还不能够把已学到的知识用于另一种代数式(如根式)的简化上去。看起来他们觉得这两个题目是完全分开的。艾森伯格(Eisenberg)和德赖弗斯(Dreyfus)指出,由于代数学中最近的趋势是强调方法而不是其中的结构,结果学生认为,数学只是算法的一个简编,因而使得他们难以推广和应用他们所已经学到的知识。

另有一些研究工作中记载了学生在分析代数式时所犯的错误。在化简时常见的一个错误就像把  $39x - 4$  变成了  $35x$  或  $2yz - 2y$  变成了  $z$ 。在卡里(Carry)、刘易斯(Lewis)和伯纳德(Bernard)的研究中曾提出这样的错误并不是限于初学代数的学生。在他们对大学生的解方程的研究中,发现这一类错误——他们称之为“删去”错误——是学生在解方程的过程中最流行的一类错误。卡里、刘易斯和伯纳德提出,有的学生过头地推广了某些数学上正确的运算,以至于得出了一种删除了属性的运算,从而往往得出了不正确的结果。

这个建议的一个推广是,由于学生继续把字母看成具体物体的标记,他们把代数式按照算术法则作运算,然后标上字母。马茨(Matcz)曾经指出过,在对代数式作运算时学生倾向于在算术上“贴上一层薄薄的饰面名称,却仍停留在算术中做工作”。

最近有一篇关于教学的文章表明了讲授可以改进学生对代数式的结构性的辨认和在其上运算的能力。P. 汤姆森和 A. 汤姆森



(Thompson)和 8 个七年级学生合作了 8 天。他们用了—个计算机程序,它包括了两种格式的式和方程:通常的符号形式和式的树(见图 9.3)。在用到域的性质或其他的变换改变—个式时,学生要先选好变换,然后在式的树表示中要作变换的运算上方放上一个指针。计算机不会执行有错误的变换。这个教学试验的一个不可缺少的部分是一套活页练习题,其中包括了数值的变换和代数恒等式的问题,这些问题的目的在于进行式的运算时把学生的注意力引导到结构,也就是性质的应用上去。P. 汤姆森和 A. 汤姆森的报导说,在这种环境下,这些初学代数的学生对式和方程的结构的理解有一个很快的发展。他们也报导了学生是怎样将变量看作不单是数而且也是式子的替换。这样的环境对发展学生在代数式的结构性的概念和在代数式上作运算的能力方面有潜在的价值,看起来建议在这个领域内作出更多的研究会是有成果的。在新数学运动中,当许多建议遭到了冷遇时,域的性质是教材中一个不那么受到注意和有地位的题目,P. 汤姆森和 A. 汤姆森的研究结果表明了在代数课花更多时间在这类活动上的好处。

学习代数式的结构的另一个方面涉及到对代数句法的约定的

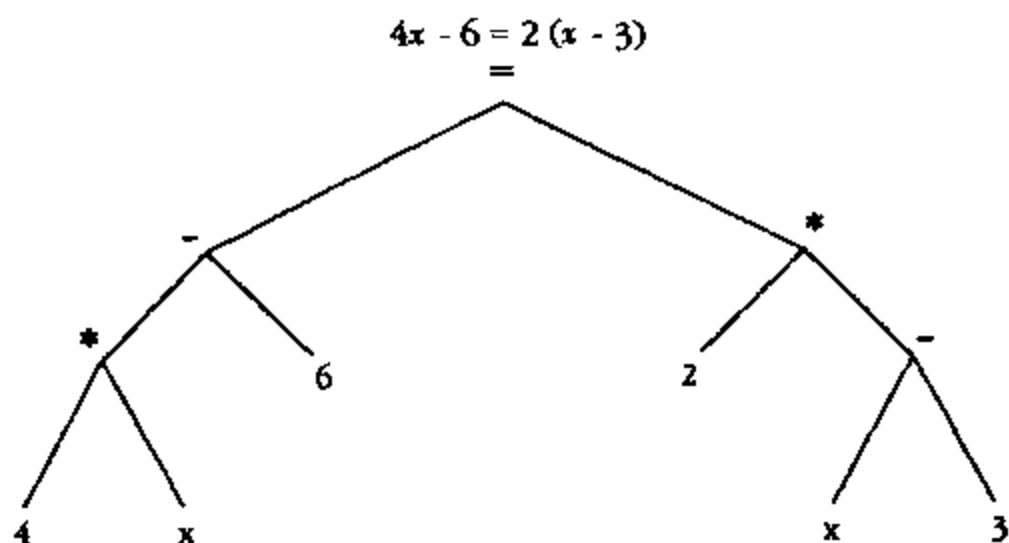


图 9.3 方程  $4x - 6 = 2(x - 3)$  的式的树的格式(引自汤姆森,1989)

那个意识。贝尔,马隆(Malone)和泰勒(Taylor)报道了,初学代数的学生往往表示困惑;允许将  $2a + a + 15$  并成  $3a + 15$  而不允许  $a + a + a \times 2$  并成  $3a \times 2$ ,为什么?弗赖登塔尔指出过,在  $ab$  中,如果用  $-a$  代替  $a$ ,它变成了  $-ab$ ;但是如果用  $-b$  代替  $b$ ,它不变成  $a - b$  而应是  $a(-b)$ 。学生必须学会在什么地方应该加括号以及在什么地方又不应该加。通过有意识的添加括号,内容就有了结构。基兰发现初学代数的学生倾向于自左向右来读式子而并不看到需要用括号。与此相关联的是代数学中的句法。弗赖登塔尔认为,代数式的最早的句法结构是某些代数运算的联结能力。乘幂优先于乘法,而后者又先于加法就是若干世纪以来代数式用标点和间隔的形象的方法。柯什纳(Kirshner)对 400 个九到十一年级学生和大学一年级微积分课学生就代数句法中对视觉上的暗示的依赖性作了评估。他发现对有些学生来说,通常的记法的表面特征就能够为成功地确定句法提供必要的提示,但是大部分的学生则要依赖于含于运算次序的规则内的命题知识。遗憾的是对依靠视觉上的暗示的学生,在命题规则和代数记号的表面特征之间不是总有一个强的关联性。

## 方程

就如前面已经指出过的那样,像方程这样的结构表示式,对它的产生和恰当的理解的一个要求就是对等式的对称性和传递性的概念,有时也称之为等号的左右等价性。在初学代数的学生中,把等号看作一个“做某件事的信号”而不是方程的左右两边等价的记号的表示之一,就是他们开头不愿意接受这样的陈述: $4 + 3 = 6 + 1$  或  $3 = 3$ 。他们认为右边应该表示答案,即  $4 + 3 = 7$ 。年龄稍大点的学生仍然把等号看作一个分隔记号而不是一个左右等价的记号,这一点可以从他们在求解方程时步骤的简缩和在“两边加上同样的东西”的交替中看得到:

$$\begin{aligned}
 \text{求解 } x: \quad & 2x + 3 = 5 + x \\
 & 2x + 3 - 3 = 5 + x - 3 \\
 & 2x = 5 + x - 3 \\
 & 2x - x = 5 - 3 \\
 & x = 2
 \end{aligned}$$

这种等号的错误用法会一直持续到大学,正如梅瓦雷奇(Mevarech)和伊沙克(Yitschak)所反映的:被他们测定的学生对等号意义的理解很差,虽说他们可以成功地求解各种类型的一元方程。

基兰与6个12—13岁学生做的一个教学试验,目的在于使初学者扩大对等号的理解,并帮助他们对 $ax \pm b = cx \pm d$ 型的代数方程建立起意义。在个别的面试中,先要求学生说出等号对他们意味着什么,随后要求学生举出用到等号的例子。明显的是,他们大多数把等号用答案来描述而所举例子则只限于在左边作运算,右边是结果。随后的教学就集中到对等号的运用,包括两边都有乘法运算的。做法是让他们构造出算术等式,先是每边都只有一个运算的如 $2 \times 6 = 4 \times 3$ 和 $2 \times 6 = 10 + 2$ ;接下来他们继续造每边有两个运算的,随后是每边都有乘法的,例如: $7 \times 2 + 3 - 2 = 5 \times 2 - 1 + 6$ 。

这些等式被称为算术恒等式是为了把方程这个名词留给含有文字的等式。虽说有一个学生坚持要在等号两边之间放入一个“答案”(即 $5 \times 3 = 15 = 10 + 5$ ),看起来,学生对两边有乘法的等式是蛮习惯了。他们论证了两边相等是因为它们有相同的值。学生终于能比较等式的左、右两边表示了。在这个阶段等号已经较多地被看作是一个关系的记号,而不再是“做某件事的信号”。到这个时候,右边就不再要包括答案而是与左边有相同的值的某些表达式。

要在方程的两边包括多个运算的情况下扩展等号的概念的理

由是为以后建立起两边都有多个运算的代数方程的意义提供基础。如果不先做好这个扩充,那种“答案总是在右边”的概念会一直跟随着学生进到代数方程的学习中去。像  $3x + 5 = 26$  可能配得上学生现有的概念,但是对另外一些,如  $3x + 5 = 2x + 12$  就可能不行了。基兰也认为先在算术等式的框架内把等号的概念作了扩展就会大大地减轻学生认知上的压力。

引入方程的概念的下一步就包括在学生的一个算术等式中隐去任何一个数。隐去时,先用一个手指,然后是用一个方框,最后是用一个字母(例如  $7 \times a - 3 = 5 \times 2 + 1$ ),这样一个方程就定义为带有一个隐数的算术恒等式。最后,学生两次隐去了同一个数,一次在等号的左边,另一次在右边,例如:  $2 \times 3 + 7 = 5 \times 3 - 2$  变换成  $2 \times c + 7 = 5 \times c - 2$ 。就像对算术恒等式那样,代数方程的右边不必要含有答案,而是与左边有相同的值的某个表达式。譬如说,学生描绘方程  $2x + 3 = 4x + 1$  说:“如果你知道  $x$  是什么数,那么这个数的两倍加上 3 与这个数的 4 倍加上 1 有相同的值。”这个研究表明可以使初学代数的学生把等号和算术等式的单方向的和答案在右边的观念改成一个代数方程的方法性的观点,它将包括:(a)字母代表数,(b)等号表示左、右双方的等价性,(c)右边的项不一定是由单一个数项构成而是一个代数式。这种意识是形成方程的结构性的概念中的关键所在。

形成方程的意义的另一个方法是由贝尔、马隆和泰勒所描述的。他们提供了学生所做的工作的每一课的详细观察的报告。他们采用的是解题的方法,有 3 个班级的 14 岁的孩子被引导建立像下面的问题中那样的方程(那是在第 5 课中的):

问题中有 3 堆石子:A,B 和 C,其中 B 比 A 多 2 块,C 有 A 的 4 倍。总共有 14 块石子。学生的任务是用三种不同方式的  $x$  去找出每堆石子的块数,就是说把  $x$  放在 3 种不同的位置上。

贝尔、马隆和泰勒报道,学生开始全部把 A 堆的数记为  $x$ ,使  $x+2$  和  $4x$  记另外两堆。用  $x$  记 B 堆的时候,学生把剩下的两堆记成  $x-2$  和  $4x-2$ ,没有人用括号  $4(x-2)$ 。所得到的方程  $x-2+x+4x-2=14$  就不会给出同样的解答,从而引出了一个关于需要用括号的讨论。最后的方法是以 C 堆的数为  $x$ ,这样就得出  $\frac{1}{4}x$  和  $2+\frac{1}{4}x$  是另外两堆的数,大部分学生都写成  $x\div 4+2+x\div 4+x=14$ 。把 3 个  $x$  收集在一起之后,他们就不知道怎样来处理那些数了。介入教学帮助学生学会一些形成方程的方法。研究者们注意到是克服了最初出现的如何将文字题表示出来的概念上的障碍(例如比  $x$  大 15),但是还没有完全解决第二级的困难,即把代数式作为对象来处理(比如:去应付比  $(x-30)$  多 15)。

### 求解方程

把方程作为一个数学对象来运算包括了在方程的两边作同样的运算的正规的方法。然而这往往并不是首先教给学生的方法。通常被用作解方程的引导的方法包括了将数值代入的“猜和试”的方法以及其他非正规的方法,例如遮盖法、倒算法等等。这些方法看起来和方程的方法性的概念联系得较好,然而不久就给学生教了正规的方法。有好些研究专门讨论了学生的解题。事实上,研究工作主要注意的是这个课题。

学代数的学生所用的各种解法一般是按以下几类分的:

- (a) 利用数的事实,
- (b) 利用计数方法,
- (c) 遮盖法,
- (d) 恢复原状(倒做),
- (e) 试错法,

(f) 移置法(换边-换符号),

(g) 两边作同样的运算。

最后两种方法一般就叫做正规方法,移置被认为是两边作同样运算的简略。一般是不给学生教上面的头上两种方法。从小学中做填空题(如  $2 + \square = 5$ )的经历中学生就已会了。譬如解  $5 + n = 8$  时会记起数的加法  $5 + 3$  是 8,这就是利用已知的数的事实。求解同一个方程时数数 5,6,7,8,注意到在数 5 之后又数了 3 个数才得到 8,这就是计数方法的一个例子。布思报道过在初学代数的学生中间这两种方法的运用。

贝尔、奥布赖恩(O'Brien)和肖(Shiu)曾经看到过学生利用遮盖法来解方程,诸如  $2x + 9 = 5x$ ,“由于  $2x + 9$  合计为  $5x$ ,9 必定是和  $3x$  一样,因为  $2x + 3x$  也是等于  $5x$ ,因此  $x$  就是 3。”惠特曼(Whitman)研究了遮盖法和正规方法在等号的两边作同样的运算的方法间的关系,在七年级的 6 个完整的课上作了教学试验。她发现那些只学了遮盖法的学生比很接近地学了这两种方法的做得更好,而只学过正规解法的学生则比学了两种方法的做得更差。这些发现说明了,如果只是教了正规的解法的学生在概念上来看并没有做好准备把方程当作一个数学对象来做正规的、结构性的运算。

恢复原状方法是和算术中的倒做方法相仿的。例如,为了解  $2x + 4 = 18$ ,学生取右边的数值结果,按照从右到左的次序,把碰到的每个运算代之以它的逆。这样一来,学生就可以只做数的运算而避免处理这个数学对象的等价结构。包含有这个方法的一个计算机环境就是福厄蔡格(Feurzeig)建立的弹子口袋微型世界。这个方法曾经用在六年级生中来创立和求解一些简单的弹子口袋故事。它的好处是可以引进标准的代数记号来作为写这些故事的一个快速的方法。

作为一种求解方程的方法,试错法(例如,求解  $2x + 5 = 13$  时,

试用不同的值,诸如 2,6,然后,可能用 4)是很费时间的,而且对工作的记忆需要是一个很重的负担,除非把所有的试解作系统的记录。一当学生学会掌握一种正规的方法,他们就倾向于丢掉用代入法去求解方程。遗憾的是学生也会丢弃代入法作为检验解的正确性的一种方法,此外,还发现他们也不用代入法作为测试他们代数化简的真实性的一个工具。不管怎样,有证据表明以代入法作为早期解方程的工具的学生(并非他们全部)比那些从未用过代入法求解方程的学生具有较为发展的在方程的左右两边平衡的概念以及等号的等价作用的概念。我们将会看到,这种意识对于顺利地过渡到正规的解方程的方法是很为有益的,正规的解法涉及到在等号的两边作相同的运算。

珀蒂托(Petitto)曾经评说过上述的前面 5 种方法往往不能作推广,这些方法被她认为是直觉的。在她对 7 个九年级的学代数的学生的解方程的研究中,她发现那些混合运用正规的和直觉的方法的学生比那些只用一种方法的做得更好。

另有一种不需要方程的结构概念的(而是利用了学生对方程的输入-输出观念的)求解方程的方法是利用计算机造的表格。在这个环境下求解单个变量(出现一次或是多次)的方程就是建立并操作一个表格,其中每一列代表了方程两边的每一个式。学生输入变量项的尝试值直到两个式是相等的。这个研究表明了用计算机来解方程的一种方法的优点在于它对每个输入的数值显示了两边的数值输出。

求解方程的正规方法包括了移项和在方程的两边实施相同的运算。虽说许多代数教师认为移项是在方程两边进行相同的运算的简捷方法,然而初学的学生却认为这两种方法是相当不同的。在两边作同样的运算时强调了方程的对称性,而这个强调点在移项的过程中是没有的。有证据提示说许多学生在做移项时,并不把方程当作一个数学对象来运算,而只是盲目地应用了换边换符

号的规则。

在一个为了帮助七年级的学生树立起对在方程的两边作同样运算的方法的意义的教学试验中,基兰发现刚开始时学生在解简单的含有一个运算的方程时有两种选择,有人用的是试错法,而另一些则用了恢复原状法。对有两个运算的方程,如  $2x - 5 = 11$ , 后一组学生推广了从右到左的恢复原状法:取 11, 加上 5, 然后除以 2。对于有多个运算的方程,如  $3x + 4 - 2x = 8$ , 他们把方法推广时只是把每个遇到的运算做还原。在这个例子中,取 8, 除以 2, 加上 4, 然后减去 3(他们只能不顾到最后一个乘法运算,因为他们没有了运算的对象)。这些挑选了恢复原状法的学生在弄明白所教给他们的方法来解方程时,努力的结果适得其反。还发现这部分学生一般来说弄不懂“在两边做同样的运算”方法。这个讲授的次序看起来对那些开始时偏爱代入求解法和把方程看作左右平衡的学生具有最大的影响。观察的结果提示了,通过在方程的两边作同样的运算来学会在方程的结构上运算对那些已经把方程看成带有对称平衡的实体的学生来说可能会是比较容易些。试错法是一种初等的求解方法,它可以为更结构性的求解方法提供一个直觉的基础。相比之下,虽然依次从右到左复原的办法好像和算术中的解法更为接近,但它显然是局限于那些未知项只出现一次的,限于少数几个位置的方程。遗憾的是它更会鼓励学生继续去绕过代数的符号体系而不是把方程直接当作一个结构性的对象。

在前面一节中曾经指出过,学生经常在尝试化简代数式时会作出不好的决策。关于有多个运算的方程的求解研究中有类似的报道。一般来说,我们发现学生缺乏那种对方程的特点作出和维持一个全面的综合观点的能力,从而难以确定下一步应该进行的代数变换。建立代数课的计算机辅导的研究人员正致力于这个议题。在他们的初步分析中包括了专家教师们教复杂方程的求解时所用的各种方法的系统研究。譬如说,谢弗尔森(Shavelson)、



韦布(Webb)、斯塔兹(Stasz)和麦克阿瑟(McArthur)曾经描述了他们观察到的一位教师,集中讲解方程所需要的是较高水平的推理过程而不是较低水平的变换,她按照自上而下的方式来组织围绕目标结构的课堂讨论,例如,从消除分数作为目标开始。一旦执行了最早的目标,教师并不是单纯地往下一步做而是提醒学生,为什么所做的低水平的化简是达到目标所必需的。

麦克阿瑟和他的同事们已经把这些全局性策略的教学融进了他们的求解代数方程的智能辅导中了。这个系统的最新的一版中有一个“可查询的专家”,它能告诉学生推理的细节。学生先输入最初要求解的方程。如果学生想的话,他可以继续解方程的链上添上增加的步骤。以后如果这个学生想要修改某一行,程序就会从那步创造出一个分支来表示一个新的方程,组成一个与学生原来的不同的解题路线。学生可以询问专家究竟某一特定的步骤是否正确。专家会作答复,也会评论这一步是否适当。也可以要求专家来提供下面的一步或是把已有的一步精确化。人们发现这个系统能够建立起一种关于求解方程的正规方法的启发式的寻找的感觉,以及教会学生:学好一种认知技能的一个重要部分是学会研究你自己的推理过程。

解方程的另一个计算机的环境就是 Algebraland,它使人们获得方法的一个全局的观点,布朗(Brown)指出学生求解的屏幕记录提供了一个使解的路径具体化的结构,因而学生能够审视它作为一个相应的对象。这个环境的一个特点是系统会给学生执行所有的代数运算。根据布朗的介绍,学生只须确定要运用什么算子(例如分离出,汇集,分类,分开或化简)以及对什么去运用这种算子,因而可以“消除在技巧方面出语句错误的任何机会”。这是一种前景,那是别的研究认为完全无法保证的。

使学生能集中考虑解题方案的其他智能辅导系统还包括了代数工作台和代数辅导。代数工作台是一个原始的运算系统,它曾

经短暂地被用来调研对六年级学生使用这个工具究竟可以教多少代数。同样代数辅导在课堂内还只有有限的应用。从实验室的观察可知,用了它以后学生能比开始时知道更多的代数,但是安德森(Anderson)和他的同事们还没有根据来比较用辅导所花的时间和用其他学习代数环境所花的时间的价值。

菲洛伊(Filloy)和罗杰诺(Rojano)研究过具体的模型在讲授正规求解方程的方法中的效果。在他们的教学试验中,他们的目的是帮助学生理解像  $ax \pm b = cx$  和  $ax \pm b = cx \pm d$  型的方程以及求解这些方程时所用的代数运算。他们用的方法主要是几何的,虽说在有一些研究中也使用过天平模型。几何的方法涉及到像下面这样的故事,附图如图 9.4。

某人有一块土地,它的尺寸是  $A$  乘以  $x$ ,他又买了相邻的一块土地,面积是  $B$  平方米。另一个人建议用同一街上另一块地和他交换,两块地的面积相同,长度也相同,形状较好。试问长度应该是多少才能使这笔交易公平?

菲洛伊和罗杰诺与三个 12 岁 ~ 13 岁的班级进行面谈。这些学生已经会求解型如  $x \pm a = b$  和  $ax \pm b = c$  的方程(菲和罗称之为

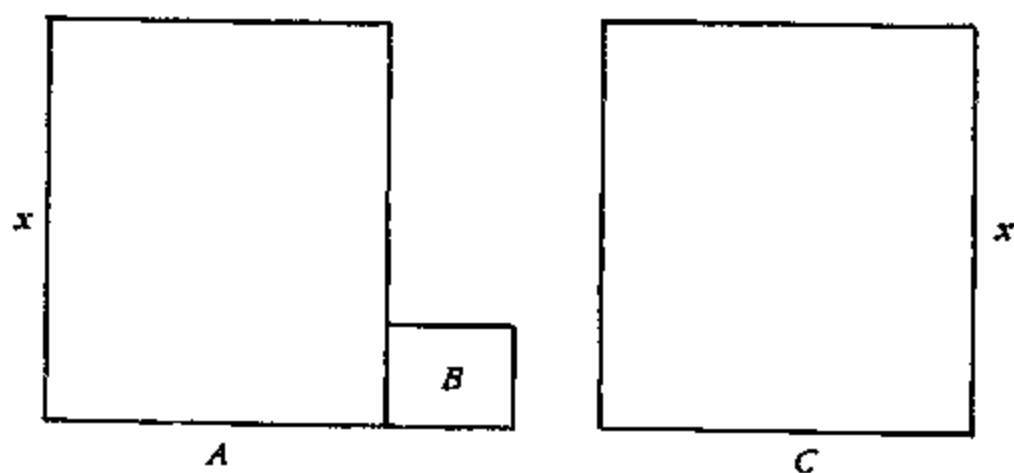


图 9.4 摘自菲洛伊和罗杰诺的一个几何问题的图示,用以模拟形如  $Ax + B = Cx$  的方程

为“算术”方程),但是还未见过型如  $ax \pm b = cx$  和  $ax \pm b = cx \pm d$  的方程(他们称之为“代数”方程)。他们设计了一些面谈的问题来揭开一些困难,就是在学生从解算术方程转向到解代数方程时所碰到的。这个转变就像菲和罗所称呼为教学的分割时期。面谈表明了运用这两个具体的模型——天平和面积的模型,并不能显著地增加大多数学生对有两次出现未知的方程作运算的能力。在这个研究中也就可以看到熟悉的解题中将常数和系数合并的错误,特别是当用了几何模型时。菲和罗报道称有许多学生趋向于凝固于模型之上而看不到在模型上所实现的运算和对应的代数运算的关系。其结果是学生保持着对模型的依赖性,即使它已经不再有用了。事实上,对简单的方程学生试着用模型,而这些方程完全可以用直觉的求解的方法很容易地解出来,这些方法是教新的方法之前他们已经用过了的。他们对所教的具体模型的方法那么专心,以至于已经忘了早先用过的方法。这个研究进一步证明了从方法性的到结构性的代数方程的概念的过渡,对学生来说是很困难的。

在求解方程时,有许多学生试着运用他们在解算术问题时用过的倒过来做的方法——在数上而不是在字母上运算。我们已经看到,学生不容易学到手“在等号的两边做同样的运算”的方法,其中学生要明显地在方程的结构上作运算。因此,照菲和罗的说法,学生并不是真正在按代数的方式工作。这并不等于说有几个学生不能十分熟练地解方程。有些工作表明许多学生是学会了处理方程时用一种不加思索的和自动化的方式,通常是用换边换符号的方法。然而,这些工作也说明了同样这些学生一般说来并不能意识到在他们所做的运算下面的结构。

基兰进行的另一项工作的一些结果还表明了学生缺乏对方程的结构性的概念。大多数的代数教师料想到开始学的学生已经知道  $3 + 4 = 7$  可以改写成  $3 = 7 - 4$ ,而且也会推广到代数方程的情况,如  $x + 4 = 7$  和  $x = 7 - 4$ ,因此,教师期望学生会认为两个方程

是等价的,从而它们有相同的解。基兰发现 12 岁的初学代数的学生在判断含有加减法关系式中的等价表达式时有困难。这些学生所犯的两个错误——转换加数错误和再分配错误,表明了当表示式涉及到文字项时,学生对辨认加减法的等价形式时会混乱不清。在加数转换错误中, $x + 37 = 150$  会判成与  $x = 37 + 150$  有相同的解。在再分配错误中, $x + 37 = 150$  会判成与  $x + 37 - 10 = 150 + 10$  有相同的解。这些错误提示我们,初学代数的学生在加法和减法的结构关系中有点没有把握,至少是对于这些(含有文字项的)关系的书写形式。

瓦格纳、拉克林和詹森提供了还有更多的有关学生不会区分方程的结构特点的迹象。他们在研究中设计了几个作业,其目的在于探出学生是否意识到一个方程的解是由它的结构而不是代表变量的字母所确定的。这个工作用到了瓦格纳的关于方程的不变性的研究。他个别而试了 29 个初中和高中的学生,所问的问题包括:在方程  $7 \times W + 22 = 109$  和  $7 \times N + 22 = 109$  中, $W$  和  $N$  哪个大? 瓦格纳问过的学生中只有 38% 能正确地回答。其余的人或是认为必须先求出两个方程的解——意味着一种对方程的方法性的概念,或者认为  $W$  大些,由于它在字母表上的位置关系——意味着一种更原始的观点,还不包括了用字母表示数。

瓦格纳、拉克林和詹森要求九年级的学生求解方程  $s/8 - 3 = 14$ , 然后变量字母从  $s$  变到  $t$  后去求解。与瓦格纳前面的工作中不同,大部分学生立刻知道问题的解不会变。在下一个作业中,文字项  $t$  被换成了  $t + 1$ , 再要求学生求出  $t + 1$  的值。大多数的学生重新解了方程,有些人直接解出  $t + 1$ , 但是大多数是先求解  $t$ , 然后算出  $t + 1$  的值。再后面的一个作业要求学生从  $4(2r + 1) + 7 = 35$  中求出  $2r + 1$ 。只有一个学生直接解出  $2r + 1$ 。这个研究的结果表明了大多数学生对多个项的表达式作为一个单元来处理有困难,同时也提示了学生并没有觉察到  $4(2r + 1) + 7 = 35$  的基本

的结构是和 $4x + 7 = 35$  相同的。林奇夫斯基(Linchevski)和维纳(Vinner)把它称之为方程的隐着的结构,并且已经发现学生辨认这种结构的能力依赖于他们经历这种活动的新近的程度。

格里诺(Greeno)曾经指出,初学代数的人缺乏那种确定某些变换是否可允许的限制的知识,譬如说,他们不知道怎样去证明某个不正确的解是错的,除非重新去求解已知的方程,看来他们并没有意识到,如果把一个不正确的解代入到原方程将会使得左、右两边得出不同的值。他们也不知道只有正确的解才能使解方程链上的两个表达式有相等价的价值。然而,不仅仅是初学解方程的人缺乏这些等价限制的知识。基兰发现一组 9 名有经验的熟练的高中生也缺乏这种知识。

## 文字题

关于代数文字题的研究文献可以分成 3 个部分。第一部分是处理在许多教本中可以找到的传统的文字题,如年龄问题、距离—速度—时间问题等等。第二部分是关于从函数的角度来处理的问题。第三部分是关于无确定答案的一般化问题,这是在美国的代数教本中难得见到的。

**传统的文字题** 对于中学生来说,一个主要的难点区域就是在典型的文字题中如何用方程来表示其中的关系。在小学里,孩子们难得会用写出方程来表示算术问题。事实上如果要求写出一个填数方程(如 $4 + ? = 7$ ),小孩会先解出问题,然后试着再给出方程。如果孩子们写出一个方程,它通常代表了他们所做的得出最后答案的运算(如 $7 - 4 = 3$ )。我已经在心理学方面的考虑一节指出,必须使初学代数的学生在思考过程中有一个重要的转变,要他们用向前的运算来思考。这种向前的运算代表了问题的结构而不是用作求解的运算。一个传统代数文字题的例子是:

本比璜大4岁。过2年他们的年龄之和是50,现在每人是几岁?

多数对学习代数的学生所用的问题表示过程提出问题的研究发现,学生趋向于或是用直接翻译法或是原理驱使法。

直接翻译法涉及到把文字题词词句句翻译成为含有数、变量和运算的方程。形成这些方程时需要一些词义学的知识,但是解题者则只要用到句法上的规则。

原理驱使法则是利用一个数学原理来组织问题中的变量和常量。譬如,当某个学生读到一个问题,它的开头是“一个划船手向上游划去……”,他立刻想到这是一个涉及距离、速度和时间的问題。他也留意到水流的影响,看船是向上游还是下游行驶。把这些理解性的运算归类到格式中来描述代数解题者所用的原理。

一般说来已经发现,学生往往不易注意到用不同故事的问题在结构上的相似点。他们通常要依靠句法上的翻译方法,有的时候还要用不同的数值代进去来证实他们的方程是否合适。他们也试图用关系表作为中间步骤来得出方程,例如对距离-速度-时间类的问题,然而,他们一般还不能够在表中把关系表示得正确。蔡克林指出在大多数代数方程求解的研究中提示了学生在变量之间要规定关系有相当多的困难。问题的看起来很微小的差别可以对学生构造正确的方程的能力有很大的影响。但是迄今为止,解代数问题的认知研究还不能够解释为什么某些讲授方法在学会求解文字题的图表关系时会对某些学生比另一些学生更有效果。

代数课上教如何求解文字题的最常用的方法是按照一些数学的关系形成一个方程(或方程组),它包含了未知量和运算,然后用一串代数运算来分离出未知量以求得方程的解。在苏联已经(对小学生)做过试验,借助代数方程的意义,用另一个方法来表示和求得文字题的解。为了消除孩子们在决定用向前运算或是向后运算时的困难(苏联人分别称之为直接或间接方法),按照要解的问

题的类型,达维多夫(Davydov)设计和试验了一种基于部分-整体关系的大范围教学的方法。例如对8岁孩子的班级的研究的第一阶段,用纸条割成部分,不同容积的水,不同重量的磨细了的石子,等等来使孩子们明白整体和部分的意思。从一开始,整体和部分在图上都是用字母来表示的,而从来不用数字。后来,把整体和部分用加号、减号、等号在方程中联系起来。学生学会描出对应于像 $k = a - c - b - f$ 那样的公式的图形。大约上了36节关于整体和部分的关系的课之后,才开始进行解方程的第二阶段。像“盒子里有 $a$ 支红铅笔, $b$ 支蓝铅笔,一共有 $c$ 支笔”这样的内容要翻译成一幅画图,一个格式以及3个公式。接着孩子们必须编出对应于已知图画的故事,再往后是对应于已知公式的。最终才引入数值。一个解题剧本的例子如下:

教师拿出一只有刻度的玻璃杯,用橡皮筋来表示其上的水平面( $k$ )。然后,他拿出另一只有刻度的杯子,其中水的量为 $c$ ,最后他把两者都倒入一只饮料杯。现在它装有的水的量是 $b$ 。学生们作出图形来表示量 $k, c, b$ 间的关系,并且记下了公式 $c = b - k, b = c + k$ 和 $k = b - c$ 。

教师:我们用字母记下了水的容量,但是我们也能够用数来测量。开始时我们应该测量哪个量呢?

学生:应该量 $k$ ,第一个有刻度杯内的水。

教师:你们能确定在这个刻度杯内的水的量吗?

学生:(走向桌子去看刻度)这里的水是30克。

教师:好的,让我们写 $k = 30$ 。

学生:现在来看另外那只刻度杯,这里是70克, $c = 70$ 。

教师:在饮料杯内现在有多少水?它没有刻度。我们怎么知道 $b$ 是多少?

(学生感到局促不安,接着有手举起来了。)

柳达B:应该把它倒进一个有刻度的杯子去看看有多少。

施莱若S:不需要。 $b$ 就是整体,对吗? $k$ 和 $c$ 都是部分, $k$ 是70, $c$ 是30。

要得到整体,应该把部分 $k$ 和 $c$ 加起来,得出是100。

值得注意的是学生写出了所有的部分-整体公式,并且当问题提出之后,能够选出那个未知量是被分离出来的公式。这个活动与当前西方的做法有所不同。它要求学生要在头脑中产生一个表示式,它可以是相当的复杂,涉及到几个逆运算。8岁的孩子可以没有明显困难地处理的样题包括有“上午田里有  $a$  部拖拉机在工作。白天里有些拖拉机又参加进去工作,总共有  $b$  部在工作。有几部参加进去?”

对8岁孩子的研究中所得到的肯定的结果,在9岁~11岁孩子那里能够再次看到。他们能够求解更难一点的问题,仍是只有文字数据的。下面就是一个例子:

教师(提出问题): 在一个篮子里有  $k$  只苹果,另一个篮子里,如果拿出  $n$  只苹果,那么剩下的就将有前篮子里数目的两倍。在两只篮子里总共有多少只苹果?

托尔娅:(立刻记下方案; $x =$  第一只篮子里 + 第二只篮子里)在第一只篮子里有  $k$ ……(迟疑,思考)

教师: 对第二只篮子呢?

学生: 有两倍的……

教师: 是整体吗?

学生: 不,拿走了  $n$  个苹果之后才是2倍(停一下)。意思说:里面共有2倍再多  $n$  只(记下公式  $k \cdot 2 + n$ )。

教师: 现在问题已经解决了吗?

学生: 还没有。(写出完整的公式并且读出)  $x = k + (k \cdot 2 + n)$ 。

再把这些方法推广到包括有数值数据的问题。

弗赖登塔尔指出对这种较为复杂的问题,用的是打开的方法:先建立主要的依赖关系,再依次打开这个关系的各支,一直到推导出最后的公式。举个例子:问题是“一只工作台重  $k$  kg,结构改进之后,它轻了  $m$  倍,做  $d$  只这样的工作台可以节省多少金属?”教



师强调了节省的总量是每只台子节省的量和只数的乘积： $l \cdot d$ 。由于  $l$  必须从新、旧两个重量之差来计算，就再打开到  $k -$  新的重量，而新的重量就是  $k/m$ 。现在就可以把最后的公式表示成

$$x = [k - (k/m)] \cdot d。$$

这些苏联的研究工作表明在一个比现在在其他国家所看到的年龄小得多的代数班级，可以有成效地教会孩子去表示并求解问题的一般方法。这也提示我们对我们现有的教文字题到方程的翻译方法值得重新作考虑。在我们教代数的标准方法中就难得强调这种实践——对部分与整体的依赖以及只含有文字数据的问题的运用。

**从函数的视角来处理问题** 在本节中讨论的解题研究包括了一些前面讨论过的类似传统的代数文字题，然而它们的提法和所支持的解法有所不同。一般说，在具体的问题求出解之前要建立起两个变量之间的一些函数关系。往往是函数的表示式有助于讲明白方法上的理解。

在采用函数方法求解问题时，研究者试着使学生从另一个途径去理解未知量和变量。过去的研究已经说明了学生对变量的概念可以是何等的贫乏。譬如说，库奇曼的研究中报道了 CSMS 的研究结果，说明了大多数的 13 岁 ~ 15 岁的学生把字母看作具体的对象或是对具体物体的标签。克莱门特和他的同事们的研究表明，年龄稍大一点的学代数的学生还会继续使用文字项的标签解释。他们发现在用“学生-教授”问题来测验时，学工程的学生中有 37% 把函数关系式（学生数和教授数）表达错了，而其中有 2/3 的人把它表示成了  $6S = P$ 。也就是说他们写出一个“方程”来表示这样的想法——一个教授对六个学生，正像他们用 3 英尺 = 1 码的表示式那样。梅瓦雷奇和伊沙克也报道过一个有关的现象，他们发现在所问到的 150 个大學生中有 38% 回答说，在方程  $3k = m$

中  $k$  比  $m$  大。这些研究结果说明了许多学生仍然将字母作为标签而不是在等价关系中的数。这样的对字母的解释阻碍了他们去把方程理解为不仅仅是一个结构性的数学对象而且也是一个过程。因为方法性的理解至少要求学生去考虑(上例中的)  $k$  (或  $S$ ) 是一个数, 把它乘以 3 (或 6) 就得到值  $m$  (或  $P$ )。

雷斯尼克和克莱门特曾尝试过就“学生-教授”问题的内容来补救代数变量的概念, 只得到了有限的效果。然而, 当作业的要求从产生一个方程换成产生一个模拟同一个函数关系的计算机程序时, 成功率就有所增加。在做程序的环境下在学生的推理中注进了一个动态的方法, 在输入-输出的推理方式的基础上去表示这个问题(即“要计算变量  $S$  的值, 我必须把  $P$  的值乘以 6”)。

其他的研究工作也证实了计算机环境支持了方法性处理的能力, 它包括了指定一个算法去用一个量计算另外一个。基兰、布瓦洛(Boileau)和加拉农(Garançon)关于在代数的学习中使用计算机的研究的一部分中, 进行了一次对一般的七年级学生的 12 个能力试验, 让他们成对地参加了一周两次, 每次一小时的课, 前后历时 4 个月, 环境问题是问题解决中的一个, 它强调的是问题环境中的关系的函数理解。学生用自然语言程序输入到计算机中, 一行一个运算, 用来计算程序中的变量的值。例如:

在蒙特利尔广场上的租让经理给愿意在加拿大冰球运动会上出售花生米的柜台提供两种付款方案。第一个方案是付 28.68 元加上每出售一袋 0.17 元, 第二个方案是付 11.00 元, 每出售一袋加上 0.38 元。问出售几袋时两种方案所付的款相同?

上题可以表示为

输入: 袋数

程序: 袋数  $\times$  0.17 得出第一个部分付款

第一个部分付款 + 28.68 得出第一个付款方案

袋数  $\times 0.38$  得出第二个部分付款

第二个部分付款 + 11.00 得出第二个付款方案

输出：第一付款方案

第二付款方案

输入了他们的程序后,学生将输入若干袋数的尝试值,一直到两个输出变量具有相同的值。这种表示法的一个好处是,相对于标准的方程表示  $0.17x + 28.68 = 0.38x + 11$ ,它和自然语言十分接近。要记得用普通的语言描述来表示和求解问题是在代数符号体系的发展中丢番图之前阶段的特征。这个由计算机支持的函数方法来表示问题的另一个好处是它会帮助学生去用向前运算来思考。这一步对今后用方程来表示文字题的能力的发展是关键。推动学生用向前(而不是向后)运算来思考的特定的方法是通过用几个星期的时间,将函数的情景从实际问题中分离开。譬如说,把以上的问题分成两部分给出。给出了两个付款方案的详细情况之后可以向学生提问,“如果你售出了 50 袋,按第一方案要付出多少?第二方案呢?”再继续这样用不同的袋数问。在学生已能建立了计算不同袋数时的付款的程序后,才问到真正的问题(即出售袋数为多少时,两个方案会给出正好相同的付款数)。经过了几周时间的问题分两步提出后,再向学生提出完整的问题。他们继续用一个含有一行一个运算的若干行的程序。这种教授方法能够帮助学生建立起一个解题的方法,使他们能够轻松地把它正规化。此外,像上面出现的题目看来比涉及变量出现一次的代数文字题并不难于表示和求解。这一点是和菲洛伊和罗杰诺的结果不同的,他俩认为学生对变量出现两次的方程在建立和用正规方法求解时会经历相当大的困难。

费伊(Fey)和海德(Heid)建立了一个计算机强化的,“解题的函数方法”的代数课程,它曾经在第一年代数课的整个年级的学生中试验过。它包含有多种软件,如配曲线的程序、数值表的产生

器、符号操纵器和函数作图器的运用。课程集中于“运用这些计算机工具去(a)建立起学生对代数概念的理解,培养用代数来解题的能力(在掌握符号运算方法之前),(b)使函数概念成为代数学中理论、解题和方法的一个中心的组织主题。下面是一个从他们的课程以及在教给学生时所用的函数的方法改编的一个例题:

卡拉正在计划和她的表妹凯特去 Poconos 度一周的假期。她向她的妈妈借了 195 元去买了一架割草机,为的是用割草去赚得旅游所需要的钱。假设她决定修每块草坪收费 10 元。

1. 列表表示割 0, 5, 10, 15, 20, 25 和 30 块草坪时她的收益。
2. 卡拉需要割几块草坪才能做到“持平”?
3. 写出卡拉割了 35 块草坪后求她的净赚值的计算。
4. 写出一个规则来说明如何计算卡拉的收益是所割的草坪块数的函数。

收益 = \_\_\_\_\_。

5. 卡拉必须割多少块草坪才能赚到 500 元去 Poconos 旅游?

上面的问题阐明了费伊和海德在他们的课程计划中的几个类型中的一个。其他类型的例题以及学生对不同的计算机工具运用的方式也可以在海德的文章中找到。在过去的五年中费伊和海德已经测试过他们教代数用计算机强化的方法。他们有多种形式的估价,而所有的结果都是肯定的。譬如说,他们的一个早期的评估包括了年终与方案内外的学生作面谈。在面谈作业中,方案内的学生在数学建模的目标,如表示式的构造、理解和联系方面都超过了对应的人。在解题的能力方面,他们也超过了传统的班级。在系里的期末考试(要求传统的代数操作)中他们也做得一样好。

德马纳(Demana)和莱特蔡尔(Leitzel)在他们对中学生的教学研究中也曾经用过费伊和海德的代数课程中那样的题目。在德马纳和莱特蔡尔的工作中有一个典型的方案,在开始时提出一个问

题：“有些矩形的长比宽大 4cm”，接着他们就帮学生完成一个表格，其中的标题是宽、长、周长和面积(图 9.5)。

某些矩形中，长比宽多 4cm，完成下表：

| 宽(cm) | 长(cm)   | 周长(cm)   | 面积( $\text{cm}^2$ ) |
|-------|---------|----------|---------------------|
| 1     | 5       | 12       | 5                   |
| 5     | 9       | 28       | 45                  |
| 8.4   | 12.4    | 41.6     | 104.16              |
| 12    | 16      | 56       | 192                 |
| $w$   | $w + 4$ | $4w + 8$ | $w^2 + 4w$          |

图 9.5 摘自德马纳和莱特蔡尔の数値表

表的末一行包括了一个变量，用来描述一般的情况。应用所表述的代数式作为基础，德马纳和莱特蔡尔接着就提出这样的问题：如：“求  $w$ ，当已知  $w^2 + 4w = 45$ ”及“若已知  $4w + 8 = 56$ ，求  $w$ ”。由于这些数值在表上已经有了，学生就有了解方程所需要的一切信息。下一步是要求学生去解出表上还没有的数值，比如“如果  $4w + 8 = 72$ ，求矩形的宽度  $w$ 。”德马纳和莱特蔡尔报道了有许多学生形成了他们自己的解法，就像将不同的  $w$  的值代入到方程中去，直到左、右两边相平衡。

**开放性的一般问题** 代数符号发展的早期的历史记录表明，在方程中用字母来代表未知量是早于用字母来表示已知量和证明关于数值关系的规则。哈珀(Harper)支持这样的判断：“代数课的学生在发展他们处理代数符号的能力时经历了像代数符号系统历史上同样的阶段。”哈珀所用的是开放性的一般问题。哈珀面试了 144 个一至六年级的学生，他发现了三类的(在数学史上被认定的)解。他所提的问题就像：

如果已知任何两个数的和及差，试证你总能求出这两个数。

采用语言表述的方法时，学生不是用代数符号，但还是确定了一个

解法,而且是-一般的(比如:“你将和除以 2,差也除以 2;为了求得第一个数,把和之半与差之半相加;为了求得第二个数,从和之半减去差之半”)。用丢番图的方法时学生用字母来表示未知量(如  $x - y = 2$  和  $x + y = 8$ ,求解  $x$  和  $y$ ),并且说明这个方法适用于任何数,只是不是用符号来表示一般的已知量。采用韦达的方法时,学生对未知量和已知量都用了字母;

设数 =  $x$  和  $y$

$m = x$  和  $y$  之和

$n = x$  和  $y$  之差

一般方程:  $m = x + y$

$$n = x - y$$

相加:  $m + n = 2x$

求出  $x$ ,并代回去求  $y$

重要的是注意到丢番图的求解法中假定了,不管选哪个和和差,可以按同样的方法做下去,因此  $x$  是一个未知量,它的值是待求的。而韦达法有办法来表示任何的和及任何的差以及确定解:这两个数是  $(m + n)/2$  和  $(m - n)/2$ 。这个解不光是一般的,它还用了字母而不是传统的数字。韦达方法提供了一个十分清楚的、把代数方程用作数学对象的例子(而不清楚哈珀的丢番图求解方法需要将方程:  $x + y = 8$  及  $x - y = 2$  作为对象来作运算)。

在一年级中,全部正确的解是语言表述性的。在二和三年级中,语言表述性的解仍然超过另外的两种。在四年级以上,天平才移向先是丢番图式的,然后是韦达式的解的方面。哈珀指示这些现象不是仅仅反映了学生的课堂经历以及正常的代数课程的结构,因为

(i) 在学校中并不鼓励小学生在作业中作出语言表述性的回答。

(ii) 对一年级及以上年级的学生都已介绍过“字母代替未知

数”，并且希望他们在解题的活动中要去运用。

(iii) 最早在二年级时，学生已经用字母来表示已知(是就函数的涵义来说的)，并且把它作为工具来做推广。

(iv) 联立方程组是在二年级时引入的。

显然，在用字母来作出符号表示之前，学生就已能够口头说出问题的一般解。哈珀在研究中也提出，在认知上看，用字母作为丢番图式的“未知”比作为未知更为可取。后一种用法只有少数能力较强的学生才会采用。在 144 个对象中只有 28 个使用了韦达性的回答。这种方法的采用在中学的六年级中急剧增加。哈珀也注意到这些结果是和 CSMS 研究中对于“ $2n$  和  $n+2$ ，哪个大？为什么？”这个问题的回答在四年级学生中 8% 的成功率是很吻合的。他指出在理解一个字母项是变量上是有阶段的。他强调说，学生在比理解字母项是变量早得多时就已用了字母项，也就是说，他们能够在特殊中感觉到一般。对这些结果也可以解释为字母项的方法性的概念是先于结构性的。

关于用字母来表示一般情况的另一个研究是由谢弗拉尔 (Chevallard) 和康恩 (Conne) 完成的。他们描述了学生运用代数的符号体系作为支配数值关系规则的证明工具。作为这个研究的一个部分，他们向一名八年级学生提出了一系列的问题，它包括了：

取三个相邻的数，将中项求平方，从中减去另外两个数的乘积。再对另外三个相邻的数也同样地做。你能够用数字来解释吗？你能够用代数作解释吗？

学生从相邻数 3、4、5 开始做，这样就引出计算  $16 - 15$ ，得出结果是 1。他再用数 10、11、12 来试，也引导到相同的结果。当要求他用代数来解释发生的是何时，他首先写的是  $x^2 - yz = 1$ ，只是让字母来替代所有的已知数。当他意识到只用一个字母较好时，这个学生证明了，这个数值关系的规则的形式是  $x^2 - [(x+1)(x-1)] = 1$ 。谢弗拉尔和康恩指出这个学生虽只是个八年级学生，

在结构性的表示以及应用它们作为思考工具方面具有不平常的技能。

然而,许多学生在应用代数符号体系作为工具来思考和表达一般的数值关系式时并不是如此的成功。李(Lee)和惠勒(Wheeler)在研究学生对推广和验证的概念时,测试了 354 个十年级学生,然后面试了其中的 25 人。他们给一些学生提出的一个问题是(根据贝尔的一个例子):

一个女孩把一个数乘以 5,然后加上 12。她再减去原数,并把结果除以 4。她发现得到的结果比原数多了 3。她说:“不管我从什么数开始做都会如此。”用代数她证明了她是对的。

在做这个问题的 118 个学生中,只有 9 人建立了表达式  $(5x + 12 - x)/4$ ,然后用代数算到  $x + 3$ 。接下来,9 人中有 4 人继续再证明(用代入一些  $x$  的值),从而提示了,这些学生可能还仍处在一个方法性概念(从数值运算得到的)到一个结构性概念的过渡之中。另外有 34 人建立了  $(5x + 12 - x)/4 = x + 3$ ,接着做了左边的化简,只是还没有在代数上得出结论,他们却去做数值的例子,并从例子中得出结论。面试进一步证明了学生无视于他们的代数而把他们的论证放在数值证据上面。李和惠勒的发现提示了,这些学生中的大多数缺乏代数式和方程的结构性的概念,而他们可以利用这种概念来作为证明数学关系式的一个记号性的工具。

在李和惠勒的研究中用到的另一个例子是“用代数来证明两个相邻数的和总是一个奇数。”虽然说这个问题的提法是和谢弗拉尔和康恩的不相同,后者原来要求学生用数值的例子做。它的要求还是和谢弗拉尔和康恩研究中作业的最终的要求是相同的。李和惠勒报道说,他们的学生中只有 7%做出了这个问题。虽然在面试中表明学生对别人的代数证明是重视的,但是看来他们却对自己的数值例子感到更快慰。



里佐蒂(Rizzuti)和康弗里在报道他们和一个主修营养学的二年级大学生面谈时,描述了一个有点相似的经历。这个经历说明了数值例子的力量。情况涉及到一个指数函数的解题。学生想在一系列关于贬值的计算中辨认出一个模型。她感到对于指数问题的最后的实现而言,概括和分解因式看来比不上数值的例子有用。

李和惠勒指出:对于选择要形成代数概括的学生来说,这本身并不是一个主要的问题,往往是这些学生没有办法去应用它和意识到它是一个概括了的陈述。然而多数对学代数的学生在形成符号表示的能力的研究中,不仅像李和惠勒所说的那样,学生感到严重的困难在于应用和意识到它是一个概括了的陈述,还在于形成一个合适的概括。布思在一个旨在鼓励学生去用字母作为推广了的数的教学试验中发现来自学生的强大的阻力。他指出之所以会达到这样的概念化的水平是和建立“高一级”的认知结构有关系的。布思又指出,学生可能对某些要求习惯记法的项目回答得正确,然而却不能够区分正确和不正确的表示法。按照布思的想法,这意味着学生对记号的理解也许要分阶段进行。这个发现在哈珀的关于学生用字母来表示某类问题的研究中也得到了共鸣。值得注意的是:中学生中表现出对表示式和方程有了结构性概念的大约是在7%和10%之间。找出一种办法来使较大百分比的学生能弄懂代数学的结构性的一面是对代数教师的一个挑战。

佩克(Peck)和詹克斯(Jencks)的一份对五年级生的研究说明了一种方法,使得代数“能成为弄懂算术的一个副产品”。这个研究中包括了一系列在教乘法时做的成功的课堂介入。代替单纯地让孩子们计算各种乘法的结果,教师要求他们利用方格纸和小的遮盖用的纸条来表示,例如 $2 \times 3$ (3个小格,做2次)。之后,再用每10格有一条深色线的方格纸来模拟2位数字的乘法,如 $25 \times 27$ 。用方格纸来做数的乘法的经验最终使得学生会写像 $(\square + 5) \cdot$

$(\square + 7) = \square^2 + 12\square + 35$  这类的语句。佩克和詹克斯强调说“如果孩子们对算术完全弄懂了,并且成了他们想问题的一种工具,由之就自然地得出代数好弄懂的结论”。戴维斯也描述过一些对小已经成功的方法,在方法中他们(a)思考情境中的数值关系,(b)用简单的日常用语来明白地讨论,(c)最终学会用字母或其他不会引起误解的记号来表示这些数值关系。

## 函数和图象

弗赖登塔尔在描述函数时,强调的是依赖的思想:“我们的世界不是一个僵化的关系系统而是一个变化的领域,一个变动对象互相依赖的领域,函数是一种特定的依赖关系,也就是在区分为自变量和因变量的变量之间的依赖关系。遗憾的是,就像绍德(Shuard)和尼尔(Neill)所指出的,在目前的函数定义中这种依赖的概念已经荡然无存了。在几乎全部代数的教本中,函数现在是定义为两个集(不一定是数字的)元素之间的一种关系(或同一集的元素间的)使得定义域内每一个成员只有一个像。有些现代化的定义中仍然提到规则,只是依赖的概念没有了。因而正如本节的研究所表明的,代数课上教函数倾向于强调结构性的而不是方法性的解释。

埃文(Even)的一个研究结果说明了在函数的教学中用集合理论的定义的一些效果。她对将要当中学数学教师的8个美国中西部大学的最后一年的学生作了一次关于函数和方程的关系的问卷调查。她要求答者写出函数的一个定义,指明函数和方程是怎样联系的,以及找出一个二次方程的实解的个数(已知二次式的一个正值和一个负值)。这些未来的教师在中学和大学数学课中所受的教育都是以标准的现代化的代数教本为基础的。埃文从152份答案来看,她的结论是(a)这些未来的教师所持的函数观点只限于方程,(b)他们弄不懂函数的现代化定义,(c)他们不能够把方程的

解联系到图形表示了对应的函数的值。

弗斯塔班(Verstappen)区分了三类用数学语言记录的函数关系,(a)几何的图象,线图,直方图,草图;(b)算术的——数,表,有序对,(c)代数的——字母记号,公式,映射。由于通常函数是在代数课上介绍的,所用的是正规的集合-理论定义,也就是作为一个在定义域和值域的元素间的多个到1个的对应关系,最初援引的表示式就是映照图、方程和有序对,然后又扩展到包括值的表和笛卡儿的图。因而函数的教学包含了表示不同程度的方法和结构的表示法。然而,下面的讨论表明了学生趋向于绕过正规的结构性的定义和表示式,而把函数理解为用一个量计算另一个的方法。

斯法德对60名16和18岁的学生作了一次问卷调查。这些学生已经对函数以及它的结构性的定义很熟悉。问卷调查的目的在于了解他们的函数概念是方法性的还是结构性的。大多数被问到的学生的函数概念是个过程而不是一个静止的结构。在第二阶段中涉及到了96个14到17岁的学生,要求他们将4个简单的文字题翻译成方程,并且还提供口头的算法来计算相似的问题的解。他们对口头处理比建立方程做得好得多。这些结果证实了索洛韦(Soloway)、洛克黑德(Lochhead)和克莱门特的研究结论,就是说学生能够处理将文字题翻译成一个“方程”,那个方程的形式是一个短的计算机程序(算法),它规定了如何从一个变量的值算出另一个变量的值。

虽然说学生是在代数课正式接触到函数,在算术课上他们已经对函数机和其他的输入-输出表示有过相当多的直觉的经验。他们早先有的和简单的公式如 $P=4S$ 作为正方形的周长等的交道也提供了代数课上理解函数的基础。另外,在自然科学课上也教过函数,只是是作为变量之间的依赖关系。然而代数课程中的函数教学却没有利用任何先前的经验。马科维茨(Markovits)、艾龙(Eylon)和布鲁克海姆(Bruckheimer)感到兴趣的是,学生在科学和

代数课上接触到的是两种不同的定义,而且两者也可能有相互的作用。

马科维茨等人研究了就科学和数学比较的情况对作业的结果的影响。这个作业就是要求学生来作出一个通过在笛卡儿坐标平面上已给的非共线的点的函数的图象。所测试的是两组九年级的学生,有一个能力强的组和一个能力弱的组。他们都已经数学和科学课上作过函数的图形。结果是大多数的学生都得出了线性的回答,也就是说几乎全部的图象都是由直线段所组成。另外,内容也会影响成功率。在作出非线性回答的学生中,能力强的学生在纯数学问题上比在有科学内容的问题上做得好。这个倾向性在能力弱的学生组上恰好倒过来了。这些结果提示了,对能力强的一组,学生对函数的概念作为一个结构对象就比另一组要更进一步,后者还是把函数看作为一个过程。

马科维茨等人的其他一些结果也是值得注意的。他们

i. 不管问题的具体性质,有三类函数会造成困难,就是常值函数、分段描述的函数和以散点表示的函数。

ii. 对定义域和值域一般容易忽视,不论在问题中是否已明显地提出要注意它们。

iii. 在代数的和图象的形式中,像和原像的概念和表示只是部分地被理解。

iv. 就图象的和代数的形式而言,学生的函数的全部节目单中的例子的种类是有限的,特别是在后一种。

v. 从图象的到代数的形式的转换比倒过来转换更是困难,并且都是以上一点中所说到的有限的节目单为条件。

vi. 技巧处理的复杂性妨碍了成功。

vii. 当给出函数的例子时,则过分地依附于线性函数。

viii. 在由限制定义的函数的问题中,上述的许多困难是很明显的。

他们发现,许多九年级学生“持有的是一个线性的函数的原型”,这一点是具有教学法上的意义的。由于技术的出现,在讲授中就不再必要在作图时局限于简单的线性函数。

德赖弗斯和艾森伯格进行了另一个关于在函数关系的表示中选择方法性的还是结构性的方式的研究。他们对 440 名六到九年级的学生作了关于函数概念的直觉基础的调查研究。他们提出的问题中既有具体的和抽象的情况——关于像、原像、增长、极值和斜率,用了三种表示的背景:图象、图表和有序对的表格。他们发现,能力强的学生挑选的是图象而能力弱的则选用了表格。虽然,图象的和表格的表示都不直接规定如何用一个量计算出另一个,这个研究的结果提示了能力弱的学生可以从表格上比从图象上更容易得到这个方面的信息。

卡普特(Kaput)提出了另一个能支持上述提示的证据,他的研究涉及到一个计算机的模型,用到戴维斯的“猜猜我的规则”活动。这里计算机有一个“秘密”的函数,要求学生根据计算机对学生所输入的数据的反应去把它猜出来。学生可选择计算机的反馈形式——数值的或是图象的。卡普特发现一、二年级的、代数课的学生选用的是数值的反馈(即值的表格)而不是图象的,还要做相当多的指导和提醒才能促使他们改用图象表示的信息。

耶罗沙尔米(Yerushalmy)曾经研究过究竟是否可以用计算机的图象反馈来改进学生用代数式作运算的能力。在一个探索性的研究中,她观察了 7 个各种能力的七至九年级的学生,采用了软件程序 RESOLVER——一种符号的和图象的混合环境,使得使用者可以将代数式作变换并且提供关于变换的正确与否的反馈。对每一个在 RESOLVER 上所做的变换,可以得到 3 个图象的同时展示:(a)原式的图象,(b)目前变换了的图象,(c)两个表达式之差的图象。由于合理的变换不会影响表达式的图象,“差”的图象就是为了提供每一步是否正确的定量和定性的信息。虽然说,图象的反

馈对于已经熟悉图象的那些学生是具有说服力的,耶罗沙尔米仍然感到效果比她所预期的稍差一点。她提出了,由于学生缺少事先的对笛卡儿坐标图的经验,这就妨碍了他们对包含在图象内的信息的理解。她的结论是事先学好图象和函数是运用图象反馈作为一种估价代数变换的正确性的方法的一个主要的先决条件。耶罗沙尔米强调了,既然学生容易误解图象中的信息(这个现象已经在戈登堡(Goldenberg)的文章中有过记载),就需进一步研究在这个用计算机证实学习的领域内怎样做好仔细计划好的教师的介入。

对学代数的学生来说,学习图象时会出现许多困难:斯旺(Swan)指出,学生通常被要求去求出满足两个变元的代数方程的值表,在一个合适的笛卡儿坐标平面上描出点,从图象上读出点的坐标,有时候其目的在于求解一个代数方程(或组)。按照斯旺的观点,只是强调这些技巧的结果是学生看不到做作业的意义,难得碰上直线以外的曲线,也很少练习从实际情况去理解图象。还有若干个关于学生对图象的理解的调查研究也证实了这个说法。

譬如说,克斯莱克(Kerslake)给 13、14 和 15 岁的 CSMS 评估对象的一个作业是要他们去描述图 9.6 中哪个图象表示的是旅行。虽然说这些学生在课堂内都接触过旅行的图象,只有 14% 的 13 岁

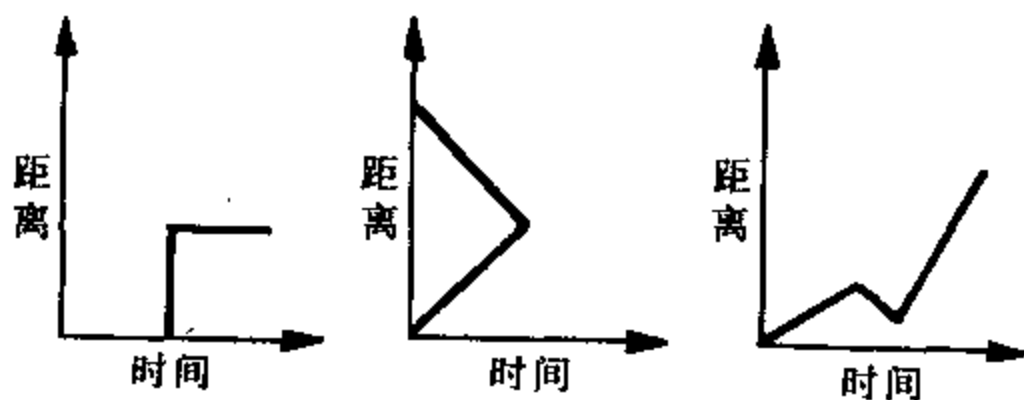


图 9.6 摘自 CSMS 图象作业:要求学生指出哪个图象代表了旅行,并且描述每次发生的是什么?

的和 25% 的 15 岁的学生做对了。许多人把图 9.6 的第三个图解释成“爬上一座山”或“上升,下降然后又上升”,说明了学生把图象和情景的图混淆起来了。(再参阅詹维尔(Janvier)的经典的跑道的例子)。克斯莱克发现有证据说明关于现实情景的图象并不比去掉了实际内容而只涉及符号的方程的图象好理解。看来好些学生不能够把数值数据和笛卡儿平面上的点和数轴联系起来。对数轴特别在尺度方面也出现类似的困难。罗加尔斯基(Rogalski)说过,在计算机环境下,屏幕的反馈能有助于建立起对数轴和坐标平面上的尺度和区间的理解。

另一个英国的研究“单元评估”提出了学生对图象的困难的更多的暗示。他们测试了随机选的 14 000 名 16 岁的英格兰的、威尔士的和北爱尔兰的学生。这个研究报告中说到,对于“下面的哪个图形可以是  $y = (x - 1)(x + 4)$  的图象?”这一问题只有 22% 的被试做出了正确的回答。对于问题:“所示的图象是函数  $f(x) = x(a - x)$  的图象,  $a$  的数值是什么?”只有 9% 能做对。计算机和作图计算器有很强的潜力来帮助学生发展在这个领域的技能,它提供机会让学生去发现参数是什么,以及变动参数的影响,还有在同一坐标系上画出整个一族曲线,然而计算机作图程序和作图计算器不能看成是教学的万能药。舍恩菲尔德(Schoenfeld)、史密斯和阿卡维(Arcavi)的研究(在印)详细地描述了被调查对象在计算机作图环境“GRAPHER”下的学习。莫施科维奇(Moschkovich)在有关的研究中观察了九和十年级的两个班级,不光用了作图计算器,还有 Superplot 和 Green Globbs。技术上增强了的学习环境并不能自动地帮助学生去决定直线和方程的哪些特征是关心的焦点,或怎样去描述他们的观察或结论。但是,这两个研究指出了利用这样的技术,连同能干的教师的必要的教学上的支持,可以帮助学生使图象和有关的方程客体化——通过鼓励学生去对这些数学对象作运算以及谈论。

还有其他的研究报告了学生在正规的函数记号上所遇到的障碍。NAEP 的第二次数学评估的一个作业是要求学生给出当  $a = 5$  时,  $a + 7$  的值, 然后求  $f(5)$ , 当  $f(a) = a + 7$ 。虽说几乎全部学生 (98%) 能够正确地回答第一个问题, 但是只有 65% 能回答出第二个问题。还有其他的研究也表明了函数的正规记法给学代数的学生增加了困难。

上面的研究指出学生从表格上比从图象上容易得到信息, 然而要学生将这个信息翻译到一个表达式或方程, 这个任务就较为复杂了。例如, 有一个 NAEP 的作业涉及到完成在图 9.7 中所示的表格。学过 1 或 2 年代数的大多数学生可以认出来, 格式就是对给出的数值加上 7 (成功率对应为 69% 和 81%)。然而, 如果要他们在同一表格上求出当  $x = n$  时  $y$  的值时, 这时的成功率就较小了 (对应为 41% 和 58%)。

|     |   |   |    |    |     |
|-----|---|---|----|----|-----|
| $x$ | 1 | 3 | 4  | 7  | $n$ |
| $y$ | 8 |   | 11 | 14 |     |

图 9.7 摘自 NAEP 作业, 要求出  $x = 3$  和  $x = n$  时的  $y$  值

格里诺和他的同事们也曾研究过在函数的环境下代数式的形成。例如, 格特纳 (Gurtner) 研究了在涉及一个卷扬器的环境下学习时学生如何又何时会自发地运用一般的代数表示式。他和七、九和十一年级的小组学生合作, 他发现所有的学生能理解情景中的线性函数的主要特征, 但是只有十一年级的学生能懂得, 可以用含有变量的代数式来表示问题的解, 当由于缺乏特定的信息时不可能有数值的解答。

最近施瓦茨 (Schwarz) 已经在建立和评价 TRM 课程 (TRM—所实施的是代数的、图象的和表格式的三种表示方式), 一个以计算机为基础的环境, 包括了函数的开始单元中所教的大多数题目。另外, TRM 的设计是为帮助学生去避免某些在传统的第一年代数



课程中常常会遇到的概念上的障碍,诸如对线性的专门依附,在不同表示法之间信息转换上的困难,对函数的动态概念的缺乏,以及没有能把函数看作为一个数学的对象。这个课程是放在一个九年级的班上去作试验,班上2人合用1台计算机。施瓦茨和他的同事们详细报导的学生学习的一个方面就是关于学生依附于线性的结果。与马科维茨等人的以及卡普拉斯的结果作了比较。施瓦茨、德赖弗斯和布罗克海姆发现他们的对象中有69%到达了部分的或全部的作曲推理(即通过两个已知的点可以画出无限多条曲线),相对于卡普拉斯工作中的18%以及马科维茨工作中的17%。按照施瓦茨和他的同事们的说法,完全的曲线推理就需要结构性的和方法性的知识的完全的融合。他们将成功归诸 TRM 课程,它包含了大量的用图象来定性地表示函数的经历。但是他们也指出在教学中教师不断在教导的和技术的方面受到 TRM 的导引,他们建议“在教学法工程上必须要作很大的努力,以便使教师能够掌握这个复杂的系统,这其中就包含有小组工作的技术,计算机授课,以及传统的授课。”

与施瓦茨工作的肯定的结果不同,在多数关于函数的研究中都发现,学生对理解从结构性的角度来理解图象表示法还是没有做好准备的。另外,关于用了代数表示式的函数的理解又明显地侧重于方法性的概念。德赖弗斯和维纳的研究的结果表明了,教师可能在相当长的一段时间不感到学生需要把函数当作为方法。他们测试了5组学生:(a)上低水平数学课的大学生,(b)上中等水平数学课的大学生,(c)上高水平数学课的大学生,(d)主修数学的大学生,(e)初中数学教师。所提的一个问题是,“从你看来,什么是函数?”对这个问题的回答表明了,虽然说在数学课上强调了用集合论定义的函数概念,大多数的学生并没有接受它。在前面3组中有压倒性多数(73%,70%和63%)的学生拿出的是方法性概念的一些变异(一个函数是一种依赖关系,一种规则,一种运算,一

个公式等等),即便是主修数学的学生也是平分于方法性的和结构性的两种定义之间。只有教师才显出对正规的理解较强的(73%)选择。如果我们从这个结果推断出大多数中学数学教师具有了函数的结构性的概念,而且那也是他们试着去教的话,那么本节所述的研究启示我们要花更大的努力去帮助学生跨过函数的程序性的和结构性概念之间的鸿沟。另外,斯洛文在关于教师的信念和态度的研究中提出,教代数的正规的结构性的方法是远早于教函数概念之前开始的。在通过解题的方式教代数的专题课前和在职教师的面谈中,她觉得那些代数教师看来已感到要很快将学生推向“有效的”(即结构性的)方法。事实上,当描述猜和试的方法的好处时,一位讲师承认这种方法是相当“原始的”。

本章始终强调了由斯法德所建立的方法性的-结构性的代数和代数学习的见解。在本节最后应该回顾的是她所实施的工作。她的目标是要帮助学生去完成从方法性的概念到结构性的转移。本章前面所提到的研究都表明,虽说是用了有导向性的教学方法,在中学生中,对代数对象建立起了结构性概念的还相当的稀少。学生的概念多数是方法性的而不是结构性的。斯法德设计了一个对函数的研究,光用一个运算性的(这是斯法德用的词,相当于我用的方法性的一词)方法,然后逐渐变换到一个结构性的方法。主要的目的在于看看究竟坚持用一个运算的到结构性的次序的教学能否在学生中激发出一个结构性的概念。

在一个年轻的成人班上,作为算法和可计算性的 60 学时的程序课程的一部分,讲解了函数的概念。最开始时,“函数”这个词几乎是作为“算法”的同义词来用的。后来又把函数一词用来作为算法的“产物”。最早一次进行将函数和算法区分的尝试是在那一套已知的算法和所得出的函数已经数次得到了拓广之后,其中已经包括了循环算法和定义域分段的算法。讨论过各种从其他函数构造函数的方法之后,就渐渐地推行出函数是一个自给的实

体的观点,这个实体也能够成为构造其他存在体的构件。只是在很长的一段时间之后,才用布尔巴基(Bourbaki)的抽象定义来替代函数的输入-输出的描述。在这段时间里,学生的注意力被集中在不同算法的静态的产物上而不是在算法本身。最后的推广引到了不可计算的(非算法的)函数的问题。希望最后的那个问题就是具体化的最终关键。

斯法德在整个课程的进行中对课堂作观察,她发现最早要转移到结构性方法时,遇到了阻力和缺乏理解。许多学生不能应付函数的集合或在函数上作运算的一般定义。随着时间的推移,困难逐步地减少,但是却不是完全消失。斯法德注意到,当要求学生去描述一组循环函数时,几乎有一半学生对将函数作为其他函数的构件表示有困难。按照斯法德来说,当提出不可计算的函数这一概念时,引起了学生的惊奇和反对是不足为奇的。

在课程的结束时,斯法德进行了一次问卷。从回答来看,已经有了对函数的结构性概念的实质性的进展。然而,她也注意到“我们推行结构性的概念的尝试还不能认为是完全成功的。”她还推测道,“具体化生来就是那么困难,以致可能不管用的是什么教学方法,有些学生始终达不到结构性的概念。”虽说,看来斯法德对所投入的努力和所取得的进展之间的距离感到失望,但是研究的成果确实提示了:一种以程序活动为主的处理函数的方法,虽说对强调方法性的一面是有价值的,然而可能和可计算性联系得太紧密而不允许得出一个完善的函数的结构性概念。

## 结 束 语

在这一章里,我采用了历史的-认识论的视角,尝试了使现有的代数研究的大部分重新概念化——用了一个方法性的-结构性的代数学的以及学和教代数的模型。这样做的时候,我想要创造

一个框架来理解学生在学习代数时的困难。在结束语中,我再一次提出在引言中我曾提出的造成困难的三个因素——内容、讲授和学习。然而,我综合这几点的次序和这一章的写法正好倒了过来。我这样做的主要理由是,所回顾的那些研究内容是和学有关的,而这个研究则涉及到教。考虑到教的研究,这两个领域的结果都引向我的建议——关于内容的结果。在讨论每一个点时,我会简要地提到保证会有进一步研究的几个方面。

## 学习

从某种意义上说,学习是最好处理的一个因素,大部分的关于学校代数的研究都是集中在这一方面。从本章的研究结果来看显露出两个首要的主题:方法性的理解超过了结构性的理解,以及获得代数的结构性的概念的困难(在本章内用词方法性的和结构性的的方式已在本文前面作过说明)。

可以从下面几个例子中看到方法性的理解的易懂性:学生很容易得出计算解的口头解决办法或计算程序而不是表示同一个关系的方程;他们并不费劲地创造出问题情况下的函数的输入-输出的表示式;在某些程序环境下便于将字母看作数;在将关系式一般化时学生偏向于作数值的验证;反映依赖思想的函数图象的概念的各种表示等等。

学生所经历的对代数结构(即便是在中学教本中最初等的方面的)理解的困难可以举例如下:他们最早想把表达式换成方程是为了得到一个包含了结果的表达式;在简化式时所犯的那些不系统化的和方法上的错误;他们不愿把方程作为一个对象来运算,表现为不肯应用“在两边作同样的运算”的办法来求解方程;他们不以为等号是对称的记号;他们普遍地不能将变量看作变量或已知量,也不能将文字题翻译成为方程;他们对看到方程中“隐藏着”的结构感到有困难;他们不是用代数作为证明数值关系的工具;他们

一般说不能够将对代数客体的“过程”理解转化为“对象”理解,等等。

从代数学习方面的研究结果的检阅所得出的全面的结论是,多数的学生并没有获得代数的结构那个侧面的真正的感觉。在这一章内的研究按照教的先后题目排列,表明了大多数的学生从未达到方法性-结构性周期中的结构部分。最差的情况下,他们只是背下了一个伪结构性的内容而最好的也只是他们建立起了并且继续依赖于方法性的概念。然而在这幅凄凉的关于代数学习的图画中,还是有一些希望。一些带有教学成分的研究已经证明了:如果有了经验的话,学生是能够建立起代数中某些方面的结构性的概念的,譬如说,在算术和代数的背景下的域的性质;对两边都含有代数式的引入;把文字题翻译成不只是一个而是几个可能的方程;用不含糊的记号来记录数值的推广(甚至在小学内);只含有文字数据的问题的求解;借助于计算机作图软件来处理含参数的函数方程,以便演示出函数族的图象,等等。

从后面的这些研究中的证据提示了,首先,要在课堂教学中作更多的努力,以便创立一个坚固的基础来建立代数学的结构性的概念,那是要通过花费更多的时间在方法性的概念上。斯法德强调了,需要有一个长时间的经验才能使方法性的概念转变成结构性的概念。研究表明了方法性的(输入-输出的)概念是易懂的,而对这个领域的加强可以使代数活动变得更为可以理解 and 有意义。第二,从方法性的到结构性的概念的转换,看起来,需要比目前在大多数教本中所得到的更明显的注意。还只有少数几个研究是面对如何去促成这个转换的问题的。然而还要注意到:获得结构性的概念以便使得表达式、方程和函数都认为是对象并且是作为运算的对象,这并不排除继续需要方法性的概念,它是构造结构性概念的基础。正如斯法德指出过的,两者都在教学活动中起着重要的作用。但是关于代数学中两个概念的作用以及它们的相互作用

就更少有过研究。李和惠勒曾经证明过,对于学生来说,算术和代数好像是两个封闭的系统。对课堂教学的挑战,不仅仅是造成这种算术到代数的联系,还要使这种联系存活下去。就是说要建立一种在方法性的和结构性的概念之间来来往往的能力以及能按照手头的问题来选择使用这种或那种视角的能力。

在所有可以进一步开展研究的领域中,需要明显注意的是寻找建立学生的结构性概念的方法。这种研究的一个例子就是本回顾中报道的最后那个,其中斯法德试着用一系列的方法性-结构性活动来引出学生的结构性的概念。虽说,就她的学生来说,她还只是部分地取得了成功。这一类的研究能有力地增进我们的知识——如何来帮助学生创造这些实体以及在其上作运算。这些实体,我们认为,是代数学的对象。

## 教学

我们已经看到,对代数教师的研究的数量是极少的。从这些少量的研究来看,他们的概念是结构性的,而且这也是他们在教学偏爱的方法。尽管有这样的代数教学的性质,学生好像极少能够建立起羽毛丰满的结构性的概念。

那些愿意考虑改变他们的结构性的教学方法的教师,如果不再按照目前在多数教本中形成的和安排了教学内容进行教学的话,就必须到其他地方去找到指导。然而这样的指导却不容易得到。首先,还没有现成的通讯形式使得教师可以获悉研究的结果以及如何把它们用于课堂教学。有些数学教学研究杂志规定的目标是传播认知方面的发现和讨论它们在教学上的含义,然而看来许多出版的文章好像是给其他的研究人员看的。第二,教师只有很少的时间到附近的大学图书馆去找到研究的结果,而这却是在多数情况必须做到的。不脱产的代数教学的课程以及和研究人员的合作虽说在提高教师对值得在课堂内尝试其他方法的关心是有

效的,却是更不容易找到的。

由于教师只是按教科书教,所以为了确保方法性的概念被建立起来,并且精细地加工成结构性的概念,就必须有这种姿态的教科书。不管怎样,前面在教学观点这一节内的备注还是可取的。不管教科书上规定的是什麼内容,日前的教学研究的文献中关于代数教师如何理解和传授那个内容之间还有巨大的缝隙。这可能就是需要注意作研究的领域之一。

## 内容

如果学生对教师所教的代数感到有困难,而教师是按教本上的代数在教,那么对代数的困难产生的一个主要的因素是,由于疏忽了教本所提供的内容。当前,在多数代数教本的内容中并未编进关于学习的方法性-结构性的视角,也未反映代数学是如何历史地演化过来的。最近有一套中学的代数教材(英国的 NMP,1987)出版,哈珀和库奇曼都参与了这项工作。这套教材阐明了如何使代数课程可以建立在逐步发展的字母的概念上。从字母作为特定的未知量到作为已知量是一个从方法性的到结构性的逐渐演变。在这套书中采用的方法提示了,如何使代数内容的出现可以避开一些与按最近建立的正规定义和结构的视角引进代数有关系的陷阱。但是据我所知,还未开始研究对这些教本的长期的认知冲击。然而用这个方法的某些元素实施的研究已经产生了一些很有希望的结果。

代数课程的决策者和教材作者当前要考虑的另一个方面,也就是我尚未直接讨论的方面,就是科技的作用。建议在改革代数课程中要利用现代科学技术的人倾向于不去强调符号操作而是强调方法性的解释。赞成删去目前用于代数式的化简的大部分内容的一个理由是出现了计算机化的符号操作工具,它同样可以完成这些化简。然而,像莫勒(Maurer)所指出的:

在某些情况下,你能够用这些系统去将表达式从一个变换到另一个,但是你必须很清楚,也很坚持不懈,你要做的是做什么……或许学生可以不做很久的笔和纸的工作而学会,或许他们可以看计算机为他们解了许多例题而学习,但是我不清楚他们是如何学的。

换句话说,在学习代数的早期,应用符号操作器,如何能帮助学生建立起代数式的结构性的概念不是显而易见的。这是一个将来要研究的问题。

我曾经主张过扩展代数学的内容来添加那些能推进方法性的理解的活动和使方法性的过渡到结构性的概念变得明晰的活动。增加对方法性概念的突出是和那些希望看到在代数课程中科学技术用得广泛的人的建议相一致的。要注意到全美数学教师理事会在它最近的《学校数学课程和评估标准》中也有同样性质的建议。从应用计算机作为工具用于函数的,输入-输出的解题方式的研究所提出的证据当然是一种令人感兴趣的迹象,它表明了学生在方法性的理解方面可以达到什么程度。然而,除开像施瓦茨所进行的研究外,在一个有科技支持的课程中将一个方法性的概念发展到一个结构性的可能性至今还是远非清楚的。卡普特已经详细地描述了如何用科技来帮助学生在各种两个变量的记号系统内锻铸链接:数据表,坐标图象和方程。但是除去图象以外(像多数的几何对象那样,可以做出全面的和结构的感知),涉及用这些记号的多数认知活动仍然停留在方法性的水平上,两种概念间的转移仍然是隐式的。

在代数的学和教中,方法性的和结构性的概念是同样重要的。正如在前面已经叙述过的,虽然数学家宣称他们依靠的是结构性的概念,他们也运用了方法性的。另外,我们也已看到代数学在历史上是如何按照方法性的-结构性的周期发展起来的。也有一些



强有力的证据说明学生在学习中也要经过同样这个周期。这里的文献的回顾说明了代数的教学和内容都强调了结构性的因素。但是,研究已经表明大多数的学生不能够到达这个目标。因此已经有这样的建议:借助于学习数学的方法性-结构性的动力,对代数的内容和教学重新作考虑。然而,这些建议所靠的研究基础还是较为薄弱的。无论怎样,目前的结果表明我们是在朝着正确的方向行动。按照本章的观点继续研究会得到作出最终决策的依据的。

## 十、几何和空间推理

Douglas H. Clements

Michael T. Battista \*

空间认识对于解释、理解和欣赏我们周围的几何世界是必要的。(全美数学教师理事会)

几何就是把握空间……那是儿童生活、呼吸和运动的空间。为了更好地在这个空间里生活、呼吸和运动,儿童必须学习了解、探究和征服空间。(弗赖登塔尔(Freudenthal))

由于实践活动和人类描述自己周围环境的需要便产生了几何形式,并在它们具有了自己特有的抽象意义时慢慢地被概念化。如来自地球测量实践的理论就发展了一系列关系和定理,在欧几里得(Eucild)原理中对所有这些知识进行的收集、综合和详尽阐述,达到了这种理论的顶点。(费尔(Fehr))

方程正是数学中令人厌烦的部分,我设法用几何来理解事物。(霍金(Hawking))

学校几何研究的是关于空间物体、空间关系、已被形式化(或数学化)的变换以及已被重新构造用于表示它们的数学公理化系

---

\* 作者克莱门茨(Douglas H. Clements)是纽约-布法罗州立大学计算机和数学教育副教授。

巴蒂斯塔(Michael T. Battista)是肯特州立大学的数学教育教授。

统。另一方面,空间推理由一系列认知过程所构成,通过它们能构造和操纵空间物体、关系和变换的心理表述。显然,几何和空间推理相互紧密联系,而且大多数数学教育工作者似乎把空间推理作为几何课程的一部分。例如,尤西斯金(Usiskin)描述了几何的四个方面:(a)形象化、绘图和图形的构造;(b)物质世界空间方面的研究;(c)作为表述非形象数学概念和关系的工具来运用;(d)作为形式数学体系的表示。这些方面的前三个需要运用空间推理。

一用到术语“学校几何”,尽管还有大量(例如,综合的、分析的、变换的和向量)研究这一课题的途径,但通常大多数所指的是欧几里得几何。传统初中几何观点的本质是公理化,而传统小学几何则强调测量和在高一级学校所需基本概念的非形式化发展。按照苏伊丹(Suydam)的看法,几何教育的目的应当有如下大量的协定:

- 发展逻辑思维能力;
- 发展关于真实世界的直觉;
- 能按需要学习更多数学的知识;
- 教阅读和数学论证

全美数学教师理事会课程标准号召所有的学生

- 识别、表示、比较、模型化、画出以及分类在二维和三维空间中的几何图形;
- 发展空间意识;
- 探究转换、联结、划分和变换几何图形的结果;
- 理解、应用和推导包括全等和相似在内的图形之间关系的性质;
- 发展具有表示和模式化现实世界意义的几何的鉴别力;
- 探究几何综合、几何变换和几何坐标的方法。连同大专基础的学生也需发展通过调查和比较不同几何系统来理解公理化系统;
- 探究几何某些方面的向量方法。

本章包括七个主要的部分。首先,作为整体研究的背景,扼要概括了学生在几何中的成就;其次,考察关于几何思维发展的三个主要理论——皮亚杰(Piaget)、范·希尔夫妇(Van Hiele)和认知科学的研究;第三,讨论几何真理的建立,侧重于理论和经验两方面的工作;第四,空间思维和数学之间的关系,空间推理和想象的特征,以及教学空间能力的尝试;第五,几何思想的表示,包括涉及到概念、对话、操作和计算机等方面;第六,考察分组和交互文化的差异;最后,从这些研究的主题得出概括性的结论。

## 学生的几何成就

按照数学学习的粗的评价,美国的中小学学生在学习几何基本概念和几何问题解决方面是失败的。可悲的是,他们不具备学习更复杂的几何概念和证明的基础,特别是在同来自别国的学生比较时。例如,来自台湾和日本的五年级学生的几何测试分数是美国学生几何分数的两倍多。在形象化和折纸测试中,日本学生在一年级和五年级的分数也高一些(台湾的学生稍微高些)。斯蒂格勒(Stigler)和另一些人假设,导致后面的结果也许是日本班级对概念形象化表示的极好的信心和学生对获得画图能力的期望两方面的原因。来自第二次国际数学研究(SIMS)表明,美国的八年级和十二年级学生获得的分数在100个国家中居于25位或25位以下。

尤西斯金用引自1982年美国教育进步国家评定(NAEP)的数据指出,已知三角形两角度数能求出第三角度数的13岁学生少于13%,只有20%的学生能求出已知两直角边长的直角三角形的斜边长。(他得出结论,更多的学生能做更困难的计算,因为它被教给更多的学生。)在1986年的NAEP中,库柏(Kouba)等人报道了学生在识别诸如平行线、圆的直径等普通几何图形的成就,但学生在

诸如相互垂直直线和圆的半径等在生活中并不经常遇到的图形中的成就则被报道为贫乏的。处理图形的性质,形象化和应用的成就也是贫乏的。例如,只有 60% 的七年级学生能识别图形关于直线的反射象,只有约 10% 的七年级学生能求出给出一边长的正方形面积(56% 的人能求出给出边长的矩形面积);低于 10% 的七年级学生能识别可构成三角形三边长的数集(如果给出线段,有 66% 的学生能作)。显而易见,如果形象化而不用言语表示问题,学生们能更好地把握问题。

高中的情况更糟。首先,全体高中学生中只有大约一半人选修几何课程,在选修学年开始时,除注意分散者之外还仅有 63% 的人能正确识别所表示的三角形。按照 1978 年 NAEP 数学方面的结论,只有 64% 的 17 岁学生知道矩形是平行四边形,仅 16% 的人能求出由两个矩形所组成区域的面积,仅 9% 的人会解决“铺长 30 英尺、宽 20 英尺、厚 4 英吋地层,需要多少立方英尺的混凝土?”问题。学了一年高中几何的 17 岁学生中,只有 57% 的人能计算长方体的体积,54% 的人能求出直角边长是 3 和 4 倍数的直角三角形的斜边长,并且只有 34% 的人能求出直角三角形的面积;进入初中学生的 52% 能陈述给出边长的正方形面积;在 1986 年的评定中,没有选修高中几何的十一年级学生与七年级水平的得分基本相同。尽管在项目所需几何性质知识和应用上有很大差异,但是选修几何和不选修几何的学生在形象化方面的成就却几乎没有什么差异,并且不论他们是否选修几何(尽管从小学到大学都研究对称),只有低于 25% 的八年级学生能正确地识别有对称轴的图形。更多的课程控告是事实,只有 30% 的高中学生选修几何是出于能书写证明或展示任何证明意义的理解目的。在 1982 年 NAEP 关于 17 岁学生的评定中,做证明是受喜欢程度最低的数学课题,把数学课题看作重要课题的人数低于 50%,这并不足为奇。

学生几何知识的这种令人沮丧的场面,可通过对学生误解的

思考而作详尽的阐述,这里是一些例子:

- 角必须有一条水平射线
- 直角是指向右的角
- 作为图形边的线段必须是垂直的
- 垂直或水平的线段不是斜的
- 底边不水平的正方形不是正方形
- 看一个图形能成为三角形的唯一方法是看是否等边
- 三角形或平行四边形的高是紧邻底边的边
- 四边形的内角和它的面积相同
- 毕达哥拉斯定理能被用于计算矩形的面积
- 假若一个形状有四条边那么它是正方形
- 通过把四边形转换成有相同周长的矩形能获得四边形的面积

显然,更多的几何概念的学习是靠死记硬背,经常不理解性质、典型结论、关系和含义。

导致成就贫乏的原始原因也许是课程,应教什么内容和他们该怎样教这些内容。标准的小学和中学几何课程主要的问题是关于辨别和命名几何形状,写出简单几何概念的恰当符号表示,用诸如圆规、量角器等测量和构造工具发展技能,以及在几何测量中运用公式。这些由不相关概念组成的大杂烩式的课程,没有系统渐进到高一级思维水平——这高一级思维水平需要复杂概念发展和大量实质的几何问题解决。此外,教师甚至连那些对他们来说可以达到的一点点几何课程也不教。例如,波特(Porter)指出,整个地区的四、五年级教师度过了“实际上没有时间教几何”的教学。实际上教几何时,几何是些最经常鉴别的提纲,开始教学时只是为了陈列;也就是说,几何只给出扼要的、粗略的总结,SIMS关于八年级的数据指出教师给出的学习几何机会比给出学习其他任何内容的机会都少。在初中水平,尽管学生事先并未准备处理形式化证明,但是就像尤西斯金所概括的,传统的重点一直是形式化

证明。

小学水平没有几何课程。其结果是导致学生进入高中不知道成功所需的足够的几何知识。初中水平有几何课程,但只有约一半的学生接触这些课程,这些接触的學生中又只有约 1/3 的人理解这门课程。

## 几何思维的发展

皮亚杰和英海尔德(Inhelder): 儿童的空间概念

**两个主要思想** 我们将讨论皮亚杰和英海尔德关于儿童空间概念的有影响的理论的两个主要思想。首先,空间表示是通过儿童主动和内化行为的逐渐组织而构建起来的,导致了运算系统。因此,空间表示不是空间环境感性的“读出”,而是来自环境早先操作活动中的积聚;其次,几何思想的逐渐组织遵循定义的顺序,这种顺序比历史的顺序,即最初构建拓扑关系(例如,连通性,封闭和连续性),后来是射影(直线构成)以及欧几里得(多边形,平行和距离)关系,更合逻辑。这已被称做拓扑首位的论点。

反复讲皮亚杰和英海尔德所讨论的儿童空间表达能力是重要的。他们断言知觉空间早在感觉运动时期就被构造。然而,感觉空间阻止了代表性的、或概念化的空间的发展,在这个过程中发展也体现了拓扑首位问题;它是被建构的,而不是来自外部发展的存在。此外,表示的空间反映了逻辑运算思维的特征。

### 拓扑的地位和建构主义

**触觉依据。**皮亚杰和英海尔德提供了支持建构主义和拓扑首位两主题的第一个实验证据。实验要求儿童用触觉(触觉感知)探究隐藏的物体,并画出这些物体的图形或与复制品相匹配。原始

报告指出学前儿童依靠像闭合或是否拓扑等价等拓扑特征识别物体。只有后来他们才能从曲线形中区分出直线,最后区分像正方形和菱形等闭合的直线形。

皮亚杰和英海尔德声称更复杂的、综合的立体概念的发展包括系统和协调作用的增长。在发展的第一阶段,儿童在探究过程中基本上是被动消极的;例如,他们也许只摸形状的一部分,作用的结果导致触觉感知。当儿童用在它们之间建立的关系来调节他们的行为时,他们就能建立起图形的准确表示。例如,每个动作的系统返回到其出发点就使得图形的各个部分得到了综合。当每个智力动作变成可逆时,才能使其与其他的动作既有区别而又能协调成为一个整体。

那么,从这方面看,形状的抽象不是物体特性感觉的抽象,而是儿童协调行为的结果。儿童“只能‘抽象’诸如基于等同化的相等关系,源于用手和眼不改变方向追踪的直线思想,以及源于两条相交线运动的角的思想”。

作图依据。因为作图是一种表示行为,而不是感觉行为,皮亚杰和英海尔德认为不准确的作图反映了空间表示的心理工具不足。事实上,幼小儿童无法画出一个很简单的形状,这就被看成表明不是被动的感受,而是动作的协调是形成空间概念的基础。他们还断言儿童所画的几何图形复制品首先表述了拓扑特征。例如,在0水平(3岁以前)没有能被识别的目的与目标,儿童只是简单地涂画。在亚IA阶段(到大约3岁11个月),圆被画成一个不规则的封闭的曲线,并且正方形和三角形同圆没有什么区别;尽管儿童没有区别直线形图形和曲线形图形,但是复制图形却有原图形的正确拓扑性质(例如闭路,在其内部或其上或外部带有小的闭路)。这种争论的一个明显问题是画图不准确也许是由于原动力的困难。可是,皮亚杰和英海尔德提供了像儿童用直角而不用正方形画松树枝的支持例子,而不接受这样的争论。



在第Ⅱ阶段(大约4岁),欧几里得图形还有进一步的不同。这个阶段的标准是正方形和矩形的成功复制,像角和倾角等欧几里得关系只是缓慢地发展。只有在第Ⅲ阶段(大约6岁~7岁)才克服了所有问题。例如,皮亚杰和英海尔德指出通过从复制正方形到复制菱形需要至多两年的工作,而证实所构造的欧几里得形状比改正直观印象却需要更多的时间。这样的任务包含有行为复杂的相互作用。对于皮亚杰和英海尔德来说,首先形成的是拓扑关系,因为它们代表了形态得以抽象出来的那些动作的最简单的组织(例如,在乱涂画中由原始运动节奏所分离出来的元素),另外关系的发展要花长的时期。

**射影空间** 对皮亚杰和英海尔德来说,在拓扑与射影或欧几里得性质关系之间的差异涉及到不同图形或物体与另外图形或物体的关系的方式。前者是特定的图形的内部,后者是包括图形和物体(射影的)或图形自身之间的(欧几里得)关系。射影关系从心理上开始于不再孤立地观察图形,而开始于考虑到的有关观察点。例如,直线的概念来自儿童确定目标方位或瞄准的动作。当然从很早的岁月儿童就感受到直线,但是他们却不会沿着不平行桌子边的直线路径放置物体。代之以他们企图沿桌子边或曲线接近这样的路径。这不是感觉的问题;他们意识到直线不直,但是他们又找不到一种恰当的表述来说明这个事实。他们只强调直觉,空间表示,并被注意力不集中的感觉构形(例如,桌子的边)所更改的早先感觉所内化模仿。内部表示以运算为基础,因而能限制感觉构形的影响。因此,在大约7岁,直的路径被儿童用沿着一条轨线自发地瞄准或对准目标投掷所构造,他们把自己放在用两标杆所连的直线上。

这样的发现为诸如“三座山”作业的实验所证实。在“三座山”作业中,儿童必需从木偶的视角去构造一个场面(现场、舞台、活动

领域、生活方式),对木偶的每一个新位置,幼小儿童都要有条理地做他们重构新视点的任务,但总是作出与他们自己所处位置相同的结论。因此,皮亚杰和英海尔德推断儿童必须构造参照系统,这不是来自于经验所熟悉的,而是来自操作的联结和所有可能视点的协调。他们得出了视点的整体协调是构造简单射影关系基本前提的结论。尽管这些关系取决于已知的视点;不过,单一的视点不能以孤立的方式存在,而且一定需要联结所有视点在一起的完整系统构造才能存在。

**欧几里得空间** 皮亚杰和英海尔德接下来研究了假设是介于射影空间和欧几里得空间之间的概念发展。例如,建构相似形的概念,这些实验说明角和平行概念在儿童中期逐渐地获得。最后,在欧几里得空间的发展中,儿童形成了在二维参照系里“看”物体,就是说皮亚杰和英海尔德怀疑关于人有在二维或三维参照系统中安排物体的内在的倾向或能力的断言。空间意识并不开始于这样的组织,相反,参照系本身是欧氏空间发展的顶峰。

为了证实水平状态情形的假设,给儿童看装满半瓶有颜色水的广口瓶,当广口瓶被倾斜时要求他们预言水平面的空间方位。对垂直状态而言,一个空瓶里悬挂着铅垂线,它也被同样地倾斜;或者要求儿童去画山边的树。儿童首先不会表示平而,例如,他们用乱涂抹来表示水。接下来,水的水平线总被画成垂直于广口瓶的边,而很少考虑到倾斜;即便在一个确实装满水的倾斜瓶紧挨着图放时,也难以改变他们对图形的满足。然而,“如此简单而普通的被理解的事情却缺乏有组织的图解式的记录”的现象却十分突出。有时候,儿童意识到水移向瓶嘴,他们提高了水的水平面,而且仍保持曲面与边垂直。只有在最后阶段(在大约9岁)儿童才依赖较大的空间参照系——桌而——为了确定水平线。

最终,构造欧氏空间的参照系类似于一个由位置或方位网络

所组成的容器,容器中的物体可以活动,但位置是静止的。从三维空间所有可能位置的联立结构出现了欧几里得坐标系,这种结果扎根于先前的直线(如保持一种连续旅行的方向)、平行和角的概念中,它们的方向和倾角紧随其后。这就导致了逐渐取代位置本身间有相似关系物体之间的顺序和距离关系。空间似乎失去了所有的物体以便组成空间本身。因此,空间直觉不是“读”,或是对物体性质的天生理解,而是在对这些物体进行活动中产生的一种关系系统。

**皮亚杰和英海尔德工作的评论** 如同日内瓦派的很多工作一样,皮亚杰和英海尔德的儿童空间概念理论有着广泛的影响和评论。一种评论是他们的诸如拓扑的、分离的、邻近的和欧几里得的术语的使用,以及这些概念和他们研究设计的相关概念的应用,数学上并不是很精确。

与这种评论相关的是图形按拓扑性质还是按欧几里得性质分类的问题。虽然每一个图形都同样具有这两个性质(也就是说,人们不能只简单地讨论欧几里得图形),但皮亚杰和英海尔德的实验依赖于相互排斥的图形分类把这些图形分成两类。更进一步,由于他们所使用的很多图形拓扑等价(见图 10.1),人们不能断定幼小儿童作出的选择是否基于拓扑性质。现在还不清楚为什么认为某些像这样的异常是作为缺乏画图技能而不予考虑,而另外一些,像不能画好一个正方形的直边等情况,却要考虑。给出此类问题的重复研究是重要的。

**关于理论的另一一些研究** 严格重复皮亚杰和英海尔德实验的研究者一般已证实了他们的发现。然而,这些研究也产生了些引起分歧的结论;例如,几个研究者报道,即便在最早的年纪(2岁~3岁),儿童也能区分曲线构成的形状和直线构成的形状,这与皮

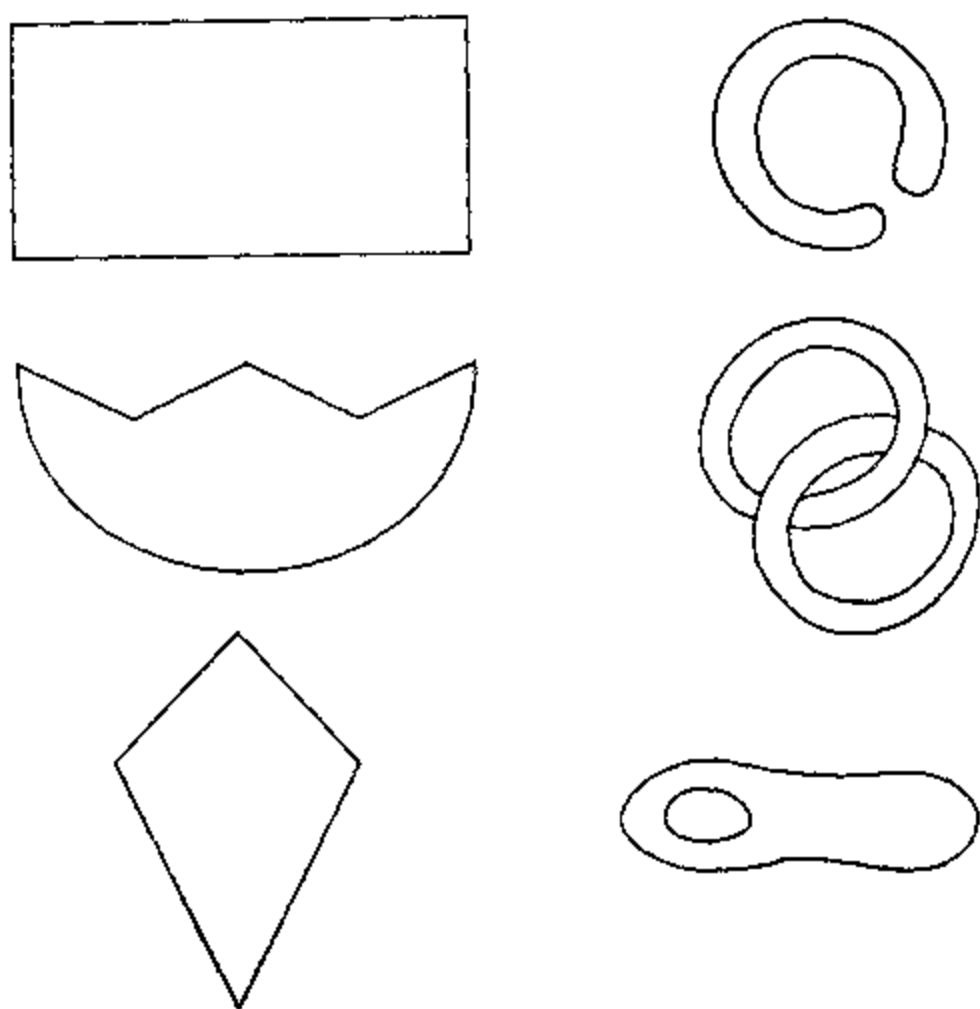


图 10.1 在皮亚杰和英海尔德的实验中,左边的图形被认为是欧几里得图形,右边的图形被认为是拓扑形式的图形

亚杰和英海尔德的理论相矛盾。

无论怎样,儿童在拓扑性质与欧几里得性质相对时,显示出一种偏向是可能的。这里,基本确证的结果已同那些与预言相矛盾的结果相混淆。例如,识别曲线构成的形状,至少就像识别被称为拓扑图形的图形一样容易。

通过显示给儿童一个测验的形状后,移开形状,再要求儿童识别最像它的形状等几项研究,来设法改善分歧的问题。埃斯倜(Esty)发现 4 岁儿童将拓扑等价的形状归为最像原形的一类。无论怎样,年纪较大的儿童组至少会像原始情形那样选择图形。综

上可见,作者指出皮亚杰的理论为一重要的条件所支撑,这个来自实际而被歪曲的条件是不真实的;可是,就像它包括测量一样,这是一个公制概念。马丁(Martin)使用一套图形和三个变量:A拓扑地等价于模型,而B和C尽管在欧几里得观念下不严格地等价于模型,然而与它们被改变去掉一个特殊的拓扑性质的事实相适应,它们保存了模型的很多欧几里得性质;因此,B和C保存有直、弯曲、线段长和角的大小等A不具有的性质,但B失去了连贯性,而C改变了封闭性。4岁儿童比年龄大些的孩子较少会把拓扑等价的复制品选为最差的。但是最差的得分情况是在或超过了或然性水准,因而并不能证实皮亚杰和英海尔德的理论。此外,4岁儿童在选择过程中牺牲拓扑性质就像8岁儿童所做的牺牲拓扑性质一样。

设计这种测验的困难是测定形状等价程度的数量。吉斯林和沙(Geeslin & Shar)通过坐标方格上的点作出了图形的模型,曲解的程度被定义为在这些点中位置放错点的和。作者假设在利用坐标方格移动和扩大的附加物方面尝试之后,儿童必须用大量的“歪曲”将一个图形转换成另一个图形来比较两个图形,这个模型得到了强有力的支持。在与其他研究相一致的方面,学前儿童到四年级生对拓扑性质和欧几里得性质都是有认识能力的,并且也能认识到怎样利用这些性质去区分各种变形。在每一水平都有少量的学生既喜爱拓扑性质又喜爱欧几里得性质。就像作者所承认的,注意到这些研究与直觉有关,然而皮亚杰和英海尔德却特别强调表示。进一步,相对解释而言,模型更能起论断作用。

总之,皮亚杰研究的很多结果也许是所选的特殊图形和幼小儿童识别并命名这些图形的能力的一种制造物。假如真是这样,那么这将不会支持拓扑首位问题的有力观点。可能并不是拓扑性质,作为一个类别,使得幼小儿童能够识别某些形状。是那些直观地突出的性质(像洞、曲线和角落),简明性和熟悉程度,而不是拓

扑性质和欧几里得性质的比较——可能成了孩子们辨识的基础。

在画图实验中发现了类似的问题,马丁报道4岁儿童画图没有反映出居支配地位的拓扑特征。他猜测,也许人们对能使儿童画同态复制品的拓扑性质不注意,而他们的射影性质或欧几里得性质在协调增长。他指出这些性质的协调自动保存拓扑性质。因此,尽管有证据表明许多较小儿童在画正方形时把正方形画成了圆,这个结果也不能证实儿童有强烈的拓扑居先的假设。需要研究用其他的方法去推断儿童的内在表示,还需要更密切地去考察儿童在画图过程中的行动和思维。例如,一项研究计划已证实了等级发展序列(a)几何图形的重建只需要译码(也就是,看着原图构成一个与之相似的图形),(b)重建需要记忆(通过记忆建立一个匹配的构形),(c)包含旋转和视角对话的变换(从旋转之后的回忆或从另外一个视角来建立匹配的构形);学前儿童只能在第一和第二水平上操作。

有关儿童构建欧几里得空间参照系——坐标系——的研究也揭示出皮亚杰和英海尔德理论的变动和精细化。例如,幼童的能力比理论所指出的要多一些,而青少年和成年人这方面的能力却比理论所指出的要少些。对于后者,并不是所有四年级高中生和大学生在皮亚杰设计的用于评估基本欧几里得概念系统的任务中取得成功。另一方面,研究表明幼小儿童对欧几里得空间关系的掌握比理论所假设的更准确,年龄很小的儿童也能确定空间水平线和垂直线的位置;类似地,4到6岁儿童能从两个坐标轴上直线的位置处外推,并确定直线的相交位置。看起来,皮亚杰理论假设了在这种早期的能力之后会形成关系的协调,这是正确的。即使消除了误导性暗示之后,幼童对两个坐标轴的定位问题做不成功。同样地,最大的困难是使二个外推协调(是在3到4岁时形成的),而把这种直线外推的能力是早在一年之前形成的。

这些结论表明,开始还不能利用概念化的坐标系作为有组织

的空间框架。然而,在教学上看,重要的是当儿童入校时,只要给他们提供坐标,他们就能用,即使是对传统的问题,他们还不能或未有形成坐标的自发的意向。

然而,坐标系任务方面的成绩在所有年龄段都受到不同因素的影响。水平和垂直问题方面的成绩可能反映了在复制角中倾向于垂直的,这也许是先学的原因。图形的表示也是变了形的,或者是局部地由于角平分,或是由于整体地增加了图形的对称性。最后,在这些皮亚杰空间问题上的完成情况是和印象浅以及一般的空间能力相关的。这些结果表明有一种要产生构成物的对称性和简化的一般倾向性,它是和传统的皮亚杰解释相斥的。

成绩的如此多重决定性也反映了关于透视获得能力文献的特征:皮亚杰和英海尔德的射影空间。例如,如果儿童能围绕物体移动或为他提供房间的模型,而透视获得任务给出的物体位置借助于地标的外部框架各个编码,那么这个任务是容易的。因此,给小物体的位置编码也许从与一个简单的外部地标联系(一致)发展到逼近一个简单地标,以及测定到几个地标之间的距离。到5岁,可能早在3岁,儿童能用地标组成的参照系给小物体编码。因此,编码持续到成年时期,这暗示射影空间的发展可能不只包括观察点的协调,而且还包括一个外部参照系的建立。对于透视的能力和坐标系能力二者而言,关键之处也许是构造和选择更协调的参照系统作为空间组织的框架。

**结论** 总的来说,虽未总体上作驳斥,拓扑首位的理论并不是得到支持的,这可能是儿童不是首先构造拓扑思想,然后才构造射影和欧几里得思想,而可能是各类思想同时得到发展,并不断整合和综合。这些思想在建造、画图和理解等行为的基础上形成原始直觉。因此,需要研究识别具体的、原始的直觉和发展的思想,以及发展的顺序。例如,虽然在协调作出直线形图形的行为之前,儿

童也许学习了协调作出曲线图形的某些行为,但还缺乏对这些序列理论的解释。观察到的知觉能力和概念化能力两者间同步的缺乏,支持了皮亚杰的建构主义主张;但是,具体的认知结构通常还没有得到识别。

这些研究也应探究儿童在图形表示方面确实接受的那些变形。例如,有些儿童把一个“几乎封闭”的图形等同于封闭的变形。也要注意诸如语言、教育和直接的社会文化等先前没探究的因素。皮亚杰关于学生作业情况的解释往往太强调了逻辑上的失败而不顾及去暴露尚未得到分化和整合的想法的形成,从而提出了须要新的方法。无论怎样,在幼年就已有某些欧几里得概念,而且甚至一些学前儿童就会使用某些欧几里得概念,这是和皮亚杰-英海尔德与他们的解释者的想法相反的。

类似地,皮亚杰和英海尔德关于射影空间和欧几里得空间构造的结果,揭示了幼童具有在课堂内有效地建造的空间框架方面的基本能力。不管怎样,我们也有可能期待所有年龄的学生中通常都有朝向对称和简化的格式塔趋向。例如,在图形复制和匹配任务中,需要研究识别这样的教学,以促进日趋复杂的用于组织空间信息的参照系统的选择和构造。

研究还没延伸到讨论皮亚杰和英海尔德的第二个主题:儿童的空间表示不是以他们的空间环境感觉“读出”的,而是从早先那些环境的活动中构造的。这是出人意料的,在这个主题中,皮亚杰和英海尔德结果的大部分结论至少是含蓄地强调支持这种假设(结果来自一项研究,惠特利和科布(Wheatley & Cobb)提供直接的支持,讨论将在后继部分进行)。还需要更多的源于建构主义主张的清晰的研究。在这方面,我们的关注主要转向同这种批评观点一致的另外工作。

菲斯拜因(Fischbein)论证道,人的空间直觉既不是天生的,也不可以简化为感觉形象所组成的混合物。空间表示组成了一个复



杂的概念系统——尽管不必明确形成——通常而言这些概念超出了手头的数据和感觉领域的范围。主观空间是现实的一种解释，而不是它的复制。主观空间由经验形成但超越了经验。与皮亚杰的建构主义相一致，菲斯拜因的理论进一步详尽阐述了空间直觉的本质。在开始，直觉不只是对客观上给定空间性质物体的一种反映，它是一个“高度复杂的期望系统与行动方案，涉及到我们躯体及其各部分的活动，这些组成了空间直觉”。因此，直觉由感觉运动和构成信念和期望系统的智力技能所组成，这些信念和期望构成了一个空间的内隐理论。最重要的是，如此构造的直觉是有意义的；由于它们表达了一种思想直接的行为意义，所以其主观性是自明的。

例如，直线的概念似乎自明。有经验的成年人相信，人们可无限地延长直线，或者利用沿着直线的最短路径到达已知点。这些看来似乎明确的“事实”、被称为直线的“物体”的性质。但是，直线却是抽象而非知觉的物体。它是基于某些可改变公理的一种协定。从行为意义直接推断，人们倾向于相信概念绝对性。人们知道他们能画出一条直线，识别一条直线，以及沿着直线用最短的距离达到目标。由于它在行为上有意义，他们用大量明确的证据和可信来充满概念。

然而，基于经验建立的直觉开辟了两种途径。人类的经验的局限性不仅说明了直觉的适应和组织功能，也导致对现实世界的被歪曲的或有错误的表示。因此，如同阅读皮亚杰文章可猜测到的，像另外的直觉一样，空间直觉没有必然地发展到不断与纯逻辑或数学相一致。空间直觉表示是非同态和各向异性的（当沿不同方向在轴上测量时展示不同价值的性质）。例如，人们倾向于绝对地分配给空间特许的方向，如“在……上”和“在……下”。利用逐渐放大距离的方法，以及利用增加密度作为中心区域的方法，他们把空间作为中心（例如，在一个人的房子中）观察。因而，我们的空

间直觉表示是可能相互矛盾性质的混合物,并都涉及到我们的平常生活和行为适应性的约束。

### 范·希尔夫妇:几何思维水平和教学阶段

**几何思维水平** 按照皮埃尔(Pierre)和黛娜·范·希尔(Dina Van Hiele)的理论,学生通过几何思维水平的进步,从一个像格式塔的直观化水平不断地提高到描述、分析、抽象和证明等复杂水平。这个理论有下列明确特征:

- 学习是不连续的过程。也就是说,学习曲线中有“跳跃”,这个跳跃表明了存在思维的不连续性和思维水平的定性差异。
- 水平是有序和有层次的。范·希尔的层次理论中,学生若恰好达到某一高级水平,他们必须已掌握大量的低水平内容。从一个水平到下一个水平的进步与年龄或生物成熟比较,更依赖于教学。教师可把教材降低到较低水平,并引导学生死记硬背,但是,学生不可能绕过各水平而仍能理解(记忆不是任何水平的重要特征)。获得理解需要通过某一教学阶段的工作。
- 在一个水平上被隐含地理解的概念在下一个水平上就变成被很清晰地理解的。“在每个水平上,前一水平上固有的本质就表现成非固有的方式。在基础水平,图形实际上由它们的性质所决定,但有些人在这个水平思考时是不意识到这些性质的。”
- 每个水平都有自己的语言。“每个水平都有它的语言符号和独有的连接这些符号的关系系统。在一个水平是‘正确’的关系能揭示出自己在另一水平是不正确的。例如,对正方形和矩形之间的关系的思考。在不同水平上推理的两个人彼此不能理解,也不能设法去领会别人的思维过程”。在贯穿各水平的运动中,语言结构是关键性因素。

水平层次数和规定水平层次是有差异的。我们首先将描述范

·希尔的原始五种水平,然后再讨论第六个。我们的解释有两部分。首先,尽管范·希尔最近的工作已将水平描述成三个水平,而不是原来的五个水平,但是,在经验证据(将在后续部分中作评论)和要求学习心理模型的准确性方面都主张要保持更细的描述。其次,经验证据也提出一个比范·希尔直观化水平更基础的水平。已有几个不同的规定水平层次的系统,我们采纳其一,而且基于前后一致的缘故,还把每一个研究者的规定水平层次系统改写成这个图式。

水平 1:直观化。起初,学生按照外观来识别和操作形状和另外一些几何图形。他们确认图形为直观化的格式塔。因此,他们能在心理上把这些图形表示为直观图象。在识别图形中,他们经常用直观具体的样品,例如,学生说所给的图形是矩形,是因为“它看起来像门”。然而,他们不关心几何性质或所表示图形种类的特征化。也就是说,尽管图形的性质决定图形,而这个水平的学生却未意识到图形的性质。在这个水平上,学生的推理为知觉所主宰。比如,他们尽管不能说出图形的简单性质,却也能把一个图形与另一个图形相区别;或者由于两个图形看起来相同,他们就判断这两个图形全等,“看起来就是如此,没有什么原因”。在学生从直观化水平到描述水平过渡时,直观物体的分类开始同它们的特征性质联系起来。

在直观化水平,学生推理的对象是按直观上“形状相同”来确认图形分类的。例如,陈述“这个图形是菱形”时,这个学生的意思是“这个图形有我已学过的称作‘菱形’的形状”。这种推理的最终结果是图形概念化的产生,是基于对它们的性质的明晰的确认(也就是,在这种概念化的构造之后,学生处在水平 2)。

水平 2:描述/分析。到了第 2 水平,学生通过图形的性质来识别图形并能确定图形的特征。例如,一个学生可能认为菱形是四条边相等的图形;因此,术语“菱形”指的是“他已学过的所谓‘菱

形'性质"的一个集合。学生把图形看作整体,但现在是看作全体性质的集合,而不是作为直观的格式塔;图象开始成为背景。通过观察、测量、画图和建模等手段经验地建立了性质。学生发现某些性质的组合标志着一类图形,而有些图形却不这样;因而播下了几何含意的种子。然而这个水平的学生看不出两类图形之间的关系(例如,一个学生可能会满足于一个图形因为它是正方形所以不是长方形)。

在这个水平,学生推理的对象是图形的分类,用那些与自己相一致的图形性质去思考,这种推理的产物是建立了图形间关系、图形性质的顺序和图形的分类。

水平 3:抽象/关联。在水平 3,学生能形成抽象的定义,区分概念的必要条件和充分条件;能理解几何领域的逻辑论证,有时甚至能提出这样的论证。他们能分层次将图形分类(通过排出图形性质的顺序)并给出判别它们类别的非形式化论证,例如,一个正方形被识别属菱形,因为可以将它考虑为一个“具有某些外部性质的菱形”。利用非形式化推导,他们能发现图形分类的性质。例如,由于任何四边形可被重组为两个三角形,而每一个三角形的内角和是  $180^\circ$ ,他们能推导任何四边形的内角和一定是  $360^\circ$ 。

随着学生发现不同形状的性质,他们觉得有组织这些性质的需要。一个性质能标志另外性质,因而定义不仅可以被看作是描述性的,而且还可以被看成是逻辑组织的一种方式。例如,一个正方形为什么是长方形的原因就变得更清晰。思想的这种逻辑组织是正确推理的首要表现形式。然而,学生仍不理解逻辑推理是建立几何真理的方法。

在这个水平,学生推理的对象是图形分类性质。因此,比如“整理图形性质,假如图形满足四条边相等的四边形的定义,人们将知道这个图形是菱形。”这种推理的产物是通过图形分类和图形性质的交互联系,获得的思想进行了重组。

水平 4:形式推理。达到水平 4 时,学生在公理化系统中建立定理。他们识别未定义术语、定义、公理和定理之间的差异。他们能构造原始的证明;也就是说,他们可以作出一系列陈述,对作为“已知条件”的结果的一个结论作逻辑判断。

在这个水平,通过逻辑解释像公理、定义和定理的几何陈述,学生能进行形式推理。推理的对象是图形分类性质的关系,推理的产物是建立亚序关系——关系之间的关系——并在一个几何系统中用逻辑链来表述。

水平 5:严密性/元数学。在第 5 水平,学生在数学系统中进行形式推理。即便没有参照模型,他们也能研究几何,而且还能通过形式化地操作如公理、定义、定理等几何陈述进行推理。推理的对象是形式化构造间的关系。他们推理的产物是几何公理系统的建立,及其详尽阐述与比较。

**关于水平的研究** 就像皮亚杰和英海尔德的工作一样,范·希爾的理论有着广泛的影响并被深入地研究。研究的结果将在下面几个关键问题的标题下进行讨论。

范·希爾水平准确地描述了学生的几何思维吗?一般而言,来自美国和国外的经验研究已证实范·希爾水平在描述学生从小学到中学的几何概念发展方面是有用的。例如,尤西斯金发现大约 75%的中学生适用于范·希爾模式(因手段和评分方案差异所造成的在同一水平的百分率误差也应被注意)。伯格(Burger)和肖内西(Shaughnessy)对从幼儿园到大学的学生实施了诊断式谈话,他们报告的学生行为通常与范·希爾夫妇原先关于水平的一般描述相一致。例如,要学生在一组四边形中识别和描述类似于图 10.2 中的正方形、矩形、平行四边形和菱形。当在描写形状时,那些放进不准确的直观性质和不相关的属性(如定位方向)而略去了有关的属性的学生就被归属到水平 1。这个水平的学生经常参照直观的样本(“矩形看起来像门”)。借助图形性质来比较和判别形状的学

生被归为第 2 水平。例如，一个女孩说矩形有“两条边相互平行且相等，两条较长的边也彼此平行且相等，并且它们以  $90^\circ$  角连结”，正方形不包括在内。通过参照其他形状归纳形状最少特征的学生归为水平 3（例如，正方形是既有菱形性质又有矩形性质的四边形）。经常作出猜想并设法借助形式证明来证实这些猜想的学生则表明其处于思维的水平 4。

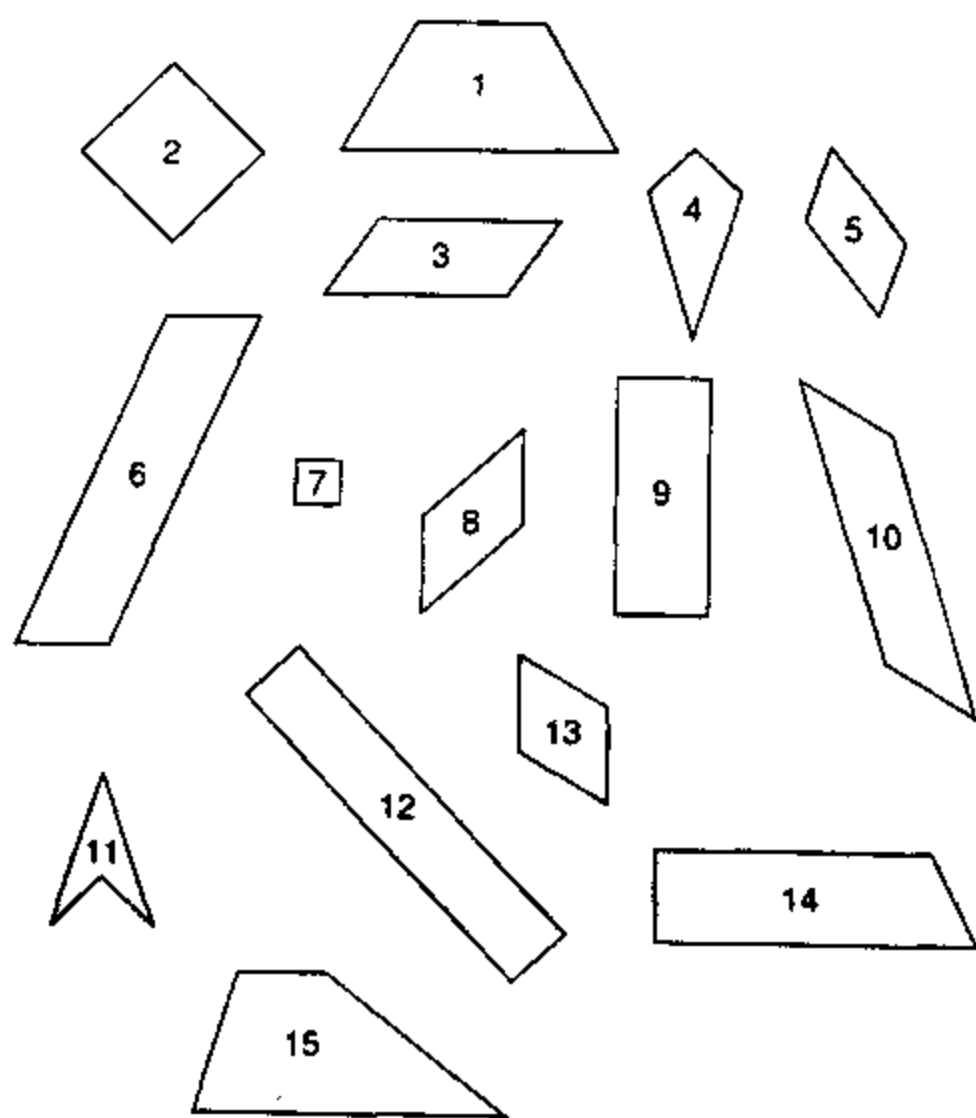


图 10.2 要被识别的四边形

每一水平都存在独特的语言结构，这种观点已得到支持，例如，“矩形”对不同水平的学生意味着不同的事情（例如，一个直观的格式塔对照一个“性质持有者”）。总之，通过会谈和书面评估两

方面证实,这些水平看来是存在的,并且描述了学生的几何发展。

这些水平是不连续的吗?水平之间存在不连续性吗?苏联的研究看来作出了一个正面回答。然而,总体来说,结论是混合的。首先几个研究者已指出要将处在变换中的学生令人信服地区分开来是困难的(富伊斯(Fuys)等,尤西斯金),对于水平2和水平3的学生来讲这特别正确(伯格和肖内西)。这些研究者考虑了介于两个水平之间时作决断的种种困难,它们被认为是对水平不连续性的怀疑的证据。

富伊斯等发展并用文件证明了范·希尔水平的一个运作模式,并概括了六和九年级的几何思维特征。研究者用6~8次45分钟的教学评估对话方式,允许他们用图表来说明学生经过教学后,在水平之内或水平之间能力的进步。他们确定了一个入门水平和一个潜在水平(表明教学之后的水平)。尽管有一些学生看来是处于平稳的状态,然而还有些学生在教学的系列活动期间灵活地转移到了不同的水平。仅用入门水平评估也许低估了他们的能力(维果斯基(Vygotsky))。更进一步地,在几种情况中水平之间还存在不稳定和动摇。类似的结果在多面体教学实践中也被发现(伦肯拜恩(Lunkenbein)。在学习中被频繁发现的是连续而非跳跃。

学生对所有课题都在同一范·希尔水平上作推理吗?这个问题也涉及到水平不连续的争论,类似地,有关这个问题的证据也是混合的。从舆论的测试中表明了小学预备教师就不同的概念是处在不同的水平上,就像中学生一样。同样地,伯格和肖内西指出学生依不同的任务显示出不同的优先水平。一些学生甚至在同一任务的探索过程中也从一个水平跳到另一个水平。研究者把水平描述为动态的而不是静态的,并且是具有一种比它们的间断性的描述令人相信、更为连续的性质。古铁雷斯(Gutiérrez)和贾姆(Jaime)比较了三个预备教师在几何课题上的推理水平:平面几何、立体几何(多面体)和测量。通过整个课题所达到的水平不是独立的,但

是数据并不支持水平的理论化整体特征。研究者假设,随着学生发展,水平的整体程度是不固定的,是随着水平增长而增长。也就是说,随着儿童的发展,他们不断地掌握大量的数学内容“发生点”,并因此理解更大范围的数学。

富伊斯等赞成,当学生第一次学习新概念时,经常在水平 1 思维中失误。然而,他们坚持认为学生能很快转移到他们在早先概念已达到的高一级水平。因此,研究者声称这些结果支持了学生潜在思维水平在整个概念中还稳定地保留着的论点。问题仍悬而未决,但已经有建议提出评估工具必须针对具体课题。

水平形成一个层次吗?研究更一致地显示水平是有层次的,尽管这里还有些例外。例如,梅伯里(Mayberry)使用古特曼(Gutman)的量图分析来显示她的表示不同水平的任务形成了针对预备教师的层次。丹尼斯(Denis)对 Puerto Rican 中学生的实验重复了这些结果。古铁雷斯和贾姆也发表了类似的分析和结果,但只是针对水平 1 到水平 4;水平 5 被发现与其他水平有本质区别。大多数其他研究者没有在类似分析方式中检验这个假设;尽管如此,他们仍解释其结论以支持这种假设。

因此,尽管要接受这个假设仍需经过严密的检验,但是各种水平看来是有层次的。然而正如范·希尔夫妇断定的,这并不意味着有了一个成熟的基础。首先,水平的指定似乎并不严格地与年龄或年级相关联;其次,水平层次的发展似乎是在教与学的过程影响下进行的。

最基本的水平是什么?也就是说,存在零水平吗?如前而所提到的,有证据表明存在比范·希尔“直观化”水平更基本的 0 水平。例如,9%~34%的中学生甚至在演示直观水平思维特征时也不成功,有 26%在 0 水平开始的学生经过一年后仍处在 0 水平。这种稳定性论证了 0 水平的存在。同样地,预备教师 13%的回答模式不符合水平 1 的准则。最后,以水平 1 进入几何课程的学生



在几何书写证明方面比以 0 水平进入几何课程的学生明显完成得好些。

然而,这个问题没被解决。富伊斯等详细说明了成为“在一个水平上”的学生得始终如一地呈现那个水平的特征行为;然而,他们还声称水平 1 不同于另外水平,在水平 1 学生也许不能展示相应的行为(也就是,他们可能不能命名形状)。按照研究者的观点,这些学生不应当被描述成“尚不在水平 1”。尽管如此,他们只表明这样的行为是“尚不在水平 1”。在以后的工作中,富伊斯假设有弱水平 1 思维的学生正使用赖夫(Reif)以实例为基础的模式之一作为他们概念的基础,而不是用更复杂的以规则为基础的模式作为他们概念的基础。这是论证了一个分离水平,还是论证了子水平,仍是一个悬而未决的问题。

然而来自以范·希尔理论作基础的大部分研究证据,与来自皮亚杰观点的研究一道都显示出存在一个比范·希尔水平 1 更原始的、可能是先决的思维水平。因此,我们假设存在下列附加水平:

水平 0:前认知。在前认知水平,儿童感觉几何形状,但大概是因感觉活动的缺乏,他们可能只注意形状直观特征的某些部分。他们不能识别很多常见的形状。他们也许能区分曲线图形和直线图形,但在同类图形中却不能区分它们;也就是说,他们也许能区分正方形和圆,但却不能区分正方形和三角形。按照皮亚杰的观点,“感觉一个圆或正方形是一回事,而重构一个直观图象使它能在一组模型中被选出或在一次纯粹的触觉探测后画图则是另一回事”。因此,在这个水平由于缺少形成所要直观图象的能力,学生也许不能识别普通的图形。这些图象是以孩子从自己的行动中构成了的智力表示为先决条件的,即“图象最初只不过是先前完成过的行动的内部模仿,之后,则是关于能够完成的行动的。”

在这个水平,学生的推理对象是具体的形象或触觉的刺激;推理的产物是直观上被识别为“相同形状”的一组图形。

应当考虑另外的水平特征吗？水平是包括概念和推理过程两方面发展的复杂结构。此外，研究者强调了几个内在相关的概念：目的、信念系统和元认知的重要性。富伊斯等断定每一水平的学生必须知道期望什么，并用特定的方法有目的地思考。例如，处于较高水平的学生在判别他们的推理过程中，用“解释”、“规定它”、“确定它”、“是严格根据规则的”等语言。处于较低水平的学生认为在做书面作业时，他们应该完完全全按照它那个样式（例如，不允许改变它的方位）。在运用一个可操作的三角形时，这些学生中的多数称一个钝角三角形为“三角形”。

实际上超认知知识总是范·希尔模型没言明的部分，它强调目标和顿悟，或理解。按照霍弗(Hoffer)的说法，当学生有能力并有意地用解决不熟悉问题的方法时，学生显示了这样的理解。他们理解自己正在做什么和为什么这样做，以及什么时候应该做它。如果某些信念、目的、有关的元认知，甚至每一水平的认知知识特征进入模型，那么需要将它们更进一步地连结和整合。

已知传统教学范例证实了思维的什么水平？一旦模型的基本特征被一般地确证，就会产生问题：在学生当前的几何教学环境中，学生达到什么几何水平？皮什卡罗(Pyshkalo)和斯托娅(Stoyar)的研究指出，相当多的苏联学生把形状当作整体来感知。学生在水平1停留相当长一段时间，到五年级结束时仅10%~15%的学生达到水平2（要注意的是苏联学生7岁进入一年级，而美国则是6岁）；关于立方体方面甚至更为延迟，由于这方面的原因，直到七年级才有值得注意的骤变。

研究了16个六年级学生后，富伊斯发现有19%的学生始终处在水平1，把形状作为整体来认识，而没根据其性质分析形状，即便是在经过教学后也是如此。他们仅能识别熟悉形状，但在复杂图形中却不能识别，有时候在不同的位置也不能识别。对角的概念他们有很大困难，他们只能通过操作活动获得一些水平1知识

——关于形状和平行的直观思维；作者把这些学生描述成“丧失几何的人”。另外 31% 学生在水平 1 中取得进步，并朝着水平 2 前进；最后的 50% 从水平 2 思维开始并趋向水平 3。不过，他们还得复习水平 1 的知识，并巩固水平 2 的概念。部分人作出推导论证，但大部分学生把“证明”等价于用例子概括（归纳推理）。

类似地，九年级学生也被分成三个组，对于六年级最低组，大约 12% 很少学校几何经验的九年级学生连结语言和记忆有困难，并导致只有水平 1 的成绩；他们几乎不能意识到在教学中通过思考某物就能作出某物的图形，并且在水平 1 的发展受到限制。中间组的 44% 呈现出水平 2 并偏向于水平 1；他们根据图形的性质了解熟悉的形状，但没有平行四边形和梯形的知识。另外 44% 一直表现出水平 2，并向水平 3 前进，工作得更快更自信。他们对正在做的问题不仅显示创造力和思考力，而且反思自己的思维。

中学生并没表现得更好。已经正式学习过几何的很多学生仍处在水平 0 到水平 2，而不在水平 3 或水平 4；几乎 40% 的学生在水平 2 下完成高中几何。事实上，因为很多学生没有发展水平 3 思维的过程，以及在课本中出现的信息和知识将用不同的方式组织，所以他们可能在形式几何的额外工作中没有得益。

传统课本反映了什么思维水平？已经知道学生的几何思维水平处在使人沮丧的状态，很自然就要问课本提高了学生的什么水平。富伊斯等按照范·希尔模型，从美国课本系列（幼儿园至八年级）分析了几种常用的几何课程作为证据。他们分析了几何课的四个组成部分：目标、阐述材料、练习以及有关测试和复习。毫不奇怪地发现课本系列在这方面是有缺陷的。大多数工作包括命名图形和像平行一样的关系，并且学生只是不经常地被要求用图形推理。

处在水平 1 的学生能回答大多数的问题，在课堂或测验中几乎不需要水平 2 或水平 2 以上的思维，只有在七、八年级才开始有

少量需要。对于几乎所有通过八年级的几何经历来说,一般学生不需要水平 1 以上的思维。水平跨越有些跳跃,例如阐述也许比练习发生在更高的水平。在同一水平跨越不同年级重复同样的课题;研究者称这个课程是“圆周式”课程而不是“螺旋式”课程。更糟的大概是,有时没有清楚或正确地教多边形之间的性质和关系。

对较老的苏联课本(这些课本写于几次主要课程改革之前)的类似分析也揭露出几何材料缺乏系统选择,学习中有大缺陷,许多最重要的几何概念明显出现迟,仅作一方面要求。所有问题只有约 1% 涉及到几何。这就使六年级学生从第一堂课开始做与几何发展同步的前三个水平相对应的工作。

**教学阶段** 范·希尔模型包括了更多的几何思维水平。按照范·希尔夫妇的观点,从一个水平到下一个水平的进步很少取决于生物成熟或发展;相反,它是在教/学过程的影响下向前发展的。教师在促进这种进步中起特殊作用,特别是在提供期望的指导方面。由于范·希尔水平和成就说明了 40% ~ 60% 学生在书而证明方面而有差异,因此在这个领域中,学生的大多数成就直接由教师和课程所控制。

尽管范·希尔理论不支持一个学和教的“吸收理论”模型。范·希尔夫妇断言不是通过教师的直接讲授达到高水平,而是通过一种合适的练习选择来达到高水平。而且“当达到较高水平的时机来临时儿童自我将作出决定”。然而没有教师,就不可能有任何进步。对于每一阶段,我们将描述学生学习的目标和提供促进这种学习的教学中的教师作用。

**第一阶段:信息。**学生开始熟悉内容的范围。教师述说讲清这个内容的材料并提供给孩子取用。通过讨论,教师得以知道学生是如何理解这些词语的,也为他们提供信息来引导学生作出有目的的行动和认识。

第二阶段:定向指导。在这个阶段学生开始从抽象出几何思想的地方来了解对象。这个阶段内的教学目标是让学生主动积极地探究对象(例如,折叠、测量)以便遇到所形成图形关系网络的主要联结。教师的作用是指导学生的活动,引导他们作适当的探讨——一系列细心构成的作业(一般一步的并要求作出指定的反应的)。这时学生在对象物上操作,以便能接触到指定的几何学的概念和方法。教师应该选取那些目标概念和方法是显著的材料和作业。

第三阶段:解释、说明。学生开始意识到关系,并开始详细阐述他们的直觉知识。因此,在这个阶段,学生开始明确地知道他们几何概念化,用自己的语言描述这些概念化,以及为有关问题学习些传统数学语言。教师的作用是通过引导学生用自己的语言讨论学习对象(几何对象和概念,关系、模式等等)使学生对之达到清晰的认识水平。只要学生表现出他们知道所研究的对象并用自己的语言讨论了它,教师就要介绍相关的数学专门术语。

第四阶段:自由定位。儿童解决需要综合运用早先已阐述的概念和关系来解答的问题。他们学会确定自己在“关系网络”中的位置,并应用关系去解决问题。教师的作用是去选择合适的材料和几何问题(有多种解题路径),提供的教学允许不同操作,并鼓励学生对这些问题进行反思和详尽阐述,以及按照需要介绍术语、概念和相关的问题解决过程

第五阶段:整合。学生通过将其知识整合成为易被描述和应用的相关网络,来建造他们已学会的全部内容的总结。数学语言和概念化被用于描述这个网络。教师的作用是去鼓励学生反思和巩固他们的几何知识,进一步强调巩固作为框架的数学结构的应用。最后,通过把思想嵌入形式数学的结构组织体系中来对这些巩固的概念进行概括总结。在第五阶段完成后,对研究课题的思维达到了新的水平。

## 关键性的问题

关于思维水平的问题。对于水平理论化的准确性方面存在问题。例如,富伊斯等解释其结果来支持他们的正确性。然而,他们也声称支持范·希尔目前关于三水平模型特性的刻划:直观的(按照研究者的说法是原先的水平 1)、分析的(原先的水平 2)和理论的(原先的水平 3—5)。他们认为范·希尔同意这种解释,但他们告诫三水平模型对提炼特征化思维也许不够精确,特别考虑到他们曾发现学生通过水平 3 后没有公理化思想的进步迹象。然而,关于三水平模型存在两个传统的问题。首先,看起来范·希尔把新的直观水平看作原来水平 1 和水平 2 两方面的组合;因此,从一个模型到另一个模型的映射是不明确的。进一步说,假如水平能被变动和组合,他们假设过的不连续和有层次的心理学本质必定被怀疑。在一个相关的意向中,我们看见了在某一水平成绩更强和更弱的报道,而且水平之间有重叠;问题在于在从属等级概念瓦解之前可以允许有多宽的范围?

一个学生何时“在”一个水平甚至并不清楚。根据性质去思考形状对学生意味着什么?当学生显示图形特点的特殊标志时,他们达到了水平 2 吗?学生最初在何时根据性质思考?他们必须识别具体形状或形状分类的性质吗?

更进一步地,应把学生的思维水平特征化为“在”一个简单的水平吗?譬如说,古铁雷斯、贾姆和福图尼(Fortuny)试图去考虑学生在运用每个范·希尔水平上的能力而不是去指定单一个水平。他们用有四个组成部分的向量表示获得从 1 到 4 范·希尔水平的程度(例如,某学生的 4 个部分也许是水平 1:96.67%,水平 2:82.50%,水平 3:50.00%,水平 4:3.75%,研究者不能满意地测量出水平 5)。他们发现一些正明显同时发展两种连续推理水平的学生,并假设这些结果来自于在全部获得水平  $n$  以前已开始引导

学生获得水平  $n+1$  的数学教育。这种思维水平交替概念化需要探究,因为他们也许会导致提出水平本质问题;也就是说,水平似乎表面正确,但是,如果水平的层次号是可变的而且表现的情况又是跨水平的,并且由所教的内容来确定的话,那么我们就清楚究竟水平是更为逻辑性的还是心理性的。

关于水平的另一个问题是缺少对“学习中不连续性”的观察。一些人根据这种证据的表面性为这种理论辩护,断言观察反映的连续性可能不在学习过程中而在教学中。这是一个尚未解决了的问题,但是辩护者的问题是绝对不可能反驳这个理论,这个批评是常常被用来针对皮亚杰理论。假如有大量的“过渡”,那么(也像皮亚杰)就会提出一个严格的阶段解释问题。

在涉及到在不同水平对各种课题进行推理的观察中也出现了问题。设法减少理论详细论述的人作出过假设,关于较低水平的课题,这些学生能够“迅速升高到思维的高一级水平”。确切地说来,这是什么意思并不清楚。别人是否总是动得更慢呢?这个速度又是否不能归诸于其他的因素,例如学习的潜力,那是不直接与思考的水平相联系的?

因此,应该对有关范·希尔水平有效评估进行研究,这是关键性的。要更进一步优化和评估笔试,也要发展可能较少依赖于特殊教育经历的不同谈话技术。例如,我们已创作了用来确定关于多边形几何思维水平的三个一组的多边形分类整理任务。这些任务是由作者和理查德·莱勒(Richard Lehrer)所首创。向学生展示三个多边形,并问“哪两个最像?为什么它们最像?”。例如,向一个学生出示下列形状, A  B  C 。选 B 和 C,说明“除了 B 向内部弯曲外,他们看起来相同”。她注意到形状的直观方面,对应于水平 1;在我们用以 Logo 语言为基础的几何课程进行教学之后,学生选择 A 和 B,说它们都有四条边,这样,她倾向于使形状的所有直观方面退化到背景中去,取而代之的是注意形状性质,这对

应于水平 2。最后,需要静态和动态评定方法有关用途的研究。动态方法能评定思维的“潜在”水平和学生要达到那个水平所需的教学量,因而它比典型的静态评价或“快照”方法要多一些启发。

学生(特别是幼小的学生)学习几何概念的方法也被质问。首先,研究者用实验说明较小儿童能区别形状的一些特性,并经常用构造图形的路径和行为思考二维图形,这与目前设想的水平不一致。其次,当用“透明图样纸”(直观图形)识别几何模式的常用方法教较小儿童时,凯(kay)断言,假如对每一个类别(这不适用于以层次为基础的差别)都只有这样的透明图样纸的话,这种作法是合适的。相反,凯开始时用更常见的,先由四边形发展到矩形,然后到正方形的教学提供给一年级学生。利用体现这些关系的术语:四边形、矩形、正方形来处理每一个类别的相关特点和各种类别中的层次关系。在教学结束时,尽管以前没有一个人这样做过,但是大多数学生识别了四边形、矩形和正方形的特征,大约一半的人识别这些类别中的层次关系;因此,凯断言范·希尔理论不能获得幼小儿童如何去理解几何概念的全部复杂性。如果概念的定义包括复杂的推导论证,而尚能被少量的直观透明图样纸(例如,“圆”)所表示,一些概念开始时总将通过归纳过程被理解。假如概念的定义包括一个简单的推理论证,而且概念也不易用透明图样纸表示,那么初始的理解将是推导性的(例如,“四边形”)。这种二分法类似于自发的对科学的概念的形成的维果斯基公式。当人们对这些一年级学生理解的深度(特别是层次关系)和以经验结果为基础的一般化存疑时,更应该对这种模棱两可的假设作进一步的研究。将来的调查研究应保证学生不是简单镜而式的重复口头的训练;“概念的直接教学是不可能的也是无效的。设法这样做的教师通常除去空话表达外什么也未达到,儿童鹦鹉学舌模仿对应概念的知识,但实际上掩盖的是一个真空般的状态”(维果斯基)。



在类似的意向中,德·维利尔斯(de Villiers)的结论是,与范·希尔理论相反,层次类别的包含和推理思维是独立发展的,并且它更多地依赖于教学策略。而不是范·希尔的水平。然后他描述了一个成功的教学策略,在这个策略中,首先教八年级和九年级学生四边形,以及教他们怎样通过特殊化性质获得特殊四边形。这个方法与传统方法相比,在传统方法中学生把直观原形同形状的名字联系起来。

“因此通过图形的直观感觉确定了与名称相关定义的本质……我们相信儿童将形状作为一个整体来思考没有明确参考它们各组成部分的观察,是我们从一开始就这样教学生的实际结果,即要学生将形状作为整体来思考和用直观原型来思考而不要参考它们的组成部分”。

然而,基于学生智力上能够注意这些性质的实验,作者作出了这个断言。例如,我们的研究指出在教了正方形和矩形的性质后,很多一年级学生解释他们为什么用简单地说“因为教师告诉我们”来说正方形是特殊种类的矩形。然而,由德·维利尔斯引起的对范·希尔水平评论,即水平非常依靠课程,肯定值得进一步研究。他断言在关于水平的进一步研究中,层次分类和推导都需要出现。

从这样的问题引出的结论是,虽然范·希尔的研究已为我们增添了相当多的知识,然而还未能使主体的构成能同时测试交替的假设(例如,发现学生的行为似乎证实了水平的某个特征,并不能为此行为的各种供比较的假设提供一个有力的测试)。此外,范·希尔理论描述学生的行为,我们也需说明它们。研究需要面对下列问题:

- 学生的知识表达和结构在每个水平上是如何特殊的?新的运算和概念是否像皮亚杰理论中所说的那样,总是由以前的知识所构造的呢?

- 水平表述了多数知识重组的不连续阶段吗？也就是说，各水平能被合适地描述成阶段吗？例如，它们能满足像斯特弗(Steffe)和科布描述的下列标准吗？

1. 稳定：某些性质、陈述或活动稳定地保留在每一个阶段；
2. 结合：前一个阶段必须结合到后一个阶段；
3. 序不变：各阶段必须呈现固定的发展顺序；
4. 整合：定义一个给定阶段的结构性质必须形成一个整合的整体。

- 我们能操作各水平吗？大部分的研究已应用不同的测验装置，这些装置中有一些以内容定向的，另一些以过程定向的。此外，富伊斯提出表示的模式——口头，图片或实物——也许影响学生这方面任务的成就。因为水平明显依赖于教学，我们必须特别仔细地考虑在所有将来研究中教学与各水平间的关系。
- 准确地说在学习几何中学生构造了什么思想，以及必须达到什么心理运算？早些年这种发展怎样发生？
- 从一个水平到下一个水平的变换依赖于了解某些类型知识吗？依赖于知识重构？还是二者都依赖？这会由于课题，特别是平面几何之外的课题而改变吗？
- 思维水平怎样与成绩联系？怎样同成绩区分？
- 什么课程因素有助于从一个水平到下一个水平的过渡？这把我们带入了下一个系列关键的问题中。

关于教学含义的问题。从范·希尔角度得到的理论和研究有很强的教学含义；这些含义中大多数没有在研究文献中得到恰当的强调。

- 关于思维水平的教育目标。应当早些提供几何思想结构的机会。学生没达到几何描述水平，部分原因是早期没有向他们提供几何问题。这个“几何迟钝的拖延期”在早些年级导致产生“几何丧失”的儿童。

- 范·希尔认为学习几何的初始焦点必须有水平 2 思维的实现作为目标：“几何图形必须成为它们性质的载体”。他说这种学习子序列的焦点应当是达到水平 3 思维；学生应该明白联结图形性质，并开始逻辑地为图形性质排序。大多数研究者认为达到水平 2 思维和水平 3 思维是中学前几何教育的重要目标。范·希尔相信学生在什么年龄阶段应该达到这些水平，然而这仍有疑问。在一些文章中，他指出一到五年级的学生应该关心自己在水平 1 的深入思考，以及高一级水平不应当比低一级水平被高估（“没有推向描述水平的论据，直观水平是如此之广泛，以致于这些问题要延续几年”）。然而，在另一些文章中，范·希尔和另外一些研究者都强调水平 2 思维的早期目标——例如，到最初年级末这样的目标也许是能达到的。二年级学生实验班对立体几何的熟悉能使他们达到水平 2，在传统课程中表现出众的七年级学生才能达到水平 2。苏联研究者也指出，归纳积累的事实时期不应拓展得太长；他们敦促在小学鼓励简单的推理。继续研究这些问题是重要的，因为研究始终表明如果跳过水平学习，学习只是死记硬背。
- 语言。不准确的语言使学生在几何方面的工作陷入苦恼，而且在通过各水平思维的进步中语言是决定性的因素，教学应仔细地指出普通应用与数学应用之间的区别。教师需要始终牢记依赖于语言的儿童概念与教师所认为的也许有更大的差异。因此，当数学语言被用得过早以及当教师不用日常讲话讲课时，数学语言的学习就不再伴随数学理解。
- 操作和“现实世界”对象。当然，语言以现实世界体验的基础作为支撑；这些体验的端倪通过研究被强烈地指出来。

从已忽略一些内容的欧几里得演绎系统中不能形成小学几何。为了成为小学几何，人们不得不从为儿童早先已感觉的和已部分整体知道的世界开

始。目标应当是分析这些现象并建立逻辑关系。只有通过一种可修改几何的方法才能设计出也许被称为符合心理学原理的小学几何课程。(范·希尔 - 吉尔多夫(Van Hiele - Geldof))。

学生应该操作正确的几何形状和材料以便他们能“按照自己的方式理解几何形状”。更进一步的研究赞同在现实世界引入最初概念的教学对学生有好处,也同意进行操作对学生是重要而有帮助的,特别是在水平 0 和水平 1。直观方法似乎不仅仅是保持学生的兴趣,而且对学生给出定义、猜想和获得对关系的直觉也有帮助。考虑到这些信息,连同课本中存在的缺陷,教师不能仅依靠课本是必要的。

教学阶段。教学阶段无法脱离与思维水平相联结,对教育来说,教学阶段更具有潜在的重要性;令人感到惊奇和遗憾的是除了范·希尔夫妇以外只有少量的研究直接考虑阶段问题。一项研究指出以 20 天为一阶段的教学明显提高了高中学生的范·希尔思维水平(从水平 1 到水平 2 比任何其他水平要显著些),但在标准内容或书面证明方面没有取得更大的成就。别的研究也很需要,特别是没有结论的问题和涉及到阶段方面的问题的研究非常需要,例如:

- 教学阶段与思维水平怎样联系? 假设学生必须在教师引导下通过所有五个阶段达到每一个新水平。然而某些阶段(例如,2 和 3)似乎需要学生恢复与已知水平紧密相关的思维(例如,水平 2),范·希尔批评皮亚杰和英海尔德把他的“发展阶段”与一个(前运算)时期相连,但是范·希尔夫妇的阶段却犯了相反的错误,造成了水平的跨越太灵活、太重复。
- 教师应设法直线式地经历各阶段呢,还是在每一阶段采取曲线式的方式?
- 教师应该介绍许多概念并指导学生平行地在每个概念上通过各

水平呢,还是用一个简单概念的工作通过各水平(对水平 2 和水平 3 而言),然后以此作为相对另一概念的更高发展水平的支撑点?

- 对不同类型的学习成果,如概念、技能或问题解决能力等,有必要区分不同教学方法吗?
- 自动化和实践有什么作用?
- 最后阶段似乎增强了转换;转换是否必须用提供系统的,隔一段时间的包括各种问题的复习来辅助?

## 认知科学：几何知识和过程的精确模型

第三个已被应用于理解学生学习几何的主要的理论观点是认知科学的观点。这个领域设法整合来自心理学、哲学、语言学和人工智能方面的研究和理论成果。

**安德森认知模型** 安德森的 ACT\* 提出了一种认知科学模型。模型假设两类知识:陈述性知识和程序性知识。陈述性知识是“知道对象”,例如,公理和定理将可能连同它们的作用、形式和前提条件的知识一道被贮存在图式中;程序性知识是“知道怎样”,贮存于产品系统的形式中,或条件对的集合内。如果具体说明产品能应用环境的条件或认知情况与某些陈述性知识的存在模式相配,那么就完成了动作(通常是把新的成分加入到工作记忆中,即系统在目前能访问的信息储存)。

按照 ACT\* 模型,所有知识开始产生于陈述形态,并且必须被一般程序所解释(例如:利用了食谱中看到的陈述性知识,按一般菜谱方法去烧一道新的菜)。因此,程序学习只发生在执行技能过程中;一个人通过做来学习。当陈述性信息处在一种直接教学形态时,可以一步一步直截了当地解释。然而信息通常不是直接

的。在高中几何里,通常诸如一般搜寻、问题序列重组、意义-终结分析、相关推理、或在已做过的例子与新问题作类比等一般性问题解决运算,学生也许利用陈述性信息提供这些运算所需的数据。更重要的是,几何课本假设学生熟练地拥有这些运算工具,但实际上从来没直接说明应该用哪一个程序。这种假设有时候是错误的,例如,被安德森研究的几个学生在关于一个人怎样决定一个陈述是否被规则所暗示方面都有误解。总之,这些学生在开始证明问题方面的行为被这个模型准确概括。

在执行这个任务中,用直接执行行为的产品程序化逐渐取代了原始的解释性应用。例如,取代几何中边一角一边规则,并指出怎样应用它,学生建立了一个直接识别应用的产品。在“English”中,这样的产品也许是:

IF the goal is to prove  $\triangle XYZ \cong \triangle UVW$   
and  $XY \cong UV$   
and  $YZ \cong VW$

THEN set a subgoal to prove  $\angle XYZ \cong \angle UVW$  so SAS can be used

程序化通过一个组合产品系列的组合过程来完成。程序化和重新组合一道被称作知识编辑,通过实践创造了特别任务的产品。对知识编辑理论的一种支持(证实)在于实验报告。例如,其中一个以学生在解题时辨认 SAS 公设的运用来阐明。最初学生按照那个漫长的渐增方法(过程)进行,而与之比较的是 5 个题目之后在做一个新的作业时,他承认说:“立刻我就猜到我该去做什么——那就是要用 SAS 公设”(安德森)。于是注意到了有三个差别:公设的运用就较快了,公设的陈述不再是在文字上反复地叙述(即使陈述性表示进入工作记忆,充满了失败引起的不准确)以及原先的将公设零碎地应用就为一步的辨认所代替。总之,这种理论中的学习包括:①陈述性知识的获得,②借助研究和类推来将陈述性知识应用于新情境,③领域特殊产品的编辑,④陈述性知识和

程序性知识的强化。

因此,在以证明为定向的几何问题解决中取得成功之处是从数据中抽出的规则的发展。这些规则对信息结构作出了反应,并导致了问题的进一步发展。例如,熟练者很快理解诸如三角形全等之类的关系,甚至在那时还不知道在证明中应怎样描述。那么是怎样助长这些成绩的呢?在随后一个部分中,安德森和他的同事基于这种理论努力建立了一个 AI(人工智能)辅助教师,这将有助于他们构成这个重要问题的答案。

**格里诺几何问题解决模型** 格里诺问题解决模型类似于安德森认知模型。以从6个九年级学生处获得的出声思维实验报告为基础,用计算机模拟解决与这些学生所解决的相同的问题,而且用与学生解决这类问题相同的常规方法解决问题。模拟是包含三类产品的产品系统,反映了学生解决问题所需的下述三个领域中的几何。首先,在推导中运用命题,构成几何问题解决的主要步骤(熟悉有关几何关系的陈述,像“平行直线和截线所成的同位角相等”);其次,运用感觉概念识别在许多命题逻辑前项提及的模式(例如同位角);再次,在建立目标和制定计划中(例如,当解答需要表明两个角相等时,一种方法是利用诸如同位角的关系,另一种方法是证明包含角的三角形全等)应用策略原理。

所有这三个领域,前面两个明显包含在教学材料中;然而,策略知识并非如此。材料中涉及到的策略知识至多是间接的,并且大多数教师在他们的数学教学中不能明确识别策略原理。学生通过在例题解答中观察系列步骤的教学后必须获得这种知识。因此,导致策略原理的形式是不明言的程序性知识,包括学生能执行但不能描述或分析的过程。这些策略原理是问题领域所特有的。应直接地教它们吗?格里诺认为应当直接教给学生,因为不作指导的发现比一种更明晰的教学形式更有效是不可能的。如果将直

接教学解释为教师不合理规定学生学习步骤的话,这将同范·希尔描述的学生自己在关系网络中发现路径的特点相矛盾;如果将直接教学解释为教师促进学生准确理解策略的发展和构造,则这两个主张没有根本区别。

**平行分布式加工(PDP)网络** 其他认知科学研究所建议的模式甚至有更低水平的细节。例如,PDP网络模型可能解释了范·希尔层次中较低水平的完整透明图样纸作图表示。这种网络具有处理单元和联结的能力。前者表示了理性的对象,诸如特征、语词、概念,而后者具有这些单元之间的活化加权。单元间的互相连接的模式组成了这个领域内的处理系统的知识结构——它知道什么以及它如何响应。

这样的 PDP 网络怎样更准确地表示位于不同范·希尔水平的学生的知识结构呢?在确认前期的水平上,形成了识别某些常见形象特征的神经网络单元;因此,这些特征成为可识别的特征。当建立了特征之间某些联结的模式,并能使儿童对一类视觉的刺激作出灵敏的反应时,形状就被“识别”。

当充分多的直观特征变得可识别,并成为它们对应于普通形状模式中内部联结的指示器时,儿童发展到直观水平。在这个水平上,探测单元的网络充任了“形状辨认者”,其激活模式表示了图形的最初的草图。那些与视觉原型足够相配的图形将引起某些模式的活化,转而使图形得以被辨认。图形的性质是不能被明晰地辨认的。包含着这些性质的视觉特征只是激活了原型辨认者。儿童通常没对这些表示进行反思。然而,当必须作某些反思时(通常由于外部的要求,如复制图形),也许会激活一种模式,但这个模式也许是不合适的。例如,学生经常按多边形的基本图形给图形编码,而不是按边数来编码,描述一个非凸四边形是“带有一个 V 字形槽口的三角形”,或者是“一边向内弯曲的三角形”(克莱门茨和



巴蒂斯塔)。通过合适的教学,性质识别单元开始形成;即视觉特征可以单独被感知,并且可以联系到一个文字的标记上去。学生能够对直观特征进行反思,并因此而识别图形的性质,最终达到水平2思维。尽管这都是假想,而且意味着这是当前范·希尔理论一种可能的认知科学解释。但在进一步解释像“关系网络”和“在符号领域中找出路径”等概念方面缺乏进展,令人沮丧。这些思想是有趣的并且富有挑战性,但是与它们在开始时已达到的理论水平相比,他们没有任何更大理论程度说明的进展。

研究也已表明 PDP 假设有多种存在图式。也就是说,学生对于图形能拥有几种不同的直观子模式(例如,一个垂直方向和一个水平方向的正方形)而没有接受“一般的”情况(例如,一个斜放的矩形)。纽曼(Neumann)研究了构成大矩形的几何图案,在每一个矩形里面都有两个矩形。模式在三方面不同:外部矩形尺寸、下面的矩形尺寸,以及上面的矩形的线条数。被测的对象研究了当这三个变量取极端值和少数几个中间值时刺激的优势。给这些对象测试图案,要求他们估价自己对研究过的图案的自信程度。被测对象并不平均看待所研究的东西,而是认为极端值的价值比平均值的价值高得多。这就表明了他们能在一组刺激中抽出居于中心地位的多个焦点。尽管没直接强调这个问题,但是在范·希尔理论方面的研究与这种发现是一致的。

作为最后的例子,这样一种角度有助于解释人们对用二维表示一个三维立方体的认知。首先,为什么我们把直线看作边,或把一个区域看作一个三维物体的面积?“实际上我们的视觉系统似乎只好把感觉器的输出组合到这样的实体中去。”(闵斯基)什么能使我们把这些特征看作是组合在一起构成一个较大的物体呢?“我们的视觉系统实际上再一次被强迫去表示那些特征中的每一个,它可以是角、边或面积,每一个特征属于且只属于一个较大的物体……,我们的视觉系统生来就具有在每个不同水平上的某种

‘锁定’装置,每时每刻它会使得某个水平上的每个‘部分’被指派到下一个水平上的一个且只有一个‘整体’”(闵斯基)。我们是怎么把这些物体辨认为立方体呢?我们的“记忆框架装置也利用了‘锁定’装置,使得每次每个物体会被归属到一个框架上,结果是在画面的每个区域内,框架之间竞争着来说明其中的每个特征。”一个 PDP 模型可以假定有表示互相竞争的关于 Necker 立方体的每个顶点的假设的单元。例如说:左下顶点可以是在立方体的前方或是后方。网络是由两个互相联结的子网络所组成。每个子网络对应了对立方体的整体的一种理解。它们是互相排斥的,因而,当活化通过网络传播时,在任一时刻,它会活化一种模式或是另一种,但不是两种同时都活化。

### 三种理论观点

认知科学模型给几何思维模型带来了精确,这并不总是表现在皮亚杰和范·希尔的理论中。例如,安德森的和格里诺的模型详细识别了知识结构与过程,而 PDP 模式给较低水平上的学生表示的某些具体方面带来了明确性。然而,也必须注意到这些认知科学模型的局限性。由于常常包含少数问题,所以要关心一般化问题。这些模型不太注意解释不成功的学生,以及诸如猜想和问题发现的过程和知识重构的方式。而且,所有程序性知识的发生取决于早先所学的陈述性知识的编辑,这也是不清晰的。事实上,似乎许多学生在现行课程中只是程序性地获得数学思想,而没有把程序和概念性知识联系起来。也就是说,学生经常操作的数学加工系列没有能描述他们正在做什么或为什么做,可能正如戴维斯(Davis)所描述的序列那样直观。这些模型中的大多数不处理本质上不同的思维和表示水平的发展,以及信念系统、动机激发和教材的有意义解释,而且他们不强调感觉运动活动、直觉和数学思维文化方面的重要性。事实上,计算机模拟与学生操作之间的相似

性可能是有意义的学和教的状态的缺乏的一种反映,在这种情景中学习和教学是有意义的。尽管如此,理论提供了直觉和有用的隐喻,也提供了大多数其他观点所缺少的特定明确性。

皮亚杰和范·希尔的理论具有一些重要的共同特点。例如,两者都强调学生在主动构造他们自己知识中的作用,与被组织成复杂系统知识的非言语发展一样。例如范·希尔强调,成功的学生并不学习事实、名称或规则,而是联结几何概念和过程并最终组成图式的关系网络;因此,学生必须从他们自己活动的系统模式中抽象出数学。教师不能成功地给还没达到某一水平的学生提供直接帮助。“如果你希望知道儿童进步得有多大,不要等他们来模仿你们的论证,而是要听他们自己已发现了什么。”因此,皮亚杰和范·希尔都强烈地不同意这种观点,即好的教师教学时仅仅是向儿童解释清楚。一些发展机制也类似于此。皮亚杰强调失去平衡和解决冲突的作用;范·希尔恳求教师认识到学生的困难,不要回避“思维危机”,因为这些有助于学生向较高水平过渡。此外,皮亚杰和范·希尔都倾向于回避两个主张:①教育目标被定义为不断地加速发展(“我们已识别了水平;现在我们能使儿童怎样快速通过它们。”),②一旦达到高水平,就完全低估了低水平的思维。然而,也能在一些将其理论运用于实践中的人的讨论中听见拥护这些主张;不能确知两种态度何种更英明。

他们也有重要的分歧。就像前面已讨论过的,范·希尔强调发展过程受到教/学过程的重大影响;更显著的是,他对皮亚杰所持的逻辑为思维之基础的信念进行了批评,他指出逻辑只能在早先思维水平的基础上发展,因为他发现了不同性质的阶段,皮亚杰恐怕错过了水平。根据皮亚杰的“阶段”,范·希尔的意思是变换阶段(例如,从前运算到具体运算的思维)。在通过这三个阶段的迁移中,儿童首先不理解某一思想,然后进入到变换,最后达到理解。范·希尔声称“皮亚杰描述的阶段和时期本质上没有同一个特定的

年龄相联结,但是对许许多多学习过程而言,不管发生在那个年龄,它都是具有特点的。”虽说很令人感兴趣,然而还应当注意到这三个阶段只构成了皮亚杰发展理论的一小部分。

由于范·希尔的主张“回避皮亚杰所认为的在不同思维水平上,思维对象十分不同,以致于在建立在逻辑关系熟练基础上的第一水平上不可能存在推理问题,这些逻辑联系属于第三水平,因而不可能是已知的”。范·希尔的这一主张也是有问题的。首先,他犯了一个类似于他归咎于皮亚杰的错误;他以自己的想象或自己有局限的观点来定义逻辑。其次,更重要的是,皮亚杰正是假设思维对象在不同的发展阶段上是不同的。两个理论家都相信关键的教学困境是在关于尚未成为学生反映的对象的教学。

很少有研究处理皮亚杰理论与范·希尔理论的相似性问题、区别性问题,以及潜在假设的问题。它们看来是连通的;丹尼斯指出,对高中学生而言,范·希尔水平好像是有层次的,经历了皮亚杰的具体和形式运算阶段。她指出 36% 选修高中几何的学生已到达形式运算阶段,并且他们中的大多数只达到范·希尔层次中的水平 3。她还发现处在具体运算和形式运算阶段(尽管这个关系的本质是多义的)的学生,其范·希尔水平间存在显著差异。

回顾一下已作的论证,存在一个 0 水平,它是建立在以皮亚杰和范·希尔理论部分假设的基础之上的。更大的假设也是可能的,例如,尽管可能是水平 2 表示了几何概念化在抽象/有意识/言语平面上的重构,皮亚杰和英海尔德假设的这些概念化首先在感觉平面上构成,然后在表示/想象的平面上重构;因此,水平 2 可能依赖于皮亚杰所称“被联结的心理表象”的许多方式。在这个领域进行更细致工作还有潜力和必要。例如,调研需要考虑当更高思维水平达到时怎样来证实直观思维。正如我们讨论将指出的,只被更复杂的思维方式“推入背景”而不被转化是不可信的。同样的心理学过程,直观思维,可能有很多心理层面,从原始的到复杂的和

与另外思维方式的内部联结,在思维中起不同作用的所有层面都取决于哪个层面被激活。发展研究必须有超越,不只调研几何思维复杂水平不断的增长,还要调研诸如起初看起来发展良好的直观思维等进程的持续发展。

一般来说,建立在这三个理论观点强化之上的研究可能是有潜力的。例如,皮亚杰的图式,范·希尔的关系网络,以及认知科学更明确的陈述性网络,它们在知识结构看法中确实具有共性,这些研究的假设会产生一个更丰富、更真实的模型是可能的。理论上说,这样的模型将会有认知科学观点的和皮亚杰-范·希尔观点的发展侧面的解释。

## 在几何中建立真理

数学家怎样建立真理?他们使用了证明,即基于公理的逻辑推理。他们怎样发现真理?常常是用了本质上直觉的或经验的方法。事实上,建立新的数学的过程是与记录它的推理性的格式证明相抵触的。在创建数学中,提出了问题,作出了猜想、提供了反例和修正了猜想;当这种想法的改进被判为已回答了有意义的问题时就产生了定理。贝尔(Bell)把数学中的证明区分为三种作用:证实,这涉及到建立命题的真理性;说明,这涉及将直觉转移到命题为什么是真理;以及系统化,这是把命题组织进演绎系统。

像在数学的其他领域一样,在几何中,经验方法和演绎方法应当彼此交互作用,取长补短。例如,经常是当一个人作演绎方法遇到阻碍时,经验方法能产生探究的可能性。然而,在几何中对大多数学生而言,演绎和经验方法是分离的两个领域,要用不同方法建立正确性。事实上,在正在学习或已学过中学几何的学生中非常缺乏形式演绎的应用。照舍恩菲尔德(Schoenfeld)看来,大多数已学过一年高中几何的学生是“朴素的经验主义者,其尺规作图方法

是经验的推测-验证环路”。学生作出一个猜想,然后通过考察他们的图形来验证它。假若图形看起来足够准确,学生就满足于猜想已被证实。“在不同的问题片段中,学生会因为它们看起来不够精确而拒绝正确解答;而且会因为它们看起来非常好而接受不正确解答。”在一个谈话系列中,要求大学学生在解了一个对作图题提供解答的证明题之后去解一个作图问题,“几乎 1/3 的学生通过作出正好违背他们刚已证明结果的猜想开始第二个问题!”(舍恩菲尔德)显然,学生的证明活动实际上没有为学生建立知识——或是建立了知识,但知识被建立成独立划分的几块,用这种方法在作图领域中是不可能接受的。照舍恩菲尔德看来,在高中课堂上运用教学策略也许是这种独立划分的导因。尽管定理和演绎常被用于引导和证实作图,但强调的是作图方面,就像在程序方面所强调的是获得技能一样。

应该注意到舍恩菲尔德对“经验方法”的调研是限于学生所用的作图,教作图作为方法是具有本身的自然而然的价值。另一些经验方法也得出了一些不同的结果。例如,关于计算机作图也许有两个原因对学生来说要更好一些。首先,计算机需要比用纸笔更精确地作那些样品;其次,因为计算机操作作图,教师可较少地把这些课题当作学习的一系列程序来处理;因此,可以将重点更多地放在概念发展上。然而,即使用计算机作图,我们还得要担忧推行经验主义方法的陷阱。例如,在评论计算机软件几何猜想者中,舍恩菲尔德担心程序能自动地重复作图是不是导致学生成为完全的经验主义者。施瓦茨(J. Schwartz)叙述了一件相反的事例来作答复。一名学生用了大量的正例,企图使另一名学生信服某件事是真的。另一名学生反驳说,在课堂上已见过许多作图法,对许多例子都行得通,但是后来发觉却是错的。这样一来,可能是由于推理产生于经验性的方法,后一名学生从使用经验主义的经验,发现了它的局限性。这确实是一个重要步骤,学生开始意识到在几何

中需要用演绎方法建立真理。显而易见,这不是孤立的情况,就如我们下面将要讨论的,研究指出几何猜想者的经验测量方法对学生学习证明的能力没有负面影响。

另外的研究已经证实存在让学生混淆判别数学陈述的相关方法。在马丁和哈雷尔(Harel)的一项研究中,要求小学预备教师去判断归纳和演绎论证陈述的数学正确性。对每一种陈述面言,多于50%的学生接受归纳论证作为正确的数学证明;而多于60%的学生接受演绎论证作为一种有效的数学证明。52%的人接受一种不正确的归纳论证作为不熟悉陈述的有效证明。菲斯拜因(Fischbein)和基德姆(Kedem)发现高中学生在发现或学习了一个陈述的正确证明后,仍可能保留惊奇,而且希望作进一步的核对。在一项关于12到15岁学生的研究中,加尔布雷斯(Galbraith)发现1/3以上的学生不理解为什么反例必须满足猜想的条件,但要违反猜想的结论;18%的学生感到用一个反例去否定一个陈述是不够的。

按照马丁和哈雷尔所言,在日常生活中,人们基本上把“证明”当作是“让我信服”。贝尔建议“最常见的是对一系列与问题中的点有关的项目作智力上的审视的结果得出了确信,这样最后的结果是想法整理成为一个判断。”按照贝尔的说法,证明源起于对一般规则的内部检测,结果是承认或废弃,之后,人们把它交付别人作评论,先是口头的,然后用书面的陈述,不仅有一般规则的陈述本身,还有它成立的依据,形成一个证明。因此,学生在他们认识到知识的公众地位和需要公众的证实之前是不会懂得正式作证明的作用的。

这里有决定性重要意义的是内部检验思想。对数学家而言,内部检验最终采用证明形式,正如人们设法让社会接受他论证自身的评论一样。然而,学生能履行这种检验吗?若能的话,又是怎样完成的呢?当测验有关他们思想的判别时,学生可能会提到一般命题、一般命题的具体例子、图解和与判断没有联系的孤立结

果。当然,后两种判断是有问题的,第一个原因是学生经常依据图解(图)作出不正确的假设;第二个原因是学生忽视了详细展示自己的推理以便推理能被评价的需要。塔利兹纳(Talyzina)也发现较年轻的学生比较年长的学生更多地想起一般的命题,而不是与一般命题具体相关的一个特例。人们声称后来的行为“是掌握解决几何问题能力的较高级阶段的特征。”也就是,在几何中更复杂的思维特征是一步步地缩短演绎思维。

### 学生的证明成绩

在学年结束的大约一个月之前,森克测试了 1520 名几何班学生的书面证明能力,他们已学过这方面内容。实验中只要所有的步骤合乎逻辑,即便概念、词汇或定理名称方面有小错误,证明也被认为是正确的。在一个要求学生提供理由或陈述的简单 6 步证明题中,70% 的学生做对了。在一道需要一条辅助线并要求必须写出陈述和自己理由的证明题中,51% 的学生做对了。32% 的学生能证明矩形的对角线相等,但只有 6% 的人能证明一些更困难的定理,它们不允许直接用三角形全等公设和定理来推导。刚好 3% 的学生在测验中获得满分。在 12 个需要完整证明的问题中只有 3 道题至少半数的人取得成功。森克推断在全年几何证明课程的教学过程中,只有大约 30% 的学生达到书面证明的 75% 掌握水平。

布伦菲尔德(Brumfield)询问了 52 名高中学生,这些学生早些年已提前修过几何课程,并且在几何计算课程方面已处在领先的地位。当要求他们尽其所能列出所有能记住的公设时,50% 的学生根本不能列出任何东西,而 31% 的学生只列出不是公设的陈述。40% 的学生由于把很多定理同公理、定义和错误陈述相混淆,竟不能列出一个简单的定理。当要求学生选择一个有趣的定理并证明它时,81% 的学生不能给出证明,只十分之一的学生作出正确证明。显而易见,即便聪明的学生从传统的以证明为定向的高中



几何课程中也没获得多少有意义的数学。

## 证明技能的发展

由于学生书面证明方面表现较差,因此迫切需要调查这种重要技能的发展。它的构成是什么?书面证明的前提条件是什么?儿童何时第一次试图判断自己的结论?他们怎样从事的?

加尔布雷斯指出了理解和构造证明的几个组成部分:(a)理解并且能够完成对证实一个陈述所必需的各种可能性的穷竭的检验;(b)发觉并利用数据中的相关模式或原理;(c)利用推理链而不必用具体的参照建立中间步骤;(d)识别一个概括的有效范围;(e)正确地解释陈述和定义;(f)理解证明的形式构造。范·希尔、皮亚杰和另外一些理论家对于证明技能的发展提出了几种不同的观点。例如,皮亚杰描述了判断和证明概念的水平。我们将对这些水平进行全面概述(用来表示水平的数字只是一个假设,所以不必与皮亚杰的水平层次相对应)。

**水平 1(直到 7 岁~8 岁)** 在关于思想真理性方面,缺少观察和局部结论的整合。收集的每一个数据或考察的每一个例子都被当作彼此没有整合的孤立事件。探究随机地进行,没有计划,而且局部的结论可能是相互矛盾的。这种在思维中缺乏指导是由于这样的事实,“这里没有任何事物想让思维意识到自身,因而去系统化或‘指导’它作连续判断”(皮亚杰)。由于自我中心,儿童既不设法去理解另外人的观点,也不去想如何使别人理解自己的观点。

在这个水平结束,有了一定程度的整合和更多的有目的的探究。思维得到更多的指导;学生开始理解必须整合几条线索或例子才能得出结论。尽管模式被经验地建立起来,但这样并没有让学生设法理解为什么会产生模式。例如,当学生把三角形的角放在一起时,让他们显示对一个三角形会发生什么,并要求他们预测

对另一些三角形将发生什么。学生算出并预测有三个角的图形可以产生半周角,以及有四个角的图形可以产生周角。然而,他们忽略了角的大小;他们不想去决定为什么会发生这种模式。

在这个水平上,儿童能做大多数演绎的初等形式。它的构成是“当给出这样和那样的条件时,预见会发生什么事情,在给出这样和那样的结果时,识别已发生什么事情”(皮亚杰)。

**水平 2(7 岁 ~ 8 岁到 11 岁 ~ 12 岁)** 随着学生进入这个水平,他们不仅根据经验结果作出预测,而且开始设法判断自己的预测。归纳和演绎经常冲突。在角的问题中,他们试图分析每一新例子的角。尽管因为他们不能看出三个角的大小是相互依赖的,但还是经常被角的表象误导,而且经常比处在水平 1 的学生显得程度低。儿童不正确的预测似乎引导他们去分析角之间的交互关系,但是他们不能建立一个普遍的关系。还有一个预期的搜寻信息的特征和目的性。例如,学生在搜寻任务中可能会利用信息去确立各类可能性和不可能性的分类。

在这个水平的后期,归纳概括发生得更快、更直接。每一个例子都同前面的例子作比较。在角的问题上,儿童能建立一个三角形三个角之间的关系。而且在单个三角形中对角的分析以及有关三角之和的归纳概括之间不再有矛盾。“相反,导致相信任何三角形的内角之和是半周角信念的归纳本身,提供了一种指导新三角形角组成的预期图式”。这个发现成为普遍性:“它们总是正好形成一个半圆周”。然而位于本水平的学生没有建立逻辑的必然性。甚至在经验地排除了所有可能答案(除了一个)之后,一个学生说道“我宁肯打开另外(线索),你们从来不知道的”。

“当推理依赖于信念而不依赖假设时,换言之,当推理是建立在实际观察的基础之上时,这些儿童存在隐含的能力。但这样的演绎仍是切实可行的,这就意味着儿童如果不相信它们,就不可能

从前提出发进行推理。或者即使他能从按其本人所作出的假设开始详细地推理,他也不能从别人对他的建议开始作这样的工作”。因此,尽管思维是逻辑的,在本质上却是经验的。

**水平 3(11 岁 ~ 12 岁及其以上)** 儿童能进行基于任何假设之上的形式的演绎推理。假设的可靠不影响论证的有效性。使用的方法建立起逻辑的必要性。学生把由各种不同行为揭示的信息整合起来,并决定必须从更进一步的行为中获得什么信息。在水平 2 上“留下的不足是不能确认穷尽性。这一点使得他们即使在证明已充分时也未能如此认为。只是在水平 3,整合方面的进步导致了深信作为必要的条件放在一起时,这样的条件也是充分的”。

对角的问题而言,学生从简单地相信角总会组成一个半周角进步到一个基于逻辑推理的信念,这必须也必然是如此。例如,他们可以说三个角组成半周角是因为“在一个延长了的等腰三角形底部的角还不是直角,点补足了这个差额。”然而,为学生所运用的逻辑推理不是以形式数学为基础。因此,学生也许已相信三个角必须也必然形成一个半周角,但是他们通常不能提供一个形式推理。

总之,在水平 1,儿童思维是非反思和不系统的,因此,就不是逻辑的。在水平 2,思维是逻辑的,但受经验的制约。只有在水平 3,儿童才能逻辑地演绎和在数学系统中有意识地运算。是什么引起水平的进步?从哪儿引发证明的需要?“想必是我们的思维与其他思维的接触导致了相互碰撞,由此而产生了怀疑和证明的愿望……证明是论证的产物”(皮亚杰)。由于同别人的接触,儿童开始知道更多的别人和自己的思维,开始“意识到他所运用概念的定义”,以及获得“内省自己的心理实验的部分习性”。儿童逐渐有能力去理解别人的观点。最后,随着形式思维的开始,心理实验被逻辑实验所取代,在心理实验中,通过在思维中再现事件序列建构如同已发生或想象中已发生的情况一样的现实。在逻辑实验中,带

来的是实际的构造机制。在这个时候,论证能在一种真实的感受中被内化;“逻辑实验因此是在自身实施旨在发现矛盾的实验”。

### 范·希尔的观点

根据范·希尔观点,在直观和描述/分析水平,当学生识别图形时,其推理十分不同。对处在直观水平的学生而言,判断是“基于一个观察”,“不存在任何为什么,人们恰好看见它了”;对处在描述/分析水平的学生而言,判断起因于“一个关系网络”。处在描述/分析水平的学生其思维也许包括观察;当其考虑一已知图形时,可能他所见的是一个图象。图象不是判断的基础;判断的基础是关系网络。即便图形没画准确(或在计算机屏幕上被歪曲),如果确信使图形所有边相等只是画图者的意思,学生的思维将不会受影响。范·希尔延续了这种说法,他认为正是这种关系网络对两个水平进行了区分。在开始时,人们不具有网络。

一旦一类形状被当作性质的一个集合(在水平 2),一个图形与另一个图形之间的关系就被确定,也能被思考。能够产生联想性含意的一个初步的形式。然而“还不能解释清楚,说某些性质是随着另一些而来的是什么意思。”相反,在水平 3,陈述 A 和陈述 B 的内容是不重要的。“对于进一步的思路唯一重要的是在 A 与 B 之间存在的联结。有了这些联结就构成了新的网络。当第二个关系网络完善到它的结构可以被读出时,当小学生能对别人讲这个结构时,那么为第三水平的网络建造的知识块就出现了。”技术的发展使得同其他人交流有关关系网络中的基本思想成为可能(也就是去推理)。“没有关系网络,推理是不可能的”。但由于起因于专门语言的交流力量产生了要“坚持关系网络”的义务;也就是说形式推理带来了约束。在那里很多学生存在困难,他们不知道约束是什么,也不理解为什么应用约束。

按照范·希尔的说法,证明的直觉基础源于小学生的陈述,即

把一些断言真的信念与另外断言真的信念相联结。这种联结概念是直觉的;这样的联结规律只能通过分析去学习。通过分析和抽象,这些规律生成逻辑,也就是通过操作陈述之间的连接网络生成逻辑。德·维利尔斯赞同当概念性质间的逻辑关系网络被建立时,在水平3首先出现演绎推理。他补充道,因为在水平1和水平2的学生不怀疑其经验观察的有效性,对他们来说证明是无意义的;他们把它看作判断明显的东西。

范·多模伦(Van Dormolen)描述了证明行为的三个水平,并把它们与范·希尔夫妇水平相联系。第一,对简单情况作判断,结论限制在已知判断的特例上(例如,一个特殊的矩形)。第二,判断和结论也许是针对特殊情况的,但指的是相似对象的集合(例如一类矩形);随着学生能生成进一步的例子,将考虑用几个例子来说明一个模式。第三,学生通过形成符合公认准则的论证来判断陈述;也就是他们能给出形式证明。范·多模伦把他的第一、二、三水平分别与范·希尔的直观思维水平、描述/分析思维水平和学生注意论证性质的形式演绎思维水平相联系。应该注意到尽管学生在范·多模伦的第二水平已取得了进步,但是其方法充满着错误的可能性。例如,当学生通过考察特殊情形对一类图形进行推理时,经常会注意特殊情形的性质,因此,一般会犯关于此类的错误。

### 范·希尔水平与构造证明的能力

从上述描述可以看到,以证明为导向的几何课程要求的思维水平应在范·希尔层次至少处于水平3位置。然而70%以上的学生开始学高中几何课程时处在水平0或水平1,并且只有以水平2(或更高水平)进入的学生到课程结束时才有具备证明能力的机会。因此,在学生开始此类几何学习之前,教学应帮助学生达到较高的几何思维水平。

森克调查了范·希尔水平书面几何证明与非证明几何成就之

间的关系。他在秋季测试了选修全年几何课程学生的范·希尔水平和入门水平的几何知识,而在春季则测试学生的范·希尔水平,几何知识和书面证明能力。结果发现书面几何证明成就与范·希尔水平正相关(秋季 0.50,春季 0.60),非证明内容的成就与之亦成正相关(春季 0.70)。他论证道,在水平 0 开始几何学习的学生几乎没有学习书写证明的机会,而从水平 1 开始学习的有少于  $\frac{1}{3}$  的机会,从水平 2 开始学习的有 50% 的机会。因此水平 2 是关键性的入门水平。他注意到在学年结束时,在水平 3 或以上的学生其证明方面的成就明显地超过了水平至多达到水平 2 的学生的成就,但处于水平 4 和水平 5 的学生并没有比处于水平 3 的学生取得明显的好分数(可能是因为两个高水平上的学生太少)。事实上,4%、13% 和 22% 的学生分别位于水平 0、1 和 2,而 57%、85% 和 100% 的学生分别处在水平 3、4 和 5,分别被归类为已经掌握了书面证明。这些数据似乎支持下述观点:范·希尔水平 4 是学生掌握证明的水平,而水平 3 是过渡水平。人们也许会猜想位于水平 3 的学生可能不能够做他们以前未曾见过的大量证明(或实际理解证明需要或完成了什么)。然而,范·希尔层次理论认为的只能期望水平 4 或水平 5 的学生写出形式证明的观点并没有得到研究的有力支持。

非证明内容上的春季测试成绩说明了在证明得分上的 57% 方差,但范·希尔测试得分说明只增加了 3%。尽管 Han 也发现范·希尔水平预测了一个书面证明测试的成绩,但是在预测高于标准成绩测试分数时,范·希尔水平只有相对较小的贡献,这是必须作出解释的。这可能是由于分离对内容的思维水平有困难。(范·希尔测试与内容的相关性只有 0.6。)

## 冲突

在强调几何推理和证明怎样发展中,范·希尔与皮亚杰之间似

乎有很大的分歧。范·希尔强调的似乎是内容；当建立了足够的关系网络时，人们在几何中就进步到更高的思维水平。几何逻辑推理能力取决于具体内容知识的数量和组织。而皮亚杰则认为，学生的某些逻辑运算发展独立于他们所应用的内容。这些运算可用在不同背景中；通过这些运算建立了新的数学知识。例如，假若学生知道矩形是对边相等且有四个角是直角的图形，而正方形是所有边都相等且有四个角是直角的图形，那么，学生也许演绎或内化所有正方形是矩形这个事实。借助演绎，结论成为已被整合进学生当前的认知结构中的新建知识。

作为对皮亚杰观点的支持，德里斯科尔(Driscoll)强调在获得构造证明能力方面认知发展的作用，声称学生为了完全理解和构造证明必须要成为形式运算思维者。作为证据，他提到来自 1978 年 WAEP 的有关逻辑项目(该项目即便是 17 岁的学生也做得很拙劣)，在成绩方面 7 到 13 岁之间比 13 到 17 岁之间的跳跃更大。而且加德纳(Gardner)认为只有在形式运算时期才能单独处理抽象空间的思想，或用形式规则管理空间。也就是说，只有那些能够把逻辑的数学理解力和空间理解力整合成一个科学系统的个体，才能建构形式几何。麦克·唐纳(McDonald)对学生能够进行的思维本质会影响学生几何知识构造的想法提供了支持。将 20 个初中生分到形式运算类，另 20 名初中生分到具体运算类，要他们对选自相似和全等领域的 13 个几何概念的类似性作出判断。多维测量技术显示形式和具体运算类的学生都能画出原始的认知图象。而且形式运算类学生对内容的构造显然比具体运算类学生的做法更像教材专家的构造。最后，与范·希尔理论相对，梅森(Mason)指出四到八年级学生的推理能力远远超出已被期望的程度，假设他们处于低范·希尔几何思维水平。这些学生显示出水平 2 的逻辑思维特征，但没有具体定义的知识或几何内容与这种水平相对应。

因此，我们断定这不是一个“先有鸡还是先有蛋”类型的问题；

在推理水平和知识的组织之间存在力的相交作用。对这种相交作用的详尽阐述是一个重要的研究问题：知识的组织怎样依赖于运算思维阶段？思维阶段怎样依靠知识的组织？

## 证明与教学

已有大量用新颖方法教形式证明来改进学生证明技能的尝试，而几乎所有的这些方法都是不成功的。一种替代的方法指出学生要发展一种证明能力，必须要理解它的本质。例如，德里斯科尔报告了一项由格里诺和马戈恩(Magone)所作的研究，这项研究选择那些已学过高中几何但不擅长几何的大学生，给他们一个有关检查证明的两小时培训方案。这个教学方案不只教给学生在检查证明中要仿效的具体步骤；它还给学生提供了分析证明本质的机会。研究者发现实验组的学生不仅比控制组学生在检查证明方面更有效，而且他们在构造证明方面也做得更好。他们作出假设，即学生需要理解证明的本质以及理解证明如何与日常的论证相区别。

富伊斯指出一些六年级和九年级学生在教学实验中“通过仿效和总结演绎说明，以及给出演绎论证”向水平3思维进步。有迹象显示某些学生不会证明是由于学生相信判断是别人为他们所做的事；“这是真理，是因为它是我在课堂中学习的定理或程序”。

贝尔认为通过让学生在呈现论据和依据时作出猜想和解决争论这些合作研究，能够促进他们在几何证明中取得成功。福西特(Fawcett)进行了一个为期两年的几何实验，实验结果支持了这个论点。学生被激发去发展自己的公理、定义和定理，以及考察、讨论、判断其猜想。两年结束后，实验班学生的几何分数要比传统班学生的高，而且实验班学生和其父母均声称学生的演绎思维得到提高。福西特也对表明学生理解证明的行为进行了观察，诸如要求学生陈述中仔细定义重要词汇和短语；获得支持结论的证据；



分析证据;识别、分析和重估阐明的与未阐明的假设;以及评估论证等。

在类似的意向中,休曼(Human)和内尔(Nel)报道了以范·希尔模型为基础,在几何课程中通过“慢慢引入”演绎和公理思维获得的成功。其目的是通过开始时列入非显然陈述的证明和让学生系统阐述自己的证明假设,来尽可能作出有意义的证明。通过回顾一些有关三角形的熟悉陈述,然后要求学生借助这些陈述来思考解决问题,教材开始发展演绎技能。例如,“已知三角形  $PQR$ ,  $PQ = PR$ , 角  $R$  的外角是  $100^\circ$ 。尽可能多地给出三角形的其他信息,并解释你是怎样获得这些信息的”。

休曼和内尔的研究结果,特别是福西特的研究结果与汉纳(Hanna)的证明分析相一致。她论证道,由于数学结论被数学家用定理和证明的形式来形式化表达,这种严密的实践被很多人错误地当作是数学实践的核心。然后有人就假设“学习数学必须包括训练创造这种形式的能力”。以这种观点为基础的教学处理常不能达到他们的教学目标,其原因很可能是学生正在设法仿效形式规则,而它们不与任何其发现有意义的活动相联系。另一方面,关于设法使学生卷入数学发现和交谈的关键因素——猜想、仔细的推理、建立经得起别人详细检验的有效论证的研究已经显示出更多的积极影响。

总而言之,我们已看出学生在几何中运用形式证明极不成功。在课程中为了实现这个目标已付出了大量时间,却得到如此结果是令人失望的。然而,我们对学生作出证明能力的分析揭示了一个更令人泄气的发现:学生不仅在几何中缺乏建立真理的能力;而且,事实上在数学的所有方面都是如此。学生没有发展那些激励和允许他们建立数学真理的信念和图式。事实上,如果我们在数学学习上采纳建构主义观点,当学生在数学中建构数学意义并建立知识网络时,他们为自己建立数学真理的过程变得至关重要。

为此,在建构和重构数学知识的过程中,学生必须决断他们相信什么是数学真理。每一个新遇到的思想被接受为真理,或当作谬误被拒绝,这都取决于当前的知识和推理结构。这些决断中的每一个反过来既加固当前的结构又引起它们被重组。

显然,更多研究的注意力必定是集中在学生怎样建立真理以及他们怎样在其数学思维中理解和利用证明。像皮亚杰的工作是重要的,它说明了知识证明技能的发展;尽管这项工作更多的是在脱离形式数学的背景中作出的。学生在课堂情境中探究数学能获得相同的结论吗?我们能详细阐述证明水平吗?什么种类的任务和环境能鼓励学生进步到较高的证明水平?学生怎样用建立真理的方法影响其知识的组织?

## 空 间 推 理

加德纳论证道,空间能力是他称之为“人类智力”的几种“相对自发的人类智能”中的一种。空间思维对于科学思维是必不可少的;在学习和问题解决中经常用它表达和操作信息。“识别跨越不同领域相似性的隐喻能力,是从许多空间智力证明的实例中获得的”。当科学家在人类社会和微生物或人脑功能之间作类推之时就是一个例子。按照哈里斯(Harris)的说法,美国就业部门估计,大多数技术和科学职业,像制图员、飞机设计师、建筑师、化学工程师、物理学家、数学家等都需要个人有至少百分之90以上的空间能力。

### 空间思维和数学之间的关系

哈达玛德(Hadamard)论证道,在更高层次的数学中所需的多数思维本质上是空间思维。爱因斯坦(Einstein)评论道,他的思维

要素不是词汇,而是“某些符号和多多少少能够有意地被重建和组合的清晰图象”。很多数学家和数学教育家已提出空间能力和直观表象在数学思维中起极其重要的作用。也许这个立场的根本是认识到在数学中应运用不同的思维方法。

例如,克鲁捷斯基(Krutetskii)提到两种不同思维方法:言语逻辑的和直观形象的。他论证道,两种思维方法之间的平衡要考虑到决定个体在数学思想中操作的不同的“头脑数学倾向”。他把这些分为分析类,这类学生在数学问题解决中喜欢用言语思维逻辑模型,甚至对用相对简单的直观方法也能解决的问题也是如此;几何类,这类学生喜欢用直观形象的图式来解题,即使对用分析的方法更易解决的问题亦如此;调和类,这类学生对言语逻辑和直观形象思维均无特别偏好。大脑的半球专门化理论证实存在两种思维模式。大量的心理学证据表明大脑的两个半球采用不同的专业化的思维加工模式。通常而言,左半球专门对言语和数字运算作分析/逻辑思维;它擅长于有序工作,逻辑推理,以及分析刺激物的组成。语言也在左半球加工。另一方面,右半球则支配空间工作,艺术活动,以及形体想象和专长于整体性思维。“尽管左半球在识别对象(即点、直线和平面)的欧几里得(和说得出名的)性质时与右半球一样有能力,但是在识别较少叫得出名的拓扑性质中,诸如包含长度、角和形状的变换中,左半球比右半球的能力要弱得多”(佛朗哥和斯佩里(Franco & Sperry))。

已经发现空间能力和数学成绩在所有年级水平都是正相关的。由于在有明显直观范围的数学中有着大量的概念,要理解为什么存在这种关系是不难的。例如,戴维斯描述道,需要什么“认知建构知识块”来确定在地板上一个可旋转正方形的面积。除了正方形和三角形的心理图象以外,他引用旋转和变换三角形的心理表示,把他们放在一起构成另一个图形,甚至将一个正方形切割得到几个三角形。类似地,苏联研究者也强调空间思维在几何中

的重要性,“直观化是作为同化抽象(几何)知识和个别概念的基础来运用的”(亚基曼斯卡娅, Yakimanskaya)。例如,理解矩形的概念及其性质需要学生分析矩形边之间的空间关系——也就是,了解“对”边并把它们同“邻”边区分开来。有人论证道,教师应该为发展学生的空间想象提供活动,因为假若教师不发展学生空间想象而只以提供有关图形性质的言语信息来取代的话,那么同化将是“形式主义”的。

赫斯科维兹(HersHKowitz)粗略地说明了直观化在学生几何思想概念化发展中的作用,并把这种发展与范·希尔夫妇水平联结起来。首先,用典型例子作为可以直观比较的可能范例的一个参照物;其次,用典型的直观例子获得概念的重要属性(从水平 1 向水平 2 过渡),然后,用这些属性判断另一些形状。最后,用概念的关键属性或性质判断图形是否为概念的特例(水平 2)。巴蒂斯塔和克莱门茨在学生用于 Logo 环境中做几何当中,发现了一个相似的发展系列。

此外,许多学生在表述和操作概念中利用直观思维,没有内在地包括一个空间方面。例如,因为教学,学生也许用直观术语思考分数和运算分数。事实上,对数学思想直观表述的严重依赖,在小学是特别重要的,因为较小儿童比成年人更加依赖想象。

约翰逊(Johnson)论证道,事实上,想象力能使我们利用自己的躯体体验去构造所有思维,并不只局限于数学。使这过程发生有两种途径。第一种是意象图式,“是我们的感觉的相互作用和运动程序的循环式的动态模式,它对我们的经验赋予了一致性和结构。”例如,垂直的图式是抽象的认知结构,当我们在构造自己经验时本能地采用自上而下方向而出现。当我们感知物体和操纵世界时,会反复遇到这种结构。

第二种对于理解思维中身体经验作用的概念是比喻。照约翰逊说来,一个比喻是“理解的一种普遍模式,利用它我们把从一个

经验领域内提出的模式用于另一种类别的领域中来作为其构成。”这是我们借以构造和理解经验的原始认知结构之一。由于身体体验对智力发展是如此的基础,图象图式成为比喻的原始源泉。“通过比喻,我们运用在我们身体体验中通行的模式来组织我们更抽象的理解”。例如,“多者居高位(*more is up*)”思想,作为垂直的图式部分,它被用于帮助我们理解抽象的多/少概念和数量上的变化。约翰逊论证道,作为理解抽象概念的比喻图象图式的使用,在人类理解中是普遍而自然的。甚至演绎的思想也是从“沿着轨道走”的空间概念中形成的。

尽管有人宣称想象和空间思维在数学中的重要性,但空间思维和学习非几何概念之间的关系不是直接的。例如,芬内玛(Fennema)和塔特厄(Tartre)提出了一些有争议的结果。空间能力高而言语能力低的学生(高/低学生)比低/高学生更倾向于将问题转化成图象更完整,而且还有一些迹象表明低/高学生在绘图和运用图表表示方面比高/低学生的能力要低。然而,当运用一个强调空间直观运用的问题解决过程时,空间直观技能高的学生解决的问题不比该技能低的学生解答得多。利恩(Lean)和克莱门茨得出结论,用言语逻辑加工数学信息的学生胜过用直观加工这种信息的学生。类似地,赫什科维兹声称数学思维中应用想象会引起困难。例如,如果一个概念与一简单图象联系得太紧,可能会由于过度依赖这个简单图形,而使得概念的重要性质没被识别,或者在问题解决情境中运用概念受到限制。另一方面,布朗(Brown)和惠特利报告说,尽管他们面谈的空间能力弱的五年级女孩在学校数学中表现好,但是她们对乘法和除法的理解是工具性的;而且空间能力强的好像其理解更有关联性。一个空间能力高的女孩,尽管在面谈中显示出对数学思想和问题解决的出色掌握,但在学校数学中的表现却很贫乏。类似地,塔特厄认为空间定位获高分的十年级学生比这方面获低分的学生能更好地理解非几何问题,并能将其与早

先的任务联系在一起。

因此,有理由相信在学生作图和应用数学概念——甚至是非几何概念中空间能力是重要的。但这样的思维在作图中的作用难以捉摸,甚至在几何中也是多方面的。例如,在范·希尔水平 1 中,人们依赖并被限制于直观加工;在范·希尔水平 2 和更高的水平,人们对直观图象的应用受制于其言语命题知识,图象和图象的变换合并这个知识,而且作为一种结果,也许在不同水平作不同的表现。最后,还有想象在非几何概念思维中的应用。人们也许正在操纵心理实体,它们既无直观形式又无言语形式,不过通过类似直观的变换却可以运算。进一步的研究应设法详细说明这些不同种类想象是如何利用的,并且注意区别大量不同的直观思维的差异。

### 空间能力的本质

加德纳指出“空间智力的核心是准确感觉直观世界的能力,依靠人最初的感性认识形成变换和作出修正,即使在缺少相关物质刺激的情况下也能重建人们直观经验的方面。”已经识别了空间任务的两个重要组成部分或因素:空间定位是关于人们自身位置——例如,在一建筑物中找出一条路的空间物体位置间关系方面的理解和运算;空间直观化是对在二维或三维空间中的对象想象运动的理解和操纵。另外一些人已讨论了这两个因素的特性,而且事实上存在关于空间能力本质及其测量的争论。例如,比肖波(Bishop)认为空间有两个组成部分,他相信它们与数学学习尤其相关。首先是解释图象信息的能力,并包括对直观表达和词汇的理解。其次是直观加工能力,包括对直观表达和图象的操作与变换,以及将抽象关系转为直观表达的变换。另一些作者相信空间能力的真正本质是将直观图象作为有组织整体来构造和变换。他们论证道,许多所谓的空间测验可以用分析加工来有效地进行,因而这不是好的空间能力测量。而且还有证据表明不同个体组用

不同方式处理空间任务,一些人直观地表示问题;而另一些人却用言语表示;一些人立即注意整体刺激物;而另一些人每次只注意其部分。一些个体利用在纸上作标记,物体操纵,以及身体移动之类活动来帮助加工。

## 表象

几个研究者认为空间直观化能力最重要的决定性东西是保存和操作刺激物的高质量表象。然而,另一些人论证说大多数空间测验的成绩不用表象,而用推理和问题解决可以得到最好的解释。尽管如此,大量的因素分析者与发展心理学家认为“空间技能发展得好的人应能从不同视角和操作直观图象的不同点来想象对象的空间排列”(克莱门茨)。因此,表象概念在我们空间能力研究中起核心作用。

表象是被内在地感知,是同构于它们所指对象的物体或背景的全面表述。通过对应于实物变换作连续变换,在心理上改变了它们。科斯林(Kosslyn)定义了表象加工的四个种类:生成一个表象、审视表象回答有关它的问题、变换和操作表象,保持表象用于另一些心理操作中。

照艾利奥特(Eliot)的说法,关于下列四方面在空间研究者中有一个普查:

1. 以表象体验为基础的心理加工与以对象或图片的感觉为基础的心理加工相类似。

2. 表象协调一致是对来自一个特定观点的对象或背景的一致和整合表示,而且易受到类似感觉过程的扫描。

3. 表象明显受连续心理变换的支配,比如旋转,在这种变换中,中间状态与实际进行对应物体变换对象的中间观点相对应。

4. 表象既表示对象也表示物体各组成部分和其他对象之间的相互关系。也就是说,“被表象化的对象之间的基本关系必定一

些程度地反映了那些实际感觉到的相同物体中基本关系”(谢泼德(Shepard))。

关于表象的心理学本质已有太多的争论,一个著名的研究者对心理表象得出了下述结论:

尽管构成心理表象基础的大脑加工不需要自己像任何一种画面,但其必须要包含这个信息,即在原则上能允许用与想象的外部对象高度同构的图片来重构……隐藏在将心理表象看作为某类图片的一般倾向之后的东西也许是这样的事实,作为纯粹心理表象基础的大脑加工很像通过看一幅对应图片的大脑加工(谢泼德)。

支持这种观点的谢泼德和他的同事发现个体花了大量时间来判断两种空间形式(由全等立方体构成的三维对象的二维描写)是否相同,时间量取决于一种形式必须被旋转到与另一种匹配的度数。科斯林的研究也支持这种观点。例如,他与同事发现在心理表象上扫描更大距离需要花更多的时间,并且较大的表象比较小的表象要求更多的时间扫描。他们得出结论,其实验结果支持以下主张,即“表象部分描绘了对应于表达对象部分,而且被表象化的对象部分间的空间关系仍被表象的对应部分间空间关系所保持。”(科斯林等)

谢泼德也注意到存在模糊图片,诸如视觉错觉所表示的“不是所有被感觉或被想象的东西都包含在被外在地表述或重构的具体图片中”。被感觉或表象化的心理表象“如表层结构一样深奥”。但心理表象是怎样形成的,以及表象与感觉又是怎样联系的呢?让我们再回头看看皮亚杰的论述:

感知是从和对象直接接触而得到的对象的知识。与此相反,表示或表象包括了当对象不在场时的回忆,或者在场时,它是和感知并列的。对于不是



真正感受到的对象,用参照的办法来完成感性的认识。在所有的可能情况下,意象是一种内在化的模仿,……,因而是从运动性活动中导出的,尽管它的最终形式是描绘传感数据的图象模式。

如同以前所讨论的一样,皮亚杰实验任务之一是使儿童首先不看图形,去考察无立体感的几何形状,然后通过作图,命名或指出它们来识别形状。对此任务,皮亚杰和英海尔德说,“显然,反应包括把无形对象的印象变换到一类直观的有触觉运动感觉的空间表象”。为了了解表象如何构造的情况,让我们考察皮亚杰和英海尔德有关这个任务成就阶段的描述。

在阶段 1(2 岁 ~ 4 岁),儿童不能构造几何图形的完整表象,“而且,按照是否已感觉到曲的或直的边或点来说,他把所触摸的形状比做拥有相同特性的具体形状,而不担心对象的其他部分或企图把它们放在一起形成一个整体。……显然这些错误归因于对对象探索的不充分……为了识别几何形状,儿童不得不探求整个外形”。因此,假如一个儿童用简单的触觉集中不能理解整体形状,那么其被迫去移动自己的手去穿过对象制造一系列的触觉集中。“形状的感觉识别是这些触觉集中协调的连续结果”。“在这个阶段,就儿童而言,缺乏探索可能是由于一般的缺少感知性的活动。”因为感知活动而非感知是模仿的源泉,所以这个阶段的儿童甚至不能画出最简单形状的复制物。也就是说,由于这些儿童探索曲面的边失败了,因此他们就画不出曲面。

在阶段 2(4 岁 ~ 7 岁),感觉活动变得很明显。

一般将形状区分为两个类别:曲线的或没有角的以及直线的或带角的。与圆的形状作对比时,儿童不是用直线本身而是用了形成角的直线的连接。

而且儿童不用两条相交直线构造角的表示,而用“一对连接

(眼和手的)运动的结果”来描述角。事实上,“欧几里得图形……作为从特定的动作中的提取,至少就像它从和该动作有关的对象中所提取的那么多。”也就是说,儿童从一个对象中抽象的表象是从他自己作用于该对象的行为中能构造的东西。甚至表示一个对象的绘图也不如直观或触觉但用了有关的感性活动感知的对象多。然而,尽管感性活动在阶段2期间内能被完成,但分析仍是经验性的;因此,对复杂形状而言,还不能取得基于推理的感性数据的综合和协调。

在阶段3(7岁~8岁),仍通过像早些阶段相同种类的感知活动,来完成形状探索。然而,这个活动现在被一个操作方法所指导,“这个方法的组成包括:组合用一般计划感知的因素,并参照儿童总能返回之处从固定点开始”。在这个水平,一个形状表象的构造将数据汇集成为一个预期的图式,这个图式包括诸如直线或曲线、角、平行、序以及等长或不等长的可能特征。“换句话说,每一种被感知的形状被需要构造它的行为图式所同化。”

上述大多数讨论都与“触觉感知”相关。触觉集中和视觉集中之间的差异是,视觉集中引起在同一时间内能吸收更多因素。因此,用一个简单的集中能直观地理解一个简单图形。

按照皮亚杰和英海尔德的说法,“感觉圆或正方形是一回事,而建构一个直观的图形表象则是完全不同的另一件事,这点能从一组模型中识别出来或者在纯粹触觉探索之后能画出它。”但是,形状的直观表象以心理表述为先决条件,因而“表象不是感知的直接结果”。而且“当仅用触摸感觉来感受形状时,直观想象形状的能力是一种包括在感觉中的感觉运动图式表述”,皮亚杰断定在所有三个阶段中,“儿童能识别,特别是能表述的只是那些他们通过自己行为能实际建构的形状”。

因此,图形的心理表述——它的表象——被皮亚杰看作行为的内在模仿。作为直观图形的形状重构(例如,以致于能画出它

们)“不只是一个分离不同知觉的特性的问题,也不是干脆从对象中抽象出形状的问题。形状重构依赖于提出关系的活动过程。因而它意味着抽象是建立在儿童自己行为的基础之上的,并通过行为的逐级协调产生”。

虽然来自实验心理学家的证据没有被收集起来支持皮亚杰关于行为重要性的主张,但这至少与其主张是一致的。例如,根据科斯林的说法,对象的表象是从分别储存着的部分,诸如线段或普通的几何形状建立起来的,连同(文字的或非文字的)信息规定了各个部分相对地应该如何被安排。从来没有看到过的图形的表象可以通过将以前从经验中产生的各个部分混合而成。利用这个理论支持皮亚杰理论,我们只需把科斯林的表象组成部分与人的身体或感觉的行为的记忆痕迹相等同即可。

惠特利等也提出了空间思维的建构主义办法。他们指出个体对空间模式给出意义和结构,这些模式以其经验、概念结构、意向、进行中的社会相互关系为基础。“我们不能想象(形状的)模式是‘出自于’儿童直观地获得和用其脑储存,但是相信每一个儿童通过其行为建构也许以后会被表示和变换的模式表象。”这些行为可能是身体或感觉的,也可能是有意识或无意识的。进而结构不必是一个有意识的加工;例如,当人们给出一个图形意义时,他们也许不知道“形成有意义”的过程。在惠特利等的研究中,给一、二年级学生5块七巧板——一块中等三角形,两块小三角形、一块正方形和一块平行四边形——要求拼出一个正方形。为了帮助学生,开始时给学生显示三个三角形位置的直线图三秒钟,然后按学生需要次数显示。他们发现学生在几个任务方面处于不同的成绩水平。一些人把图解释成三角形区域的集合,而另一些人则解释为形成一个图案的直线集合。只有最有水平的学生不仅能把图形解释为三角形区域的集合,而且构造了这些三角形的相关位置。一些学生能在心理上旋转七巧板的表象,因此能预测它们的位置;另

外一些人则通过物理的试错法确定正确的方位。

总之,我们已经看到表象是对象的内在和总体的表述,这些表象与所指对象同构,并能被审视和转换。表象结构确实受到现存认知结构的影响,当然知道更多的有关影响实际如何发生以及是否能被控制将是有帮助的。如果我们接受表象以行为为基础,那么表象通过何种途径从这些行为中形成和发展呢?一个对象的表象仅仅是包括在感知它的行为序列的重现吗?那么,在缺少对象情况下表象怎样产生?即什么心理学机理支撑一个表象的表示?

### 空间能力的提高

为数众多的研究已经表明,通过培训能提高空间能力。本-蔡姆(Ben-Chaim)等报告了一个三周教学培训计划,它明显增强了五至八年级所有学生的空间直观化能力,而且在能力获得方面没有性别差异。他们认为七年级学生是空间直观化培训的最佳时间。比肖波发现使用操作材料的小学所教过的学生在空间能力测试方面比缺少这种材料的学校的学生成绩明显占优势。巴蒂斯塔等发现学生在形式几何课程中空间技能得到提高。然而,也有报告说学生学了高中几何中一个标准课程之后空间能力没有提高。也有证据称空间任务方面的成绩随年级水平增长而增长。

假定空间思维和变换几何之间有明显连接,人们可假设后面的工作可以改进前面的技能。就像费伊(Fey)所指出的,“变换方法使得几何能够吸引人,成为发展空间直观能力和推理能力的动态题材”。与这种假设相一致的是,德尔·格兰德(Del Grande)发现这样的几何单元提高了二年级学生的空间知觉。威利福德(Williford)也调查了教刚体运动和全等概念的影响。他断定二、三年级学生为构造变换表象而学习手工程序,而不是学习怎样心理操作这些变换。基德尔(Kidder)扩展了威利福德的结果,他的结果表明没有经过培训的中级和初高水平的学生在头脑中作等量运算的

能力是有限的。他猜想“在表示水平上操作变换的能力产生于形式运算思维(在皮亚杰理论意义上的),而目前研究的13岁学生不是处在形式运算阶段”。阿里·沙(Ali Shah)发现从7岁~8岁到10岁~11岁在这些变换上的成就增长很大,但是在后一年龄组中只有大约50%掌握了这些论题。莫耶(Moyer)调查4到8岁儿童对等距算子的理解是否依赖对与变换相关的物体运动的清晰了解。结果发现对滑落和上抛而言没有明显的影响(对较小儿童有负面影响的倾向),但是对旋转而言,有惊人的有益影响。他也发现滑落任务至少与上抛任务一样容易,而旋转是最困难的。最后,尤西斯金将高中几何的变换方法同传统方法的影响作了比较。实验组和控制组却显示了学生在空间/感觉测验方面成绩明显提高,虽说并不是有所区别。两组都显示了倾向数学的态度下降,但只有控制组下降明显;而且还发现女孩倾向数学的态度比男孩在变换和传统方法两方面的下降都要多些。

## 几何思想的表示

### 概念表象

维纳(Vinner)和赫什科维茨断言,在思维中人们不用概念的定义而用概念的表象,所有心理表象和性质的组合都与概念联系在一起。他们的研究证实不仅这些概念表象存在于大量的几何概念中,而且这些表象会受到不恰当教学所产生的负面影响。例如,事实是对许多学生而言,一个钝角的概念表象是有一条水平线,也许来自他们看过的有限的课本例题和“引力因素”(即一个图形若只有一条边水平而另外一条边倾斜时它才是“平稳”的)。(另外的研究也同意学生把概念限制在已学过的范例中,并且把非基本但公共的性质当作概念的基本性质。)人们还识别了概念表象的组成,例如,学生的直角三角形概念表象很可能是包含有一条水平边

和一条垂直边的直角三角形,几乎不可能包含微微旋转过的类似三角形,而更不可能包含带有水平斜边的等腰直角三角形。这些概念表象的研究可能提供了有关学生犯错误的有用信息。例如,知道用正确语言表述概念的学生不仅会有正确使用这些言语表述的困难,而且有一个特定的直观表象或与概念紧密联系的原型。

菲斯拜因把概念表象与直觉相联系。主体把特定表示附加于一个概念上,这对学生的认知决策有强烈的影响。甚至当定义被清晰地提起时,大多数主体仍不能正确回答。“在推理过程中概念的作用方式高度依赖于与它联结的范例,清晰知道定义的事实并不能消除由暗中介入范例所强加的限制”。这也有助于解释学生对四边形层次关系的抵制。附加在每个图形上的表象起认知作用不是作为特殊情形,而是作为一般模型。因此,学生不得不学习明确定义概念的关键作用,避免在使用表示它们的术语时犯错误。他们必须用一系列范例来构造该定义的有意义综合。使用如此分析综合和构造概念的言语加工是可能的,特别对五年级和其以上的年级来说更是如此。

这种构想与赖夫关于可靠和有效解释数学概念的“理想(ideal)”模型相一致。在熟悉情境中,这种模型首先应用非形式化的,依赖具体情况的知识,然后用明确的形式知识检查可疑的结论;在不熟悉的情境中,或不一致时,或需作出一般化推断,理想模型直接转向形式知识。然后,非形式化知识在提供更抽象论证的检验点时仍是有用的。赖夫发现有效率的专家方法与理想模型所描述的紧密一致,并且推荐各种活动来鼓励它在学生中的发展,诸如教给学生概念解释程序和让其在各种典型的易于犯错误的情形中实施那些程序,并因而编辑有关特殊情形和常见错误知识的全部目录。

这条探查的线路关联到理论和实践两个方面;然而,不幸的是,它既无合适的被承认的工作,又不是建立在早先的工作之上。例如,维果茨基把“语词意识”构思为所有由语词产生的人的意识

的心理学事件的总和,这种构思在某种程度上是更复杂的公式化。语词意识是一种能动的、复杂的、流动的整体,它有几个稳定性不等的区域(语词的定义只是语词意识区域的一种,尽管这是最稳固的、最准确的区域)。一个语词有时从它出现的背景取得其意识,在不同的背景中,语词改变它的意识。“原始语词无论如何不会被减少到仅仅只是概念的一个记号。恰恰相反,语词是诸如一幅图、表象、概念的心理框架。事实上它是一项艺术工作。也就是为什么如此一个语词有‘复杂’特征之因,并且它可能表明许多对象属于一个复杂物”(维果茨基)。

## 运用图象

苏联研究者卡巴诺娃-梅勒(Kabanova-Meller)宣称,“通过图象感觉,几何定理的掌握得以特征化地完成,并与空间表象的发展紧密相连”。为了在运用图象证明问题中取得成功,学生必须在图象中建立语义联结。解答过程必须是“构造的”,即学生必须从条件形成结论(“延伸”条件)和在图象中发现新关系(变换“图象”)。有时学生通过逐步延伸条件直到包含解答来导出解答;另一些时候则通过直观表象来表示解答,然后再决定导出它所需的逻辑步骤。此外,当感知一个问题的图象时,学生必须重点集中在基本东西上,而忽视非基本东西。卡巴诺娃-梅勒发现有些学生不会这样作,她把这归因于相关定理的初始学习。学生学这些定理时,经常不与包含在作为定理组成部分的特殊图象信息结合在一起(例如,因为定理给出的图象画有一个钝角外角,思考三角形外角必定是钝角)。这种信息后来将妨碍定理的应用。即由于图形包含一个锐角外角,学生不能识别出这个定理是关于另一个问题的。

当学生利用图象去解释一个定理时,他们必须“通过在抽象加工期间区别基本方面”改变对应的心理表象。表象成为思考和应用定理的指南。在一个成功的使用多重作图去说明定理的成功的

教学实验中,学生懂得了在定理中设定的条件范围内,图形中的各种元素的布局、方向和大小可以怎样变动。这被概括在下面的结论中:

一个概念或定理的主要方面的抽象化过程,必须不可分离地联系到那种意识,即存在于图形的那些特征会如何变化。因此,学生必须学习用语言系统阐述原理,用这些原理、特征就像用几何元素和它们的关系一样,可能在不同图象中有变化,这不用破坏概念或定理的意识。除非图象被用于这种方式,否则改变直观材料将是无效的。

弗拉第莫斯基(Vladimirskii)用同一腔调得出结论说,伴随几何陈述讨论的图象在推理中不是总有帮助的。学生也许弄错了作为被思考的几何关系基本特征的图象特征,因而在概念中引入不相关的思想。换言之,一个定理也许只与用陈述给出的相关例子的图象相连;“对应于被研究关系的直观图象变得无活力和僵硬”。因此,学生在问题解决中将不能有效地利用定理。作者发现一教例,用来在图象背景中让学生分析“概念的特征系统”,对帮助学生把知识从特殊图象中分离出来方面是成功的。

尽管这些作者讨论了图象是怎样影响学生的概念和定理的表示,但这是清楚的,类似的有关误解和教学纠正的评注可能在有关学生几何问题表述方面作出。事实上,由于不合适的问题表述,有大量的有关个人得到错误解答的记述。

尽管我们重点一直集中在图象怎样影响学生的概念、定理和问题的表述,但是,我们不应忽略出自学生解释图象本身引起的误解。例如,帕彻斯(Parzysz)记述道,学生经常把一幅图的特征归之于它所表示的几何体,不能理解这幅图没有必要表示所有的关于被表示物的已知信息,而且通常设法画出图象以便它们既能保存透视的观点,又能保存学生关于被画物体的性质的知识(例如,画



一个正棱锥的底用正方形代替平行四边形)。

在学年结束时,与一个聪明的四年级学生 KL 的一次谈话认为,即便是在作出关于学生解释图象最直接的假设方面也要谨慎。实验要求学生从一组四边形中识别出所有的矩形,这些四边形分别由不同位置、不同大小的矩形、正方形、菱形、平行四边形和梯形组成。他说两个平行四边形是“sorta like”矩形,“就像你用一种不同的方式看它,就像你斜着看似的”。当会谈问及这些平行四边形之一是否确实为矩形时,KL 说“是的,如果你这样看它就会觉得它是矩形,如果它是一张纸而你从下面看它……”。会谈继续问如果它是一张纸,那么它会被切割成什么。KL 说:“那么它不可能是矩形”。对 KL 而言,在纸上画出的图象表示几何体的画像,它们不总是被看作几何体本身。事实上,一个平行四边形也可能恰好是从某角度画的某矩形的画像。但是,KL 几乎宁可称如此画像为一个矩形的事实却是最有启发意义的。对儿童来说,起初画像意指实物描绘;然而,在数学中,画像指的是概念的符号。KL 似乎在这两种解释间转换,因此在两者之间摇摆。这个例子特别能解释,因为它解释了广泛差异性,这可能存在于学生和老师或课本对一个简单图象的解释之间。

德里斯科尔把学生具有的其他困难与画出上面讨论的概念表象的概念联系起来。例如,中学生识别在用非标准位置(不水平和不垂直的直角边)所画出的直角三角形时有大量的困难。假如学生的概念表象不包括相关或不相关的概念属性,对于合适识别和以后的例子应用将受严格的限制。

连同前面讨论的 PDP 模型一道,有关几何表示的研究资料有强烈的教学含意:极其需要提供各种范例,而后,帮助学生构造有意义的言语综合或从这些范例中作定义(包括处理特殊情形和一般错误)。“通过根据概念分析图象,通过学习发现对应于概念的正、反例子,学生可能达到掌握一个并非空洞的与未误用范例相关

的概念阶段”(菲施拜因)。

研究结果对例子和非例子的表示有附带含义。心理学研究常常意味着正面实例比混合正面和反面的实例更有用,尽管教育研究认为反面实例有用。威尔逊(Wilson)的结论提出了一个答案:当每个不相关领域的每个特征同样可能时,在学习中正反面实例更有用一些。在某些不相关的特征占主导地位时,混合正面和反面的实例更有用。注意到前一种情况未必会在课堂背景中(特别考虑课本中典型的原型)出现,因此,在大多数实例中混合情况占优,特别对于较困难的概念而言。而且确定例子和非例子的序列的策略并不同样有效。合理的次序(概念的非例子和偏离的例子相配合可以使注意力集中到关键性的属性上)优于随机的次序,并且能够引导到高水平的成就。可以将预备教师成功地培训来使用这种策略,包括了举例的办法(提出例子和非例子)以及特性描述的办法(有关的和无关的属性的叙述)。

## 行为的作用

每一种主要的理论观点都认为心理行为对学习几何是重要的。回想一下皮亚杰和英海尔德所宣称的儿童空间表示不是他们的空间环境的感性的“抄录”,而是先前的对那个环境的积极的使用的结果。在范·希尔图式中的第二教学阶段集中于物体操作。约翰逊通过论证作为隐喻的表象图式重要性提供了有关这个问题的另一种观点。

**操作的应用** 尽管有一些例外,但大部分研究证实应用操作应有助于构造几何概念的适当表述。对大量各类刺激物的揭露正面影响了几何上的成就。如身体运动和操作几何体这种触觉—动觉经验能帮助儿童,特别是较小儿童学习几何概念。用立体剪图的儿童也比用印刷形式的干得更好,前者鼓励更多意识的应用。

即便对大龄学生也有经验支持的问题,特别对在范·希尔层次中处在较低水平的学生而言,操作是学习几何的一种基本辅助。操作的运用似乎允许学生试验自己的想法,并考察、反思和修正它们。这种物理方法似乎能保持学生兴趣,帮助学生创建定义和作出猜想,而且也帮助学生洞察新关系。类似地,六年级学生用具体材料学习向量空间的概念要好一些。四年级学生从利用具体模型的运动几何学的高级组织者处比利用应用的,受益更多。然而,七年级学生得到的好处相等;较年轻的学生也许较少有能力利用相关关系。总之,假如操作的运用对课题有意义,那么操作的好处延续整个年级水平、能力水平和课题。然而,美国教科书只是不经常地建议在几何中运用操作,甚至当他们这样做时,这些被建议的操作运用也不是针对发展高一级思维水平的。与此相反,被证明更成功的日本的教学及其教材却有着多得多的操作运用特征。类似地,米切尔莫尔(Mitchelmore)发现英国学生在空间和三维作图能力方面领先美国儿童大约三年。他指出差距归因于不同的教学方法,在英国对几何教学,教师倾向于采用更多的非形式化方法,并在初等水平运用更多的操作材料,在较高水平运用更多图象。另外,课程完全可能是反映了每一个国家对待运用空间模型的态度。

不幸的是,几乎一半的幼儿园至六年级教师指出其学生每周运用操作的次数少于一次,或者根本不运用操作。这也许是重要的,因为一学年或更长的应用操作将导致有利于操作组的中到大范围的显著差异;较短时间的运用通常不会产生显著结果。而且结果操作的运用是不足的,简单地运用操作不能保证有意义的学习。因而必须指导学生反思其所用的操作和把操作模式与他们的非形式概念相联系。

假若承认操作是重要的,那么图片的作用又是什么呢?图片可能重要;甚至小至5或6岁的儿童(但不能再小)也能利用图片中的信息建构棱锥。因此,图片能给学生一个直接地、直觉地领会

某些几何思想的机会。然而,图片需要变化以避免引导学生形成错误的概念(见前面对概念表象和图象的讨论)。然而,研究显示图片优于操作的情况是很少的。事实上,在一些情况中,图片在其有效性方面也许不同于符号的教学,但是推理并不源于图片的“非具体”特征,正如它不源于图片“非操作”一样;也就是说,儿童不可能灵活和广泛地作用于它们。这就提出要开展诸如图象计算机表示的操作图片方面的调查研究,下面我们转向这个问题。

**计算机的前途** 计算机的绘图能力有助于构造几何表示。如同另外课题一样,在几何中用计算机教过的学生经常比那些只受过课堂教学的学生获得明显的高分。甚至对学前水平儿童来说,以计算机为基础的方案在有关形状教学方面与教师直接教学的方案一样有效,而且在教空间关系概念时比电视更有效。计算机游戏在促进学习角估计技能方面已被发现效果极小,而在促进提高解析几何成绩方面比传统教学明显更有效。然而,对比较媒体研究结果的考虑必然冲淡对计算机应用的乐观。计算机之前几十年的研究比较了不同媒体对成绩的影响,显示了基本相同的结果:没有明显的不同。课程或教学策略的变化也许解释了很多计算机辅助教学,或 CAI 比较研究的正面结论。然而,存在某些计算机能操作的功能,它在另外情形中不能被复制。

**LOGO 语言。**Logo 语言描述这样一种应用。我们知道儿童最初的空间表示是以活动为基础的。这意味着旨在帮助儿童抽象出路径概念的 Logo 活动,可以为他们在简单二维图形的概念化上提供非常丰富的情境。事实上,Logo 语言环境是以活动为基础的。这些活动既是知觉的——观看海龟移动——又是物理的——把海龟的移动解释为可以自己操作的物理运动。让儿童首先通过走动,再用 Logo 语言来形成路径,这样儿童能学会把海龟的活动看作自己能操作的运动,即海龟的活动变成了“躯体谐振”。由于路

径的数学概念可以视为移动的记录,因而路径概念可能构成了特别好的几何学习起点。让学生直观审视建筑物的棱,沿长方桌边沿移动他们的手,或者走一条直路径,这些都会给学生直线概念的经验。然而,借助用 Logo 语言表示的路径活动,学生能获得这个概念更为明晰的认识。通过使学生用海龟发现直路径就是没有转弯的路径是很容易的事,因此,这些经验能帮助学生学会描述或形成直线概念。

这些以及与其他类型的用 Logo 语言表示的活动或许可用于促进学生发展到范·希尔水平 2(描述/分析)和水平 3(抽象/关联)。例如,对矩形概念,学生起初仅能直观识别给出的例子,这是范·希尔层次中水平 1(直观水平)活动。然而,用 Logo 语言时,可叫学生构造一个画矩形的命令序列(一个程序)。这“……允许,或者迫使儿童将直觉期望具体化。当这种直觉转变成程序时,它变得更加突出和容易思考”(佩珀特(Papert))。也就是说,在构造矩形程序时,学生必须分析矩形的各个直观侧面并考虑如何组织它的各部分,这是一项促进水平 2 思维发展的活动。此外,如果让学生设计一个矩形程序,长和宽由键盘输入,学生必须构造计算机能理解的矩形定义形式。因此,他们开始建立有关定义一个矩形定义的直觉知识,这些知识以后可以被整合并形成一个抽象定义(水平 3 活动),如果给定适当输入,问学生能否用他们的矩形程序画出正方形或平行四边形,会促使学生开始逻辑地整理图形(水平 3 的另一种活动)。

研究认为这些理论上的预言是有效的。七年级学生用 Logo 语言进行学习活动与其几何思维水平有密切关系;另外,恰当使用 Logo 语言有助于小学生从水平 0 和水平 1 几何思维水平转变到水平 2。例如,对小学生的平面图形概念来说,研究显示 Logo 语言经验对此有显著的积极影响。正如范·希尔研究者所提出的,这可能是由于 Logo 语言隐含地结合了将由水平 1 思维者清晰发展的各

类性质,这些在教材中常常没能做到。Logo 语言经验促进学生用构造几何图形的活动或程序来观察和描述几何图形。当要求儿童描述几何图形时,有 Logo 语言经验者不仅给出更多整体上的命题,而且给出更多清楚地提到图形组成部分和几何特征的命题,这是水平 2 思维的一个指标。

在对称和运动几何方面也出现了类似结果。用 Logo 语言学习运动几何单元时,学生在范·希尔水平上的进展缓慢,但却有明显证据表明其开始意识到各种变换特征。类似地,在美国,不论是用 Logo 语言还是用纸和笔,中年级学生已进行了对称和运动几何活动。对小样本的谈话调查表明,两个处理组在完成任务的几何思维水平上都较对照组高;六次谈话作业中有四次是使用 Logo 语言的学生完成任务的思维水平高,一次是没用计算机的学生水平高。在即时后续测试(Post-test)和延时后续测试中,用 Logo 语言和不用的那些组都比对照组提前完成;另外,尽管两控制组在即时后续测试中无明显差异,但在延时后续测试中用 Logo 语言的都比没用的提前完成。基于 Logo 语言的形式能增进以前学到的思想的概念重构,这一看法得到研究的支持。与使用纸、笔的学生相比,用 Logo 语言活动的学生做得更精确和正确。在形状、对称和运动几何方面,Logo 语言经验有助于中、小学生意识到他们的数学直觉,并且能促进几何思维从直观水平到描述/分析水平的转变,这种理论假设有了证据支持。

好几项研究调查了 Logo 语言经验对学生概念化角、角的测量与旋转的影响。其中一项调查显示,中年级对照组学生更可能很少想到角的知识或一般的语言习惯用法。而有 Logo 语言经验学生的反应则表明其更倾向于归纳,朝向数学概念化发展(包括把角看作旋转的结果,以及把角看作两条直线/线段/射线的并)。另有研究者研究了 Logo 语言怎样给处于范·希尔水平 2、水平 3 的九年级学生提供经验。在关于角概念范·希尔水平操作的谈话中,用

Logo 语言的学生比控制组学生取得更多收获。还有几位研究者同样报告说, Logo 语言对学生学习角的概念有积极影响, 尽管在某些情况下, 学生的这种得益只有在学生具有一年以上的使用 Logo 语言经验之后才会出现。

这种研究方法也表明, 学生对于角概念及其测量都具有许多不同的图式。三年级学生常把角的大小同形成角两边的线的长度、终边倾斜度、已画各边所确定的三角形区域所围的面积、边间的距离(有时是从与顶点等距的点出发, 但并不总是这样)、两边逼近度或顶点处的旋转联系起来。中年级学生常具有下面两个图式之一。“在  $45-90$  图式”中, 斜线同  $45^\circ$  旋转相联系, 水平线和垂线则同  $90^\circ$  角旋转相联系。在“量角器图式”中, 依据量角器在“标准”位置的用法输入旋转角值(这样, 让海龟停在原地须左转  $45^\circ$ , 学生或许会输入  $135^\circ$ , 这同量角器的基线为水平时的读数相符)。Logo 语言的体验可能发育角度量的错误认识, 包括把角度量看作沿着路径旋转的角或看作是从顶点开始的旋转程度。另外, 这种经验并不能取代先前的对角度量的错误认识。例如, 学生对角度量的错误认识和协调海龟转动与已作角的关系之间的困难已持续了多年, 尤其在没能得到老师的恰当指导时更是这样。然而, 一般来说 Logo 语言经验能促进对角的度量的理解。在概念化较大角度时, 有 Logo 语言经验的学生更可能在数学上反映正确的、一致的、抽象的思想, 并在处理期间显示出从范·希尔水平 0 到水平 2 的进步。如果 Logo 语言经验强调旋转的角与海龟沿路线行进时所形成角之间的区别, 有关旋转测量与角测量的一些错误认识就可以避免。

有些证据表明, Logo 语言经验对测量能力的影响超过了对旋转测量与角测量的影响。观察表明一年级学生创造其自己的测量标准单位以使用 Logo 语言作图, 例如画宽 44, 长 88 的矩形时先向右移动 44 步, 再向前移动 44 步。研究指出 Logo 语言能帮助较小儿童学习测量, 也有助于研究者更多地了解较小儿童从测量中学

习什么。Logo 语言提供了一个竞技场,在此较小儿童可使用各种尺寸的单位,定义并创造他们自己的单位,保持或预言单位大小,以及通过叠代的或数值的距离命令创造长度而非终点表示。而且,Logo 语言允许儿童不必困扰于测量工具和物理量的灵巧要求,就能操作各种单位,探究单位大小转换和单位的数目。坎贝尔(Campbell)研究了幼儿园里的小孩和一年级的学生后发现:

1. 儿童难以适应单位大小的变动,特别是将单位大小减半时,他们也许用的是知觉/空间策略,而不是用数值/数学策略来解决这些问题。

2. 儿童估计减半后的距离非常准确,即便在想象总距离的中点时也是如此。

3. 儿童理解用较短的长度单位度量同样距离比用较长的单位度量所需的单位数要大。然而他们总是低估单位大小和单位数之间反比关系的强度。

4. 出乎意料的是,对斜线的估计并不比对水平线或垂线的估计更难。这在各年级没有差异;相当有限的 Logo 经验量(2 小时)已帮助儿童忽略空间方面的与问题无关的变量。

在几乎所有的对比研究中,使用 Logo 语言的儿童比对照组的儿童更准确。对照组更可能对距离,尤其是最长的距离,估计不足;对于补偿把单位大小分为相等的两部分感到困难;且更易低估单位大小与单位数之间的反比关系。Logo 语言经验可能有助于估计的准确性。然而,即使无 Logo 语言经验的儿童也知道,较小数同较短长度有关,而较大数则与较大长度有关。测量的基本原理在生活的早期似乎就已学到,而且不依赖于特殊的测量经验。

并非所有研究都有积极影响。首先,应注意到没有一项研究讲到学生对被调查概念的掌握情况,而仅报告促进作用。其次,有研究表明 Logo 组和对照组无明显差异。再次,还有研究已指出变化有限,例如,来自两个用 Logo 语言的九年级学生与对照组的学



生在后续年级的高中几何学习与测验中无明显差异。

问题是学生并不总是数学地思维,即便在 Logo 语言情境中引起这种思维时也如此。例如,一些学生过分依靠直观线索、避开分析工作,诸如在图形几何中寻找确切数学关系和程序关系。直观方法同直观化能力没有关系,相反,它依赖于学生决定 Logo 作图的几何图形的直观“数据”(例如,“最后这条边看上去是 60,试试前移 60”)。根据范·希尔水平,用直观方法解决 Logo 语言问题涉及水平 1 与水平 2 间的推理。尽管在学习开始阶段(使用直观方法)是重要的,但继续使用直观方法却对学生获得与 Logo 语言活动有关的数学概括起抑制作用。除非给学生提供须用分析方法解决的任务,否则没理由让学生放弃直观法。另外,师生间对话是鼓励高水平推理的必要基础。应注意帮助学生建立并想到路径-命令的对应性,也就是说要注意由海龟画出的几何路径与产生该路径的 Logo 命令间的联系

总之,那些指出最积极影响的研究包括精心设计 Logo 语言活动序列,以及教师对学生进行这些活动的介入。看来 Logo 语言在发展几何思想上的潜能将充分扩展,即教师与教材能适当地指导学生的 Logo 经验。这应包括鼓励学生对基于 Logo 语言的程序性知识与更传统的概念性知识之间的关系进行思考,并紧密联系。

作图工具和作图程序(几何猜想者)。Logo 语言为学生表达和探索几何思想提供了强有力的、灵活的环境;其他计算机画图 and 构图程序虽然灵活性较差,但可行的学习环境并不少。例如,运用计算机加“框”功能,即让学生通过展开一个电子“橡皮棒”来画矩形,给予儿童理解几何图形的不同角度。用区域填充功能,即用颜色填充封闭区域,能促使儿童思考像闭包这样的拓扑特征。这种画图工具的潜力在于为儿童内化这些功能进而构造新的心理工具提供了可能性;尚未有研究充分说明这个有争议的问题。与某些计算机环境的接触可帮助学生建立约束较少的概念表象。例如,随机

产生形状和位置各异的等腰三角形与正三角形的例子有助于2岁~6岁儿童概括三角形概念,以包容更多情形的三角形形状和位置。

计算机作图工具对空间技能也许有积极的影响,尤其对女生更有裨益。尽管男生在涉及空间能力的计算机游戏中可超过女生,但是一些特别设计的计算机图象模块已经显示出,可以增强中学女生空间技能,使之明显超过男生;虽然女生开始时数学综合分数较低,但经此模块训练后其成绩明显高于男生。

当前媒体均运用二维表示来呈现大多数三维信息。研究表明人们发现这有难度。计算机允许动态处理三维图形的二维表示。奥斯塔(Osta)用两个商业程序研究了这种潜力,在其中一个程序中,可在屏幕上操作三维物体的表示,在另一个“着色”程序中,仅能在二维图形设计上执行操作。这些程序限定要使用几何特性而不是仅用直观特性。奥斯塔创设了问题情境,其中,学生修改图形以便在二维和三维表示之间转换。对八、九年级学生的解题策略也进行了研究。起初,学生的工作是局部的,仅用知觉策略处理图形的小局部,但随着经验丰富,学生着手考虑更全面的准则,并用基于几何性质的策略替代低效的知觉策略。

诸如几何猜想者软件系列,作图程序的核心是促进学生提出并验证猜想。猜想者程序允许学生选择诸如三角形或四边形(根据特定程序)此类原始图形,并在其上执行测量操作和几何作图。程序记下作图序列并能自动地再在其他三角形或四边形上执行。这样,学生就能探索作图序列通则。有报告指出猜想者用起来很有效。在一项评估中,使用猜想者的学生完成几何测验的情况不比不用猜想者的对手差。此外,学生学习已超出了基本几何内容——例如,重新给出定义、作出猜想、提出并解决有意义的问题以及设计原始证明。学生并不能很容易地作出猜想,而且在学年之初大家还会相当沮丧,但学到年末几乎所有学生都能对大型方案提出猜想,并感到有必要证实他们的概括。在特别设计的测试

中,使用猜想者的学生所作概括的水平不比对照组的学生低。然而也有相反的证据。例如,博班哥(Bobango)发现基于范·希尔阶段使用猜想者的教学明显地提高了学生的范·希尔思维水平,尤其是从水平1到水平2比其他任何水平都提高得显著,但它并不能使学生在基本内容或书面证明方面取得更大的成绩。

我们已知道学生对图形的解释是复杂的。一个很有前景的发现是学生使用猜想者后对图形及其局限性的理解会有收获。有了此类经验后,学生能灵活地处理图形,将单一图形视为一类图形的模型,意识到这个模型具有不代表该一类的特征,以及给图形添加辅助线。

我们也知道学生难以理解证明;例如,他们经常不能区分有关几何陈述知识的两种来源,即测量证据和演绎证明。他们相信测量实例“证明”了对有限集的全体元素为真的命题,并且(或者)相信演绎证明仅同某个实例有关。许多同时拥有这两种信念的学生倾向于选择演绎证明,这不是因为教师的影响,而更多的是因为那些证明的解释性特征。为改变这些信念设计了猜想者的活动,它们使得学生不再把测量证据当作证明,尽管有的学生仍然认为已作过演绎证明的结果中或许存在反例。

考虑后续测试的成绩,在一次评估处理的五次比较中,来自实验组和对照组的学生在作出正式与非正式论据上的百分率大致是相等的,而在第六次则是使用猜想者的实验组学生百分率较大。然而,研究者注意到教师也经常鼓励学生线性排序收集的数据并分析、猜想推导、以及证明,这导致了不作思考地收集数据,同时模糊了在数据收集阶段的特征表示和猜想及证明阶段的表示之间的差别。然后,学生不能理解这些阶段所表示的不同概括水平。研究者建议将猜想者的活动作为对几何关系或概念的调研的开始。

不像课本上的定理,学生认为猜想者所产生的定理,在承认其正确之前要加以证明,然后才能拥有定理。他们似乎从事范·希尔

阶段4的学习,在几何关系网络中自我定位。总之,在教师适当帮助下,使用猜想者的学生能理解将形式论证作为建立数学真理方式的重要性,尽管这看上去与贝尔阐释证明作用的联系比与证实和系统化作用的联系要密切得多。蔡赞(Chazan)从数学哲学角度指出演绎论证和基于测量证据的论证间的差别并非像通常所设想的那样显著。他建议教这些差异,包括将论据作为社会过程以及探索性和解释性的实验过程来开发,而不是作为结果来开发。

为了成功地执行猜想者指导的探索法,研究建议需要教学策略来将学生的探索同课程联系起来,并鼓励学生将探索看成成功学习所需了解知识的一种方式。一般来说,普通班的教师在使用猜想者时会面临各种困难:然而,这种挑战似乎具有改变教师习惯做法的潜力,进而改变其关于懂得几何的意义和在班级内获得这种知识的信仰。总之,尽管人们发现使用猜想者需要辛勤的工作,并会让教师和学生遭受一些沮丧,但其益处是显而易见的。

智能辅导:几何导师。计算机可做出独特贡献的另一个领域是作为智能导师。安德森、博伊尔、赖泽声称建立同智能人导师一样有效的计算机系统是可行的。他们的几何导师软件以源自ACT理论的一系列教学原则为基础。首先,这种理论的产品总是包含条件中的一个目标,因此,每个问题的目标结构就清晰了。其次,通过将许多学生可能会遗忘的信息用证明图的形式设置在屏幕上来帮助学生对付运作存储器的要求。再次,由于知识编译仅出现在问题解决期间,正式指令做成问题求解的一部分。对学生的错误给予及时反馈以便他们更易将这种指令同他们所形成的新产品结合起来。

几何导师在屏幕的顶部显示待证命题,而在底部显示已知命题。学生通过指向屏幕上的命题以及键入信息向发展中的“证明图”作增添。每个逻辑推理包含前提集、理由和结论。学生通过指向前提键入理由,指向图中的相关几何点、指向结论(如果已在屏

幕上)或者键入它来进行推理。在证明图中这些都用箭头连接。当有了连接已知命题与待证命题的逻辑推理集时,证明就完成了。产生的证明图使证明问题解决的两类抽象特征具体化,它们是:前提和结论以及用来发现正确证明的搜索方法间的逻辑关系。在学生进行推理时,几何导师通过确定什么与学生反映相匹配的规则来推断学生应用了哪个规则。如果正确,几何导师就保持沉默;否则就给出指令。因而,所有指令存在于解决问题的背景中。

三个不同能力水平的学生向几何导师学习了几何。按照研究者所言,三个人都成功地学习了几何,并且解决了比通常课堂上布置的更复杂的问题。三个人都有积极态度。自这次初始测试之后,几何导师被成功地应用在一处公立高级中学的4个班级(从有正规的学习水平到特有才能的),有报告说学生热情很高。第一年,预先测试与后续测试成绩相比所有组都显示了统计意义上的显著提高;第二年测试使用了对照组,同样发现使用几何导师的学生在对照组学生之上有明显差别,大约高一个标准差。学生一致说,同传统的两列证明格式相比,他们更喜欢证明图结构。而且,在ACT理论上,这种使用已作了重要修正。

关于此程序的其他评估结果更加复杂。卡非(Kafai)在三个班级中用几何导师帮助学生做了全等证明。一般而言,几何导师是成功的。所有的学生都对这个程序有积极的态度并向其他学生推荐,所有的学生都完成了必做题,大部分学生还做了附加题——有位老师说,这是从未有过的。然而,当学生利用证明路径方法于非计算机作业时,他们的成绩下降了(多数也用陈述推理方法)。当利用证明路径方法时,学生往往倒转了陈述和推理的顺序,并搞乱步骤的顺序。这可能表明程序上出现了一个严重问题,对于在证明中搞乱步骤序列而言,这是学生不能明白证明本质的标志。像许多在标准几何课程的学生一样,这些学生可能只是在一个规则体系中肤浅地学习运算。另一个被观察到的问题涉及到导师的死

板。不能确定程序或学生接触程序时间的长短是否会减轻这些困难。在另一个研究中,实验组学生在几何导师软件上花费了其时间的30%。这里,没有报道说证明从图转移到二列表格存在困难。两个实验班级在后续测试中的平均成绩为79%,然而控制班级的平均成绩为69%(约一个分数等级)。教师/研究者评论在他教学中个别化的增加是对程序利用的最大影响。然而几何导师在教师方面仍作出了相当的要求;事实上,一份报告指出保持实验室平稳运行需要2个~3个教师(注意软件不是处在它的最终形式)。这些研究者另外提出了一个警告:黑人和女性学生更有可能对计算机导师表示出敌意或不友好。尽管研究结果对于大部分人来说是积极的,但是这个评估是否适用于检验学生在任一环境中的证明理解,还不清楚。还需要对学生在这种环境中的思维作更多调研。

这项研究方案的意义并不限于计算机导师。安德森声称传统教学经常如此不适当的原因之一是,教师有一个在学生中控制流动的不适当概念。他的模型也许说明了这些过程。类似地,问题和过程两方面的结构也可能通过生成证明得到更明确的表述和讨论。

计算机环境的暗示。通过利用不同计算机环境的研究有几个发现令人惊奇地一致:首先,研究者和教师们一致地报道在这样的背景中学生不能隐藏他们不明白的东西。也就是传统方法容易隐藏的困难和误解也出现在计算机环境中而且必须得到处理,这不仅会使教师和学生两方都遭受一些挫折,而且也会使学生的数学能力得到大发展。其次,至少在高中水平,学生会对课程不同部分的目的变得混淆;对计算机工作简单定位、讨论以及讲座可能会缓和这种混淆。在三种环境中,一个监视器或投影仪对于小组讨论都是不可缺少的。(这些都是起码的关心,而另一个一般性的发现是一定不能低估安装和管理软件与硬件的问题和重要性。)再次,必须重新考虑在这样环境中学习评估,而传统方法没有评价所学

东西的全貌;在一些情形中,这些方法几乎未让人意识到(例如,学生在自选调查中工作时)。至少在一个问题上不同环境有差异:用几何导师,为一台计算机上的一名学生配置更多的东西特别不成功,恰恰相反,两个学生用一台计算机在几何猜想者和 Logo 探索性环境中配合工作似乎更理想。事实上,这样环境的力量之一是自发地形成合作教学。

总之,设计合适的软件能使之与几何思维产生高水平的交互作用。某些计算机环境允许屏幕物体的操纵,用这种方式帮助学生把它们看作一类几何体的表示。这明显发展了学生反思同类物体性质的能力,以及用更一般和抽象的方式进行思维的能力。计算机活动的思维序列与教师对用那些活动的学生工作的介入,似乎是有效教学环境的关键组成部分。也许更基本的是,诸如以猜想者和 Logo 为基础的调查环境似乎有成为催化剂的潜力,它们既能促进教师和学生在学习和理解几何的意义进行再理解,又能促进学生数学思维自主性增长。基础的改变需要教师方面相当大的努力,并且需要从教师培训者或指导者,从同辈人,以及最终从更大的学校系统和文化中得到广泛的支持。

## 群体与跨文化差异

我们已经对几个在几何成绩方面的跨文化差异作了报道。在空间推理方面也有跨文化差异的研究。例如,米切尔莫尔报道,所有国籍的当地非洲人在知觉发展方面比相同年龄和相同受教育时间的欧洲人要低,而与未受过教育的爱斯基摩人和北美印第安人相同。他还报告说,在牙买加的金斯顿,学生的空间思维大约落后于俄亥俄的哥伦布学生三年,而在俄亥俄的哥伦布的学生又大约落后于英格兰布里斯托尔的学生三年。他把这些跨文化的差异归因于诸如物质环境、社会/文化环境,以及学校数学课程设置等不

同因素。来自美国第四次 NAEP 的结果表明,在七年级和十一年级,黑人和拉丁美洲人用图象呈显信息、测量和几何要比白人困难得多。约翰逊和米德(Meade)发现,白人的空间得分高于黑人。然而,促成后两种差异的因素还未得到适当的调查。另一方面,研究人员已广泛地调查了男性与女性之间成绩上的差异性。

## 性别差异

**在几何方面** 在来自 1978 年 NAEP 的数学项目测试中,芬内玛和卡彭特发现,几何和测量方面男性比女性做得更为出色。对于所有的认知水平(知识、技能、理解、应用等)以及所有的年龄(9, 13, 17 岁),女性在几何与测量方面的表现不如男性,并随着年龄增长,差异增大。在 1985 年的评估中,男性在所有不同年级的水平方面都比女性做得出色,但是只在十一年级的几何和三年级与十一年级的测量方面有显著差异。芬内玛和卡彭特观察到,在提供的空间几何项目和口头表达项目中,男性和女性的成绩有大量差异,而且,与空间能力的差异某种程度上促成了数学成绩方面的差异这一假说相一致。从 1985 年数据所讨论的抽样项目显示,在所提供的附有图解的项目方面男性的优势更大。史密斯(Smith)和沃克(Walker)在纽约十年级的几何评议考试中发现存在有利男性的显著性别差异。他们认定这种差异为小差异,认为这种差异等同于一个问题中的一个方面。

汉纳(Hanna)在第二次国际数学研究(SIMS)中报道了所研究的八年级性别差异。总的说来,75%的几何项目中男性得分高于女性;而女性在几何项目中得分高于男性的项目只占 25%。20 个国家中有 18 个,其男生在几何方面的平均得分高于女生——明显高的国家有 10 个,包括美国。这种平均百分率方面的显著差异范围为从 2%到 6%。埃瑟林顿(Ethington)分析了部分类似数据后发现,总的说来,在几何项目方面男性比女性做得好。



另一方面,森克和尤西斯金对 1300 多名高中学生进行研究后发现,当对所有学生以及只对得分高的学生进行考试时,男生与女生有相同的几何书面证明技能。他们也发现,在学年初和学年末的两次几何考试中,男生比女生表现得更出色,但他们将后者的差异归因于前者。成对比的是,他们发现,在学年初,男、女生在范·希尔水平没有什么差别;而在学年末,男生在这方面超过了女生。他们推测,在几何问题解决中产生性别差异以及在几何证明方面缺乏差异,这可以由与这两类任务有关的正规教育经历的差异来解释。对那些课内、外经验相同的作业来说,男生和女生做得一样好。男生比女生可能有更丰富的空间和问题解决经验,所以男生在这些任务方面做得更出色。换一种解释,女生之所以在几何证明方面做得出色,是因为这种作业需要严格遵守课堂上颁布的正规的一套规则——从某种意义上说是一种“语法”。这种解释与巴杰(Badger)提出的女生往往“恪守已为其老师认同的方法”这个假说相一致;也与林(Linn)和海德(Hyde)提出的“女性比男性更有可能运用其在学校里学到的技巧”这个假说相一致。严格地按照指定的方法做,在缺乏真正的理解(正像多数学生做证明的情况)时,肯定是有帮助的。

在各种几何成绩测量的一次比较中,把学习标准几何的学生与学习由芝加哥大学学校数学方案创立的几何课程(UCSMP)的学生作了比较。弗洛里斯(Flores)报道说,UCSMP 的办法将通常的(对男生有利的)性别差异或是减少或是逆转。然而,由于是用了几何学准备情况测试中调整了的成绩作分析的,我们并不知道男女生的成绩的比较,而只知道一个学年中成绩的进步。虽说有了这个为防止误解而作的解释,这个结果还是表明了 UCSMP 进一步研究性别差异是必须的。值得注意的是女性看起来在重点强调阅读(女性拥有传统优势的活动)和应用(在这方面女性通常做得差些)方面的课程上比男性做得更好。

**空间技能方面** 芬内玛和卡彭特假设,可以成为几何成绩性别差异基础的一个可能因素是空间直观化。一般地数学成绩与空间直观化的相关系数是 0.30 到 0.60,而且人们发现男性的空间成绩一直比女性高。在哈里斯(Harris)对与性别有关的空间差异的回顾中,她认为,有利于男性的性别差异出现在广阔的任务和情景范围中,她得出结论:在空间任务方面的性别差异是“真实的,不是虚幻的。”而林和彼德森(Petersen)认为:“男性和女性在空间能力方面的差异得到了广泛的认可,但围绕着这些差异第一次出现的大小、本质和年龄仍有大量的争论。”(林和彼德森)例如,他们报道说,空间感觉和旋转任务对男性来说比对女性更容易,但对于具有直观和非直观策略分析组合特征的任务,男性和女性具有同样的困难。

约翰逊和米德对 1800 多名公立学校的幼儿园至十二年级学生实施了一系列有关空间方面的测验。他们发现四年级时男性的空间能力超过女性,这证明男性的这种优势在较低年级时也存在,但在口头表达技能方面女性的优势被掩盖了(事实上,当把阅读成绩作为协变数时,男性的空间成绩在一至四年级时要明显高于女性)。他们的数据也表明男性/女性之间的差异在十年级时几乎出现加倍。他们发现黑人男性和白人男性都有空间优势。

当论证到通常所报道的在空间能力方面男性优势有点重要性时,约翰逊和米德指出,“如果空间能力实际上对有关重要变量的行为水平,或某一职业选择比率、或培训方案有影响,那么这些影响程度对于产生相当大的男性优势足够坚实了”。例如,假若用平均数作为一个选择合要求的标准数时,有关四至十二年级的数据显示 62% 的男孩将被选上,但只 38% 的女孩将被选上。

**策略差异。**有研究报告表明,空间能力与数学成绩的关系对于男性与女性是有差异的。利本(Liben)和戈尔贝克(Golbeck)发现对男性来说,在皮亚杰水平性(水平面)和垂直性(铅垂线)任务上的得分与空间能力有高度显著的相关性,但对女生则不然(四至

十二年级)。基罗能(Kyllonen)等发现,在一项折纸任务中,女生的口头表达能力倾向与男生的空间能力倾向都与其成绩相关。而塔特厄发现,尽管高中男女生在数学(几何和非几何学科)成绩或空间定位(SO)技能方面无差异,但低SO女孩在数学中比高SO女孩得分低得多,与高和低SO的男生比起来也是如此。这些发现都与这样的假设相一致,那就是在男性与女性之中,构成空间和几何思维的加工中存在着差异。

确实,已有报告表明,男性偏爱非口头的思维模式,而女性则更喜欢口头的思维模式。事实上,塔特厄指出,与男性相比,女性往往更多地在问题解决中保留信息的书面记录。克莱门茨也发现,在空间关系能力差异测试中,采用效率低的直观-整体策略的女性比率要比男性大得多,而且在空间作业中男生运用更有效的抽象策略,而女生则用效率较差的具体策略。事实上,性别差异“有可能来自女性在这些任务中选择和固执地运用不太有效或不太精确策略的倾向”(林等)。巴蒂斯塔等报告说,预备小学女教师在几何选修中有试图不去用她们曾用过的最有效策略的倾向。

巴蒂斯塔发现,在空间直观化和高中几何方面男生优于女生,而在逻辑推理能力和运用几何问题解决策略方面却无任何性别差异。在预测几何成绩时,对女生来说,空间直观化是最重要的因素,而对男生来说,逻辑推理和作为次要因素的空间直观化与逻辑推理之间的差别都是最重要的。这表明,在男生和女生学习几何思想时,空间直观化和逻辑推理能力起的作用存在根本区别。研究还发现,在男生面不是在女生中,拥有与其逻辑推理能力相关的空间能力越多,就越可能采用直观化策略,而不太可能去采用画图策略。这一发现似乎表明,男生和女生在表示几何问题的方式上有根本的不同。具有相对较高空间能力的男生,看起来喜欢运用直观化策略而放弃运用画图策略,这可能是因为其高度直观化技能使他们觉得画图是不必要的。而另一方面,那些具有相对较高

空间能力的女生,却还是更可能运用一幅图表,而不太可能运用直观化策略。同样地,塔特厄发现,高 SO 女生比低 SO 女生更可能运用画图法,而在高 SO 和低 SO 男生中却没有任何差异。

另一个有前途的研究领域是,教师直观或非直观的教学风格与学生表述喜好或直观化能力之间的相互作用。巴蒂斯塔发现,在老师强调几何中直观化作用并对其作用深信不疑的那些班级,与在老师对直观作用不作强调并对此不太有信心的一些班级相比,前者的空间直观化与学习几何之间有更为高度显著的相关性。其中,前者班级中男生比女生的分数稍高一点,而后者班级中,男生得分却大大高于女生。普雷斯梅格(Presmeg)发现,那些偏爱直观的学生在那些老师既不过高也不过低强调直观表示的班级中似乎表现得更好。比肖波指出:后一项研究对在该领域中过分简单化的 ATI 研究的有用性提出了质疑。对于老师的教学重点和学生的直观化倾向和能力之间的相互作用的调查,有待于做更深入细致的研究。

从而,有证据表明,男生和女生,至少是其中一部分,他们惯用的解数学问题,特别是几何问题的过程存在差异。看来在空间维度方面也存在差异。然而,这些差异并没得到充分的考察。在学生解题时,对其进行观察和面谈的研究有待更加深入细致地进行。

大脑组织和性别差异。大脑生理研究者认为,“在口头和空间能力方面的性别差异可能与这些功能在男女大脑两半球上的分布方式不同有关”(斯普林格尔和多伊奇(Springer & Deutsch))。例如,据推测,“在女性中语言能力和空间能力比男性呈现出更多两半球特征。”此外这一猜测假定单侧性功能较强(亦即专门由一个脑半球负责)对获得高的空间成绩是必须的,而单侧性功能较弱则对口头表达成绩更重要,因此男性应在空间任务中表现出色,而女性应更擅长口头表达工作。所以,几何成绩性别差异——包括空间和逻辑思维模式的成绩——可以根据用这两类思维进行有成效的考察。

例如,左半脑控制作图,左脑受损病人在内部特征及其规划组织上往往欠缺,但在整个空间轮廓上却是胜任的;而右脑受损的人则相反。在被要求画一个复杂图形时,一组 5 到 13 岁的男孩和女孩的表现也印证了这一差异。“在最小年龄组中,女孩画了更多的内部细节和离散部分,而男孩则更侧重于外部轮廓;在 11 岁年龄组中,男孩用‘长长的、概括的、连续的线条’画他们的图,而女孩则是‘一部分接着一部分地去画她们的图’(瓦珀(Waber))。换言之,在风格差异出现的地方,男孩的风格往往具有右半脑加工特征,而女孩则具有左半脑加工特征”(哈里斯)。

牢记性别差异研究的复杂性是重要的。人们观察到这些差异只是在数学的一些领域而非别的领域中,只是在空间测试而非别的测试中,只是在某些文化而非别的文化中。例如,在男性比女性做得好的各类空间任务中,最大和最一贯的男性优势表现在那些需要快速心理旋转图形的项目中,从而差异的来源被认定是这种心理旋转的速度而非精确度。另外,人们还发现培训往往改少这种差别。性别差异已被归因于生理因素、文化因素以及两者的结合。在一个元分析中,贝宁格(Baenninger)等发现,(a)在参与空间活动和空间能力之间存在一种弱关系,(b)培训可以提高空间成绩。这种参与活动关系和成绩上的提高对男性与女性都没有差异。甚至在完成一项没有性别差异的工作时,也不能断定男女会采用相同的策略。最后,林、海德和费恩古尔德(Feingold)论证道,认知上的性别差异,包括数学和空间能力方面的性别差异正在衰退。另一方面,哈尔彭(Halpern)论证道,这种趋势是测试工具和测试人群变化的人工产物。

## 结论与启示

毫无疑问,几何是至关重要的。它给我们提供了解释和思考

我们物理环境的方式。它能为研究数学和科学的其他课题提供工具。然而,更为重要的是空间思维是几何学的基础,著名的数学家如哈达玛德和爱因斯坦曾经提出,它是对所有高水平数学中创造性思维必不可少的。鉴于其重要性,在教学和研究中,几何和空间推理必须受到更多的重视。

正如我们所见,课程中无视这一重要性,学生的几何成就少得可怜。学生在几何中学到的内容,及其学习中所用的方法都不能令人满意。在美国不太重视空间推理的教学了。

有论据支持了关于儿童如何学习空间和几何思想的建构主义主张。看来,如同儿童有一个逐步建立起完整和综合的几何图式的发展序列一样,存在一个几何概念从感知层面向概念层面的累进建构。我们需要作研究去辨认儿童在各个年龄段的特定的认知结构,特别是联系到支持性的环境(例如,包括操作物,计算机工具和具有吸引力的作业)。前面未被考察的因素,诸如语言,学校教育及直接的社会文化之类,在任何研究规划中都应受到重视。从认知科学观点来看,几何表示的研究也应融合于这个探索之中。最为理想的是,这些研究应能告诉我们如何加强儿童的现有直觉,并最终帮助他们克服掉这些直觉的缺点。

同样地,对范·希尔理论的深入和扩展研究也是非常重要的。这种观点看来对于提高研究和数学都很有希望,面对诸如“几何思维水平”此类概念的进一步详尽阐述和分析将有助于实现这一希望。另外,许多前面描述过的教学启示可以也应该在将来的研究中得到直接评价。特别关键的是,有关教学阶段的研究还未得到足够关注。

也许认知科学方法最强和最弱之处在于它的专门化的极端程度。它提供了认知过程中所亟需的细节(从而迫使对在其他理论中还模糊的概念,如“关系的网络”等作出详细的解释),特别是它能讲清在较低范·希尔水平上学生的表示(例如,通过 PDP 表示作

出视觉表示)和概念的形成上的受限制的方面。然而,在探索机器可编码格式中,有的理论避开了诸如信念体系、动机以及题材的有意义解释等很重要的建构,并且贬低直觉和文化的作用。所以,认知科学、皮亚杰、范·希尔及其他建构主义者理论的综合将会产生特别的财富。

通过向学生提供为自己建立数学真理的方法,使他们能运用这些方法,从而帮助学生发展智力自主,这是几何教学的一个关键目标,实际上也是所有数学教学的关键目标。目前,这一目标仅在几何教学中得到重视,而且,不幸的是我们实现这一目标的教学尝试正在走向失败。我们可以将形式证明当作只要最优秀学生掌握的一个教学目标来减弱,这样我们就不必过多关心证明时的无能,但我们决不能因此而减弱建立数学真理的过程。这是数学的本质。没有这一过程,学生不可能干数学;他们只能毫无批判地考察别人做成的东西。所以,应有更多的注意力集中在研究上,这种研究旨在揭示这一过程是如何发展的,它对学生关于几何知识信念和几何知识构造的影响,以及学生在这过程中是如何最终上升为给出形式证明的。

将来的研究需要考虑,直观思维是怎样在更高层次几何思维中明白显示的。这里已假设了直观思维有许多心理层次,从初级到高级,每一层次在思维中起不同的作用,这取决于哪一个层次被激活了。

对于学生如何学习几何概念我们知道得很多。我们需要做教/学方面的研究,来引导学生一方面通过图表和直观表象的有意义的综合,另一方面则是通过文字表达的定义与分析来构成健全的概念。这种研究应该能揭示文字和直观加工之间的内在联系。还可以研究怎样去帮助学生建立、加强和详述他们现有的关于空间的直觉,并最终形成第二级几何直觉。

计算机有助于为研究学生的几何思维建立丰产的环境。研究

表明,设计合适的软件,像 Logo 和几何猜想者,能产生高水平的几何思维。我们必须学会去设计更多吸引人的作业和教师的中介,特别要考虑到利用这样的软件作为开发课堂文化的催化剂,其中教师和学生都扩展了有关学习和理解几何的信念。

我们已报道了在几何和空间推理上有利于男性的性别差异。如果研究者不是集中在是否存在这样的差异上,而是集中在其精确特征上,这样的差异就能为对所有学生心理加工的调研提供一个观点。也就是通过调研男性和女性在处理空间思想和几何时如何不同地作推理,我们也许能够更好地理解所有学生的几何思维和空间思维的发展。然而,由于在同一性别中的表现和加工的可变性显然比在不同性别之间时多得多,我们终于能够超越研究性别差异而转到研究作为几何学学习成就基础的不同的认知侧面。更重要的是,性别差异代表了关心的一个起因。为什么会引起性别差异?当前的教学实践往往使差异更大吗?什么样的教学实践能帮助减少差异?

最后,几何学习是一个为将来的研究提供丰富可能性的领域。假定学生在这个领域中的成绩很差,这样的研究就极为需要。假定是建构主义的学习观点,那么描述不同教育环境中几何概念和思维发展的研究当然是需要的。事实上,我们相信如果不存在(a)通晓理论的教师,和(b)配备了几何调研工具全部陈列的学生,其中包括操作物和——也许最重要的是——装满适当软件的计算机,那么大量不同的用于几何教育的改进环境就不可能出现。然而如果没有研究来调研革新教材的使用,来考察学生的知识如何在不同教学环境中发展,以及来发现教师怎样才能利用这些环境和有关学生学习的知识,那么这些动因就不可能发育出来。



## 十一、概率统计的研究:反思与展望

J. Michael Shaughnessy \*

几年前,我在讲授概率、组合和初等统计的大学入门课程的同时,又参加了一个关于问题解决、评价和决策等跨学科的研究生讨论班,我们递交给讨论班的是一些在不确定情形下进行评价的最新报告,这些报告最引起我注意的是,某些研究项目中所提出的问题,其发生的可能性明明可以用初等概率统计来估计,却没有这么做。只要他们用了我正在给大学新生讲授的那些数学概念,就会非常有益于他们的研究。在那些研究评价的人中,有些人曾接受过规范的统计教育,但却仍然坚持运用确定性的评价方法,而不运用自己辛辛苦苦学来的统计知识。更令我不安的是,我感到我本人也常会受某些错误概念之害,影响研究工作。作为一名数学教师,我首先考虑到的是,这些研究项目中的大多数涉及初等的概率统计,即使我们能把估计可能性的“正确方法”教给他们,但是其中所用到的非数学方法可能会消失。为此我开始了关于概率统计的教与学的令人迷恋的研究旅程。我不久就发现,要让人们在进行评价和决策时会合理地应用随机概念(随机是欧洲化的语言,它包括概率和统计,这种简称将贯穿本章),并不是仅用“教他们正确的方法”就能够达到目的的。人们可能会提到的直觉、预见、错觉、误解、非规范解释等词汇在学习概率统计时都会频繁地发生作用。

---

\* 作者肖内西(J. M. Shaughnessy)为俄勒冈州立大学数学系教师。

受到文化传统和方法论研究的交叉影响,概率统计成为数学教育研究中最丰富的分支,无论是认知心理学家、发展心理学家还是行为主义心理学家,在构造这个领域的理论时,都发挥了重要的作用,特别近十年来,世界各地的数学家和统计学家也都为此作出了重要的贡献。这个领域的研究确实是跨学科的,不是数学教育者的单独领域。事实上,在这个领域的许多研究都不是数学教育者和统计教育者做的,特别是北美的数学教育者在这方面做得太少了,大多数的成果是由认知心理学家和欧洲的数学或统计教育者做的。

对于北美数学教育者至今都难得涉及随机教学研究这一现象,我们并不感到惊奇,因为数学教育研究的多数内容是由以下原因而确定的:学校的教学内容、升学的需要,还可能是那些介绍教学内容的文献。由于过去在中学里系统的概率统计教得很少,所以对学生在学习时会产生的问题也研究得很少。直到近十年,要求在中学引进随机内容,并要求从中等年级开始,连续贯穿整个中学阶段的呼声日益高涨,这些要求最终成为大家的共识,最近 NCTM 发表的《标准》推荐了在整个中学阶段可学习的随机概念的一个有效范围。当越来越多的教师和课程设计者开始贯彻 NCTM 关于概率统计的《标准》时,为适应快速发展的概率统计教学所需要的研究却没有加强,这成为目前一个尖锐的矛盾。

我写这篇文章的目的主要有两个。首先,我想对随机教学的研究提出一个总的看法,解释焦点所在。虽然我不认为我能把目前这个领域的研究作透彻的概括,但我相信本文是具有代表性的,这个领域目前的研究现状太包罗万象了,以致于无法作完整的综合,然而我希望本文能为新进入这个领域的研究者提供一个研究框架,提供一篇文献。其次,我还想要指出随机研究中的一些关系,并提出某些我认为需要直接注意的研究方向。

## 大学、中学的随机教学现状

许多的欧洲国家把随机作为数学课程的一个组成部分已经有些年了,但在美国,随机至今尚未成为中学数学的一个主要分支。某些中等学校的情形表明,很少有中学真正开设独立的、系统的概率统计课程。最近的研究还发现,在美国,只有2%的刚进大学的学生学过概率统计课程,而这些学生中的90%学过代数课程。许多有概率统计课的中等学校在其他课程之间插入6周~9周的课时来应付概率统计,因此使得许多学生事实上没能获得这份知识,也使一些教师最终完全放弃这部分内容,这是非常遗憾的,因为再也没有其他的数学分支能像概率统计那样对所有的学生都如此重要了。

如果要调查幼儿园至四年级或五至八年级的学生现在究竟学多少概率统计,这并不是件难事,但至今为止却从来未做过这样的工作。直到最近四、五年,一些定量分析的项目和中等数学的项目才开始涉及中等年级的概率统计教学。

在大学这个层次上,我们的学生严重缺乏中等水平的随机预备知识,这与统计意识及其推理能力的重要性之间形成了鲜明的反差!最近在一所规模较大的大学里作的调查发现,在13个不同的系里,正教着160种不同的统计课程。我们所有的学生都会成为某个层次上的消费者或公民,他们必须学会利用数据和图象所提供的信息作出决策的本领,因为他们正在跨入一个对此项本领的要求日益增高的社会。为了培养有知识的公民和可信赖的消费者,我们的学校必须像NCTM的《标准》中指出的那样,比过去更加重视随机的教学。

大学里设置的大多数概率统计课程,要么是法则型或处方型的计算统计,要么像十年前那样,完全数学化地引入概率统计。于是,这个层次的学生仍带着他们对随机的固有观念和概念上的偏差,很难有机会改进他们的统计直觉,让他们看到统计的适用性。

由于大学的概率统计课程掩盖了理念上的和心理学上的复杂性,只能使原来就不好的情形变得更糟糕。在第一次、第二次世界统计教学会议上,要改进高等学校的随机教学的呼声贯穿始终。公平游戏、不公平游戏、模拟、相关分析的计算机软件、宣传广告中的统计和其他适合学生的统计课题等成为大会推荐报告的一部分。可惜高等学校和中学一样,常常忽视这些连续不断的建议,而使随机教学的改进变得很慢。

加菲尔德(Garfield)指出了影响有效随机教学的四个问题:

- (a) 概率统计在课程中的作用;
- (b) 研究与教学之间的连结;
- (c) 数学师资准备;
- (d) 目前评价学习的方法。

有趣的是,我们看到这四个问题在 NCTM 最近发表的《数学问题解决的教学与评价》中被作者们反复提到;基尔帕特里克(Kilpatrick)和斯坦尼克(Stannic)对数学问题解决在课程中的地位作了历史的检验,舍恩菲尔德(Schoenfeld)对问题解决作了背景的分析,马歇尔(Marshall)讨论了数学问题解决在评价上的困难,汤姆森(Thompson)谈了要改变教师对于数学问题解决的观念和概念时的困难。他说过问题解决的教学是一门“双重艺术”——教学的艺术和问题解决的艺术,查尔斯(Charles)讨论了应该如何系统地设立一个有效的为在职教师服务的程序,提高教师在课堂上组织问题解决活动的 ability。卡彭特(Carpenter)和莱斯特(Lester)则强调了要在研究和教学之间建立密切联系的重要性。

在中学,概率统计的有效教学的障碍和问题解决的有效实施的障碍竟然如此相同,这并不奇怪,因为早就有人指出过这两个领域之间的紧密关系,例如,随机的教学包括建立自然现象的模型,形成和运用策略(如模拟的策略和计算的策略),为控制可能产生的错误看法和错误理解,对解决问题时所用的不同方法作比较和

评价。从这些方面来看,尽管它们属于不同的内容领域,但随机的教学就是问题解决的教学。其次,在这两个领域的师资准备都是薄弱的,非现成的。当然这不是他们的错,历史地看,在为未来的数学教师所进行的教师培训计划中并未包含随机和问题解决的内容,从某种意义上说,它们都是数学的新的组成部分,至少从中学数学课程的角度看是这样的,我们正要求教师在他们所教的课程中为问题解决和随机的教学争取一席之地。

加菲尔德的四个问题也许是数学教育的时代预兆,在 NCTM 新《标准》的推动下,数学教育的各个内容板块都与其在课程中的地位、师资背景、教学策略、教育研究和富有创造性的教育评价方法等方面发生摩擦。

上面一段,我们较为详细地阐述了中学课程中缺乏随机内容的原因:学校课程对随机不作要求,教师们也没打算去认真地教它,于是随机内容最终被中学教育忽略了。直至最近,又提出了一个中学缺乏随机的理由,是因为缺乏合适的素材,这种情况不会很长,如数值分析,中等数学中的概率单位和应用统计等素材是让我们向更多的年级——五至十二年级的学生介绍随机概念的一个好机会,还有一些来自于欧洲的有趣随机素材。再由于科学技术的发展,使我们有能力设置与计算机密切相关的课程,如把计算机技术引进随机研究中的“人工统计”、“频率直方图”和“随机曲线”等。可以说,存在一套完整的随机课程,可用来提高学生在不确定情形下解决问题的思想方法。

因此在北美,提高随机教学要注意的基本问题是:

- (a) 让随机真正成为学校数学课程的主要分支;
- (b) 增强教师的知识背景,增加概率统计的概念;
- (c) 正视学生和教师关于概率统计的观念。

目前关于随机的研究似乎应该多花点时间讨论课程与教学的关系,我这样说是因为随机研究通常是在研究者自己的研究领域,或

者是在公共福利事业所指定的有关领域中展开,因此除非随机能在一个较广的基础上进入中学课程,否则,在这方面进行研究的人总是少的。我们将会看到,在随机研究中,最引人注目的问题是,在中学课程里,究竟应包含多少随机内容。对于随机,我们无论教它还是不教它,人们都会比其他任何数学分支更多地去应用它或滥用它。

### 一些历史的、哲学的和认识论的思考

在今天我们所说的“概率”的发展过程中,其历史的和哲学的环境为我们研究随机教学提供了一个基本背景。如何获得随机知识,或者说,要在随机环境中认识事物意味着什么,这个问题对研究者来说,是块隐藏的绊脚石。我们要同时背上哲学的和历史的两个大包袱,所面临的问题不仅涉及如何研究概率统计的教学,还涉及到我们是否有能力把研究结果与其他研究者进行交流。

17、18 世纪,欧洲大陆的唯一理论者和英国的经验主义者在认识论上的分歧所产生的影响,也在一些研究随机教学的方法中留下烙印。17 世纪,大陆的唯一理论哲学家,如笛卡尔(Descartes)、莱布尼兹(Leibnitz)和斯宾诺莎(Spinoza),他们把知识的取得看作是一种纯粹的推理过程,即发现和演绎那些在我们思考之前已存在的绝对真理的过程,唯理论者在柏拉图(Plato)的传统下是很多的,按照柏拉图的理论,所有的知识都是把已经普遍存在的真实事物再发现的过程。因此,对于唯理论者,知识就是演绎,就是揭示一个客观存在的真理,而不是建立在感觉的基础上的。当唯理论运动在欧洲大陆盛行的同时,英国的以洛克(Locke)、伯克利(Berkeley)和休姆(Hume)为首的经验主义者怀疑绝对真理的存在,他们认为所有的知识都是建立在对事物的感觉、观察后作出推断的基础上的。经验主义者认为,我们并不能真正地认识事物,只能了解事物。从这一点看,他们更接近于柏拉图的弟子亚里士多德(Aris-

tole)的观点。亚里士多德更关注具体的、特殊的事物,而他的宗师柏拉图关心的是一般的、抽象的事物。亚里士多德的知觉理论在如何认识事物这个问题上起了相当重要的作用,尽管不是唯一的作用。由于相信现实的数据和对假设的检验,刺激了经验主义哲学的崛起,如牛顿(Newton)的工作,为了获得周围的信息,人们需要依赖于感觉,而不指望去发现一个事先存在的真理。因此对经验主义者来说,知识从感觉开始,然后归纳,建立理论。

17 世纪在认识论方面的分歧继续影响着人们的研究,影响着人们对真理的认识。如果对英国的格里安(Green)和德国、奥地利的一些研究者的工作作比较的话,不难看出,在概率统计教学的研究中,也存在经验主义和唯理论主义对立的痕迹。格里安对几千名英国的 11 岁~16 岁学生进行了调查,分析他们怎样回答概率问题。而本茨(Bentz)和博罗凡尼克(Borovenik)、斯坦伯林(Steinbring)只对概率统计教学提出一些有见识的理论性见解。斯坦伯林的研究正好与格里安的研究形成鲜明的对照,他并不经常报告他所做的具体工作,如何为了了解学生的想法与学生进行谈话,而只是提供一个基本的、理论性的观点,帮助我们改变和改进随机的教学。虽然本茨和博罗凡尼克也分析其他人所进行的经验主义的研究,但他们的基本目的似乎是想指出,在进行经验主义的研究时会遇到陷阱。人们有深刻的印象,本茨和博罗凡尼克对经验主义的研究持相当怀疑的态度,要指出经验主义研究的陷阱,这是有益的,但也必须先对学生的概率统计概念作出评价,然而,这从纯理论的观点看是不可能这么做的。

这里特别要指出的一点是,从哲学的观点看,不同的认识论传统,实际上也导致了对随机的不同的研究传统,使得在随机研究方面,没有一个可供相互参照的哲学上的共同点,相反却使研究者之间产生了相互误解的机会。

在对随机的认识上,除了哲学的影响之外,概率概念自身的历

史发展和关于“什么是可承认的依据”的观念发展变化,也影响着随机的研究。在概率概念历史的和哲学的发展方面,也许最具有批判性的论述在哈金(Hacking)的著作《概率的产生》中。数学化的概率统计的发展还是相当近代的事情,它是由17世纪中叶一些有趣的游戏问题和计数问题的解决中发展而来的。因此,与欧多克斯(Eudoxes)和阿基米德(Archimede)开始的代数、几何和分析基础相比,概率和统计尚处在数学的青春期。哈金回顾了许多关于概率统计为什么成熟得较晚的可能理由,然后一个又一个地排除了那些不相关或不充分的理由。按哈金的看法,数学化的概率论发展缓慢的原因,既不是信奉确定论和哲学上的初因论,也不是某种严谨的学说或缺乏经济学的理论,当然也不是缺乏随机技术。哈金认为,它发展缓慢最主要的原因是人们长久地把双重的含义赋予同一个词——概率,伴随着不同含义的科学依据,给它以各自不同的定义。

“概率”这个词长期以来同时被用来表明“可信的程度”和“随机事件发生的频率的稳定值”。哈金注意到,在17世纪中叶至18世纪初,数学化的概率理论出现在帕斯卡(Pascal)、惠更斯(Huygens)、莱布尼兹和贝努里(Bernoulli)等写的书中时,“概率”这个术语还是既包含着统计的(随机事件),又包含经验的(可信程度)双重的含义。在如何为概率作数学化阐述这个问题上,经验主义的障碍是很难对付的。如伽里略(Galileo)和培根(Bacon)等学者的科学研究是通过演绎的方法组织科学知识的全体。他们的工作目标是确定演绎的起点,需要做的事情是先建立一个适当的公理集,然后从这些公理出发演绎出全部的真理。伽里略和培根不赞成我们今天所持的以样本的试验为依据的观点,他们认为这至多只能作为一种看法,因为这些实验可能会是差的实验。伽里略和培根虽然常被人们认为是科学实验的奠基者,但他们自己宁可在具有亚里斯多德传统的动因论的前提下议论问题,并以演绎的形式展示



他们的理论,没有办法能使伽里略和培根相信,以实验为依据可以推出绝对真理。于是在科学(知识)和看法(信念)之间产生了两重性,有“强科学”(诸如数学、工艺学、天文学和哲学),它追求绝对的真理,还有“弱科学”(诸如医学和占星术),它以经验为依据提出看法。伽里略和培根他们把概率看作是弱科学的知识,因为在那时,任何人在任何问题上都能借助于一个特例提出一种看法,并且一种看法与另一种不同的看法能具有同样的重要性。事实上,如果恰好包含着某个权威(如基督)的看法,那么这种看法就会比另一种看法更能被接纳。

很久以来,人们所接受的是把两种意义交织在一起的概率概念。哈金把它们区分为以事物外在的原因为依据的概念和以事物内在的原因为依据的概念。对于前者,概率的依据与“科学”的传统有关,结论是由一定的原因推导而得。与此相比内在的依据常被认为是属于“看法”的范围,是从许多类似的情形中得到所谓归纳的依据。正如哈金指出,科诺尔德重申的那样,为了形成概率的现代数学化的阐述,所有的关于接受概率的依据的认识必须改变。“看法”的传统深深地扎根在 15、16 世纪,得到教会成员的支持,他们在那时的势力是很强大的。一些权威著作的观点和教士们的意见经常会影响当时的论战。实际上,当时的人要提出一种观点不需要研究许多有关的资料,却在很大程度上依赖于权威。(在这个问题上,你能看到我们现代法律的根源。)在 17 世纪之前,概率还不像数学运算那样得到大家的认可,到了 17 世纪,由于惠根斯的工作和帕斯卡的理论培养,以实验为依据的观点开始获得一定的地位。传统的“科学”从“初动因”演绎出所有结论,而新的“科学”试图从所获得的信息中归纳出结论,其中蕴含着统计学的决策论萌芽,它是建立在随机事件发生的频率具有稳定性这个基础上的。

不幸的是,“概率”的双重含义仍然纠缠着我们,并且在不知不

觉中,蔓延到我们的研究讨论中。学术界讨论着不同类型概率的优缺点:古典的、频率的和主观的概率,古典概率的理论产生于一类可使所有事件发生都是等可能的随机设计中,数学上称为等概率分布的随机模型。频率理论认为,概率是在大量的试验后,由结果的频率产生的,从数学上考虑,它包含着极限和收敛的理论。主观概率是20世纪的一种提法,它较多地依赖于贝叶斯(Bayes)理论,并借助于所收集到的信息来修正,它可以算是数学化的主观概率。

讨论概率的不同概念这件事本身不算是个问题,问题是有些研究者把它看作是一场必须要赢的论战,卡帕迪阿(Kapadia)强调,主观概率的观点正在战胜另外两种观点。而依我看,在数学教育的研究领域中尚未见到这种迹象,只是研究者逐步意识到,在他们教的学生中和使用他们编的教材的教师中主观概率的存在,这就迫使我们在教学、研究和课程发展中处理好概率的主观主义观点。然而我认为,只想使一种概率观点成为正确的企图至多是一种空想。(我不会忘记,一个心理学者见到我后,含蓄又俏皮地说,“你一定是个该死的频率论者”。)数学教育与概率统计的教学有关,要形成自己的观点,必须对概率不同观点的讨论有一个健全的审视。

事实上,存在一种规范的随机概念,我希望学生能理解并运用它。一些概率实验能通过一个具有相同概率空间的模拟来实现,另一些实验也能通过频率主义的观点来实现,特别是后者,还包括一些能够由计算机执行的模拟例子。在有些问题上,实验频率和古典概率理论获得相当圆满的一致性(例如投掷骰子和旋转等面积且带箭头的圆盘等)。另有一些问题,要么是某种理论的解尚未形成,要么是我们学生还不能很快接受该种理论。在这种情况下,频率的方法具有很大的优势。在另一些概率问题上,主观概率和古典概率之间的冲突可通过频率主义的观点和模拟实验得到化

解。因此,我们提倡一种实用主义的方法,在不同情形下所应用的概率模型应该由学生要解决的任务和该任务的类型而确定,包括把这些概率问题模型化。如果我们遇到新的随机挑战,无论是心理方面的,还是教育方面的,现有的随机模型被证实都是不适用的,因此新的随机思想必将继续发展。

## 心理学家和数学教育家的两种不同角度

几年前,我详细地论述了在概率统计的研究方面,心理学家和数学教育家的研究角度的差异,错误的随机推理现象仍旧是两个领域的研究者都感兴趣的课题,但却是出于不同的动机。心理学家的大部分研究是针对在不确定情形中如何推理,如医生、法官、财经顾问、军事专家、政府顾问和其他需要在不确定情形中作推理的人,面对着多少带着一些概率意义的信息作研究、判断和决策时的心理动因。因此在作认知评判时,心理学家主要地是观察者或描述者,他们通常设法在他们的理论模型下解释所观测到的一切。但是,数学和统计教育方面的研究者是真正的参与者,因为他们的任务是提高学生的随机知识,所以他们一般不满足于仅仅观测人们在不确定情形下推理的谬误,而是想要改变学生关于概率统计的观念和信念。

观测者和参与者的不同研究角度,为理论框架和研究方法上的相互合作和渗透提供了一个很好的基础。从事数学和统计教育的研究者受到心理学家的研究的深刻影响,分享了心理学家的研究成果和方法。我意外地发现,认知心理学家对于某些非常规的概率概念感到深奥难懂,例如集合的“交”的问题,他们很少和数学教育者合作,看是否可以通过教学减少他们的错误。施拉格(Schrage)、肖内西、科诺尔德和德尔马斯(delMas)、巴特(Bart)等作者,对心理学家感兴趣的问题作了追踪的研究。心理学家担心的也许是繁琐的教学实验会把学生的认知水平搞乱,以至于影响他

们的观测,这有点让人不解.因为许多心理学家同时在从事统计教学工作。总之在随机研究方面,两种完全不同的研究传统,伴随产生了两个完全不同的研究进程,这一点是值得注意的。

## 迄今为止的随机研究告诉我们什么

近期对心理学者和数学、统计教育者的文章的回顾和概括,为我们展示了用各种随机观点进行深入研究的前景,为此,我不准备对所有与随机教学有关的文献再作全面的回顾,只是有选择地研究数学教育感兴趣的主要随机问题。

在这些研究文献中,研究的主要问题有两类,第一类主要是刻画人们是如何思维的。第二类主要是研究如何去影响人们的思维。第一类研究涉及概率的原始概念,概率直觉,对概念的误解,思维过程中的谬误和推断的偏差等。第二类主要是研究如何影响人们的信念和概念。的确,第一类问题一般由心理学家先开始研究的,而第二类问题则是由数学、统计教师先研究的。但也不是绝对如此,心理学者也曾试图通过让人们操作他们提出的课题而影响原先的思维。事实上有些心理学者近来也对随机推理方面的专门训练感兴趣;同时,有些数学教师也感到,在教学生概率统计的概念之前,也必须先了解学生现有的随机观念。下面我们将考查这两类研究所得的一些主要结果。

### 直觉推断和偏见

心理学者卡恩曼、特维尔斯基和同事们的研究为数学教师准备了研究概率统计学习方面的理论框架,他们的工作同时也刺激了正处在发展之中的关于在不确定情形下推理的心理学研究。卡恩曼和特维尔斯基最初的论题是关于那些有朴素统计思想的人如何运用直觉推断的方法来估计随机事件发生的可能性的,如典型

性和有效性等问题。他们有时会扩大预定的论题,还研究了其他在不确定情形下推理的问题,但看上去,他们许多后来的研究是为了证实他们预定的假设。在过去的 20 年中,他们不断地找到支持直觉推断的证据,有人总结了卡恩曼和特维尔斯基的在不确定情形中的推理方法,并发现他们本人在推理中偶尔也运用直觉推断的方法。但是这对于诊断人们对概率统计的误解究竟有多大作用仍令人怀疑。因此值得花时间对直觉推断方法作详细的研究。

**典型性** 根据典型性作直觉推断时,人们要估计一个随机事件发生的可能性,一般是根据这个随机事件所属的总体的某些特征。人们相信一个样本既反映了总体的分布,同时它作为一个单独的个体,其产生具有偶然性。例如,往往人们相信,在有六个孩子的家庭中,次序为男、女、女、男、女、男的情况好像比次序为男、男、男、男、女、男或男、男、男、女、女、女的可能性更大些,因为次序为男、女、女、男、女、男的情形,在男女之比为 50:50 的分布中比男、男、男、男、女、男的次序具有更大的典型性;而男、男、男、女、女、女的次序不具备性别随机分布的典型性。规范地讲,所有的 64 种次序是等可能地发生的(“规范”一词参考了等可能事件的理论模型中的术语)。

另一个是忽视样本大小而轻信其典型性的例子,人们往往会相信在有 50% 白球和 50% 黑球的总体中,摸 10 个球中至少有 7 个白球机会与摸 100 个球中至少有 70 个白球的机会是相等的。一个极端的例子是,投 3 枚硬币,至少出现 2 个“头”,与投 300 枚硬币,至少有 200 个“头”这两个事件的概率,在他们看来没有什么不同。因此对他们来说,样本的大小不是影响概率和变差的因素。他们不明白,极端的事件(如投出的所有硬币全是“头”)在小样本时比大样本更有可能发生。有关典型性的问题,不但存在于这些简单的问题,它有时潜伏得很深。卡恩曼和特维尔斯基指出,在社

会科学的研究人员中,在做统计工作时,也会犯与这种幼稚问题同样的错误。他们甚至希望能投机地避开统计分析质量的研究。

典型性还常被用来解释“否定最近的结果”或“赌徒谬论”。如在投币时,当出现了一次头像之后,许多实验者常会倾向于相信接下去的一次反面比头像更可能出现。科恩(Cohen)做了一个从容器中摸蓝的和黄的小念珠的实验,要求实验者先预测他将摸到的小念珠的颜色,然后摸一颗小念珠,显示给实验者看,再把它放回容器,容器中的念珠具有预先固定好的比率,如蓝色与黄色之比为3:1,但实验者事先并不知道总体的蓝与黄的比率。科恩发现成年人起初先预报不常出现的颜色(为了保持平衡,而采用否定最近的策略),当经过少量的实验之后,他们将转变到预报较多出现的颜色(肯定最近的策略)。直到实验者获得了关于两种颜色分布的信息,才相信结果不是平衡的,而原先相信的是总体具有50:50的典型分布。一旦实验者通过一些小样本有了一些分布的信息,那么他们常常会过分地相信那些信息,预测时的准确性往往比完全随机地猜测更高,于是,他们就相信,即使小样本也必定是总体的代表。“否定最近”的现象也常常出现在棒球比赛的后面几盘中,如果球手一整天没有击中,大家会在下面轻轻地念叨,“他会击中的”,球迷们相信0.3的平均击中率一定会反映到每天的记分牌上,还相信4天中一次都击不中的事件是不会发生的。

另一种由典型性引起的现象是基本比率错误,如果我们对某个对象作出一些描述,然后要求被测试者从最大可能性到最小可能性列出这个对象的一些说明。例如,告诉被测试者,对象是男的、45岁、保守型、有事业心,对社会问题没兴趣。然后要求被测试者比较对象符合下列情况的可能性:(a)对象是个律师;(b)对象是个工程师。绝对多数的回答是,在这些描述下对象是工程师,因为所描述的情况更多地具有一个工程师的典型的代表性。有点使人惊奇的是,即使告诉被测者,这个所描述的对象是随机地取自于

一个有 30% 的工程师和 70% 的律师组成的总体,这个基本比率信息仍不太会影响他们对个体的职业的推测。回答是工程师的比率仍会远高于律师,人们太信任对对象的描述,相信它是全体感觉的精确代表,而忽视用基本比率表示的可靠的定量的信息。

有一个关于基本比例的问题,它最早是由特维尔斯基、卡恩曼和巴—希勒提出的(参见他们著的《不确定情形下的判断》)。这个问题及其他的变形问题也许是这类随机研究中最完整的一项。这个问题通常如下提法:

晚上,一辆马车被牵涉进一场交通事故。这个城市共有两家马车公司——绿色马车公司和蓝色马车公司。其中绿色马车占了整个城市马车的 85%,而蓝色马车只占 15%,据证人说,事故现场的马车是蓝色,而在相同能见度条件下对这个证人的辨认颜色正确率作了测试,结果表明,他的正确辨认率是 80%,问事故现场是蓝色马车或绿色马车的概率各是多少?

认知心理学家发现,人们比较容易忽视基本比例信息(即蓝色马车占 15%)。这条信息提醒人们注意,事故现场是蓝色马车的  
可能性不大。人们比较重视证人的可靠性,这可以解释为直观判断中的典型性。人们会觉得,偶然发生的单独例子也可看作是证人具有 80% 正确率的代表。事实上,当我们与教师、学生一起解决这个问题时,很多人估计事故现场是蓝色马车的概率是或接近 80%。除此之外,还有很大一部分回答,其中许多回答不能简单地用“典型性”的理由加以解释。如说现场马车是蓝色的概率为 100% 的那些回答显然没有用到“典型性”。“出租马车问题”除了解释人们运用“典型性”时会产生有缺陷的概率估计外,还有另外一些解释,其中艾赞(Ajzen)、韦尔(Well)、玻拉特赛克(Pollatsek)和科诺尔德所作的另一种解释是“因果性”。科诺尔德建议用另一种被他称为“结果探讨法”去解释对“出租马车问题”所作的某些回

答。肖尔茨和本特鲁普(Bentrup)调查了大量“出租马车问题”及其变形问题,分析所有这些问题的回答,发现它们比单单使用“典型性”可解释的回答要复杂得多。在本章的后面部分我们还会再详细地讨论其他的解释。

从数学教育的角度看,“出租马车问题”即使对于已经学过概率的学生也是个难题,这里包含了不少的认知训练,例如看懂问题,理解准确,对所做的每一件事都作出正确的解释,都是困难的事。如果我们只要求从被测者那里获得正确的计算结果,而不是实质性的反应,那么测试者必须认识各种概率,必须使用到列联表、树形图和贝叶斯理论(见图 11.1),将条件概率模型化。正如我们所看到的,让学生掌握条件概率和独立事件是件非常困难的事,解决“出租马车问题”是项复杂的工作,仅用直觉判断的“典型性”和忽视基本比例信息等理由来解释人们在概率估计中的缺陷是不够的。

证人所说的颜色(80%正确)

|             |          | 蓝   | 绿   | 样本为<br>1000 辆马车                                          |
|-------------|----------|-----|-----|----------------------------------------------------------|
| 马车的<br>真实颜色 | 150<br>蓝 | 120 | 30  |                                                          |
|             | 850<br>绿 | 170 | 680 |                                                          |
|             |          | 290 | 710 | 证人说是蓝色的<br>马车中,确实是蓝色马车的<br>概率是<br>$120/290 \approx 0.41$ |

图 11.1 出租马车问题的列联表

另一方面,文献中有许多是关于职业特征和个性描述的问题,它比“出租马车问题”简单些,人们忽视基本比例信息是因为他们认为特殊的职业,特殊个性可有某种内在的属性,例如上述工程师



和律师问题中,人们选择该对象更可能是工程师的理由是因为“有抱负”、“保守”的属性,并且“对政治不太感兴趣”也常被认为是工程师天生的个性,这被尼斯比特(Nisbett)、博吉达(Borgida)和罗斯(Ross)称为是基本属性错误。罗斯和安德森指出,属性理论的根源可在海德(Heider)的书中找到,根据属性理论,存在重属性倾向,在这种情况下作判断时,会低估情景变量的影响,而高估性格因素的重要性。人们根据描述估计这个对象是工程师而不是律师就体现了这种倾向。类似地,在“出租马车问题”上人们倾向于依赖让人忽视示本比例信息。

无论你怎么解释这些现象,用“典型性”也好,用“基本属性错误”也好,用其他理由也好,而人们总是对此类判断和估计仍没有太大的把握,这就给概率统计的教学提出了较大的问题。我们的学生并不是脑中空白地等着从我们教师口头得到概率的正确理论,在正式教学之前,学生对概率统计已经有了他们自己心目中固有的直观判断、偏见和观念。

**有效性** 当人们在估计某些自己认为很容易猜测的事件的可能性时,一般是运用了有效的直觉判断。这类直觉判断会由于每人自己的条件,有限的实验和个人的见解的差异而导致很大的偏差,例如你驾车去一个城镇,路上恰好碰到一辆打着停车信号的轿车,你会比这些年来到这里没碰到事故的人对那个城镇的事故频率给一个较高的估计,事实上这些个别的见解也许与事实相距甚远,如果你的几个朋友近来夫妇离异,那么在事实并未改变的情况下,会使你片面地相信夫妇离异的频率在上升。我们对某些事件的发生频率都有自我印象,而这些印象又常带有片面性,这是因为有些事件哪怕只发生一次,只要它发生在自己前面,就会提高对它的印象。我们往往不太相信,在我们面前发生的事件会只发生了这么一次,而相信它在更广的范围里也会如此发生。在一篇关于

“可信巧合与不可信巧合的判断”的文章中,福尔克(Falk)提出,人们对自己经历的巧遇比对其他人经历的巧遇更引起注意。假如我自己在布达佩斯火车站恰巧碰见一位朋友,就比其他人告诉我关于他的类似的巧遇更感到惊奇,也更容易被记住和回忆。因此,在福尔克的研究中,自认为有意义的巧合比自认为无意义的巧合更使人感兴趣,自己经历的巧合比别人经历的巧合更引起重视。“当一个事件(巧合)在其他人那里发生,很容易把它看作是那个人所经历的许多事件中的一件,但如果自己代替那个人时,就会大大提高对该事件的重视,一旦自己的巧合发生之后,就不会考虑不发生巧合的可能性。”虽然我们很难忘记巧合,但是,我们又往往低估它发生的可能性,因为它在实际生活中是很少见的。

卡恩曼和特维尔斯基报告了他们的一些研究课题。在这些研究中,测试对象常常构造一些简单的例子和某些易于记忆的信息来作概率估计。他们认为,测试对象是运用一些相关信息的联合作用来作评判的基础。例如,要求测试对象回答,在英语单词中字母 R 在第一个位置或第三个位置的频率,问在哪个位置上的频率可能更高?许多测试对象回答是 R 更可能出现在第一位置上。事实上,R 和一些其他辅音字母(如 K、L、N、V)在英语中出现在第三个位置比第一个位置的可能性更大。在另一个类似的试验中,要求大学的测试对象写出以\_\_ing 结尾的单词和以\_\_n\_\_ 结尾的单词,测试对象构造了大量以\_\_ing 结尾的单词,尽管后者是前者的特例。这显然是因为以\_\_ing 结尾的单词比以\_\_n\_\_ 结尾的单词更容易构造。

当人们对较复杂的相关问题作估计时,也涉及到有效性。例如对于计算技巧尚不成熟的测试对象,若要求他们从 10 个人中组建各种不同的 2 人委员会或 8 人委员会,他们中极大多数会选择组建 2 人委员会。对这种现象可解释为有效的直觉。因为构造 2 人委员会比构造 8 人委员会更容易。总之,有效性是人们处理有

关事件频率时的一种直觉。根据心理分析学家的研究,有理由说明,有效性是影响人们作评判的因素。医生在诊断疾病时,他们汲取自己过去的实践经验,常会注意那些患病时才会出现的症状,而不太容易注意那些不患病时也会呈现的各种症状,这会引致误诊或耽误治疗。类似地,投资者和法官也会过分注意那些特别显著的信息,并受它们的影响,以致使决策产生偏差。

**交的错误** 最新的研究指出,概率统计的初学者,或甚至受过训练的人也会常犯这样的错误:使一个“交”事件发生的可能性,比它的“母”事件发生的可能性更大。例如,卡恩曼和特维尔斯基发现,某些大学生把“患过心脏病的,55岁以上的”人的百分比,估计得比“患过心脏病”的人百分比还高。类似地,有一段关于某个女人的描述是“开朗的、单身的、罗嗦的、直率的,参与社会司法工作”,和两个判断是“她是一个银行出纳员”或“她是一个银行出纳员且是个女权主义者”,后者更可能被人们作为这段描述的对象。无论是初学统计的还是统计决策的专家都有85%至90%的可能,在这个问题上违反交事件的概率的法则。

卡恩曼和特维尔斯基分析人们为什么会这么想的理由,是因为女权主义者的典型个性出现在描述中,在这种情况下,把两个联系相当弱的特征——银行出纳员和女权主义者,连结在一起,使他们过分强调女权主义者这个特征。这种类型判断非常相似于前面所讨论的基本属性错误,但是在突发心脏病问题中,年龄与心脏病突发在人们心目中有较强的关联(虽然可能是虚假的),这也许是因为测试对象相信年龄是心脏病突发的原因,也许是因为根据他们的经验,突发过心脏病的人中大多数是比较老的。于是,有效直觉或另一些原因左右了他们的估计,这里也存在另一种可能性,即语言“突发心脏病的55岁以上的人”被解释为“在55岁以上人中,突发心脏病的人”。于是,无论统计的生手还是老手,由于它对“55

岁以上”解释,都会使得“突发心脏病”的概率和“条件”概率相混淆。如果我们把陈述的次序颠倒一下,说成是“55 岁以上的,且得过心脏病突发”。一些人更有理由把它理解为“已知这个人 55 岁以上,现在问你他曾得过心脏病突发的可能是多少?”

卡尔曼和特维尔斯基强调他们的测试对象不是在混淆对心脏病问题中“交”和“条件”的意义,因为他们对于较明确的条件概率问题的可能性估计是较为正确的,但这并不意味着不存在两者之间的混淆。在卡尔曼和特维尔斯基的研究中,除了这些原始的百分数估计之外,我们与以前一样,没有获得这些测试对象的其他信息,也没有作过关于这些对象的其他想法的调查。因此他们关于测试对象没有混淆“交”和“条件”的说法至多是一种推测,再设计一个较好的方案进行反复研究是必需的。事实上,在条件概率的研究方面,玻拉特赛克(Pollatsek)、韦尔、科诺尔德、哈迪曼反驳了卡恩曼和特维尔斯基,因为他们确实找到了学生混淆条件概率  $P(A|B)$  和交的概率  $P(A \cap B)$  的证据。看来问题主要是学生对条件概率的转化而引起的,这也影响了他们的理解。遗憾的是,玻拉特赛克的研究主要也采用强迫选择的方法,这样不可能获得详细的证据去解释为什么学生会混淆条件概率和交的概率。

向初学统计者提出如下问题是颇为有趣的:

想象在你面前有两桶珠子,一个是绿桶,一个是红桶,两个桶里都有 100 颗黑珠和 100 颗白珠混合放着,你先投一个硬币,确定一个桶,然后在那个桶里取出一颗珠子,下列哪种情况更可能发生?

a) 你取出的是白珠,

b) 你选择的是红桶,且取出的是白珠,

并说明为什么?

我认为这个问题对于有点概率知识的学生来说是相当容易的,他们会设计一个树形图,然后把概率相乘,也可能意识到  $P(\text{白}$

$P(\text{白} \cap \text{红}) < P(\text{白})$ , 因为“白 $\cap$ 红”既是“白”的子集, 又是“红”的子集。

我提出这个特殊例子的原因是它不涉及到叙述方面的其他问题, 特维尔斯基和卡恩曼虽然研究过学生是如何把“交”的可能性与它的总体的可能性作比较的, 但这些研究中“交”的问题在叙述时存在着一些陷阱, 而上述珠子问题中涉及到“交”的概念显然与叙述无关, 于是借助于它可使我们确定来自于“交”的错误有多少是叙述的问题, 有多少是概念的问题。

虽然, 交事件、条件概率和独立事件是相当难教的, 但是卡恩曼和特维尔斯基的研究中还提出, 对于这些比较复杂的概念, 教学还存在心理学方面的障碍: 大多数人, 甚至是那些熟悉概率理论的人, 并不打算花时间去把心脏病突发问题、银行出纳员问题进行教学处理。他们的反应主要基于直觉的典型性、有效性或基本属性错误, 而不是基于该事件的概率的正规模型。

**条件概率和独立性的研究** 学生在学习条件概率和独立事件的概念时的困难, 已有许多数学和统计教育工作者的文章中写过。在一个作为条件的事件后, 再发生事件时, 关于条件的许多显著的错误概念会发生。福尔克和博罗凡尼克讨论了下面的问题, 现在把这个问题叫做“福尔克现象”。

在一个广口瓶里有两个白球和两个黑球, 从其中取出两个球且不放回第一个球。

1) 已知第一个球是白的, 求第二个球也是白的概率。

2) 已知第二个球是白的, 求第一个球也是白的概率。

按数学的说法, 第一个问题是要计算条件概率  $P(\text{白}_2 | \text{白}_1)$ , 第二个问题是要计算条件概率  $P(\text{白}_1 | \text{白}_2)$ , 使学生看出第一个问题概率为  $\frac{1}{3}$  是容易的, 因为当我们打算取第二个球时, 瓶里还有一个白球和二个黑球。而要使学生看出, 甚至相信第二个概率也是  $\frac{1}{3}$

却不是这么容易的。学生通常觉得第二个问题的概率是 $\frac{1}{2}$ ,因为他们不能理解由“第二个是白球”而确定“第一个是白球”的事件。事实上,在有些学生看来,根本不可能计算第二个概率,因为在他们眼里第一次取出的结果不能取决于第二次取出的结果。福尔克指出:这个问题使学生感到困难的原因是他们能够根据因果关系解释第一个条件概率,而在第二个条件概率中,学生要对一个以它后面发生的事件为条件的事件作推理,无疑是困难的。而且,计算这类概率的通常方法——贝叶斯理论,它对于第二问题计算的结果为什么也是 $\frac{1}{3}$ 几乎没有直觉可言。福尔克对瓶、球问题提出了一个教学技巧,在瓶中取出一个球放在旁边(隐藏着),再取出第2个球,向学生显示第2个球是白的,然后问第一个球(还隐藏着)也是白的概率是多少?换句话说,通过实物的模拟,演示可以帮助学生懂得第二个事件确实是条件事件。

在另一个问题中,福尔克说明了选择事件作为条件事件是件困难的事,它会导致对条件概率的误解。下面所示的一个概率问题是一个很好的例子。

在袋里有三张卡片,其中一张卡片两面都是绿的,一张卡片的两面都是蓝的,第三张卡片的一面是绿的另一面是蓝的。你从中摸出一张,看到一面是蓝的,问另一面也是蓝的概率是什么?

人们常会误认为第二面是蓝的概率是 $\frac{1}{2}$ 。他们的理由是,在显示有一面是蓝色之后,只有两张卡片要考虑,“蓝、蓝”卡和“蓝、绿”卡,但是附有条件的事件不是“卡”而是“卡的面”,于是“蓝、蓝”卡两次使我们得到第二面是蓝色的事件,因此另一面是蓝色的概率是 $\frac{2}{3}$ 。

另一类对条件概率的误解是混淆了条件事件  $P(A|B)$  与其“颠

倒”条件的事件  $P(B|A)$  之间的差异,如在已知“我发过皮疹”的条件下求“我患过麻疹”的概率与在已知“我患过麻疹”的条件下求“我发过皮疹”的概率,后者的概率比前者高得多。人们发生这样的混淆是很常见的,特别在诊断疾病时。如果一个人爱滋病检查呈阳性, $P(\text{患爱滋病}|\text{检查呈阳性})$ 不等于  $P(\text{检查呈阳性}|\text{患爱滋病})$ ,但是,许多人常常认为这两种条件事件之间没有差异。一个人如果患了爱滋病,他肯定有许多病的症状,而另一方面,某些症状能为诊断提供信息,但信息并不一定能导出正确的诊断。福尔克指出条件事件和相应的“颠倒”事件之间的混淆常常是在要研究的工作中解释拒绝零假设( $H_0$ )的意义时发生的。如果我们在某个零假设  $H_0$  下,从样本中得到一个事件  $A$ (统计结果),很容易混淆  $P(A|H_0)$  与  $P(H_0|A)$ 。如果  $P(A|H_0)$  充分小,按惯例我们拒绝零假设,因为在零假设下事件  $A$  发生的概率太小。但是福尔克注意到当要回答“我们错误地拒绝零假设的可能性有多大”时,是通过计算“颠倒”事件的概率  $P(H_0|A)$  来回答的,这正是我们想要提醒的问题,甚至一些善于运用统计的研究者在解释他们的结果时,也会混淆这两个条件概率。

福尔克陈述了一些为什么我们的学生对含条件概率的情形会感到困难的一些理由:

1. 学生对确定条件事件会有困难(就像彩色卡片问题);
2. 会混淆具有因果关系的条件事件,于是当他们要研究  $P(A|B)$  时,却研究  $P(B|A)$ ;
3. 会认为“时间轴”使某个事件不可能成为条件事件(如黑白球问题的情形);
4. 在具体工作中,由于条件概率问题的措词和结构方面的原因,也会把问题弄乱(就像出租马车问题)。

所有研究条件概率的错误概念的研究者都提倡用现实生活中的例子去帮助学生理解条件概率。例如福尔克注意到在有些科学

研究中,一个在时间轴上处在较后的事件常会被作为条件事件,如考古学和天文学,对很久以前发生的事作推断的根据是现在正在发生的一切。凯利(Kelly)和兹维厄斯(Zwiers)强调这些例子是非常重要的,它们有助于学生为在自然中体现得模糊的特性和用数学表示得非常严格的特性之间的鸿沟架起了桥梁。相关性不是有因果关系的意思,例如氧气本身不会引起火,但火依赖于氧气才能保持燃烧。凯利和兹维厄斯还陈述了互不相容事件的概念在“真实世界”和“数学化”的两种形式之间的差异。在真实世界中,互不相容事件不必是互补事件,他们提出向学生显示“互补”与“矛盾”事件之间的差异,当两个事件不能同时为真,也不能同时为假时,它们是互补的。例如事件 A 是“我赢了球赛”与事件 B“我输了球赛”是互补事件。但是事件 C“俄勒冈的每天都下雨”和事件 D“俄勒冈没有雨天”是矛盾事件,因为这两种说法可以同时是假的,事实上存在不同于 C 和 D 的第三个事件,“俄勒冈有许多天是雨天”可以是真的。

虽然有很多文章涉及条件概率的错误概念,但几乎没有现实的实验研究来报告学生在专门处理条件概率时的观念和直觉。一个例外是玻拉特塞克等的研究,但是那个研究所使用的是让学生做选择题的方式所得的回答。虽然研究者鼓励学生写出他们作选择的理由,但学生在短短的表达中提供不了什么有用的信息。要了解学生的真实想法,诊断性的方法是必要的。据我们所知,还没有任何关于改变学生条件概率的错误概念和观念的专题研究报告。在这个领域虽然好的诊断建议不少,但过硬的研究成果却不多。许多诊断建议正在被采纳,必须对学生中关于条件概率的概念和观念作详细地调查,长期地记录采取这些建议之后所发生的变化。

为了向学生指出在分析事件信息方面的困难,有一个所谓的“Monty 难题”,我常给学生讲述



## Monty 难题

在一个游戏节目中，有三扇门，已知其中一扇门的后面是件大奖品，其余两扇门后面都是小礼物，参赛者站在这三扇关着的门前。要求参赛者指定其中的一扇，然后节目主持人 Monty 打开其余两扇门中的一扇，向参赛者显示门后是件小礼物，这时再给参赛者一次选择机会：要么坚持原来指定的那扇门，要么改为另一扇关着的门。你认为参赛者应如何决定，才有较大可能得到大奖品？

对于以上这个猜测情境，我们把 Monty 的难题数学化：

问题：如果你是参赛者，你将选择下列哪个策略，为什么？

策略 1——坚持原来选择的门；

策略 2——抛一个硬币，如果出现“头”，坚持原来选择的门，如果出现背面，则改变原来的选择；

策略 3——换成另一扇门。

问题的关键难点是，当你知道这些信息时，你真正知道了些什么？你如何利用这些信息？我们对中学生直至研究生，还对职前或在职教师提出了上述问题，大多数学生确信只要 Monty 一打开那扇没奖品的门，那么赢得大奖品的机会就自动地从  $\frac{1}{3}$  上升到  $\frac{1}{2}$ ，他们的理由是“现在你知道了其中的一扇门里没有奖品”。但是，另一种说法是，如果参赛者在获得新信息后，没有采取行动改变赢的机会，就等于没获得新信息，那么赢的概率仍然是  $\frac{1}{3}$ 。用抛硬币的策略主要被用来强调主动再选择和被动的维持原选择之间的差异，它把赢的概率提高到  $\frac{1}{2}$ ，而维持原选择的策略仍保持赢的概率为  $\frac{1}{3}$ 。当学生用一个含三块等面积的转盘和一枚硬币来模拟执行这三种策略，执行 100 次后，学生对这个问题的理解发生了戏剧性

的变化。他们确实看到,再选择产生了作用。而且发现总是采用换门策略的参赛者获得最好的结果。在采用换门策略时,不能赢的唯一情况就是第一次就选中了有大奖的的门,而这个事件的概率为 $\frac{1}{3}$ 。因此采用换门策略赢得大奖品的概率为 $\frac{2}{3}$ 。

Monty 难题的模拟策略成功地为福尔克、博罗凡尼克、本茨和肖内西的观点进一步提供了依据,即通过模拟的手段将概率问题模型化是对付和克服概率问题中错误概念的一种有前途的手段。然而在这方面还有许多工作要做,要为将来的实验研究和长期的教学实践作好准备。

对条件概率的错误理解可能与学生对于独立事件和一般情形下的随机事件的错误理解有密切关系。一些关于独立事件的数学化表示甚至采用的定义“如果  $P(A|B) = P(A)$ , 那么 A 独立于 B”(换句话说,事件 B 不会改变事件 A 发生的可能性)。无论  $P(A|B) = P(A)$ , 还是  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ , 它们都是等价的定义。凯利和兹维厄斯等人提倡用条件概率的定义推广独立的概念。因为他们相信,这对于学生更为直观。

关于独立性问题,我们谈到过科恩的研究,在这一研究中,测试对象所用的方法要么是否定最新事实,要么是肯定最新事实的直觉推断法。这项研究还通过一些二项分布的例子证实了两个有关问题的独立性。在一项实验中,福尔克要求学生评判结果是否随机,结果他发现人类在逐步认识和构建随机事件的同时,对它的评价却仍是浅薄的。

福尔克向中学生出示了一叠 21 张绿色或黄色的卡片,要他们确定哪种排列更随机。例如比较下面排列中哪一种更具随机性。

A: 黄黄黄绿绿黄黄绿绿黄黄黄绿绿绿绿绿绿黄黄黄

B: 绿黄绿黄绿黄绿黄黄绿黄绿黄黄绿绿黄绿黄

学生倾向于选颜色交换较密的一组,即 B 所表示的排列。事

实上,出现一种颜色较长排列的一组看上去更随机。如果“否定最新事实”的原则成立的话,那么学生看到B列出现较多的颜色混合,就判为更具随机性。当福尔克先生要求学生把21张卡片随机地排列时,也呈现同样的倾向。类似地,要求测试对象用两种颜色的小方块构造平面“棋盘”时,有关随机性的讨论也有类似的结果。无论是让学生认识已有的随机,还是让他们自己构造随机,反应都是不可靠的。福尔克总结说,在没有其他信息的情况下,我们一般认为这些排列都是随机事件的一个样本,因而不主张把某一个结果看作是随机,在结果尚未出现时,对该结果进行推测,如估计颜色交换次数较多的排列是最随机的排列等,福尔克的观点非常清楚:人们对随机结果的产生是无可选择的。

科诺尔德证实了即使我们的学生看来是依据独立性作推理的,但如果再稍稍深入调查一下,就会发现他们的反应并不是前后一致的。在科诺尔德的一项研究中,先后投掷5次硬币,得到四组排列(反正反正正、正正正反反、反正反反反等),让学生比较这四组排列,并要求他们回答:“哪一组排列最可能发生”,他们最初认为是等可能发生的。然后把它们都翻过来,再问他们“哪一组排列最不可能发生”,他们又指着其中的一个排列,认为这种最不可能发生。对学生在这个问题中所作选择的理由作分析,科诺尔德总结说,学生的反应既不是根据投机(科恩所述的肯定(或否定)最新的事实),也不是根据卡恩曼和特维尔斯基在这类问题的研究中所主张的直觉推断法的典型性。科诺尔德提出,许多人对概率问题作决定时,往往是根据所谓的“结果法”。在下一节我们会更详细地探讨“结果法”。

**在随机情境中的其他判定程式** 在概率估计的课题中,人们的有些反应不能简单地认为是由直觉推断而引起的误解所造成的。在条件概率这一节里我们已注意到某些反应涉及因果关系。

艾赞、厄斯比特和罗斯、特维尔斯基和卡恩曼都强调,在作概率估计时,构成原因的信息与构成症状的信息之间的相互影响所产生的作用并不是对等的。如人们较多地相信从高度可以估计重量,而较少相信从重量可以估计高度。类似地,人们相信“蓝眼睛妈妈的孩子是蓝眼睛”比相信“蓝眼睛孩子的妈妈是蓝眼睛”的可能性大得多。把妈妈看作是孩子蓝眼睛的原因,而不会把孩子看作是妈妈蓝眼睛的原因。特维尔斯基和卡恩曼发现,给出“原因”信息作概率的条件的问题(如已知妈妈是蓝眼睛,推测孩子是蓝眼睛),比给出“症状”信息作为概率的条件的问题(已知孩子是蓝眼睛,推测妈妈是蓝眼睛)更容易解决。“原因”和“症状”来自医学术语,前一种情形是由疾病探讨其可能出现的症状,而后一种情形是通过某些症状诊断所患的疾病。如果某一个事件对另一个事件的因果效应越大,人们就较有可能过高地估计作为原因的事件的概率。如果真能确定原因所能产生的效应,那么这种策略当然是合情合理的,但更多的情形并非如此,人们所发现的因果关系可能是一种错觉,可能不存在固定的因果程式,于是依赖于因果程式的条件概率问题就会被曲解,所得到的概率估计就会偏离原始值。

虽然评价的直觉推断(如有效性和典型性)和因果程式都能导致对随机的误解,但至少看起来都包含着把随机作为一个过程的观点。评价的直觉推断是建立在对随机过程的理解之上的,而因果程式由决定论中的过程引起。但是,有证据表明有些随机实验对学生没有任何过程。这些学生没把一项实验的一个单独结果看成是这个实验的许多结果中的一个样本。科诺尔德指出,在有些项目中,把一项实验的每一个结果看作是一个个别的单独的现象,他把这种方式叫做结果法。

重视结果的人可能相信他们的任务是准确地确定下一个结果是什么,而不是估计哪个结果更可能发生。在初等统计课程中,科诺尔德提出向大学生介绍一些统计方法,并让他们作有声推理,他

对他们的思想过程作调查。根据他的调查,重视结果的学生用50%的概率作为倾向于“肯定是”或“肯定不”的界限,机会明显高于50%(如70%)的事件将会发生,而机会低于50%(如30%)的事件将不会发生。如果事件发生的机会恰好是50%,他们就会说“不知道”或“不能确定”,科诺尔德在有些项目中,对他的结果假设得到非常有力的证据。在一个叫做“骨头问题”的项目中,要求预测一个不规则形状的骰子是哪一面着地。有些测试对象即使面对许多次抛骰子后得到的与预测矛盾的频率,仍固执地坚持自己的预测。科诺尔德也取得了一些关于“出租马车问题”的反应,都是完全相信证人,而全然不顾基本比例信息。这与卡恩曼和特维尔斯基的观点不同,他们在早期的研究中至少把对基本比例信息的忽视归结为是承认证人可靠的典型。科诺尔德有材料说明,一些测试对象是使用了单个结果的方法。即某些重视结果的测试者把“出租马车问题”看作是一个单独的事故,而不是在一个可重复试验中发生的一个事实。他认为,如果(1)结果不是等可能地发生,就如“骨头问题”,或(2)试验不能重复地实现,如“出租马车问题”,那么对这个问题的预测就要使用“结果法”。只要学生认为确实存在使他们相信假设正确与否的方法,那么统计逻辑的精髓部分和所有的概率理论对他们都是可以回避的。

我们已经在前面讨论了“出租马车问题”在认知方面的复杂性。在这个问题上要清楚地区分“依赖于结果作预测”和“依赖于典型性作预测”是相当困难的。然而科诺尔德在研究错误的随机概念时,是采用诊断方法的少数研究者之一。许多心理学家,如卡恩曼和特维尔斯基主持的许多项目,包括了让学生对一些特殊的问题作选择回答,但这些供选择的内容是事先设定的,学生得不到机会表现。而科诺尔德的“有声推理”的方法能调查学生在随机问题中反映出的所有情况。这种诊断性方法对那些有兴趣调查学生在解决随机问题时在认知上和情感上的过程的数学教育者是最适

合的。

### 其他的随机误解

我们已经看到,即使是在统计学的应用方面经过训练的研究者也会对统计学的概念发生误解。他们可能觉得较小的样本容量在反复的研究中也是足够的,因为较小的样本也应该能代表总体。如果训练有素的研究者也对统计概念有困难,那么学生对某些初等的统计概念,如平均数和标准差等发生误解就不足为奇了。为了看看学生是否在用机械的方法计算平均值,玻拉特塞克和他的同事对一些统计不成熟的大学生出了几道类似于特维尔斯基和卡恩曼用过的题。其中的一道题是这样的。

在某地区所有高中学生的得分 SAT 的平均值是 400。随机抽取 10 个学生的成绩作为样本,其中第一个学生的 SAT 分数是 250 分,那么你怎么估计整个样本的平均 SAT 分数?

许多学生都回答平均分是 400 分。这些学生可能把典型性当成了一个普通规则,他们相信即使是如此小的一个样本也应该能反映总体情况。另一方面,他们也可能混淆了总体平均值和样本平均值。总体平均值是不变的,但样本平均值受到样本中所有学生成绩的影响。一旦我们知道在这个样本中有一个很低的分数,那么对这个问题的一般方法是应该用平均分来代表另 9 个未知分数,并授予权重来修正对样本平均数的估计,修正的样本平均数是

$$(9 \times 400 + 250) / 10 = 385。$$

玻拉特塞克认为,学生在必须计算加权平均数的情况下,会混淆样本平均数的概念。许多学生对平均数的理解是“把所有的样本值加起来,再除以样本容量”的算法,因为这样的计算都是老师教他们的,当结果不是等可能的,或者分数需要赋以权重时,对平均值的估计就会发生错误。这是缺乏数学知识时的心理现象,学

生也许还没有接触过平均数的一般概念,他们只有对平均数的构造性的理解,仅理解了它的一个侧面。当要求对余下的九个分数的平均数作预测,研究者没能像他们所期望的那样,为能动的均衡策略找到足够的证据。这个能动的均衡策略应预测到余下九个数的平均数应该高于 400 分,以补救那个特别的低分。而学生倾向于要么仍旧预测为 400,要么预测低于 400,因为当他们得到了 250 分以后,就不相信总体平均分真的是 400 分。玻拉特塞克等总结说,学生们依赖于典型性,更甚于任何一种能动的均衡技巧。关于这项研究最显著的现象是,即使让学生在某次谈话中看到所有各种选择后,再给他们机会判断哪种结果是最好的,他们仍旧会坚持自己的选择,不大改变主意。虽然项目中所用的样本是相当小的,但这些结果还是呈现了对直觉推断的典型性的强烈依赖,即使是面对对立的合理结论。

玻拉特塞克和他的同事们注意到,在类似于 SAT 成绩之类的问题中,估计分数平均数的一个值是非常不适宜的。因此启发我们,如果把这种估计改为置信区间的估计,而不是一个值的估计,那么我们可能会得到非常不同的结果。从教学的观点看,把重点放在事件的置信区间的估计上,而不放在事件的固定的概率值上也许会更有意义,因为这是被科诺尔德称为“单结果论”概念群的一部分。要让学生为某个单独结果给出一个概率,他们可能并不理解这个结果会重复发生;而通过置信区间反复讲授就比较容易了。如果应用了一些置信区间的观点后,那么 SAT 成绩问题中的结果将可以如下提出:

已知某地区所有高中学生的 SAT 分数的平均值是 400,你随机地取十个学生的作为样本,如果你取得第一个学生的 SAT 分数是 250,

A) 样本的平均分最可能“落”在哪个区间里?

i) 250 ~ 375

- ii) 375 ~ 425
  - iii) 425 ~ 550
  - iv) 一个与上述都不同的区间\_\_\_\_\_。
- B) 样本平均分最可能“落”在哪个区间里?
- i) 200 ~ 300
  - ii) 300 ~ 400
  - iii) 400 ~ 500
  - iv) 一个与上述都不同的区间。

当然,由 SAT 问题的这些置信区间的说法也会引出一些问题:“区间的界点应取在哪里”,“存在不同的置信区间吗”等等。如果与谈话的方式相配合,这样就可以查明这些问题上学生反应的整个范围。这对于设计选择项是很有用的。再则,这项工作的本身可以为我们解释研究结果带来大量的信息。

对统计的错误概念的另一项研究由梅瓦雷(Mevarech)主持,他发现大学生错误地把学习如相关性和闭包之类群的结构性质归结为只要知道计算平均值和方差的操作就够了。特别是,这些大学生认为通过“加加除除”和算法就可以得到“平均数的平均数”。关于“平均数的平均数”的错误概念是在高中或大学教过统计初步的人都常见的,在平均数需要以样本容量赋予权重的情形下,我们又会看到学生对平均值的严重的误解。梅瓦雷的研究结果正严重地困扰着统计教师,因为这些误解在学生学过一些关于描述统计的初步的课程之后发生。接下来梅瓦雷试图在描述性统计阶段,针对学生关于平均数和方差的错误概念,设计了一门课程,这项研究在两期的课程学习结束后,获得了很大的成功。在学习中,这些学生接受了为针对错误概念而设计的教学指导。遗憾的是,梅瓦雷没有提供任何关于学生如何主动地克服他们在学习初期的错误概念的数据和信息。

卡恩曼和特维尔斯基的早期研究发现,缺乏统计知识的大学



生,在对事件发生的可能性作估计的时候,不注意样本容量的影响。这就提示我们,这样的学生对大数定律没有足够的理解,因为他们依赖于典型性(而不是样本容量)估计问题的可能性。然而最近厄斯比特等强调,虽然在统计方面没有受过正规训练的人在每天的生活中解决问题时也使用大数定律,但通过训练在更多的场合中可使他应用大数定律的能力进一步得到提高。

为了解释学生对大数定律的理解方面的问题,韦尔做了一系列的实验。用不同方式向学生提出问题,在一种“接近程度”的说法中,要求学生回答,大样本的平均数和小样本的平均数,哪个更接近于总体平均数。这个问题的另一种提法是要求学生估计在样本平均数与总体平均数之间所存在着的距离。学生一般在“接近程度”的提法下做得较好,而在另一种的提法中做得不好。可见,学生关于大数定律的直观理解并不是幅简单的图,各种各样的条件极大地限制了学生的行为。韦尔在懂得样本分布的学生中借助计算机模拟实验进行连续重复的实验。让学生构造和观测容量为10的100个样本和容量为100的100个样本的分布状况。经过这些训练之后,韦尔和他的同事们还发现,许多学生相信容量为10的样本和容量为100的样本,其分布中的差异是同样的。这看上去又像回到了典型性的问题。对于这些研究,我的解释是,如果教师缺乏关于抽样分布中离差的概念和样本容量是怎样影响样本分布的明确教学,学生是不会改进他们对大数定律的理解的。只显示抽样分布的图象似乎是不充分的,必须直接指出抽样分布的离差的模型及其所包含的定量关系。事实上,存在一个数可以用来刻划样本平均数和总体平均数之间的距离,学生在处理这类数量问题时的无能提醒我想起保罗斯(Paulos)的书《自然科学者》中的一些例子。学生在抽样分布中的另一个问题是他们不断地搞乱单独的分数和分数的平均数之间的关系。在给出计算机模拟之前,学生需要直接地、一次又一次地实验,计算它们的平均数,产生平

均数的分布。

我想以兰德威尔(Landwehr)最近发表的另一一些常见的随机错误和统计误解来结束这一段。

1. 人们错误地认为两个样本平均数之间的任何差异都是意义重大的。

2. 人们不适当地认为在“真实世界”内的一切都是确定的。

3. 人们无根据地相信小样本。

4. 人们对大样本中的小差异没有足够的重视。

5. 人们错误地认为随机样本容量的大小与整个总体容量是无关的。

在这一系列的问题后我想加上一条更严重的。

6. 人们在日常生活中无根据地把问题归结为平均数来解决。

对许多人来说,“真实世界”是一个确定了各种情况的世界,不存在变化着的事情,因为他们不相信随机的事件和机会。我们看到过很多无根据地相信小样本的例子,事实上,电视广播中随时都在暴露这种错误的概念,如“三个医生中两个说”之类的措词。另一方面兰德威尔也说,许多人既没有认识到两个好的大样本之间存在着统计上的差异,也没有意识到认真抽取的几百个个体的样本可以告诉我们许多关于大总体的情况。在可以用样本推断总体的例子中,人们不应用直觉推断的典型性。在高尔夫球场上人们会在一些好的回合后,分数猛涨时寻求原因;在饭店里,人们会在食品质量较差时寻求原因;大量的差异常常能用平均数加以解释。然而,如果认可这么做的话,我们常常不能把握自己的结论,因为我们面对的往往是一个单独的结果,而不是长期的结果。

### 直觉推断通常是有用的

虽然有时依赖于直觉推断(如典型性和有效性)会导致偏面的、非标准的概率估计,但是在有些背景下,直觉推断是很有用的,

它能给我们提供好的信息。如果在你的记忆中已经贮存了一些某个交叉路口附近发生过的交通事故的详情,那么你在这个交叉路口经过的时候便会更加谨慎。类似地,医生利用直觉推断的有效性作诊断,在大多数情况下都是正确的,有效性并不总是坏事情。事实上,它对于作出决定是非常有用的组织者。同样地,典型性常常是大量统计问题的核心。博罗凡尼克指出,典型性是一种统计的观念,这种观念容许从某些样本到总体的转移。从道理上说,我们要研究一个来自于总体的随机样本是因为它是总体的一个典型。我们希望把在样本中发现的每一点内容都能对总体作推测。于是,典型性对于认识随机事件是非常基本的,它是在某种可信程度下推测总体的一种手段。作为数学教育者,我们的任务是指出在某些情况下,直觉推断反而会不利于人们的决策,需要把它们从直觉推断的有用情境中分离出来。我们不得不向学生指出这一差异,这并不是学生理解方法上的错误,而只是他们(包括我们)对直觉推断的有效性过分地相信(科诺尔德提出,心理学家必须切实地研究其中会误导人们的情形)。

## 发展心理学和概率概念

在《Le Genese de L'idee de Hazard chez l'Enfant》一书中,皮亚杰和英海尔德按照他们的发展心理学理论,从诊断的观点出发,提出了孩子们获得概率概念必须是分步进行的,尤其是皮亚杰的研究,从方法上来看,对孩子们的表述能力有较高的要求,并且孩子们对问题的选择或执行将会体现他们对问题的认识水平。但是皮亚杰的关于在不同年龄阶段的孩子所做的或所想的叙述,与认知心理学的最新的研究成果非常一致。

简要地说,皮亚杰强调,概率概念的发展分三个阶段:第一阶段,7岁之前。其一般特征是,孩子们不可能区别必然事件和可能事件的关系,尚没有证据来表明他们有不确定的概念。据皮亚杰的

观测,在这个年龄段的孩子要想去寻找随机和混沌中的次序。如果他们显示事件 A 和事件 B 的例子,且事件 A 发生的频率较高,那么他们就能够预测事件 B。理由是“事件 B 跳开的次数太多”。这会联想到投机者的策略,虽然孩子们会以几乎同样的理由不选择 B。他们也可能使用科诺尔德的结果方法。但是要通过小孩子的语言来表达,且准确地认识他的正在思考的问题,通常是不太清晰的。皮亚杰和英海尔德也注意到,有些孩子在对常观测的事件作预测时,会忽视总体的比例。例如,在我们曾经应用过的一个问题中,让孩子看到一个盒子中装了 3 个黑弹子和一个白弹子,另一个盒子里装了 6 个黑弹子和 2 个白弹子,然后问他们分别在两个盒子中各取一个黑弹子的机会是一样的还是不一样的。孩子们常会说,从有 6 个黑弹子的盒子中取出一个黑弹子的可能性较大,这些孩子没认识到概率是个比率。



图 11.2 皮亚杰弹子问题

在第二阶段,即 7 至 14 岁的孩子,他们能认识必然事件与可能事件之间的差别,但还缺乏系统的方法。在这个阶段,孩子们还不具有组合的技能和成熟的数学能力去构造一个概率试验的抽象模型。在第三阶段,即 14 岁以上的孩子,他们的组合分析能力和把概率当作相关频率的极限来理解的机智开始得到发展。于是比率的概念成为概率概念发展的关键,这是皮亚杰的观点。

在一项调查青少年的概率概念的大型研究项目中,格里安在英国调查了 3000 多个年龄在 11 岁 ~ 16 岁的学生,确定他们的皮亚杰发展水平,调查他们究竟知道了哪些概率概念和表达不确定

事件的语言。格里安的工作包括树形图、随机的直观描述,由面积刻划概率模型的圆盘和如上所述的皮亚杰球问题。格里安发现大多数学生尚未达到皮亚杰规定的 16 岁学生应能达到的阶段。格里安还发现他们对树形图和乘法原理的理解很勉强;对用计数方法处理的问题比用比率处理的问题好得多。近 50% 的学生认为从装有 6 个黑弹子、2 个白弹子的盒中取一个黑弹子比装有 3 个黑弹子、1 个白弹子的盒子中取一个黑弹子的机会更多。总之,这些学生的随机概念是很缺乏的,这与福尔克的研究结果是一致的。

格里安概括了几条:(a)比率的概念是理解概率的关键;(b)要让学生逐步理解和使用一些共同的概率语言,如“至少”、“确定的”、“或”、“不可能”。因为学生在这方面的反应是肤浅的;(c)学校似乎需要一种广泛的、系统的随机教学,才能消除学生的错误随机思想。在格里安报告中,没有提到关于这些学生的随机背景的信息。格里安的大部分测试题是多项选择题,虽然他的有些题目要求学生给出作选择的理由,但在这种努力下获得的大多数信息仍是粗略的和不全面的。因此,这对澄清学生的想法并不是非常有用的。格里安为英国学校的随机现状刻划了一幅可悲的图画。由于美国学校对随机也缺乏重视,因此如果在美国进行这样一个大规模的调查,即使不是更坏,那至少也会是这样差的。

在美国,对概率概念的唯一的大样本调查数据来自“教育程序的国家级评价”中的一些课题。卡彭特、科比特(Corbitt)、凯普纳(Kepner)、林奎斯特(Lindquist)和雷斯(Reys)报告了在一些非常基本的情形下,学生看起来对概率有一些直观认识,这些认识随着学生的年龄而增长。但是,许多学生不知道如何数学化地表述自己的直观感觉。这其实不意外,因为大概还没有教过他们如何建立概率模型。对于估计“投掷三次硬币都是头像”的概率这类难度的问题时,美国 17 岁孩子中,只有 5% 能作出正确的计算。“教育程序的国家级评价”中的题目比格里安的大多数题目更容易,并且看

起来较多地偏重于计算,而较少地偏重于概念和格里安所指的对随机思想的理解。

由“教育程序的国家级评价”提出的有关学生的概率直觉已经成为这些年来一些研究者调查的重点。菲施拜因等人写了大量关于儿童的概率直觉和组合概念的报告,以及在概率直觉的情况下对教学的影响。我们把对教学的影响的讨论放在下一节,这里开始详细地讨论概率直觉问题。

菲施拜因认为,直觉是一种认知信念,直觉对于感觉者是直接的、全面的和明显的。在数学和科学方面有许多直觉的例子,有些人会对重力、速度、整数或相对频率有直觉。菲施拜因认为,直觉具有适应性,因此,通过系统的教学,能够影响一个人的直觉能力。在这一点上,菲施拜因与皮亚杰不同,他认为教学会对学生从具体计算到形式计算的转变产生影响。在菲施拜因最近的著作中,区分了初始直觉和第二直觉的关系,初始直觉是在接受教学影响之前已有的观念和信念。第二直觉是被重新构造过的认知和信念,它是在一个特定的文化范围内通过教学和实验的结果,让我们接受并应用的。例如,在概率方面许多人有一种直觉,他们觉得至少需要 180 个人,才能有人的生日恰好相同的机会。但是,在教学之后,学生会改进这些直觉,成为第二直觉,能用来处理所有这类匹配问题。初始直觉虽然对他们很重要,但是对于这类特殊的匹配问题更重要的是建立第二直觉。菲施拜因还认为,用第二直觉来替代第一直觉的过程不是一个逐步变化的过程,而是整体的、突发的。这非常像完形心理学中的“啊哈”实验,体现新发现的瞬间和问题解决过程中的顿悟。

直觉对我们来说是可塑的,它有待于大大地扩充,有些概念的初始直觉是有局限性的,在数学和科学方面有很多这样的例子。例如关于数的直觉,由长度的测量面提出了有理数和实数,而当我们考虑复数时,这种直觉就被打破了。于是,把数看作是方程的

解,适合复数的新的第二直觉就能建立起来代替原来的直觉。按菲施拜因书中的观点,科布称这是直觉的“双刃剑”,它既会导致对科学的真实性产生误解,又会对科学的真实性提供简单的认知。为此,菲施拜因谈到发展“非直觉”的直觉的重要性。这在某些数学分支(如概率和统计)中是特别重要的,因为这些分支中的许多现象与我们的初始认知和信念相抵触。

菲施拜因不把卡恩曼和特维尔斯基的直觉推断(典型性和有效性)作为直觉,但是,它们之间存在一些相似之处。评价的直觉推断也是“双刃剑”,有时对我们有帮助,而有时又对我们有妨碍。无论卡恩曼的直觉推断,还是菲施拜因的直觉都是来自于应用它们的人的观察力,都是表现外部真实世界的模型。另一方面,直觉发生在比随机更广的科学领域,而评判的直觉推断只是一种过程策略,而不是科学真实性的个人看法,看来这两者都不能互相包含。

按菲施拜因的直觉理论,随着学科外部的、经验的和科学的真实性的不断发现,我们相信,一定还存在着超出我们目前研究范围的力量,在左右着第一、第二直觉理论,并把我們带回到认识论的起源。

### 教学对随机的概念和信念的作用

在以前 15 年中,数学和统计教育工作者已经对随机教学中的认知过程非常感兴趣。从他们对概率统计的调查中提出的问题已看到,他们已受到认知心理学家研究的影响。在这以前,由数学教育者所倡导的研究主要针对三类问题:

1. 关于中、小学生可教的概率统计内容的可行性研究;
2. 为寻找概率教学对其他因素的影响,或者为找出概率统计的成功教学与其他因素(如态度、符号使用和计算等)之间的联系而进行的实验研究和相关性研究;

### 3. 对某些概率教学单元的教学方法的效果的比较研究。

大部分的可行性研究显示出小学高年级和中学年龄的儿童在教学之前已经有了一些概率的观念,在这个年龄阶段对他们教一些随机知识是可行的。勒芬(Leffin)和琼斯(Jones)发现,儿童的智商能成功地预测他的在概率测试中的成绩。谢普勒(Shepler)和吉普森(Gipson)都有证据认为从正确列出样本空间到计算概率,学生并不总是能合理地应用各种信息的。因此,他们表现出对概率模型的概念只有局部地理解。勒芬还发现,对四至七年级的儿童,理解组合的概念是件困难的事,他的研究事实上是由一部分随机与一部分组合组成的。在这一章里,我们把组合数学(计数技术)从随机概念中区分出来。我们承认,组合数学对于计算概率是有用的。但是,随机性的基本概念,如独立性、样本、分布和总体参数等都不依赖于计数技术。人们在考虑概率的时候,也常常只考虑组合数学问题,这也许是因为他们在概率方面有过一个非常正规的以集合论为基础的课程。

琼斯的研究是处理一至三年级儿童的,也是数学教育者第一次在随机的研究中应用诊断方法。琼斯用录音与学生谈话,了解他们正在发生的错误,他发现儿童在考虑面积旋转盘最可能发生的结果是什么时,颜色会对他们的选择产生误导作用。因为儿童常会有一种最喜欢的颜色,他们会优先考虑这种颜色,甚至超过面积最大的颜色。于是,就会干扰学会对概率问题的思考。斯莫克(Smock)和贝罗维奇(Belovicz)的报告中警告教育工作者,若要在小学里实行概率教学,不能期望得太多,因为在这个年龄阶段的孩子对随机知识理解的深广度和概括程度都是非常有限的。但是,这类研究的大多数说法是概率的概念还可以而且应该在更早的年龄引进学校。

怀特(White)、麦金利(Mckinley)和舒尔特(Shulte)各自都发现,在学习了一定时间的概率之后,学生对于概率概念的学习成绩会



有较大的提高,并发现概率学习成绩必定与计算能力、思想造诣、阅读理解、语言技能和一般数学成绩有关。舒尔特发现,仅仅一个单元的概率学习显然对于学生应用和解释数学公式的能力有积极影响,然而对学生的观念或计算技巧都无值得注意的影响。

莫耶(Moyer)的实验组学了很多概率,但是与控制组的学生在计算技能、推理能力和随机观念上都没有显著的差异。巴茨(Barz)发现,在概率方面结合实际的课程往往比传统的、以集合论为基础的课程更能让学生有较好的学习成绩,对有些实验组,这方面的差异是显著的。

这些早期的研究因为只教一个概率单元,时间太短,所以在观念和技能上的改变很难真实地显示出来。那么在所有的年龄层次,如何进一步揭示随机的实质,进一步把诊断方法运用于调查学生的思维过程,还需要做些什么?做多久呢?

菲施拜因和他的同事们最早报道在概率课程的作用下,学生的概率直觉和概念的显著变化,当孩子们,甚至学龄前的儿童接受皮亚杰的概率的比率教学时,他们提高了预测结果的能力,其中提高最明显的是9岁~10岁的儿童,按菲施拜因的说法,这与皮亚杰的阶段理论是相矛盾的。当学生接受组合数的教学时,也有类似的提高。遗憾的是这些研究没有一个评价学生在教学之前的理解状况,也没有一个为比较研究提供一个控制对比组。在后来的一个研究中,菲施拜因和盖茨特(Gazit)看到,12课时的概率或频率的教学对学生的概念和直觉上的作用。在将实验组和控制组作比较时,他们发现不但增强了概率的概念,而且在提高概率直觉方面也获得一些混合的效果。在皮亚杰的教学实验中,甚至出现了一个产生相反的效果的例子,但由于这项研究没能评价学生在教学前的概念和直觉,于是这个相反的效果不能说明什么。很清楚,菲施拜因相信教学能提高学生的概率直觉意识。

为了考查随机教学对于未经过随机训练的大学生的应用直觉

推断能力的影响,我在 12 个星期中增加了教学实验。学生的概率知识和对直觉推断方法的使用情况都在教学前后用书面问卷和录音谈话的方式作了评价。虽然选择性的回答方式是宽松的,并鼓励学生写出或用语言表达所作回答的理由,但是,这些工作类似于卡恩曼和特维尔斯基的工作。两个控制班和两个实验班之间在经过教学的作用之后,发生了显著的差异,在实验组中对于直观推断的依赖减少了许多。

回顾这项研究,有些事情对我来说是很明确的。首先,实验课程的强度是非常大的。一个星期五天,每天 1 小时的学习。学生参加各种实验和模拟,我观察和记录他们概念的变化:有时,当你投掷 6 枚硬币时,他们确实推测出有 64 种结果,有时,他们投平头钉,并推测出不是所有的投掷结果都具有相同的概率等等。学生保留他们每天实验的日记和作业,并对自己的感觉和学到的东西作评论,作为整个班级,我们全部沉浸在积极的教学活动之中。

第二,虽然从整个班级的角度看,我们在克服错误的概率统计概念方面获得了较大的成功,但还是有些学生甚至在很强的教学实验之后还不改变他们在这些评价中的回答和信念。要用一个正确的概念来代替一个错误概念,用第二直觉来代替第一直觉,用一个数学模型来代替直观评判是非常困难的,信念和概念的改变是缓慢的。

第三,我们把许多克服错误概念的成功归因于积极的教学模式。学生首先对实验的结果作出猜测,使自己进入所做的工作。他们是这么解决问题的:先提出一个猜测,并用语言加以表达;其次执行先前构造的课题,收集和组织数据;接着学生们单独地根据数据回答问题。在这之后,我们把他们的实验结果与他们最初的猜测加以比较,错误的概念显然与实验结果相违背的;最后,我们建立一个理论化的概率模型,它能解释学生所收集的实验数据。学生比较三组信息:他们的最初猜测、实验的结果和通过模型预测

的结果。在整个过程中,学生始终处在能调整自己的错误概念和实验观测之间的距离的地位上。

德尔马斯和巴特(Bart)也认为,猜测和比较结果的能力有助于学生纠正错误概念。但他们推测,除非强制要求学生记录他们的预测,并把这些预测与实际的实验结果比较,否则,他们一般会一次次地为证明他的牢固的错误概念是有效的而寻求证据。德尔莫斯和巴特在一个只有统计初步知识的班级设计了一次估算实验,要求学生为投掷硬币(每次一枚)列出他们的预测,并把预测的结果与随机产生的结果对应地列在一起,进行比较、分析。在对实验前后期的比较中,可看出对随机结果作预测的学生能规范地应用频率概念,其成绩呈上升趋势。同时在控制班的学生中,对于频率理解的成绩呈落后趋势。德尔莫斯和巴特总结说,强制学生直接把它们预测与实际的结果进行比较,有助于他们运用正在教的频率模型。另一方面,他们的结果也提示我们,如果不给学生一个认识错误概念的机会,那么,他们在教学以后比教学以前则会更信赖直觉评判法。

概率统计的研究者有这样一种说法,纯粹的随机教学对于克服错误概念和已有的第一直觉没什么作用。但是德尔莫斯和巴特强调,传统的教学不仅是不够的,而且甚至会对学生理解随机带来相反的影响。许多此类研究者都认同他们的观点。但是,他们研究所涉及的问题向数学和统计教育者提出了一个大挑战。随机教学的主要目标之一应该是向学生提供例子,以说明统计是如何被误用或滥用的,概率的错误概念是如何导致错误的决定。斯拉格(Schrage)提供了一些现实生活中的错误例子,它们是由法官或医生借助于随机作出的决定,如在某次法庭上,由于错误的概率概念,一个人被错判有谋杀罪;又如在德国医学院的入学考试中,斯拉格也发现了一个含概率内容有缺陷的考题。在这些实际例子中,涉及一些错误的概念,包括无视基本比例数据。斯拉格成功地

使法庭注意到错误的概率计算,使那个人得以免罪释放。但是编制入学试题的由 30 位医学专家组成的小组不肯面对自己的错误,仍旧无视斯拉格提出的问题。他建议在概率统计课中要包括针对现实生活中的随机错误的内容,学生最初也会像那些医学专家那样推理,只有坚持不懈地让他们看到在推理和社会生活中的这些错误,才能帮助他们注意到在随机问题中规范思考的重要性。

科诺尔德、加菲尔德和德尔莫斯都提供了进一步的证据说明要改变学生的随机概念是困难的。科诺尔德的许多研究都提到,要向人们清楚地解释一个随机概念,还不如让他们直接面对一个错误概念。例如在采取假设结果的方法的研究中,他调查了人们是如何解释“今天有 40% 的可能会下雨”这句话的含意的,在研究中他提出了插入计算机模拟,用以影响人们错误的想法。他发现,一些学生通过教学之后改变了他们的解释,但同时还有一些学生坚持不规范的解释。在描述结果时,加菲尔德和德尔莫斯使用了一个他们自己创造的叫做“投硬币”的计算机程序,用以测量借助于计算机的实验对只有初级统计知识的大学生的错误概率概念的影响。用计算机软件处理样本的方差、样本的大小对方差的影响、独立性与随机性等方面的错误。他们得到的结果是含糊不清的:有些学生在使用“投硬币”软件后显示出在随机思想方面的积极变化,但大量的学生在实验之后仍坚持原来的关于样本大小与样本方差的错误概念。这些结论与韦尔等的想法是一致的,韦尔发现,许多学生在经过很多次计算机模拟的抽样分布实验之后,仍然不理解样本大小对样本方差的影响。所有这些信息都表明,在有些学生中,随机错误概念确实是难以克服和改变的。

在一个充满着学生初始的随机错误的情景中,教学承担着怎样的作用呢?科诺尔德向我们提出一些非常重要的见解:

“早在正式引入随机概念之前,学生已经碰到过无数的含有不确定因素的情况,也学会了使用如可能性、随机、独立性、运气、机

会、公平和不可能等词汇。在日常生活中,他们对这些都有一般的认识,也允许他们用这些其他人能理解的词汇组成的句子表达意见。但是学生没法把这些词汇与课堂实验的内容进行综合和理解,从而形成一个知识网……,我假设学生已经有了概率直觉,但是他们并不能在实验中检验这些直觉的正确与否。教师的成功与否取决于如何处理这些概率直觉和教师想要学生掌握的知识之间的关系……。在教学之前和教学期间,学生在概率问题上应如何思考才能易于师生间的交流。”

科诺尔德为正视和克服随机误解,进一步提出了一些由物理教师操作的教学措施,他们也必须纠正学生早期的随机错误,物理教师已经设计了专门针对错误概念的教学,科诺尔德列举了物理教育中的一些教学措施如下:

鼓励学生去

- (1) 检查他们的信念是否与其他人的信念相同;
- (2) 检查他们的信念是否与自己其他相关事情的信念相一致;
- (3) 检查他们的信念是否受到实际证据的支持。

我使用的教学模型直接涉及(1)和(3),在学生的日记中,也存在大量证据说明,对学生的调查与(2)有内在的一致性。我同意科诺尔德的看法,当我们要开始用规范的概率统计的第二直觉替代学生原始的直觉时,这三条建议可包含在所要采取的必要的教学步骤之中。遗憾的是,这些步骤并不充分,因为有些学生通过这些教学步骤之后,仍固执地坚持错误概念。

有点意外的是,科诺尔德与一般的心理学家不同,他们的研究小组没有特别留意于教学对随机误解的影响,例如卡恩曼和特维爾斯基在大多数的研究中没有特地插入教学对学生思考过程的影响。但他们在对学生关于“交”的错误概念作研究时,为了提高学生回答的正确率,特地把问题提得更加明确。如在“心脏病问题”

中,他们先让学生估计 55 岁及以上的人的频率,这是为了避免学生在解决问题时,把“55 岁以上且患心脏病”看作比“患心脏病”更有可能。在他们的教学实验中,提示是作为一种教学的手段,或者至少作为一种值得注意的探索。他们还发现,当研究课题中的概率信息用频率形式给出而不是用百分比形式给出时,“交”的错误会相对少些。在卡恩曼和特维尔斯基的研究中,课题本身的因素和环境的影响都是显著的,就像韦尔等的研究中那样。课题的表达和措词,测试对象对课题的理解以及他们在以前所暴露过的问题,都会在回答这个问题时产生较重要的影响。虽然这些影响在数学教育的其他领域也受到相当的重视,但在随机研究中,尚未得到足够的重视。一些例外是肖尔茨和本特鲁普在“出租马车问题”上的工作、韦尔对大数定律的研究和本茨和博罗凡尼克的实验研究。

在心理学家中,尼斯比特(Nisbett)和他的同事们为学生的统计训练效果也许做了大量的工作。他们发现受过一些训练的学生对于频率和统计的回答质量有显著改善。例如,给出一个故事是关于一位妇女对饮食店食品的质量感到失望,因为从她第一次来过这家饮食店至今,觉得这家饮食店正在走下坡路。受过较多统计训练的学生比其他统计不成熟的学生更倾向于把问题归结为平均状态,然后据此作回答(开始学统计的学生有 20% 的人这样做,学过 1 门~3 门统计课程的学生有 40% 的人这样做,在要攻读博士学位的人中有 80% 的这样做)。尼斯比特也对日常生活中的统计推理过程感兴趣,他描述了对大数定律进行专门训练的效果和在训练后怎样把大数定律运用到各种各样的情景中去。他最感兴趣的是能否把一般的推理技巧运用到更多的领域,包括大数定律的训练。我们已经注意到,其他研究者反对尼斯比特的观点。卡恩曼、特维尔斯基和韦尔等有相反的证据表明,即使在训练之后,大数定律和抽样分布中的错误概念还是存在。我的一般感觉是,

尼斯比特的课题不会引出错误概念,因为他的课题相对比较简单和直接,没有用到数值估计,以及任何与直觉推断有关的定量分析。

由梅瓦雷、贝斯-马罗姆(Beyth - Marom)和德克尔(Dekel)进行的另一些研究也涉及教学对随机概念的影响。梅瓦雷成功地减少了在平均数和方差方面计算程序的滥用,例如平均数的平均数。贝斯-马罗姆和德克尔设置了一门完整的课程,主要是为了增强在不确定情境下的思维。在这门课程中,重点放在概率的思想,概率的讨论和对概率故事的反作用上,而不是放在数理统计的教学之上,这门课程看起来几乎完整地引用了认知心理学的研究成果,它几乎没有说到过数学和统计学的教学观点。这也说明数学教育工作者和心理学家都在独立地工作,试图改进人们的随机观念。贝斯-马罗姆和德克尔注意到正在教新课程的第一线教师“他们自己对课程主题的理解有困难”。罗宾(Rubin)和罗斯伯里(Roseberry)提出,当我们想通过教学手段改变学生的随机概念时,首先要处理教师的错误的随机概念。

罗宾等介绍了在波士顿的专门从事“非确定性推理”的BBN实验室编制的,以计算机为基础的,富有创新精神的统计课程的实施情况,介绍了几个具有人机对话功能的软件包——弹性直方图、多变线和样本检验器等,并由三位教师作现场演示。他发现,教师的统计储备知识尚不能满足除简单公式之外的推理,软件包可能会用到教师并不熟悉的概念。其中有一个教师不懂得,若将在端点处的数据改一下,这组数的中位数可以不变,反而抱怨软件必定有问题;在另一例中,教师和学生都完全误解了实验中“平均化”的概念,又被实验中的随机性困扰。贝斯-马罗姆、德克尔和罗宾、罗斯伯里都强调,在职师资的培训问题是课程改革和克服学生随机错误的关键,若要教师能够帮助学生克服错误的随机概念,首先要他们克服自己错误的随机概念。

## 在计算机环境中的研究

到目前为止,只有很少的一些研究是关于使用计算机或计算机模拟方法对学生的概率统计的学习和理解的影响,其中就有我们已经讨论过的加菲尔德、德尔莫斯和韦尔的研究。脱离计算机的研究只是一种暂时的情况,因为在这个领域已经有很多的活动已经展开;如剑桥和麻省的技术教育研究中心(TERC)有一个规划,要专门设计一个软件环境,使学生在这个环境创造自己的数据模型。TERC 规划以数据模型化作为操作的前提,如构造、处理和解释数据,包括在真正进行统计之前所需要的技巧和概念。TERC 软件环境,即 Tablemaker,注意对数据的类型和属性作解释,学生以此形成他们自己的数据结构。以前我们教统计概念时,常会带一些事先准备好的数据进教室,因此构造数据的步骤在教统计时常会被忽视,而在 TERC 规划中,学生可以创造自己的数据。在另一个课程规划中,一个概率模拟和一个统计分析的软件成为该规划的一部分,与这个规划相配套的研究将调查在计算机辅助的环境下学生在概率统计方面的错误概念。因此,在不远的将来,会有更多的运用计算机环境的随机研究课题。

研究随机的人们几乎不约而同地认为计算机模拟试验、计算机表格程序、用计算机进行探索和数据分析(EDA)是未来随机研究的方向。在 ICOTS I 和 ICOTS II 会议上,有许多演示强调计算机对随机教学的好处。比勒尔(Biehler)和温克尔曼(Winkelmann)的文章都强调计算机有多种形式表示随机信息的能力,特别是它的图象能力。EDA 中的方法,如树形图、框图、散点图和数据拟合、数据分析都能由计算机直观、生动、快速地实现。计算机软件既能分析数据,又能表达结果的双重功能是它最好的特征之一。根据作者的调查,现场测试显示,计算机的直观特征和人机交互特征,使得计算机表示的资料更有助于学生的学习。但是,目前我们



还没有更高级的信息处理工具,也没有关于学生在此过程中如何引入概率统计概念的系统研究。

在一次对随机教学的计算机使用情况的调查中,比勒尔等认为计算机有助于克服两大困难,即可以弥补随机试验的缺乏和所谓的“概念工具缺陷”。对第一个方面,比勒尔认为计算机可以在同样的时间内提供更多的数据表现试验。至于概念工具缺陷,比勒尔和他的同事们感到,在学校教学中,许多问题都传统地依赖于学生的计算技巧,而教师想回避这些。计算机为我们提供了不同的问题解决策略的模拟试验,从而使我们能研究比以前更为现实的情况。在比勒尔的所有文章中,我们可以感受到计算机模拟和探索性数据分析相结合的有利之处。比勒尔相信,EDA 能够弥补完全确定情形和完全随机情形之间的空白,在使用 EDA 时,不必明确哪些数据是严格随机的,因此是连结确定和随机两个极端的一条纽带。

在概率统计方面,若要在教学上使用计算机还需一段较长的时间,但要提倡在研究中使用计算机却不需要很长的时间,好像已经有一些很不错的在课堂上使用计算机的课程资料,但还没有出版什么辅助研究和评估工作方面有价值的材料。这些材料都是很新的,有的研究和评价工作甚至还在进行之中。比勒尔等还提到一些关于概率方面使用计算机的试验研究。从这些研究中可看出,美国人对比较分析的方法和模拟的方法有特别的嗜好,其中之一是阿金森(Atkinson)的研究。他有足够的证据表明,在概率课程中,模拟的方法比分析的方法优越。但给人的印象是比勒尔不相信这种“美国传统”的比较研究是很有益的,他似乎鼓励用偏重于思考的,或者说更为理性化的研究传统。结构主义的方法和认知科学方面的课题在数学教学中是相当新的,比勒尔的许多研究把较早出现的美国传统概括进认识论的观点,我同意他的意见,我们正置身于一个计算机时代,因此要研究如何改变学生的随机概念

要考虑到计算机的影响。另一方面,在我们的研究计划中对计算机辅助随机教学的效果,对含有计算机的新课程资料的评价,对不同教学方法的效果的测试都是重要的,对于群体的教学也是如此,因为在现实中,教师总是对群体进行教学。

在最后这一段,让我留意一下在随机教育中,计算机应用的两个问题。第一,在计算机环境中,教师扮演了什么角色?虽说这个问题不仅仅在随机教学中才有,但是我感到以前很少关注在概率统计教学中引入计算机方法之后教师的角色问题。毕竟教师是教学系统中的输出部分,在计算机时代更是如此,教师与其说在台上演,还不如在边上指导。我们可以在研究“定量分析”的讲习班上,给教师一些准备好了的计算机资料,我特别注意刚参与这类试验的教师和最后的教学效果。我们争取在较长期的教学实验中,让教师和研究者反复地进行教学、记录和交流,督促教师用较多的精力让孩子学会怎样学习和怎样思考。

第二,我提醒那些把计算机应用于随机教学的研究者,不要完全放弃其他的随机教学方式。在过去的十年中,我常常把计算机应用于随机教学,我虽然还没有正式的证据,但我觉得,在学生真正理解和认可计算机模拟之前,让他们先做一些真实的、具有物理随机特性的实验,如掷骰子、转圆盘等,让他们产生和组织自己的数据,这个过程似乎是必不可少的。我发现,当考虑的问题会导出错误概念时(如 Monty 难题),为了让学生相信结果,必须把学生的真实具体的实验过程与计算机模拟同步地执行。对我们来说,重要的是在教学中还要继续发展真实实验和计算机模拟之间的联系,进一步调查它们之间转化的效果。

## 随机概念发展的一种简单模型

在概率统计中,只有很少的概念发展有形式的模型,事实上,

我感到随机思维唯一的详细模型就是肖尔茨所述的随机思维的构造过程模型(在下一节,我们再回过头来讨论肖尔茨的随机思维的信息过程模型)。在随机研究中,构造模型的困难在于,如果一个模型想要概括数学教师和心理学家所作的所有研究结果,那么这个模型可能会过于复杂,以致于对研究者和教师都没有实际的使用价值;另一方面,如果仅针对随机教学中的一小点就构造一个模型,那么就可能使模型过分地简单,分散了我们要强调的重点。这学科的历史似乎是从十分简单的开始,然后再加以调整,于是我想先建立一些简单模型,讨论在这些简单模型下会发生的错误,同时希望这一模型对于研究者和教师理解我们在随机研究中所发生的一切都有一定的好处。

研究者发现,当要求人们去估计事物的可能性、预测结果或在不确定条件下作判断决策时,会产生不同的反应(或对这些反应所作的推理)。学生所显示出的不同类型的推理表现为不同水平层次的概念理解,有的人表现出对随机事件总的缺乏理解;而有的人能接受随机事件的各种数学表述,并能对它们作比较和对照。人们的随机概念一部分凭他们自己的经验(初始直觉)产生,同时也受到教学(第二直觉)的影响,这是随机概念发展的一个重要特征,抓住这个特征能有助于描写研究结果和规划教学。但我并没有把握把这个发展模型讲透。

### 随机概念的类型

1. 非统计的类型:根据信念、确定的模型、因果律或单一结果等作回答,不注意,也不知道随机事件和机会。

2. 朴素统计的类型:运用直觉判断,如典型性、有效性、稳定性和平稳性等。多数是以实验为基础的非标准的回答,对随机事件和机会有一定的理解。

3. 自然统计的类型:能把标准概率模型用于简单问题;能识

别直觉信息与数学模型之间的差异;经过一定的概率统计训练;开始理解机会的多种数学表述,如古典型和频率型等。

4. 实用统计的类型:对机会的数学模型有更深入的理解(如古典型、频率型、贝叶斯型等);能对不同的概率模型作比较和对照;在需要时,有选择和应用某个概率模型的能力;在随机方面,接受过相当完整的训练;对于不同的概率模型,知道它们各自的假设和限定。

有些研究结果,尤其是由诊断性研究方法所显示人们的思想过程,表明有些人并没有随机概念,不认识某个结果是重复试验中许多可能结果之一。科诺尔德的研究中让被测者去猜测下一次试验的结果,而不在许多次试验的基础上去估计某一特定结果发生的频率。在“出租马车问题”的研究中显示出偏重证人且忽视基本比例信息。在理科和数学教学中,具有算法表达式的确定性模型占有明显的优势地位,因此会导致他们在不确定情形下作决策也试图应用因果关系,我们把这些作为“非统计类型”的概念。

其他的研究,特别是对于那些没有受过概率统计教学的大学生的研究也展示了系统的、非规范的、建立在实验基础上的随机概念会采用直观推断,如典型性、有效性、平稳性等都是朴素统计阶段的概率统计概念的特征。这些直觉判断通常是由类推的方法引起的,而这些类推方法在其他场合往往是有用的。这种直觉推断有点像菲施拜因提到过的直觉。不过它既不是纯粹的“初始直觉”,也不是纯粹的“第二直觉”。大学生与菲施拜因研究过的小孩不同,他们已有较为丰富的认知经历,所以除了教学之外,他们的经历已经对他们的初始直觉产生影响和扭曲。我们发现,大学生具有“非统计”的随机概念和“朴素统计”的随机概念。但我们实在不知道在什么时候或者为什么这些直觉推断方法开始运用在学生的随机推理中。

厄斯比特等认为,如果样本空间和抽样过程是非常清楚的,并

且随机事件发生的可能性的法则也是清楚的(即因果型问题),那么人们就确实能够掌握标准随机模型的应用。也就是说,当事件是简单时,人们更喜欢用概率统计的原理,而不是随机的其他解释。然而,在进行判断和决策时,许多问题决不是简单的。它们所涉及的情景中包含着的概率法则不是很明显的,样本空间也不是显然的。研究证明,能教导人们懂得如何把具有不确定性的复杂问题转化为数学问题,并解决这个不确定情景下的问题。也就是说,处在自然统计阶段的学生在教育的作用下,他们的随机概念正在改变,他们开始注意信念程度之间的差异,注意样本空间的数学模型,他们开始具备在较为广泛的随机情境中应用标准模型的能力,但当他们面对着非常见类型的随机问题时,又会倒退到常用的因果推理方法和直观的解释。他们的标准随机概念正在形成,但还不牢固。

在实用统计阶段的一些能力,许多学生、甚至许多教师都不能达到。在这个阶段,人们意识到存在各种不同的不确定模型,用来表达随机实验。他们能对各种模型作比较和对照,如贝叶斯模型与频率模型,能为各种模型计算概率,最重要的,他们能修改和补充这些模型,使它们适合不常见的情形,并且还意识到各种模型的应用程度和条件限制。

我在这里归纳的几种概念类型之间并不一定是线性的,也不是相互不相容的。我并不认为一个人要成为“实用统计者”必须先成为“朴素统计者”。事实上,一个人可能有多种类型的随机概念起作用,例如心理学家发现,生理学方面的研究人员在估计可能性时,在某种情境下是朴素统计类的,但在另一种情境下,却是实用统计类的,即研究项目的性质会对我们所用概念的类型产生影响。

概率统计的初始课程通常是从非统计的或朴素统计这两类之一开始,而教学的整个核心部分是发生在实用统计范围,因此我们既要面对学生顽固的确定论的思想方法,又要面对他们已有的朴

素的统计直觉。在这个现状下开始我们的教学,认清这一点是很重要的。我们要寻求机会,让学生觉得他们已有的概念中存在着某种不协调,以便创造机会用数学模型去取代原有的概念,在这方面,教师的作用很重要。我坚信如果没有训练有素的、能有足够能力认识和辨别各种随机概念的教师作悉心的指导,那么对学生来说,统计的后两类认知阶段是不会发生的。如果无此保证,那么就会像上述研究所显示的那样,学生的随机初始概念是十分顽固的。

## 随机研究综述:当前和未来

最近,在概率统计的教学方面有一些批评的观点和评论,本茨、博罗凡尼克、肖尔茨、斯坦伯林、加菲尔德、阿尔格伦(Ahlgren)、霍金斯(Hawkins)、卡帕迪阿(Kapadia)在随机研究方面都发表了各自的看法,提出在今后一阶段内,对随机研究的一系列希望。

### 关于过去的研究

本茨和博罗凡尼克对其他研究者在调查学生的随机概念时所用的某些课题作了详细的分析。他们对研究者给予了极大的方便,提醒我们,被测试者可能会有多种解释,建议研究时应该注意到这些不同的解释。他们强调某些研究课题的复杂性,指出在问题的标准模型中,教师和研究者常常忽视这一点。本茨和博罗凡尼克也为我们提供了一个极好的讨论,即如何改变措词,就会产生不同的结果。

另一方面,本茨和博罗凡尼克在评论其他研究者的工作时,所选的例子都是从他们研究内容中提出的,而不用研究者原来的目的和方法。对某些特殊问题及与此相关的问题的解释,与以本茨、博罗凡尼克的观点所作的猜测完全不同。然而,通过学生对个别例子的反应,你不能获得他们对随机概念的一个完整描述。相反

地,为了获得学生随机思维过程的可靠信息,必须研究他们对许多相关问题的反应。如果一个研究者的目标是在教学之前给学生展现未经装饰的、朴素的、直观的概率统计问题,那么要他们想象出一套方法是困难的,因为对学生来说,有些方面的问题尚未表现出来,因此也不能据此来解释他们的反应。本茨和博罗凡尼克提议用其他方法替代实验过程调查,但并不清楚什么方法。人们认为从实验方法中获得的反应也许并不体现学生内层的思想过程,因为那些语言容易使人产生误解,他们还不具备足够的概率知识理解研究者提出的数据的另一种解释。本茨和博罗凡尼克认为,从实际问题的经验主义研究中不可能获得学生随机思想状况的直接证据,这是对经验主义研究的严重的误解。目前,最需要考虑的也许不是“在随机方面,我们应该作经验主义的研究吗?”而是“什么研究问题是我们最感兴趣的?怎样的研究方法最有助于这些问题的研究?”

肖尔茨对随机的心理学研究是卓有成效的。他的评论是较为全面的,从较早的贝努里尝试性学习实验的行为主义研究,皮亚杰和菲施拜因的发展模型研究,直到许多其他随机思想的近代认知模型研究。他把保守的贝叶斯模型与卡思曼、特维尔斯基的直觉模型作比较,还与信息过程模型作比较。肖尔茨把这些研究作为范例刻划各种随机理论的特性,这些理论在随机心理学关于随机的研究历史中都在某个时期占重要地位。但我们发现,其中的每一种理论作为解释所有反应的证据都是不充分的。肖尔茨指出,当前在决策中占重要地位的理论——直觉方法也是不充分的。

按肖尔茨的说法,在“决策”领域中的直觉是个“含糊不清的定义,只是运用认知心理学对心理特征作了一点说明。”另外在直觉法的范例中,研究者一般不涉及任何关于“怎样领会情境?概念的含义是什么?哪种工具是有效的?”之类问题。肖尔茨从数学教育者的角度提出这些问题,因为数学教育者对被测试者的随机知识

背景,以及他们是如何解释问题的情况较感兴趣;心理学家会创造人为的意境,体现现实生活,他们看来对“快速的直觉反应”感兴趣,而这是肖尔茨所舍去的。这类研究会受到数学教育者的干涉,他们想使人们在问题情境中进行思维和反思,例如,由于他们对基本比例错误所作的研究,特别是“出租马车问题”中被测者的解释中,本茨和博罗凡尼克发现了许多反应策略,他们发现背景知识和课题措词的变化都会影响直觉推断的使用。肖尔茨认为“出租马车问题”中基本比例错误的根源不在直觉推断,而在分析推理上。

肖尔茨提示我们,不应忽视课题的内容及被测试者的知识背景。当我们着手进行课题研究时,让被测试者熟悉我们今天正在玩的认知游戏是重要的。我们是否想要掌握某种瞬时的感觉?我们是否想要分析对方的推理?我们是否想要让对方试试应用他们可能已经知道的标准模型?我们要向对方提问些什么?希望对方使用些什么?这些都需详细澄清的。

肖尔茨推荐了一个“结构——处理——理论”模型(简称 SPT 模型),用它来替换原来的分析随机思想的简单直觉推断模型。为了获得足够的被试者的信息,这个模型要求对研究课题作细致的管理和调查分析。它受到认知心理学的影响,采用的是理论系统的形式,而不是一般的计算机模拟(如其他的信息处理模型)。这个模型包含了大多数信息处理模型中的基本要素:信息导入系统、工作内存、长期信息库、中心处理系统和输出系统。然而,在肖尔茨模型的长期信息库中有四个独立的部分:基础知识、直觉的结构、目标系统和评价系统。肖尔茨在指出直觉推断法的局限性的同时,仍然将直觉推断法作为在不确定情境下决策过程的一个可行部分。肖尔茨模型真正的作用是,它可以产生知识基础与直觉应用之间的相互影响。

“我认为应该为随机研究的信息处理过程和结构设计一个框架,为经典



的直觉推断法的研究提供一个基础,从而进一步为其他直观判断法的不同状况提出概念化的解释。”

肖尔茨还阐述了应该把直觉推断的有效性和典型性放在数据处理的初始阶段,不仅要有直觉推断本身的结构,还应包含评价的结构。肖尔茨模型的许多详细的、具体的例子在这一章不再讨论,这个模型为详细地理解各个具体的课题提供了保证,而其他的简单的直觉模型是做不到这点的。另一方面,直觉模型适用于那些与总体的一般趋势相附合的情境。我们能否把某个测试对象用直观推断法时的反应推广到其他场合?他们是否会意识到这种推广?这种意识能否用语言表达出来?这些问题本身可能并不重要,但重要的是要对他们的直觉推断作调查分析,探究其中的思维过程。

在讨论概率的理论模型所带来的教学困难时,斯坦伯林指出,用事先准备好的、经过教师证明的概率统计课程资料进行教学是要失败的,原因是因为在这种模式的教学,概率理论是以一种算法公式的方式给出的,它应付不了各种各样的随机问题。因此由实验产生的相对频率方法可能会直接与以集合论为基础的分析相对比率的方法相矛盾。斯坦伯林建议,教学应该从“蕴含着概念的富有意义的情境”开始,因为任何一种对概率逻辑的数学教学都是螺旋式的。斯坦伯林还关注概率概念的认识论根源。按他的看法,为了引入概率,人们必须先具有随机性的概念,但为了讨论随机性,人们就必须先具有概率的概念,因此他认为,在进行随机教学的时候,我们正被困在概念的漩涡之中。

在我看来,这类概念的漩涡不仅仅在概率统计中有,其他领域中也有,只不过在数学历史上,随机的教学更近代些罢了。例如几何教学,为了理解对象的性质,人们必须先有一个空间的概念。例如三角形,它有内部,由线段组成,所以为了定义所谓的“三角形”,

我们必须先知道点、线、面等基本知识,知道线段的定义和连结的关系,为了把三角形的必要性质抽象成数学化的定义,我们先必须有一种关于三角形的较完整的概念,然后再有数学化的逻辑公理和定义。在几何教学中,我们力图发展理论数学形式与空间直观的联系。但我们还必须看到我们的直觉与理论数学形式是如何处于矛盾的状态。例如双曲几何是逻辑一致的理论系统,但它缺乏理论与直观的一致性。因此在随机教学中,我们必须发展概率直觉与随机的数学理论之间的联系,但又必须指出直觉与理论不完全是—致的。

从心理学和教学法方面考虑儿童的概率概念,霍金斯和卡帕迪阿至少谈到三种不同的方法实施概率的教学:先验方法、频率方法和主观方法。他们拒绝前两种方法,而赞成主观方法。按他们的观点如果简单地告诉儿童,在某个特定的情景中,每个结果都是等可能发生的,那么在解决了此类问题之后,就不能平稳地过渡到具有不一致分布的各种情景,因此他们认为先验的方法是不合适的。而频率的方法在根本上必须包含一些极限的思想,而实际生活中的许多情形却不能做重复试验的,于是他们也拒绝这种方法。他们赞同用主观的方法教概率,原因是它依赖于“雅致的哲学背景”。

我的意见与霍金斯和卡帕迪阿很不一样,虽然学生从哪里开始学的问题是重要的,但是我认为如果只把概率教学放在主观概率的方法上,结果是可悲的。因为作为一个数学教育者,我们的任务是使学生能在一种数学化的概率模型下工作。霍金斯和卡帕迪阿认为主观方法具有更多的直觉,并且“所有的孩子都喜欢对无法重复的事件的概率作出估计”,如果我们从主观方法出发,并在这里停留得太久,似乎是支持了科诺尔德的“结果方法”。我们需要提出概率的另一些解释替代学生已经有的主观解释。最近以来,我们有能力在计算机上模拟大量的实验,并在实验中改变参数后

可快速地检测效果,因此频率方法得到广泛的欢迎。在计算机上模拟条件概率问题,并进行大量实验都是可行的。我们还可以不借助贝叶斯理论对概率作修正(如 Monty 难题的讨论)。

对我们来说,发展概率思想且使学生都具备这种思想,使他们能在随机情境中进行思维和交流,这一点是很重要的。我们发展概率的数学模型,使得学生能用一种共同的语言描述他们所处的环境和事件。如果我们把太多的时间单纯地花在主观方法上,只会使得学生在教学之前就存在的概念上的裂缝进一步扩大,这显然不是霍金斯和卡帕迪阿的初衷。

霍金斯和卡帕迪阿在结论中叙述道:“不同年龄的儿童有不同的概率概念,且它们之间常常是相互矛盾的。”按照霍金斯和卡帕迪阿的想法,现在要回答的主要问题是:(a)各种年龄阶段的儿童具有怎样的概率概念?(b)这些概念是怎样变化的?(c)在随机方面,有没有最好的教学技术和学习技术?我同意这些问题是随机研究中的基本问题。与霍金斯和卡帕迪阿不同的是,我不相信存在一种完全正确的教随机的方法等待着我们去发现,相反地,我认为存在着许多把学生引入概率概念的启动途径。例如,用相对频率模型处理离散的数据;用相对比例模型,特别在几何概率模型中,处理连续型的数据。如果我们对概率统计采用多种模型教学,那么经典的等可能方法、相对频率方法和相对比例方法之间的冲突就不会成为教师和学生的障碍,反而能让教师和学生接受多种概率解释,去研究斯坦伯林的富有意义的情境。

### 未未的随机研究一览表

任何做过概率统计研究的人都知道,在这方面存在着相当多的需要研究的领域,很难知道从哪里开始较好。作为一个数学教育者,我只选择了一些我认为是重要的一些课题,这是我计划在下一个十年的研究任务。

**评价工具的发展** 我们需要发展一些标准的可靠的工具去评价学生的概率统计概念。当前有大量有效的随机问题供研究者选择或改编,这些问题由心理学家和数学教育者编制,在书面答卷、诊断性谈话或者两者兼有的过程中提出。我们知道,这些问题的内容、框架和措词都会影响我们所得到的学生的反应。因此,我们需要发展一些评价工具,它们既要集中和接纳以前研究的意见,也要能被更多的教师和研究者使用和分享,需要笔试工具和编制好的、可反复使用的面谈提纲,用来调查各年级学生在各种背景下的随机概念。由于我们要处理的年级不同,所用的问题也可以多种多样,谈话艺术也可以有所不同。对于这一切,我们需要把它发展得更为连贯一致。

**中学生的随机概念中的错误是什么** 除了格里安对青少年的随机概念作了大量的调查之外,几乎没有什么关于中学生是如何看待机会、随机事件和在不确定情形下作决策的有效信息。甚至格里安的初始研究也不能清晰地探索到学生对随机的详细理解。我们希望知道,在应用直觉推断时,中学生也会发生类似于大学生所犯的错误吗?他们会借助非统计方法和确定性方法解释随机现象吗?他们的随机概念会在教学的作用下改变吗?在这以前,我们的大多数调查都是针对小学生或大学生的,而对中学生的随机概念的调查研究是个缺口。在有些国家,如美国,产生这个缺口的原因之一至少是由于在中学阶段,缺少概率统计的教学,但随着新的 NCTM 标准的实施,中学阶段的概率统计教育会得到进一步加强。在这个层次上的研究结果是至关重要的,有助于教师和课程建设者得到有用的信息。

**缺乏结合文化背景的研究** 大多数关于随机决策的心理学研

究只在极少数的国家中进行,主要有美国、以色列、英国和德国。同样地,关于学生的随机概念的教学研究也只在少数西方国家中进行。文化对概率统计概念的影响是什么?直觉推断和某些错误的随机概念只是西方文化的产物吗?这些现象会在许多文化背景下出现吗?不同的文化背景下,随机错误概念和在不确定情境中的概率估计有何差异等问题都是值得研究的。艾森哈特从一个教育人类学家的角度讨论了在数学教育领域进行研究的优势,这个人类数学的领域也必须由随机研究者来加以调查,我们既需要像格里安那样,跨越几种文化背景的大规模研究,也需要在制定决策和作概率估计时使用详细面谈的、结合文化背景的小规模的比较研究。

**教师具有怎样的概率统计概念** 雄心勃勃的 NTCM 标准实施得成功与否,最终还是依赖于教师。中小学教师所具有的随机概念及其对随机的看法如何?作为研究者,为修正他们对随机的概念和态度,我们能做些什么?我们要收集教师在职前和在职水准的有关信息。在实施标准时,教师需要越来越多的概率统计的在职教学经验。在教师职前,我们需要发展一些针对错误的随机概念和信念的课程,使未来的教师能觉察到一些他们将来的学生常会出现的错误概念。我们的研究将向教师提供设计好的随机教学经验。

**需要:检查教学效果的试验** 为了调查两方面的问题:(a)随机知识的缺乏;(b)非规范的直觉、信念和错误概念,我们教师和研究者能干些什么?我认为教师和研究者要成为调查研究的伙伴,即教师成为合作的研究者,研究者成为合作的教师。为了获得一份学生在随机方面的认知和情感发展的清晰的图象,需要进行诊断性教学实验以记录学生在一段较长的时间内关于随机的信念和

概念的变化情况,在教学结束时,利用定量分析方法辨别哪些认知和情感的因素是显著的。经过一年坚持不懈地运用实验和计算机模拟,分析学生对于随机事件发生的可能性的估计的信念是如何发生变化。苏联式的教学实验和长期参与的带有强有力的诊断作用的教学方法,在教学的各个层次上都是必须的,最有决定意义的举措是将教师带进未来的研究项目,因为树立学生随机思想的关键是教师。

**计算机软件对随机教育有什么影响** 我们怎样才能最好地借助于计算机改变学生的随机观念、概念和直觉呢?发展了一些计算机软件后,利用微型计算机的速度和图形实施模拟实验,正如在《不确定情形下推理》项目中“ELASTIC”软件中所看到的那样,可以建立统计概念之间相互作用的关系式,这一点是令人振奋的,计算机为我们提供了全新的学习环境和机会。但是对这些软件包在形成学生的随机概念方面的影响还没有作什么研究和评价。随机课程的发展计划,特别那些发展计算机环境的计划必须一开始就让研究者和教师都参与,就像正在进行的汉考克和科诺尔德的计划那样,在课程实施阶段中,把从研究者和教师那里获得的有价值的信息及时输入计算机,就能容易地改变计算机程序。如果把计算机的应用放在较后的教学步骤,那么对于采纳教学和研究的共同建议,就为时太晚了。

**随机决策的超认知的作用是什么** 随机研究发现,尽管我们在教学上尽了很大的努力,但学生的概率概念是难以改变的(至少在某些学生中是这样)。类似地,问题解决的教学中,启发和策略都不足以提高某些学生的问题解决能力。于是问题解决的研究者开始探索超认知的作用。加诺法罗和莱斯特界定超认知的两个基本方面:认知的学问和认知的规则。认知的学问包括策略和启发

的学问,当然也包括本身的学问,如信念和态度等。认知的规则包括在心理上把自己置于问题的外部而考虑问题解决的程序时的监控和决策技巧。在随机方面,我们也必须开始明确地注意在不确定情况下思维的超认知现象,无论是随机教学还是随机研究。

## 结 论

随机研究的旅程,把我们从随机概念历史的和哲学的根源出发,一直带到当前如何利用计算机软件提高学生的随机的概念和信念的现代研究,看来,随机的未来研究也大有前途。NCTM 标准为中学阶段重视概率统计提供了原动力,也对现职数学教师在随机方面的活动提出了更高的要求 and 需要,同时也更需要得到关于学生在学习随机时是如何进行思考和推理的研究信息。我们已经看到迄今为止的随机研究既来自于认知心理学研究领域,也来自于数学教育领域。将来还会更需要这两方面的联合研究成果。卡菲尔德和阿尔格伦评论了这两方面的研究存在着较大的差异,并建议,心理学家和数学教育家的合作研究将比我们迄今为止所看到的一切孤立研究更能有效地实现我们的研究目标。世界各地的随机研究者所感兴趣的课题很不一样,而使这方面的共同合作研究难以启动。科诺尔德、肖尔茨和本特鲁普是一组心理学家、数学统计教育者合作研究的典范,必须予以提倡。

## 十二、朝着高等数学思维的转变： 函数,极限,无限和论证

David Tall \*

高等数学的思维——正如研究期刊上发表的文章所表明的一——以两个重要组成部分为特征:准确严谨的数学定义(包括公理理论中公理的陈述)和建立在此基础上的定理的逻辑演绎。然而,纸面上的词语只是冰山上的尖尖,那最后得到的“准确严谨的一面”与数学思维的创造性方面有相当程度上的区别。在创造性思维中,轮流扮演角色的是灵感与错误。

在高层次的数学教育中,重要的是注意不仅要按照所需要的严格性引导学生进入职业数学家的完美世界,而且也要提供建立概念的经验基础。通常,在进入到高等院校的更为正规组织和逻辑框架的数学之前,中学里对于数学概念和数学证明过程的引入已通过一个平缓的过程进行。

朝着更为高等的数学思维的转变,包含着一个困难的转变,即从概念可以凭经验直观地建立转变到概念用正规的定义加以阐述,而其性质则是通过逻辑演绎加以构造。在这一思维转变期间(及以后很长的时间内),头脑里将会同时存在着早期的经验及其性质,连同不断增长的演绎的知识。实验性研究已经表明:这会造成大量的各种各样的认知冲突,从而在学习上形成障碍。

---

\* 作者塔尔(David Tall)是英国沃里克大学数学教育教授,《数学回顾(Mathematics Review)》主编。



本章我们将考察一些高等数学概念的概念化的研究结果,其中包括函数、极根与无限的概念和数学论证的过程,特别是要研究中学的高年级到高等院校的转变这一时期。但是首先我们必须暂停一会儿,先去考虑我们自己对数学概念的理解的本质,因为即使是一些职业数学家,在他们的理解中都会含有依赖于个人经验的一些怪癖。

## 头脑中的皱痕

“人的大脑,”安东尼奥·拉瓦兹亚(Antoine Lavoisier),法国大革命时期死于断头台的法国化学家说,“在观察事物时会起皱痕。”我们可以补充道,进化着的社会心灵遭受着同样的痛苦,因为它是靠着一代又一代的灌输而获得领会的。

当我们回顾数学的发展历史时,可以看到一代又一代的人们发展着他们自己在数学思想上的共同认识,它是建立在对重要概念的共同一致之上。毕达哥拉斯之前的希腊人相信所有的数都是有理数,直到毕达哥拉斯定理揭示了2的平方根不是有理数为止。亚里士多德动力学认为一个运动物体的速度与所受的力成正比,直到牛顿定律提出是加速度,而不是速度与力成正比。两千年来,欧几里得几何学一直被认为是演绎逻辑的顶峰,直到19世纪,数学家们才认识到存在着建立在隐性假设之上的定理(诸如,菱形的对角线位于图形内这一事实),它并非是从公理逻辑演绎而得到的。

若以为我们终于掌握了真理,并且这一代已经摆脱了过去的内在冲突与困惑,那将是错误的。相反,我们自己的头脑也具有共同的皱痕。实际上,我们声称在学生中见到的许多皱痕也存在于我们自己的头脑之中,而且一代又一代地以不断变化着的形式流

传了下来。

例如,函数  $y=f(x)$  是单值的这一思想已经成为我们数学文化中的一部分,从而看到学生断定一个圆  $x^2+y^2=1$  可以是一个函数时会感到奇怪。然而“隐函数”这一术语在教科书中不断地被使用来描述这样的一种表达形式。我(一直感到羞愧)发现我发表过的一个名为“隐函数绘图器”的计算机程序,用来描绘  $x^2+y^2=1$  的图形和做其他的许多事。同样我发现我自己同意过一份为英国 16 岁~19 岁之间的学生开设的新课程草稿中关于这个方程所说的话:“严格地讲, $y$  不是  $x$  的函数,因为对应于每一个  $x$  的数值不止存在一个  $y$  的数值。但是我们可以认为这是从  $x$  到  $y$  的‘双值函数’”。学生会怎么想呢?我们中的任何人能否指天发誓,说我们从未陷入过任何诸如此类的胡思乱想之中?让那个从未有过失的人扔第一块石头吧。

## 概念定义和概念表象

什么是好的定义?对哲学家或科学家来说,它是适用于需要被定义的所有事物,而且只适用于这些事物的一种定义;它是满足逻辑规则的一种定义。但是在教育中,好的定义并不就是那样,而是指能够为学生理解的一种定义。(庞加莱(Poincaré))

19 世纪 60 年代时期的“新数学”是一种大胆的尝试,企图找到一种建立在清晰的数学概念的定义之上的途径,并期望以学生能理解的方式表达出来。但是它没能达到它所有的理想目标。问题出在各人对数学概念的思维方法不仅仅建立在定义所用的词语形式上,而也依赖着其他的東西。

在数学活动中,数学概念不仅按照它们的形式定义被加以使用,而且也

通过可因人而异的各种智力图象而被加以使用。这些“个人模式”是由“自发模式”(在数学概念的学习之前预先存在的模式,例如产生于日常经验的模式)修改而成的,而这些自发模式与数学定义会发生抵触。例如,让我们指出,极限的概念往往表示着你不能越过的界限,它或能或不能被靠近。它有时被看作是可以达到的,而有时被看作是不可达到的。

因此,学生在接触形式定义之前的经验,对他们形成那些概念的智力图象有着深刻的影响。在 19 世纪 70 年代后期及 80 年代早期这段时间内,许多作者注意到由正规的数学家构想并用公式表达的概念与学生所理解的概念之间的不匹配。例如,在对以下一些东西的理解上出现了困难,如当割线趋向于切线时的极限过程,无限小数的含义,几何学的概念,函数、极限与连续的概念,微分的含义,数列的收敛,函数的极限,切线,无限级数,无限表达式,无穷大的直觉等等。

为说明个人的理性结构所起的作用,维纳(Vinner)与赫什科维兹(Hershkowitz)引入了“概念表象”与“概念定义”这些术语,并描述如下:

我们将用术语概念表象描述与概念有关联的整个认知结构,它包括所有的智力图形和相关的性质与过程。……当概念表象发展时,它并不需要在任何时候都连贯一致。……我们将把在特殊时间里起作用的概念表象部分称为被唤起的概念表象。在不同的时间里,可能有互相冲突的表象被唤起。只有当互相冲突的方面被同时唤起时,冲突或困惑的实际感觉才会存在。

另一方面,“概念定义是用来特别说明概念的一种词语形式”。思维中的冲突在文献中受到了广泛的考察:

新的知识经常与旧的知识相抵触,有效的学习需要有处理这种抵触的策略。有时互相冲突的那些部分知识能达到和谐一致,有时则必须放弃这一部

分或那一部分,而有时如果两个部分能在不同的智力部门里被安全地保存起来的话,那么这两部分能够“相安无事”。

一般来说,学习一个新的思想并不排除一个较早的思想。在面对一个问题或一个任务时,学生现在就有两种思想,他可能想到新的思想,也可能想到旧的思想。成问题的不是掌握或没有掌握新的知识,而是选择想到哪一种(而这常常是无意识的)。把这两种思想结合起来也是可能的,但常常伴随着引人注目的无意义的结果。

上述状况特别见于向高等数学思维过渡之时,这时头脑里同时有着建立在早先经验之上的概念表象及建立在定义与演绎之上的新思想,两者互相干扰。在用一个句子去定义一个概念,而不是去描述它时,其中的思想起初是十分难以理解的,特别是如果在定义中还存在着未定义过的词语的话。不作某些假设就不可能开始工作,而这些假设是建立在个人的概念表象的基础之上的,它们并不是建立在用公式表达的概念定义之上的。

## 数学基础和认知根源

深而掘之,终之营之,广及于事物之根底。(布朗宁(Robert Browning))

在建设一门课程中,自然地试图从简单的思想开始,然后当学生的经验成长时稳定地过渡到更加复杂的概念。那么比起经历过许多代人而发展起来的定义来,有没有别的东西可以作为更好的基础呢?这里的问题是在于这些定义是艰涩的,而同时又是有活力的;而学生的经验则是建立在明显而特殊的事物基础之上的,其结果就使定义的有活力的特性被学生的特殊的概念表象搞得模糊不清。例如,一个函数可以定义为一个过程,即对一个集合(定义

域)中的每一个元素,在另一个集合(值域)中存在唯一确定的元素与其相对应。在一开始就给出这个定义中所隐藏着的所有可能的范围是不可能的——所涉及的集合可能是数集,或  $n$  维空间的点集,或几何图形,或矩阵,或任何其他类型的事物,包括其他函数,而其对应的方法可能是通过一个公式,或一个迭代或循环的过程,或一个几何变换,或一系列的数值,或任何随意的偶然结合,只要它能满足元素唯一对应的准则就行。

当学生第一次面对数学定义时,他们将几乎不可避免地只遇到一个极其有限的可能范围,这就会使他们的概念表象带上了色彩,导致将来认知上的冲突。

与其一开始就让学生接触那些包含不熟悉的成分的形式定义,不如设法寻找一条建立在概念之上的途径,这种概念具有双重作用,一方面是学生熟悉的,另一方面又为今后的数学发展提供一个基础。这种概念,我称之为认知根源。认知根源不是容易找到的——它们需要实验性研究(找出在当前的发展阶段里什么是适合于学生的)与数学知识(要确定是与数学长期有关联的)的结合。认知根源不同于数学基础;数学基础是学科逻辑发展的一个合适的出发点,而认知根源则更适合于课程的发展。

例如,极限概念是数学基础的一个良好例子——历经几个世纪通过许多伟大的数学家的共同努力推敲而变得精确严谨。但是要把它作为学生思维的一种基础,却显得困难,而且对微积分学习的初级阶段而言,它不会是一个很好的认知根源。另一方面,当给定的图形被越来越放大时,其弯曲程度看上去会减小,这样的思想在直观上是吸引人的,而且这一点能为任何使用曲线绘图器的学生所发现。这一思想能够逐渐发展为其局部类似于  $n$  维空间的微分流形的正规理论。这个事实说明“局部直线化”可以被确认为微积分的一个合适的认知根源。当人们意识到一个(一阶)微分方程的求解其本质上是这样的反问题:找到一个(局部直线化)函数,

使它具有给定的梯度的时候,局部直线化的思想就增强了,应用软件,就能作出一个近似解的图形,其制作就是将具有合适梯度的短小直线段首尾相连起来。

## 函 数 概 念

函数概念是西方文化的主调,它未曾被任何更早的文化那怕是轻微地触及过。函数概念实在不过是已有的数概念的一种推广和深化——或者宁可说它是数概念的一种彻底的解放。(沙夫(Schaaf))

按照克莱纳(Kleiner)的说法,函数概念“可倒溯 4000 年,其中 3700 年充满着对此的预觉”。它的进展导出了一个复杂的概念网络:图形的几何表象,作为一个公式的代数表达式,独立的与不独立的变量之间的关系,可以表现更一般关系的输入-输出的机制,和现代的集合论上的定义。

在“新数学”中,有过一个大胆的尝试,即企图按照集合  $A$  与  $B$  的笛卡儿积去建立函数概念的形式定义:

设  $A$  与  $B$  为两个集合,并记  $A \times B$  为  $A$ 、 $B$  的笛卡儿积,则称  $A \times B$  的一个子集  $f$  为一个函数,如果当  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  是  $f$  的元素,且  $x_1 = x_2$  时,就有  $y_1 = y_2$ 。

然而,许多来自经验的事实表明,虽然这一定义是数学上一项优秀的基础,但它不可能是一个好的认知根源。“摆脱”沙夫 60 多年前十分有说服力地提出的原有的一套概念,是反映在整个认知的重新构造之中。在此新构造中,必须使用新的集合论的定义去取代早期的与过程有关的定义。这一重新构造对于学生来说显得极其困难。

马利克(Malik)指出了这一定义是怎样地代表着一种与传统

的微积分所体验的非常不同的思维框架,在传统微积分中强调的是独立的与不独立的变量之间的基于规则的相互关系。

西厄平斯卡(Sierpińska)强调了最后一种函数概念的应用,并断言:

函数的最基本的概念是变量数值之间的一种关系。如果这一概念没有得到发展,那么诸如方程与图形这种表达形式就失去了它们的含义,彼此间变得互相孤立。……在向年轻学生介绍函数时,使用久经揣摩而得的现代定义,这是教学法上的一个错误——一个反教学法的颠倒。

实验性研究表明,即使把这样一种形式定义教给了学生,他们从对隐性地具备通常性质的函数中所获得的压倒性经验,也会使他们发展各自的函数概念表象,在这些表象中隐约地包含了那些通常的性质。例如,如果所遇到的函数主要地是以公式给出的时候,这会使许多学生相信:公式的存在对函数来说是必要的。

德赖弗斯(Dreyfus)与维纳对 271 名大学生和 36 名教师的混合组作了一个调查,询问一些有关函数概念的问题(图 12.1)。

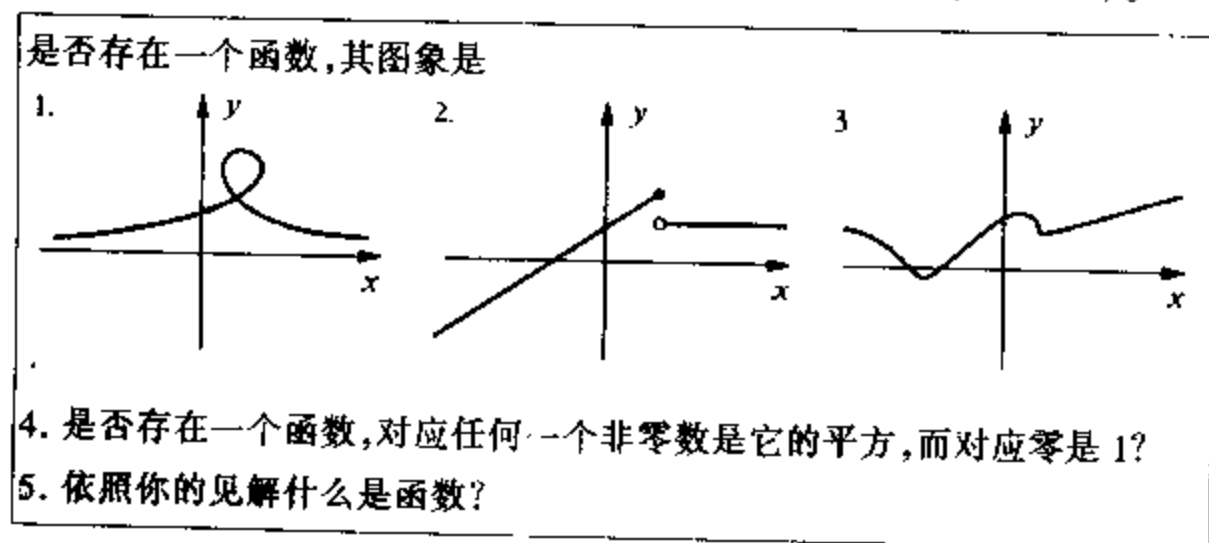


图 12.1 学生对函数怎么看法?

关于函数概念(问题 5)的回答中,不仅有标准的定义(每一个  $x$  的值对应唯一确定的  $y$  的值),而且有各种变形,例如

两个变量之间的一种对应关系；

一种对应法则；

一种操作或运算(从一个数得到另一个数)；

一个公式,代数表达式或方程；

一个图形, $y = f(x)$ 。

然而,对前四个问题的回答却并不总是按照这些概念得出的。表 12-1 显示了其回答被判断为正确的百分比。这些百分比随着能力与经验的增长而增长,但是非数学专业的学生存在着特别高的错误百分比。回答的理由不仅包括标准的定义与以上所述的各种变形,而且涉及所引起的概念表象,例如

图形是“连续”的或改变了它的特性(例如,两条不同的直线)。

函数的定义域是“裂开”的。

存在一个不寻常的点。

表 12-1 对函数问题的回答正确的学生

| 数学水平  | 低   | 中   | 高   | 数学专业学生 | 教师  |
|-------|-----|-----|-----|--------|-----|
| 问题: 1 | 55% | 66% | 64% | 74%    | 97% |
| 2     | 27% | 48% | 67% | 86%    | 94% |
| 3     | 36% | 40% | 53% | 72%    | 94% |
| 4     | 9%  | 22% | 50% | 60%    | 75% |

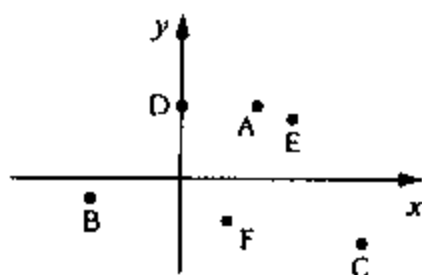
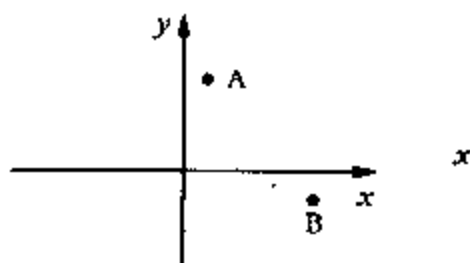
虽然原来的问题有点超出通常的范围,但是类似的结论在其他的研究中已被重复得到。

马科维茨(Markovits)等推断由于多种不同的因素(定义域、值域与法则),使现代定义的复杂性导致了一些问题,然而在高中水平中对定义域与值域不怎么强调,其结果是强调了法则或对应关系(通常以一个公式给出)。早些时候对直线图形的强调,可能使



学生在被要求考虑通过给定点的可能的函数时会引用线性的图形(图 12.2)。

在给定的直角坐标系中,画出函数的图形,使得点  $A$ 、 $B$  ( $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$ ) 的每一个坐标表示该函数的原象与所对应的象:



能画出的不同的这种函数的个数是

- 0
- 1
- 2
- 大于 2 但小于 10
- 大于 10 但不是无限
- 无限

解释你的答案。

图 12.2 进一步的函数问题

第一个图形常常引用一条直线,只允许一个函数,因为“两点只能用一条直线相连接”。第二个图形产生麻烦了,也许因为点似乎配置在两条直线上:“如果我画一个函数,使所有的点都在上面,那将会产生对应于每一个  $x$  将存在两个  $y$ ,这就不是一个函数。”马科维茨等发现“作为线性的函数概念可能受到几何学的影响(学生在学习代数时同时也学习几何),也受到课程中专门花费在线性函数上的时间的的影响。”

巴恩斯(Barnes)就有关不同的表达式对 11 名高级中学与大学的学生作过调查询问,例如,

$$y = 4$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}$$

的表达式是否定义  $y$  为  $x$  的一个函数。大多数人认为第一个不是, 因为  $y$  的数值不依赖于  $x$ 。许多人认为第二个是函数(因为它是一个圆, 对他们来说是熟悉的), 而第三个表达式则出现了困难, 因为它看上去似乎不只定义了一个函数而是几个。

在问到图 12-3 中哪一个图形表示  $y$  是  $x$  的函数时, 学生以各种不同的方式加以回答。第一个图形引起的概念表象, 有如“它更像  $x$  是  $y$  的一个函数”, 或“它是一个旋转了的函数”, 或“那是  $y = x^2$ , 所以它是一个函数”。第二个图形几乎普遍地认为不是一个函数, 其原因不是因为它有垂直的线段, 而是“它看上去陌生”, 或“它不是光滑与连续的”, 或“它太难了无法定义”。与代数表达式  $y = 4$  相对照, 最后一个图形, 所有的大学生都认为它是一个函数, 虽然有些高中学生对  $y$  总是不变表示了关注。有些大学生看到水平线认为是函数, 而早些时候断言过  $y = 4$  不是一个函数, 但是现在意识到这是一个矛盾。有些人(但不是全体)想回过去看早些时候的问题, 并修改他们的答案。

现在, 读者如果回到前面的有些问题, 看看我们的大脑中所留下的皱痕的话, 那将是有意义的。例如, 与图 12.1 有关的问题, 其中假设  $y$  正被考虑为  $x$  的一个(可能的)函数。第一个图形能很容易被看作是一条常常描述的“参数曲线”——从一个区间到平面的函数表象。第二个图形中似卡通的难以名状的曲线是表达不连续性的常用例子。如果你想到这一点, 你将意识到它在不连续点的领域中并不真正代表图形上有序的数对。事实上, 一个物理图形只是一个函数的粗略表示, 它伴有难以捉摸的理性上的困难, 就像年幼的学生把图形看作是一条曲线, 而不是一个点的集合一样。

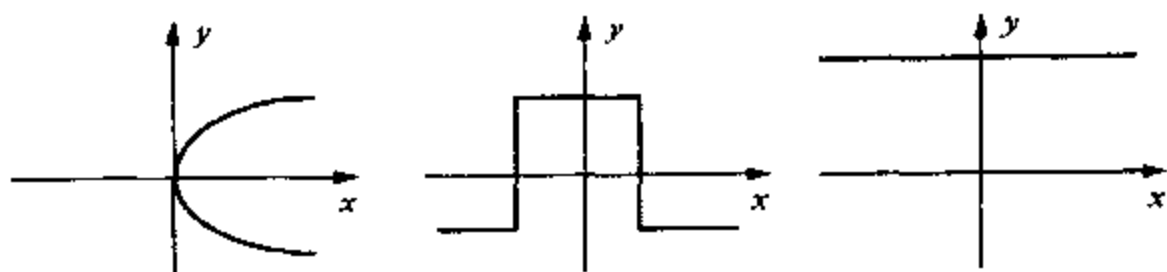


图 12.3 这些图形是函数吗?

图 12.3 中间的图形能表示一个函数吗? 看上去不能, 然而如果“垂直线”实际上只是非常陡峭而非垂直, 如下面的形式, 那么它就可以表示一个函数:

$$y = -1, \quad |x| \geq 1 + k$$

$$y = \frac{1 - |x|}{k}, \quad 1 - k < |x| < 1 + k$$

$$y = 1, \quad |x| \leq 1 - k$$

其中  $k$  非常小 (如  $k = \frac{1}{1000}$ )。

很少有学生注意到这些可能性。然而, 这些问题解决的可能性表明在我们大脑中隐含的皱痕。既然我们为学生提供了一个布雷区, 又信任他们能挑选一条通过布雷区的连贯道路, 那么犯那么多错误有什么奇怪的呢?

函数概念在各种不同的表达形式 (图形、以箭头标出的图解、公式、表格、词语描述等等) 以及这些表达形式之间的关系上会遇到更大的困难。例如, 德赖弗斯与艾森伯格 (Eisenberg) 发现学生在把代数变换 [如平移  $f(x) \rightarrow f(x) + k$ ,  $f(x) \rightarrow f(x + k)$  与伸展  $f(x) \rightarrow kf(x)$ ,  $f(x) \rightarrow f(kx)$ ] 与它们的相应的图示联系起来这一方面有相当大的困难。在这中间,  $f(x) \rightarrow f(x + k)$ ,  $f(x) \rightarrow f(kx)$  这两个变换自然显得尤为困难。

埃文 (Even) 在可能成为数学教师的人中也作了调查研究, 在这些实习教师最后一年的数学学习中她发现了类似的困难。

他们中的许多人忽视了定义函数的两个集合之间关系的任意特性。……一些人期望函数总可以由一个表达式来表示,其他人则期望所有的函数都是连续的。仍有一部分人只接受所谓“合情合理”的图形。

当教师的函数概念还比较狭窄、比较原始时,我们能否期望教师按照现代教科书中已出现的函数现代定义去进行教学呢?被调查者的不完整的函数概念是成问题的,它可能会使学生对函数的概念定义与函数的概念表象之间产生循环性的不一致,……使学生的函数概念表象保持类似于 18 世纪时的那样。

如果那些有可能成为教师的人的头脑中已经形成了皱痕,那么对学生在有关函数概念的深层次的问题中会不断地遇到困难的事实,还会有不可思议的地方吗?

近几年来,计算机已经被用来引入函数概念。这方面初期的许多进展主要集中于函数的图形表达形式。这些技术对函数的概念进行了变革,从一个以法则为基础、逐点的过程变到综合行为的整体可视形象。完全新的途径是可能的,例如从观察图形的定性形状来提出代数的或三角的关系。

这一变革一方面在潜在能力方面带来大的增长,但另一方面更大的可能是对图形表达形式的误解。例如,在不同的范围上画出图形时,看上去有很大的不同,并且在改变各轴的尺度时可能会产生视觉上的错觉。这一技术给了学生巨大的力量,但是认真的研究是必要的(当前在进展之中),以便深入了解通过这一技术的使用后学生所产生的概念。

例如最初运用于微机的大多数有效的图形描绘软件只接受以公式给出的函数,这会隐性地增强了学生把函数作为一个公式的局限的概念表象。而澳大利亚国立大学的 ANUGraph 则是一个例外,它允许函数在几个区域上用不同的公式来定义。

只是到了最近,才出现允许函数记号  $f(x)$  的图形描绘程序。

例如,英国的 SMP 的“函数分析器”允许以如  $g(t) = t + \sin t$  或  $f(u) = e^u$  的方式表达函数,并且它们还可被用来画出如  $y = g(x) + 1$ ,  $y = g(x + 1)$ , 或  $y = f(g(x))$  的图象。但这仍然局限于用公式给出的函数。

“三元表达模式”提供了灵活性,去画出函数的图形,计算并点出函数的数值,在一个区间上逐步寻找满足指定的等式或不等式。这里的函数是有理函数、绝对值函数、平方根函数与取整函数的和、差、积与复合,它被定义在连续的或离散的区域上。这一软件能够用于问题解决活动,例如揭示学生如何运用不同的表达方式,通过“放大”到图形相交的点上或结合利用数值估计和逐步搜索的策略,找出等式和不等式的解。施瓦茨(Schwarz)、德赖弗斯与布鲁克海姆(Bruckheimer)指出这一软件“使学生在函数推理上能达到更高的认知水平”。例如,在遇到要求通过给定的一组点得出各种函数图形的问题时,以往处理比较一般的图形所取得的经验会有效地减少“直线图形”的回答。这一软件用于求解方程时,由于它所提供的种种工具的使用,会导出更为复杂细致的策略。

绘图的计算器和计算机软件在描绘函数图形上的使用确实得到了激增,其中一些情况在莱因哈特(Leinhardt)等人的一份关于函数与图象关系的范围广泛的综合报告中有所报导。的确,这对进一步进入一般的函数概念的实验性研究,是一份极好的信息与参考源泉,它指出了论题的复杂性与困难的深度。

在强调函数概念的许多表达形式——公式、图形、变量关系等等——时,往往忽视了函数作为一个过程的思想。例如,虽然图形被作为是思考一个函数的一种极好的方式,但很少有学生将图形与基本的函数过程联系起来[在  $x$  轴上取一点,画一条垂直线与图形相交于一点,再由这一点向着  $y$  轴画一条水平线,去找到  $y = f(x)$  的数值]。相反,学生把一个图形简单地看作为一个实物:一条静止的曲线。

为了将函数看成一个过程,杜宾斯基(Dubinsky)与他的合作者通过程序设计向学生介绍函数概念。运用 Unix 操作系统,为学生准备了要用的一批指令,其中有一些针对数的运算,有一些针对课文。其目的是为了帮助学生把函数动态地作为一个过程加以理解,同时又将函数静态地凝缩为一个理性客体,在这一客体上可以实施诸如函数复合之类的运算。虽然所涉及的学生只是一小部分,但是有证据支持这样一个假设,即对实验组的学生来说,计算机的经验比起那种控制组的学生用的传统的纸笔练习来,更为有效。

通过这一试验,杜宾斯基发展了运用 ISETL 语言在有限集合上通过程序设计得出更一般的函数概念的想法。这一程序设计语言允许学生把函数作为有序数偶的任意集合来处理,也可作为运算程序来处理,还允许学生构造一些运算,如用数学方式表达函数的复合。最新近的 ISETL 的应用,使应用者能把如此构造的函数画出来。

实验性研究表明,通过在计算机上编制程序执行一个过程,学生能学会把函数看作这一过程。在后阶段中,以这种方式定义的函数可以被用来作为另一程序的输入,因此把过程凝缩为一个客体。这暗示设计函数程序的行为会提供正规定义得以逐步形成的认知根源。ISETL 语言也提供了一个程序设计的环境,在此环境中学习者会思索从函数作为过程到作为客体的困难转变。

本节所讨论的对函数概念复杂性的研究显示了广泛多样化的途径。在增强对特定范围函数概念的理解与问题解决能力中取得了某些成果,但看来不是万应灵药。那种将函数作为过程来理解的想法可能可以作为形式概念合适的认知根源,但是在一系列认知发展中,还有障碍需要加以克服,包括把过程凝缩为一个简单的概念,把这一概念与它的许多变式联系起来。一般说来,仍然需要广博的经验去掌握大而复杂的思想纲要。

## 极限的观念

万物皆有其适度,适度亦有其确界,  
超越或未达此界,则谬误生焉。

(霍勒斯(Horace))

虽然函数概念是现代数学的中心问题,但正是极限的概念标志着数学思维向着更高级的领域的发展。如科努(Cornu)所观察到的,这是学生第一次遇到的无法用简单的数学计算找到结果的数学概念。换言之,它被“神秘所笼罩”,在这里“人们必须通过一个迂回的道路才能到达他的目标”。

极限发生在许多不同的数学背景中,包括序列的极限,级数的极限,函数 $[f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 或 $x \rightarrow \infty$ ]的极限,或者发生在连续性、微分、积分的概念中。从数学的角度看,分清这些不同类型的极限是需要的,例如序列 $(a_n)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的离散极限与 $f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时的连续极限。然而实验性研究显示初学者在跨越不同的数学范畴时存在共同的困难。

例如,“极限”这一词语在日常生活中有许多与数学思想不相符合的涵义。日常生活中的极限经常是指不可能或不应该超过的一些事物,如“极限速度”。与数学上极限过程相联系的专用术语,包括如“趋向于”、“趋近”、“接近”的短语,这些在口语中的含义与数学上的含义也是不相同的。例如,当这些短语用于表示一个序列趋近于一个极限时,它们一概带有下列涵义,即这个序列的各项不能等于这个极限。

运用极限的困难由于序列与函数的概念表象的局限性而加剧;例如,学生常常遇到各项以公式给出的序列记号。如果我们希望说明一个序列的某些项可能会等于它的极限,那么可以设法考

察序列  $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots$  但把序列各项看作一个公式的学生会坚持说这不是一个序列, 而是两个; 奇数项形成一个调和序列  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ , 趋向于零, 而偶数项都为常数零。

戴维斯(Davis)与维纳认为, 对于极限的概念, 表面上看在某些阶段存在不可避免的错觉。一种是受语言的影响, 如前面所提及的, 其术语使我们想起强加给数学的思想。除了词语, 还有由这些词语凭猜想作出的思想, 在早期的经验中有它们的出处。虽然戴维斯与维纳试图教一门在初始阶段不使用“极限”词语的课程, 但他们最终得出结论, “回避用这种先于数学智力表示的零碎知识也许是完全没用的”。另一种产生错觉的源泉是十分复杂的函数思想, 它不可能“一瞬间就以完整的、成熟的形式”出现, 以致于“某些思想要比其他部分先产生适当的表示”。一些特殊的例子可能在学习中起支配的作用; 例如戴维斯与维纳发现单调序列在早期的例子中占主要地位, 从而也就不奇怪这种序列在学生的概念表象中占有支配地位。这会在人们自身的经验中导致错解; 例如学生处理许多各项以公式给出的序列例子, 这一事实使学生错误地认为一个表示第  $n$  项  $a_n$  的简单的代数公式是序列理论的必要部分。

大多数非形式的极限思想本身带有一种趋近于极限值的动态感觉, 例如, 随着  $n$  的增大, 和式

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

趋近于极限 2。这不可避免地产生一个认知结果, 我称之为“一般的极限特性”: 一个数列的所有项都有的共性对极限也成立。这是一种有价值的历史先驱者的信念, 例如在莱布尼兹(Leibniz)的“连续性原理”中所说:



在任何假设的转变中,无论结束于哪个终点,都可以建立一个一般的推理过程,而在过程中可以包括最后的终点。

这渗透了数学的历史,如柯西(Cauchy)的连续函数的极限也一定是连续的这一信念。这在今天我们的头脑中依然留下了皱纹、痕迹、思想,序列

0.9, 0.99, 0.999, ... 的极限一定小于 1——因为所有各项都小于 1。因此“零点九循环”“恰好小于 1”。科努对此做了更为细致的研究并发现了一整批信念,例如“0.9, 0.99, ... 趋近于零点九循环,但有极限 1(因为趋近于具有 0.99999... 的特性,但不可能超过“极限”1)。

在试图用日常语言“简化”极限概念时,会导致严重的理性问题,这一点可以说不值得惊讶。奥顿(Orten)运用“有踏板的梯形”对学生的极限概念作了调查,这里在各个踏板之间插入另外一个一半尺寸大小的踏板,然后再以一半尺寸大小的踏板不断地重复这一过程(图 12.4)。



图 12.4 有极限的梯形

在调查询问中,他提出了以下一些问题:

1. 如果这一过程无限地重复,那么最后的结果是什么呢?
2. 在这“最后的结果”到达之前,另外附加的阶梯必须放多少次?
3. 按照原有的尺寸  $a$ , 最后的形状的面积是多少,即在“最后的梯形”下面积是多少?

如果在问题3中给出一个公式,他就问:

你能用这一公式得到这一序列的“最后一项”或极限吗?

他对“最后一项”这一术语的使用作了说明:

“最后一项”这一表达的再次使用是试图帮助学生理解极限的含义。

他肯定不是唯一试图用非形式的描述来帮助学生理解的人。但如“最后的梯形”这一说法可能产生一个一般的极限概念,在这里学生把梯形想象为一个“无穷台级”的梯形,这正是它所产生的反应。

面对在极限的动态概念中的这些困难,不必感到惊讶,即使形式定义也充满了认知上的问题。甚至“给定一个大于零的 $\epsilon$ …”这种说法可以解释为取 $\epsilon$ 为“任意小”,并且这就产生一个一般地表达一个“任意小”的数的符号:

一切事物都存在,犹如存在非常小的数,比“真实”的数小,但永远不等于零。符号 $\epsilon$ 对许多学生来说,代表这种类型的符号; $\epsilon$ 比所有真实的数小,但不为零。

同样的情况,在微积分中,符号 $\delta x$ (为 $x$ 的一个小的有限的增量)与 $dx$ (作为记号 $\frac{dy}{dx}$ 的一部分)的引入一般地会产生存在任意或“无限地”小的数的思想。

极限的形式概念的引入并不排除较为原始的动态概念;实际上,我们经常在我们的施教过程中不断地培育动态的表象,对严谨的证明给出一种直观的诠释。

罗伯特(Robert)对1380位各类学校与大学程度的学生所理解的序列极限的概念作了研究。她询问学生可以如何向一个14或15岁的小学生解释收敛序列的概念(一个比形式定义更可能引起概念表象的问题)。她把回答分成四种主要的类型:

1. 单调的与动态单调的(12%):“一个收敛序列是递增而上有界(或递减而下有界)的序列”;“一个收敛序列是递增(或递减)而趋近于一个极限的序列”。

2. 动态的(35%):“ $u_n$  趋于  $l$ ”;“ $u_n$  趋近于  $l$ ”;“ $u_n$  与  $l$  的距离越来越小”;“ $u_n$  的数值越来越接近某一个数”。

3. 静态的(13%):“ $u_n$  在  $l$  邻近的一个区间内”;“ $u_n$  聚集在  $l$  的周围”;“ $u_n$  任你愿意,可以任意靠近  $l$ ”。

4. 混合的(14%):以上各类的混合。

此外,4%的学生给出了形式定义,5%的学生没有回答问题,其余的给出了不完整的或者错误的叙述,例如“ $u_n$  不超过  $l$ ”,或者“ $u_n$  始终小于  $l$ ”。

学生产生一种特别的表象,这种事实并不意味着缺乏其他的表象:

学生原有的(和不正确的)思想的出现不可能作为说明学生不知道正确的思想的一个依据。在许多情况中,学生知道两者但一直追溯原有的思想。

特别,罗伯特的给 14 或 15 岁学生以合适解释的要求看来排除了形式的定义,所以它是困难的。这一困难在塔尔与维纳的研究中也得到了证实,他们要求 70 位一年级程度的高才生写下  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  的定义(假设他们知道)。他们都刚刚通过 A 级考试,虽然他们中的一些人可能曾经看到过形式定义,我们还是期望他们都知道那个动态定义[当  $x$  趋近于  $a$  时,  $f(x)$  趋近于  $c$ ]。他们的回答如表 12-2 所示。

因此他们中的大部分人,在复忆了(较容易的)动态定义后能正确地说明问题,然而那些给出形式定义的人中的大部分却不能以满意的方式复忆起那种动态定义,将其误解为各种方式,如

当  $x$  充分靠近  $a$  时,对所有正的  $\varepsilon$  值都有  $|f(x) - c| < \varepsilon$ 。

当  $x \rightarrow a$  时, 对所有的  $n > n_0$  都有  $c - \varepsilon \leq f(x) \leq c + \varepsilon$ 。

对所有大于给定的  $n_0$  的  $n$  都有  $|f(n) - f(n+1)| < \varepsilon$ 。

表 12-2 极限概念的学生定义

|     | 正确 | 不正确 |
|-----|----|-----|
| 形式的 | 4  | 14  |
| 动态的 | 27 | 4   |

总的来说, 用计算机教学极限的概念, 进展并不好。常规的计算机语言, 例如 BASIC, Pascal 或 C, 存储数据于具一定内存的部分, 在计算极限时会引起严重的精确性问题, 例如:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sin(x+b) - \sin x}{b}$$

当  $b$  很小时, 分子与分母两者都是很小的数, 其商可能是高度不精确的。如对  $x = \frac{\pi}{3}$ , 当  $b$  趋于零时极限应该是  $\frac{1}{2}$ , 但对典型的微

量, 取  $b = \frac{1}{10^n}$ , 对  $n$  从 1 到 10, 得到序列

0.455901884

0.495661539

0.499566784

0.499954913

0.499980524

0.499654561

0.500585884

0.465661287

0.232830644

0

其几乎不趋近于 0.5。因此在这种背景中极限的数值思想必须和计算机算法的精确性讨论相结合。

极限的符号处理并不总是进展较好。导出式

$$((x+h)^2 - x^2)/h$$

的形式写得漂亮些,为

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

并且可以自动地简化为

$$2x + h$$

但没有就  $h = 0$  的情形提出任何警告。更为一般的表达式

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

只能简化为

$$\frac{(x+h)^n}{h} - \frac{x^n}{h}$$

将导出式的极限见解(在该软件的第一版中)应用于这一表达式,当  $h$  趋于零时并没有得到  $nx^{n-1}$ ,而是

$$e^{n \ln(x) - \ln(\frac{x}{h})}$$

这对于复杂的研究可能是合适的,但对初学者来说,它几乎是不适宜的。虽然在后来的版本中对此加以改进,然而它的确说明了当人们试图进行符号运算时所遇到的困难。要那样做是足够困难的,但更难的是使表达式成为需要的形式。

所有的依据都一次次地指出,虽然极限的概念(形式意义上)是一个良好的数学基础,但它无法成为合适的认知根源。如果在像微积分这样的学科中首先从极限过程开始是困难的话,那么以其他什么取而代之才是有效的呢? 塔尔把图形放大,以此开始微分的内容,从而替代了明确的极限思想的引入。这是以微积分的认知根源是可微函数有一个可以扩大为“看上去是直的”图形的这一思想为基础的。为了给出丰富的概念表象,其软件不仅包括了标准的函数,而且包括弯曲得无论怎么高度放大,看上去永远不会

是直的函数。因此在微积分最开始的课中,可以探索到处局部是直的函数,探索在给定点的左右两边有不同梯度的函数(因为图形放大后呈现出一个角)及那些没有一处局部是直的函数(因为他们太弯曲了)。这有助于学生建立更为丰富的概念表象,包括可微函数、左右两边有不同梯度的函数及不可微函数的例子——提供认知根源,在这基础上以后可以建立起形式理论。

这不是一条容易的途径,但其本身是正确的。如欧几里得评价托勒米(Ptolemy)时所说的,不存在第一流的路。由于极限概念已存在的复杂性,前面的路决不是试图避开困难,设法使学生的途径舒适,因为过于简单化会使学生产生不恰当的概念表象,这只会在今后问题成堆。一种对学生更有帮助的途径是提供必要的丰富经验,使学生能设法正视困难,处理较为稳定的概念,并留心可能出现的误区。

## 关于无限的思维

从一粒沙子看世界,  
从一朵野花看苍穹,  
把无穷掌握在你的手中,  
把永恒掌握在顷刻之中。

(布莱克(William Blake))

当我们在巨大的宇宙中沉思我们赖以生存的微不足道的有限自然界时,关于无限的思想时而影响着我们的一切。对学生无限概念的特性的研究可能会受到研究者头脑里的皱痕的困扰,而这比任何其他因素的困扰更大。我们应该把“无限”解释为什么呢?对读者来说,在继续读下去之前暂停一会儿先想一想无限对他或她意味着什么,这将是有益的。

历史上,哲学家区分了真实的无限(“存在一个无限大的整数”)与潜在的无限(“对任何整数总存在一个比它大的整数”)。在现代,真实的无限用康托尔(Cantor)的基数理论按照集合之间的一一对应加以解释。一个无限集合是能与它的一个真子集建立一一对应的集合。因此,自然数 $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ 组成一个无限集,因为他们能与偶数 $\{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ 建立一一对应,其中 $n$ 对应于 $2n$ 。这就是现代数学中重要的关于无限的基数形式。

但基数无限的有些性质,许多人发现难以用术语表达。例如一个集合能与它的一个真子集具有“同样多”的元素,在基数观点中,有理数与自然数具有一样多的数,长度为两个单位的实线段与一个单位长的实线段具有一样多的点,一个正方形的内部与一条实线具有一样多的点,而实数比有理数多得多。那么,这些前后一致吗?

一些调查研究针对康托尔的基数无限与我们直觉之间的不一致性。我们头脑中的皱痕产生于对无限集进行比较而得到的经验,而由于经验上的差异,学生可能并不具有这些皱痕。这种关于无限的研究可能在我们自己具有的概念特性方面的论述和在学生大脑中的冲突方面的论述是一样多的。由于这一原因,在我们继续之前,有必要简要地考察一下各种关于无限的概念特性。

我认为学生遇到的无限的经验很少与集合比较的行为相关,这意味着他们很少为无限的基数概念建立认知根源。例如当一个学生思考“一条线上的点”时,可能是以铅笔作一个记号(或者是完全不同的一回事,例如一把剑的“剑尖”)。一个铅笔记号具有一定大小的尺寸。把一个点看作为有一个极小的具有一定大小尺寸的学生可能就此发展一个点的一般化概念,即具有一个极其小尺寸的点。

如果一条线段都由这种点组成,那么组成线段的点的个数将是有限的(例如100个)。一条两倍长的线段将拥有两倍数目的点

(200)。而双倍长的线段要拥有相同数目的点,其方法只有一个,即点有双倍大小的尺寸!在把这些思想推广到无限的情况过程中,一个自然的一般概念是一类无限,即在单位长的一条线段中有无限多个无穷小的点,而在两倍长的线段中就有两倍数目的点。我曾对一位数学同事提出这一想法,他对这一天真的想法感到可笑,并说,是的,在两倍长的线段中有两倍多的实数——一条有 $\aleph_0$ 个元素,另一条就有 $2\aleph_0$ 个元素,而根据基数运算, $\aleph_0 = 2\aleph_0$ !他认为不这样想是极其自然的。

让我们设想在一条单位长的线段上有 $N$ 小段,每段长 $\frac{1}{N}$ 。若 $N$ 非常大, $\frac{1}{N}$ 就非常小。两倍长的线段有 $2N$ 个同样长度的小段,其中 $2N$ 更大,自然不等于 $N$ 。非标准分析允许我们设想 $N$ 是一个有序域中比实数大的一个元素,以致于 $N$ 大于(在给定的序中)任何一个实数。在这一技术意义上, $N$ 是“无限”。根据序关系运算,以此可推出 $\frac{1}{N}$ 小于任何正的实数,从而在这一意义上,它是“无穷小量”。因此非标准分析允许一条线由无限多个无穷小量大小的微小线段组成。两倍长的线将有两倍数目的同样大小的点。与基数无限不同,非标准无限数 $2N$ 与 $N$ 不相等——前者大于后者——恰如一个学生的直感。因而,虽然学生的这种无限概念与基数无限相冲突,但是同非标准无限却有相一致的特性。

现在当我们在向高等数学思维转变期间考虑无限的概念时,我们开始意识到具有更广泛的概念的可能性。存在不止一种关于无限的概念。在如“当 $n$ 趋于 $\infty$ 时的极限”这样的短语中所用到的符号 $\infty$ 表示潜在无限的思想。学生经常被告知不要将它当作一个真正的数,然而他们会感到疑惑,发现它使用于许多情况,似乎它是一个真正的数。在数学中,至少有三种“真实的无限”的概念:基数无限(通过集合的比较扩展计数的记号——数学家偏爱的无



限形式),序数无限(康托根据有序集的比较提出的概念)与非标准无限的概念(从实数到一个更大的有序域的度量记号的一般化)。为简便起见,我称这个非标准无限为度量无限。所有这些类型的无限都是高等数学中适用于研究的逻辑性实体。在判断学生的直觉中,我们不应犯那种错误,即只考虑一种无限——基数无限——将其作为唯一正确的数学概念。

例如,“无穷级阶梯”作为对上一节末尾提出的问题的回答,尽管它在标准分析中是不允许的,但它是一种完全合理的非标准的回答。类似合理的思想是,对一个任何位置上的无限数,例如  $N$ ,  $0.999\cdots$  是无限小地小于 1 的数(相差无穷小量  $\frac{1}{10^N}$ )。

塔尔请学生计算各种极限,包括当  $n$  趋于无限时

$$\frac{n^2}{n^2+1} \text{ 与 } \frac{n^5}{(1.1)^n}$$

的极限。一个学生这样写出答案

$$\frac{n^2}{n^2+1} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} = 1$$

以类似的理由对学生写出下式

$$\frac{n^5}{(1.1)^n} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} = 1$$

但他确定地回答,“不,这不对,因为在这个情形中分母是一个更大的无限,其结果是零。”

这种不同大小的无限的想法不是基数的概念——它是算法上经验的推断,其更接近于度量无限,而不是基数无限。

菲施拜因、蒂诺什(Tirosh)与赫斯(Hess)给出了另一个清晰的度量无限的例子,这里

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

表示为

$$S = 2 - \frac{1}{\infty}$$

因为它的各段和是没有终点的。

这里它是极限过程的潜在无限,导致了度量无限的一般概念。所表达的极限是所有各项的特点:恰好小于 2。这种算法恰恰合适于非标准分析,而不合适于基数,在那里无限不能作除数。

大多数关于极限的经验同逐渐变大,或变小,或互相靠近的事物相关。所有这些推断经验出自算法而不是从比较集合中得来,并且更可能产生度量无限,而不是基数无限。随之产生极限与无限的思想,而这两者总是作为两个不同的又有冲突的例子放在一起加以考虑的。

在给定的班上,不同的学生会产生许多不同的无限思想。西厄平斯卡分析了 31 位 16 岁的微积分数学预备班与物理班的学生概念表象,他将这些学生分成几组,每组她都给标上一个名字。

迈克尔与克里斯托弗是无意识的无限者(至少在刚开始时):他们提到“无限”,只是指“非常大”,……对他们两个来说极限应该是最后一项的数值;……迈克尔认为最后的数值或者是正的无限(一个非常大的正数)或者是负的无限。……而克里斯托弗却不这样认为,他更倾向于接受各项的数值动态地变化。最后的数值并不总是趋于无限,它可能趋于某个小的已知数。

乔治是一个有意识的无限者:无限是关于某些超物理的事物,很难用准确的定义说清它。如果数学的确是一门精确的科学,那么就应该避免说到无限而只说有限的数。在用公式表达一般的规律中,人们可以用字母表示具体而任意一个有限的数。在描述序列的变化中最重要的事情是通过书写一个一般的公式刻划第  $n$  项。对给定的  $n$ ,则可以计算出这一项的精确数值或给出它的近似值。

波尔与罗伯特是运动的无限者:他们的无限的思想是与时间的思想联系在一起的……波尔是一个潜在论者:提到某个整体,一个集合或一个序列,人们不得不在思维中对它的每一个元素都扫描一下。这样不可能思考无限多

个数,一个无限集合或序列的构造永远不可能完全。无限只是潜在地存在着。罗伯特是一个潜在现实论者:(对他而言)可能在思维中实现“到无限的跳跃”;无限能够潜在地最终得到实现。对波尔与罗伯特两人来说,重要的事情是了解序列的项如何变化,是否存在趋近于某个固定数值的趋势。对波尔而言,即使一个序列的项越来越靠近以致于它们之间的差别小于任何给定的值,他们也永远不可能到达这个数值。罗伯特从理论上认为序列的项在无限处达到这一数值。

非施拜因与其同事调查了在不同的无限概念之间存在的一些固有的冲突——例如,单一的潜在无限的直觉和基数理论中的众多无限之间的冲突,或者是可以在一条线上确确实实地标上有限多个点和与其相比理论上可能存在的无限多个点之间的冲突。非施拜因区分了我们大家生来就有的“原始直觉”,以及来自更为专门化的经验的“二级直觉”。因此,潜在无限的思想是一种原始直觉,但它带有可观的基数无限的经验,当这些经验和根深蒂固的信念相冲突时就发展成适当的二级直觉(例如“全体大于局部”)。

蒂诺什继续了非施拜因与他的同事的工作,考虑到学生的直觉背景(例如,学生可能借助“局部-全体”的原则说明一个集合大于一个真子集的这一事实),他为 10 位学生拟定了一个关于“有限与无限集合”的施教计划。他向学生提出了引自数学的关于无限集合的一些悖论,并促使他们感到应该正视这种冲突。蒂诺什发现通过运用动态的教学方式有可能提高学生对康托理论的理解,包括直觉冲突中尚未解决的问题的讨论。

其他的研究一直着眼于另外的非标准分析的示例。沙利文(Sullivan)以非标准的观点,即实数公理和一个较大的包含无限与无穷小元素的超实数集合相结合的观点,研究了施教大学程度的微积分的效果,并给出带有强烈的几何特点的方法,用“显微镜”与“望远镜”结合图形解释这些元素。她发现通过实验课学习的学生

在常规问题分析中( $\epsilon$ - $\delta$  定义, 极限计算, 证明与应用)得分至少和那些控制组的学生一样,但在用无穷小的观点提出不同的解释的课程方面有较好的成绩。后者趋于显得更为容易,其原因部分是由于他们没有卷入像在标准定义中的那么多的量词,另一部分原因则是由于他们在极限过程中扩展了“逐渐变小”的直觉经验。

尽管这一实验性证明说明了利用无穷小方法的成功,但在高等教育中微积分的方法却几乎没有改变。其中真正的原因包括在深奥的选择公理上的逻辑性的非标准思想本身内在的复杂之处,但也存在来自传统的数学分析的偏见,它与康托尔的理论有联系。这就更加深了大脑中的皱纹。

相辅相成地进行学生困难的研究和教师头脑中可能存在的困难源的研究,这是重要的。来自在一所大的大学里从事高年级数学方法课程教学的职前小学教师的迹象表明了广泛的不一致性。要求解释符号 $\infty$ 与表达式“1, 5, 25, 125, 625, …”中最后省略号的问题表明多于一半的对象对符号的意义不熟悉。对“什么是无限”的回答或者指一个无终止的过程——“数字不停地继续”,或者指一个递归的过程——“不管你说那个数字,总有一个更大的数,简单地就在那个数字上加上1”。不管哪种回答,潜在的无限是所涉及的无限中最突出的一个。

学生在被问到,“每条线段含有无限多个点”这一论断是否正确时(这会引出潜在无限、基数无限或度量无限的概念),有 39 人回答“正确”,24 人回答“不正确”,还有 7 人没有回答。问到“存在比零大的最小分数”这一论断时,28 人回答“正确”,29 人回答“不正确”,还有 13 人没有回答。

综合来看,回答揭示了大部分学生“掌握了不完全的、不一致的无限概念”,并且每个人书面的回答表明大量被引用的概念表象都充满了冲突与不一致性。然而,问一问无限的概念是否是由问“…”的含义(潜在无限)与一条线段上点的个数(基数无限)是同一

类型的无限所引起的,这也是挺有趣的。为了研究学生所持有的信念并将那些信念分类,首先重要的是分析相关的概念和不同的经验产生的概念表象的种类,而不是将一种典型的数学偏见灌输给他们。

## 数学的论证

凡值得证明之事,皆不能证,  
亦不能否认;故愿你明智,  
永远坚持远离疑窦。

(坦尼森(Alfred Lord Tennyson))

通常,在学校通过欧几里得几何引入论证。然而在新数学倡导之后,论证从英国的课程大纲中消失了。美国的 NCTM 标准对此作了改进,建议加强注意于

- 发展短小的定理序列
- 以口语和整句或段落形式表达演绎理由

减少注意于

- 作为一个完整的公理体系的欧几里得几何
- 双向证明

这样做的原因不难找到。森克(Senk)指出学了整整一年几何学课程的学生中,对6道几何论证题的选拔测试,只有30%的学生达到掌握75%。

欧几里得论证不仅是困难的,而且无法满足现代数学精确性的严格测试,因为它依赖于难以捉摸的直觉的空间概念。正如希尔伯特(Hilbert)十分简明地提出的,“人们必须任何时候都能用语言表达——代之以点、直线与平面——桌子、椅子与啤酒杯。”

但是按照桌子、椅子与啤酒杯的论证需要大量的丰富结论,而

这对年轻的学生来说是无法做到的。数学论证作为人的活动需要的不仅仅是对概念定义与逻辑过程的理解,而且还需要洞悉如何进行及为什么那么进行。塔尔请一年级的大学生对他们如下的标准证明加以评论:或用反证法证明2的平方根是无理数;或用另一种方法证明一个整数的平方总有偶次个素因数,因此任何分数的平方不可能是 $\frac{2}{1}$ ,因为这样素数2出现的次数是奇数。学生倾向于第二种论证,因为它对为什么结果是正确的给出了一种解释(即使它是以略为不严格的数学术语加以表达)。在向高等数学思维的转变中,数学上对认证的洞悉了解可以说比数学的精确性更为重要。

然而不用太久,就会在大脑中开始形成皱痕。维纳给学生两种中值定理(如果函数 $f$ 在 $a$ 、 $b$ 之间是可微的,并且在 $a$ 、 $b$ 连续,那么在 $a$ 、 $b$ 之间必定存在一点 $\xi$ ,使 $f'(\xi) = (f(b) - f(a))/(b - a)$ )的论证:

1. 标准的代数论证,运用罗尔(Rolle)定理于 $f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ ;

2. 形象化的论证,将图12.5中的割线 $AB$ 平行移动直至变成一条切线。

对这两种中值定理的论证,有29位学生感到形象化论证更有说服力,28位学生则偏向于代数论证,而71位学生认为两者都是一样的。令人高兴的是注意到一些现象,即学生就某个有效问题对几何论证提出批评——例如,它无法给出一个合适的算法,任意精确地找到 $\xi$ 点。但几乎所有的倾向于形象化论证的学生都认为它“清晰”、“明白”或“简单”,而倾向于代数论证的学生一般地评论说,形象化方法中某些是错误的或不合法的。维纳认为学生发展一种“代数学的偏见”,不是因为对代数学的进一步理解,而是因为“习惯、常规、简便及由‘环境产生’的而不是‘认知’的超认知思

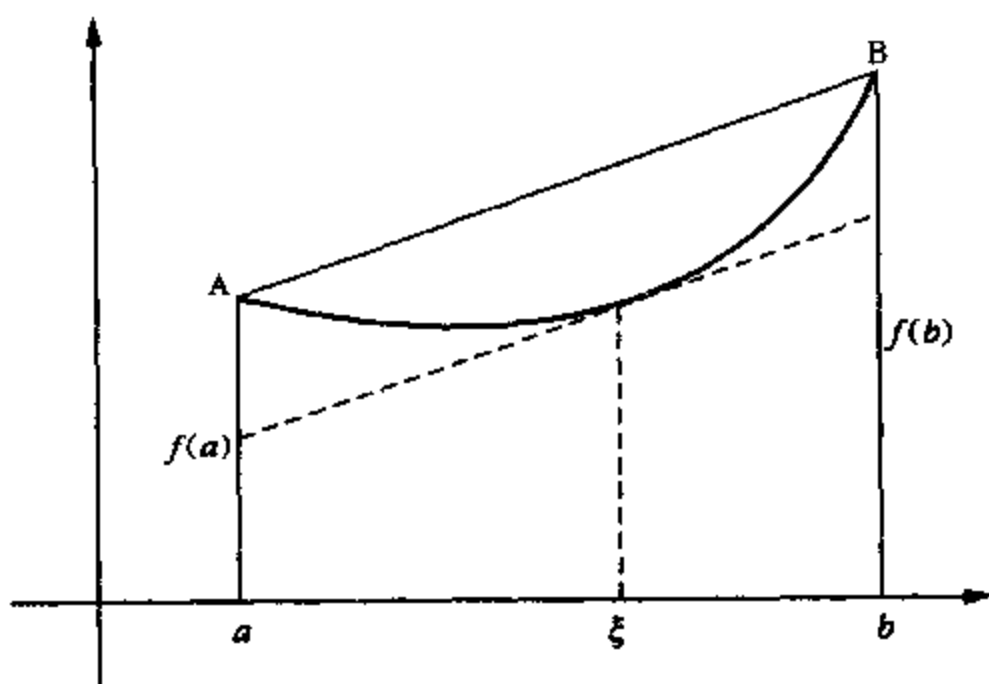


图 12.5 中值定理的形象化论证

想”。特别,他以当前欧几里得几何学的施教为例,认为是它撒下了种子,即认为形象化论证是不令人满意的。

在数学分析中,如此经常需要形式上的论证,似乎出自于某种忧虑,即担心某一事情可能是错误的,而不是出自某种确信,即相信某一事情正确。为了有一个判断什么是正确的良好直觉,需要合适的经验,能给出一个可能的概念表象的完整范围,而这些一般是大学生所缺少的。另一方面,具有将曲线放大的经验的学生可能会意识到一个图形可能会有细小的弯曲——一个说明为什么图 12.5 中的光滑图形不能给出完整的解释的确切理由——因而导致了形式论证的需要。

论证不是简单地和理由的形式表达有关,而是和学生自己的实现确信、确认及将对结果的确信同其他人进行交流的活动有关联。在过去的十年或现在,着重点有一个日益增长的变化,即从施教形式论证变为促进过程,包括调集信息、特殊化、一般化与提出并测试猜想的较为早期的阶段。梅森(Mason)、伯顿(Burton)与斯泰西(Stacey)发展了一种问题解决的方法,通过他们在公式化的猜

想中逐步增强的确信程度使学生建立起自信:

使自己确信。

使朋友确信。

使敌人确信。

第一层次需要学生以对他或她自己认为是正确的这一方式说明一个猜想;第二层次需要以能有意义地传达给其他人的方式明确表达这一猜想;而第三层次则需要以对付最为棘手的批评的方式组织、说清其理由。不过,如果达不到大多数职业数学家关于论证的含义:定理的逻辑演绎是从经过严格地形式化的概念定义出发进行的,这一系列事情就不会结束。

亚里贝特(Alibert)与他的格勒诺布尔(Grenoble)大学的同事发展了分析的课程,该课程包括通过课堂上的“科学的讨论”这最后一个步骤。这依赖于学生通过“相互作用、冲突与重新平衡”构造他们自己知识的思想,依赖于通过使冲突具体清晰,充分强调论证的需要并且把学生引入重新解决问题的思想。教师应该鼓励学生(在一个大约 100 人的班上)作出猜想,而不是简单地按逻辑序列给学生讲课,再配以书面的练习。例如,在引入积分的概念之后,教师可以说:

如果  $I$  是实数上的一个区间,  $a$  是  $I$  中一个固定元素,

$x$  是  $I$  的一个元素,我们设  $f$  在  $I$  上可积,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

你能对这一形式作出一些猜想“如果  $f \cdots$  那么  $F \cdots$ ”  
吗? 大约有 20 个猜想由学生用公式给出,例如  
如果  $f$  是递增的,那么  $F$  也是递增的



(这恰好是错误的)。然后对这些猜测加以讨论。学生提出支持或反对这些猜测的理由,而这些又必须使每个人信服。

在对一份问卷的回答中,75%的学生倾向于合作讨论的方法,而10%反对那样做,因为那样难以合作并且组织不充分。许多学生发现在引入新思想时那样的讨论特别有用,但更希望教师通过对所获得的知识的总结圆满地结束这样的讨论。

一些成功的方法正在数学教育中得到发展,以帮助学生增加他们在数学思维过程中的参与,包括对精确定义与逻辑演绎的必要性的理解。但是这些方法依赖于部分教师采取的根本不同的途径,而只有时间能告诉我们是否这些方法会被更广泛地接受。

## 思 考

让我们回过头去看一下已经收集的依据,其中有大量的资料证明了在学习许多高等数学过程与概念,如函数、极限、无限与论证中存在着严重的认知冲突。另一点似乎也是清楚的,即数学的形式定义(这是学科逻辑有效的基础)作为课程发展的认知根源,是不怎么合适的,他们太难以捉摸了,太一般性了,以致于日益增长的思维都无法一下子适应。这带有高度危险的冲突,这种冲突是在所遇到的特殊经验中对正规性的疏忽而引起的。每个人的大脑中都存在皱痕:教师、专业数学家、数学教育者、学生,都是如此。给定这一揽子困难,前而是否有解决的途径呢?

我们不应该太泄气。我们所谈到的数学文化是3 000(或是3 000 000)年人类共同思想的结晶。非常需要将这些多种多样丰富的经验或个人的学习经验凝缩至十年。有一点是肯定的,那就是如果我们在设法施教这些思想时不重视学生的认知发展,那么除了最聪明的学生之外,对其他的所有学生,我们的施教必定会失败——而且即使这些最聪明的学生也会由于他们的经验而在头脑

中产生含糊的皱痕。因此,专家有必要重新对个人的数学概念本质的信念加以分析,并且也准备以学习者的观点考察这些信念。

这一章所引用的那么多的研究都是建立在关于所考虑的概念特性的一些固有的、未提到过的假设上的。因此研究日程的第一步是帮助学生向高等数学思维的转变,必须弄清楚这些未提到过的假设,使研究者与教师能够感受到它们的存在。说明这些假设的依据的一个来源是和学生即时交流,这需要对所说的加以仔细地思考,不仅仅要了解学生所说的形式数学是如何发生冲突的,而且要将形式数学本身放入人类活动的观点中,设法把复杂的人类思维组织成一个逻辑体系。个人的数学思维认知发展理论,从最开始的到形式上的抽象,都需要对形式抽象本身有认知理解。

第二步是当认知重新构造的巨大过程发生时更详细地及时观察转变过程。这一转变包含了许多困难的认知变化:

- 以过程来考虑概念(函数作为一个过程,趋向于一个极限,潜在的无限),
- 将概念凝缩为一个单一的事物,并给出一个名称(函数作为一个事物,极限概念,真实的无限),
- 通过对按照定义给出的概念性质的抽象(函数作为一个有序数对的集合, $\epsilon$ - $\delta$ 极限),
- 通过逻辑演绎构造所定义的事物的性质,
- 概念的各种表达形式之间的关系(包括口头的、程序的、符号的、数值的与图形的关系)。

这些不是打算提出一个发展的等级。各种表达形式之间的关系纵向充满了整个体系,而概念的各个组成部分变得更为复杂。实验主义的依据通常认为,有必要在把概念凝缩为一个事物时,先熟悉一下过程。计算机能够执行常规的过程(例如画图),从而现

在可能给出一种新的学习策略。在研究内在的算法之前,这一策略以计算机所产生的事物作为关注的焦点。

第三步则是设计并测试学习序列,目的是为了帮助在向高等数学思维的转变中认知的重新构造。

到此为止,目的在于改进学习的研究——与简单地观察目前正在发生的一切的研究相反——有一个共同的思路。这种研究,在向更为高等的数学思维的转变中,通过帮助学生思考他们自己的思维过程并正视在进入一个更为丰富的、不再带有原有的固有信念的环境中所产生的冲突,能取得真正的进步。这样的智力增长是受一个灵活的环境刺激产生的,它提供合适的认知根源并帮助学生建立一个更为广泛的概念表象。为防止学生迷惑而设计的过于简单化的环境可能只会提供由学生抽象出来的明确规则,而在以后的阶段会引起严重的冲突。

在使学生向高等数学思维的转变的过程中,我们应该意识到数学的公式化与系统化是数学思维的最后阶段,但不是所有的活动。斯肯普在《数学学习心理学》一书中写道:

某些改革者试图以逻辑的发展表现数学。这种方式是值得称道的,其目的在于说明数学是可感知的而不是任意的,但它在两个方面是错误的。首先它混淆了逻辑的与心理学的方式。逻辑方式的主要目的是使疑惑者解惑,而心理学方式则是给出理解。其次,它仅仅给出了数学发现的最后结果(“即,你要做的一切就是学习这些结果”),并没有给学习者带来数学发现产生的过程。它教给学生数学的思想,而不是数学思维。

类似地,在高等数学阶段,仅仅利用逻辑发展的手段提出定义与定理,教给学生高等数学思维的产物,而没有教给学生高等数学思维的过程。

## 十三、数学教育研究的一些国际观点

Alan J. Bishop<sup>\*</sup>

在过去的 20 年里,我们见到了数学教育在国际范围内有了令人瞩目的发展。本书是在法国里昂举行的第一次数学教育国际会议(ICME)的 20 年之后编写的。当时来自许多国家的近千位人士走到了一起,开始认真地尝试理解各人对数学教育中各个议题的处理方法。在会议上,显然只有一个大会报告是直接地涉及到研究的——即贝格尔(Begle)的“研究工作在数学教育改进中的作用”。在那篇报告中,他提出这样的呼吁:

我看不到在数学教育中会有什么实质性改进的希望,除非我们把数学教育改变为一门实验性的科学,放弃那种建立在模糊臆测基础上的哲学性讨论,而代之以遵照一种仔细的相互连贯的观察与思索的模式——像物理学家和自然科学家所成功地运用的那种模式。

近 20 年之后,在布达佩斯举行的有 2500 人参加的 1988 年的国际会议上,有一个关于“教学法的教学与研究实践”的完整的课题组,它本身又组成 9 个专题研究组,称为“教师与研究的关系”,“教学实践的观察”与“理论-实践的关系”等。9 个组的主要撰稿者来自约 20 个不同的国家。

---

\* 作者比肖波(Alan J. Bishop)是澳大利亚莫那西大学教育系教授。

随着那个时期研究量的日益增加,不同国家从事研究的人数也在日益增多,从而研究观点的范围也日益开阔。当然,其中的一些观点在本书的前几章中已经有所反映,但本章的意图是关注国际上的一些观点,拟对它们作更为正式的描述,并反映出它们的重要性。

为什么把一些观点称为“国际性”的呢?由于不同的研究者有不同的偏爱,不就存在着不同的观点了吗?是的,如果这样的研究带有国家的特性,那么这一章的标题不就应该是“……的国家的观点”了吗?那么,为什么我们考虑国际的观点呢?

我的观点是,在我们研究领域的成长过程中,即使从前可以用国家的观点这种说法去描述大多数国家里有组织的数学教育研究的最新情况,但我认为如果我们现在还继续那样去做,那就不仅是更为困难,而且是相对地徒劳无益的。因为由于国际会议国际合作的研究以及来自不同国家的报告和期刊的增加;研究者显然受到国际上的影响的范围也就明显地有所增加。随着从事数学教育研究人数的增加,随着他们的想法更为公开和为大家所共享,从而在思想、方法、做法与期望方面所共有的国际相互影响也不断地有所增长。

虽然在不同的国家之间,可以看到方法上的一些相似之处,但是这种共同影响并未导致研究的统一性与一致性。倘使这种统一性确实存在的话,那就能导出可以称之为研究中的那种国际观点,并能把它像数学一样作为一个更为统一的领域加以描述了。但这种共同影响使研究者们对世界各地的数学教育中由于历史的、文化的、社会的原因而在方法上产生差异的一些关键性议题,有了进一步的认识。

这类认识的提高既带来积极的效果,如对不同探索方法的价值有了更多的理解,但也带来消极的影响,如对什么才是构成“合适”的研究上存在着乏味的、词语上的、权力上的争执。本章的目

的不只是为了记录与描述这类提高了的认识,也试图对它的发展指出有积极意义的方向。我们能从不同国家的研究者的研究实践中学到什么呢?我们如何能对他们的程序获得更多的了解?我们如何能积极地利用存在于我们每个人可能做的与别人可能做的之间的差异?这些比较能增强我们哪个方面的研究呢?

## 如何理解本章中的“研究”这个词

让我们先回过头去看一下我在第一段中所说的,在里昂的 ICME 上,只有一篇演讲明显地着眼于数学教育的研究。然而有几位其他的讲演者,他们可能没有强调调查过程的作用,而首先指出了研究是他们工作的一个重要部分,然后又指出他们所使用的研究程序的类型没有必要互相雷同。例如,来自丹麦的克里斯琴森(B. Christiansen)谈到“数学学习与数学讲授中的归纳与演绎”,其中描述了对 65 个班级所作的实验性教学,每班平均 25 人,六年级到七年级的程度。这个实验性教学是通过取得教师的非正式报告来评价的,而那些报告是记录教师在课程与教育方法作相当大的变化后所得的体会。

类似地,来自法国的高瑟(Gauthier)在“个性化教学的试验”中描述了由国立教育研究所在法国里昂地区对 30 位教师及他们任教的所有班级所进行的一些个性化教学的试验。在这一研究中,广泛地使用了工作卡片,虽然研究程序的细节在文章中没有清楚地加以说明,但是他们使用了“合作观察”的步骤,却是明显的。

里维(A. Revuz)在“分析的开端”中也报告了一些法国的研究,涉及法国中等学校内的初等分析教学的修改状况。他谈到了巴黎数学教育研究所(I.R.E.M)的教师们所作的关于新计划引入的效果的一些研究。

在一个更大的规模上,马库彻维奇(A. Markouchevitch)报告了

在苏联所作的研究“学校数学教育的某些问题”，参与者包括 500 位研究人员、学者与教师，对苏联普遍推行 7 岁 ~ 17 岁的义务教育教育之前的学校教学进行估价。柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov) 负责修订课程中的数学部分。

另一方面，当时在罗马尼亚的菲施拜因 (Fischbein) 报告了“数学教育与智力发展”，在该文中他描述了关于直觉的“心理教育”方式的各种研究，特别讨论了皮亚杰 (Piaget) / 布卢纳 (Bruner) 的争论。同时，卡斯特罗诺瓦 (E. Castelnuova) (意大利) 与佩皮 (F. Papy) (比利时) 也各自报告了他们亲自所进行的教学试验，谈及他们运用了一些新的实践辅助材料——卡斯特罗诺瓦运用了“使用重心概念的一些不同表达方式”有关的辅助材料，而佩皮则运用了她称之为“微型计算机”的装置。

作为另一个例子，克里哥夫斯卡 (Z. Krygowska) (波兰) 在“教学中的数学教科书”中讨论了数学教科书的作用，分析了使用中的各种问题，并提到在 14 岁 ~ 15 岁学生的班上所得到的一些观察结果。

这样，在第一届 ICME 上，我们已经明显地看到数学教育中的严肃认真而有系统的调查是几位数学教育家的宝库中的重要部分，但另一方面也是清楚的，在方法上存在着一些差异，特别在像这样的问题上：课堂的事实中哪些该被使用？关于应收集何种论据的理论，有多大的必要性？研究的目的是什么？研究应当如何与当前的实践相联系？论据的样本应当多大？

我在这一章中的任务并不是要去对我们研究领域中所使用的不同研究范例作定义、描述和进行分析。然面对我来说，有一点是必要的，即搞清楚在本章的研究标题下我该考虑些什么，这有两个主要的原因。首先，这一点之所以必要是因为任何作者的研究意向都不可避免地影响着他们的章节中出现的观点。其次，还因为本章的特殊任务是为了回顾研究的国际情况，而没有一个人能在

国际舞台上做一个中立的观察者。

我持有这样一种看法,即我们领域中的一项工作想要有资格被称为数学教育研究工作的话,它需要具备三个组成部分:

- 调查,它涉及研究活动的原因。它表达对知识的系统探索,寻求理解,并给出研究活动的推动力。研究必须是有意识的调查。
- 论据,这是必要的。它是为了把研究同研究中的数学教育实际情境联系起来,这些实际情景或是课堂,或是教学大纲,或是教科书,或是历史的文献。论据给出所集中研究的实际的一种样本。
- 理论,它对价值、假设与普遍关系的存在性加以确认。它是我们对得自任何特殊研究的知识与理解的一种表达方式。理论是研究活动的最本质的产物,因此理论工作是研究活动的基本目的。

这三个组成部分,在我看来都是必要的,尽管对调查、理论与论据是由什么构成的以及三者之间的关系如何还存在着不少的争论。基于我在这一章中的任务,我对所有这三个组成部分将接受一种开阔的定义。

但是,我愿再三表明:某些活动,例如单纯的数据积累、偶然发生的事件的报告、抽象分析的细节、提出“脱离实际”的推测、一门课程或一堂课的计划、一些教学材料的设计或测试的安排等,就其本身而论,并不构成研究活动,即使每种活动可能在某个阶段对研究过程有所贡献也罢。事实上,许多研究是在对与数学教育有关的各种活动(如,材料撰写、课程设计、课堂教学与儿童评价等)作为问题进行考察的基础上发展起来的。如果说研究的目的是为了改进数学教学的话,那么检查一下与数学教学有关的正常活动,看看是否对改进造成障碍,显然是有意义的;也就是说,看在什么程度上,它们是解答的一部分,而不只是问题的一部分?但是那些活动本身却并不是研究活动。

那么我们应该如何理解第一届 ICME 会议上其他三个大会演



说呢？它们也具有高度的学术性与“研究性”的面孔。这里我指的是瑟维斯(Servais)、斯坦纳(Steiner)与罗森布卢姆(Rosenbloom)的演说。这并不是贬低或忽视其他演说的价值，而只是因为他们没有对本章的主题说明很多问题。

这三项研究都与数学内容教学的方法试验有关，但他们的侧重点主要是使数学内容更容易为学生所理解。瑟维斯(比利时)在他的论文“数学教育与逻辑”中谈到了使用开关电路来辅助逻辑关系的教学，斯坦纳(西德)讨论了“度量与有理数——一项教学分析”，而罗森布卢姆(美国)则讨论了“矢量与对称”。所有这三个演讲者都从教育理论的观点出发，对他们的课题做了广泛的数学分析。他们显然不是单纯的“脱离实际”的思辨。然而他们对他们的实际教学仅仅作了简要的讨论。

那么，我们怎么对待这些学术性成果呢？是把它们看作研究工作呢，还是看作研究的预备阶段，抑或研究的变种，或研究的应用呢？它们在哪些方面符合本书及本章有关的数学教育的研究纲领呢？

如果我们想要把国际研究舞台的情况搞清楚的话，那么我想提出一种可行的方法，去把那些工作理解为是研究工作，但这是从一个相当不同的传统来说的。1969年的ICME是第一次时机，把这么大的一批国际数学教育者聚集在一起，去思考数学教育的问题，并且对大多数到会者来说，那是第一次有机会来评述我们领域中重要研究的不同方法。演讲者来自不同的国家，而更重要的是，他们来自相当不同的研究传统。

研究传统与研究范例非常不相同。一个人无法选择研究传统，但可以选择研究范例；人，作为培养、教育、文化背景与研究训练的结果，他是传统的一部分。从我的书本知识与分析来看，有三种很不相同的研究传统，我认为它们概括了关于数学教育研究的国际观念，并且是在第一届ICME的演说中部分地得到了说明。

我把它称为教学法传统,实验-科学家传统与经院-哲学家传统(这一分析与哈伯迈斯(Habermas)1972年所作的分析有某些联系。哈伯迈斯的分析后来由卡尔(Carr)在1985年扩充到教育的研究中去。卡尔在他的论文中论述了历史/注释学的,实验-分析的与批判性科学的传统及它们的价值所在)。

教学法传统可能是最古老的一种了。苏格拉底(Socrates)、夸美纽斯(Comenius)、裴斯泰洛齐(Pestalozzi)与福禄倍尔(Froebel)的名字经常与这一传统联系在一起;而更新近的、更数学化的,则有波利亚(Polya)、贝伯曼(Beberman)、加蒂诺(Gattegno)、迪安尼斯(Dienes)与弗赖登塔尔。这一传统赞赏天才思维与善于思考的教师的作用。教师被理解为一种行业的实践者,不断地为改进他或她的实践而努力。在这一传统中,研究是成为一个好教师的一个组成部分,而实验与观察是研究的关键部分。这一传统含有强烈的人文主义与个人价值因素,并伴随着一种朝着开明进步的教育理想的倾向。

在这一传统中,研究报告大部分是为了传授专家实践者的智慧和他们的施教方法。波利亚、贝伯曼、加蒂诺、迪安尼斯与弗赖登塔尔的思想被认为是具有高度重要意义的;这一传统中的理论在于阐发这些专家教师的成熟思想,认为它们的可接受性,在于它们对所有的教师来说都是直觉地正确的。所提出的论据通常是经过严格挑选并有代表性的,它或者说明一个天才儿童做出了什么事,或是说明一个最迟钝的学生在安排做些什么事。研究的方法简单得令人不可相信:作为教师就要机灵和有创造性,要大胆地在你的学生身上尝试你的设想,然后观察、观察、再观察。“在和学生一起学习中,向学生学习”,看来这是他们的信条。

在1969年的ICME上,卡斯特罗诺瓦与佩皮的论文严格地遵循这一传统,而其他的论文则受到这一传统的影响。两者在报导中都用学生在教学中做出重大贡献的例子去说明创造性教学的一

些面貌。他们的报告企图以例证的方式使人信服。其思想是试图成为直观上合理的,以从学生那里观察得到的结果使人确信,其调查的方法是清楚的,数学教学的开明-进步的改良目标也是清楚的。这一传统至今依然活跃,今天对此最好的说明可能是数学教学研究与促进国际委员会(CIEAEM)在它的年会上的工作。

第二种传统,即实验-科学家的传统,这是教育中较为新近出现的一种现象,并在1969年ICME会议上贝格尔的论文及他后来的文章中得到十分详尽的描述。在这一传统中,论据被认为是获得知识的关键,研究的过程就是着重于取得论据并且加以分析,通常是作定量的分析。一个激进的实验主义者可能认为在ICME上的许多研究报告是不能被接受的,只有非施拜因的报告可能是例外。较为温和的实验主义观点会认为一些前面已提到过的研究是受到这一传统的影响。然而前面提到过的卡斯特罗诺瓦与佩皮的数据资料将不为这一传统所接受,因为教师去充当论据的收集者是最不合时宜的。论据应该尽可能地客观,不容置疑。分析通常是预先拟定的,标准化的,以致于由分析得出的结论对所有研究者都是相同的。

在这一传统中,研究方法是非常重要的。的确,人们尽可能地试图把教师个人的影响减少到最小的程度。改进数学教育是这个传统的一个最终目标,但它要求这目标产生于相关论据的逐渐积累。这种研究报告的优劣是以论据的质量与所使用的研究步骤来加以判定的。要求所用的研究步骤是遵照一些已被认可了的研究步骤来执行的,而论据则必须参照一定的理论来解释。

如贝格尔所主张的,激进的实验主义者将使数学教育像自然科学一样转变为实验科学,根据主要论据来衡量有争议的理论之间的争端。正如我已经说过的,在1969年ICME上,接近于这些苛刻准则的唯一的论文只有非施拜因的论文了,但贝格尔的呼吁受到了许多数学教育工作者的重视,今天实验-科学家的传统在

数学教育中比那个时候占有更为优势的地位。数学教育研究杂志长期与这一传统相联系,而且我们也可以看到它对数学教育心理学国际组(PME)历届年会的许多工作施加了影响。

第三种,即经院-哲学家的传统。这一传统也有长久的历史,在这一传统中,教育是作为人文学科之一。其中分析、理性的论理、批判都是重要的,而实际的教师、实际的课堂只是理论上的教育情境的有点不那么完善的表现形式。这一传统长期以来对数学家与某些数学教育工作者一直具有-一种吸引力,其原因也许是因为它的柏拉图式的方法,以教育的抽象与批判性的论理作为它的基本部分。

我认为,1969年 ICME 上瑟维斯、斯坦纳与罗森布卢姆的报告与这一传统相符。其特点是广泛的理论上的与教法上的分析,而仅仅最低限度地参照论据。瑟维斯只报导了很少-一些有关学生活动的例子,而那也只是为了说明依他的方法能得到什么结果,以及作为一个优秀的教员他应该做些什么。斯坦纳在他报告的结束语中,比较清楚地说明了论据在这一传统中的作用。他说:

以上所提到的许多复杂的内容有待于进一步的发展与试验。这对于在学校数学中关于数量体系的使用尤其是如此。基于精确的数学理解,我坚信对它将会找到合适的施教方法。

罗森布卢姆在他的评论中显得不那么乐观。他说:

当向量几何在实验性的大纲中被引入到高中时,可能难于保证学生连续地年复一年地参与学习。否则,我们早几年的直观印象就不可信赖了。当然,在大多数国家里,师范教育存在着严重的问题。

这一传统下数学教育的进展意味着不完整的现实向完整的理

论接近。这里的进展是指更多的批判与思考意识的发展,而真正的研究目标则是在假设论据为已知的条件下,通过分析与批判来发展理论知识。这一传统目前依然存在,也许关于数学教育理论(TME)的国际小组的工作是对此的最好说明。

由此可见,论据与理论的作用在这三种传统之间各不相同,其调查的目的各不相同,如下面的概要表格所示。但是,研究工作的三个组成部分都可辨认出是存在于某些作用之中。

| 理论       | 调查的目的         | 论据的作用           | 理论的作用             |
|----------|---------------|-----------------|-------------------|
| 教学法传统    | 直接改进教学        | 提供挑选出的与示范性的学生行为 | 揭示专家教师所积累的智慧并加以传播 |
| 实验科学家传统  | 解释教育现实        | 客观数据,提出需作解释的事实  | 解释性的、以数据为准加以检验    |
| 经院-哲学家传统 | 建立严格论证了的理论的地位 | 假设为已知。否则有待于发掘   | 教育现实要达到的理想情景      |

基于本章的目的,我已相当直率地刻划了这三种传统,如果有任何同行对我把这种刻划用到他们身上而感到不愉快的话,我向他们表示歉意。这些刻划只不过是其他分析的一个预备性的结构框架。

我说是预备性的,是出于以下两方面的原因。首先我感到它代表的是 20 年前的研究。我审慎地选择了 1969 年的 ICME 作为我的出发点,是因为它在我们领域的近期历史中是独一无二的。这样的事不会再出现了。虽然我已经指出,我们仍然能看到一些研究小组、会议与论文,它们主要地遵循着这里所提及的三种传统之一,但更多的情况是:现在的调查研究在一定程度上是受到所有这三种传统的影响。

其次,这是从一种国际观点出发去作分类的一个初步尝试,就我看来,这种观点比起按国家的分类来,对于本章其余部分中要处

理的那些重要课题是更为妥善。这一选择还可以通过提出“对于数学教育研究的国内观点我们了解到什么程度？”这样一个问题来进一步加以证明。在数学教育中是否存在一种典型的美国式的调查研究、典型的英国式的研究方法或典型的德国式的研究传统呢？显然，的确存在着一些现象，被那些生活与工作在国外的人看作是有重要意义的。例如，英国人被认为事事都喜欢讲究实效，对研究工作也是这样，荷兰人的研究看上去与课程的发展有密切关系，德国人显然看重教学法的分析，法国人正在通过他们的教学法研究所去发展一种看来是新的传统，俄国人创造他们的教学实验，而实验主义似乎正在成为北美研究的标记。

但这种方便的标签是否真的描述了各个国家的特点了呢？英国就没有理论上的发展么？在荷兰是否没有这样的人，他并不从事课程的发展研究呢？德国或法国是否没有实验主义者呢？所有的俄国的工作都是实验性的？是否没有一个北美的研究不是实验主义风格的呢？就我看来，以国家这一主题词作为分析的工具可能是徒劳的。

但是，按照刚才列出的三种传统，我们确能理解不同的国家内的一些发展的。例如，我认为英国同教学法传统有强烈的联系，而这种传统，如我们所看到的，它带有强烈的现实主义与重实效的情绪；而在荷兰与斯堪的那维亚，则教学法传统与经院-哲学家传统并行不悖；德国与法国的研究者也强烈地受到后者的影响，但同时带有他们不同的社会-政治风格；俄国与美国则与实验-科学传统有强烈的联系。

读者对这些评价同意或不同意的程度，肯定是不同的，但我希望任何研究者都能用这三种传统的描述去思考他们各自的研究活动。此外，我还要预先指出一种到处都可见到的倾向与状况。教学法传统，例如在亚洲与非洲是众所周知的，实验-科学家传统是植根于对现象作系统的观察，这是每个洲的科学家都知道的一种

做法；而经院-哲学家传统是植根于辩论的语言，这也是众所周知的事实。因此这些传统在所有的国家里都有某种程度的存在，并且它们将为我们提供一种比简单的国家主题词更为满意的国际分析的基础。

## 数学教育研究中的关键性关系

从国际的观点看，在进行数学教育的各种研究时，某些关系显得非常重要；它们之所以重要是因为它们向我们描述了不同社会与国家的研究者在完成他们的任务中所采取的方法。像本章这一章的价值之一就在于它超出了对各种方法作单纯的比较，而能帮助那些从事研究的人能从国际环境所给出的更宽广的视野来理解他们的工作。而且我坚持认为，任何一个想决定要做什么研究与如何进行研究的人都避不开考虑这些关系。这就是为什么我将它们称为关键性的关系的原因，并且国际的观点比任何国家内部的分析都更能说明这些关系。

我在本章后文中将考虑的关键性关系是下列的一些：

1. “现在是什么”与“可能是什么”
2. 数学与教育
3. 问题与研究方法
4. 研究者与教师
5. 研究者与教育体系

### “现在是什么”和“可能是什么”之间的关系

我将这一关系放在第一位是因为从调查一开始就会提出这一点，并且因为对一个研究者而言，这一点可能比任何其他的关系更能决定后面的诸关系间的均衡。一个人在多大程度上宁可关心于对当前教育状况的研究，而不去关心对将来可能的教育状况进行

研究呢？对某些经过教学法传统训练的人来说，他对数学教学的改进会有直接关心（不管准则可能多么分散），而除了开始时他无需去揭露“现在是什么”；对于经院-哲学家而言，可以看到更多的是“应该是什么”，是命令式的；而对于实验-科学家来说，直接关心的是“现在是什么”以及怎样去解释它，而改进只能是慢慢地来。

这一关系中的对比，可以用现状研究和探索性研究的对比来作清楚的说明，前者主要地要看“现在是什么”，而后者则更多地关注“可能是什么”。许多现状研究的存在有着两个主要的原因。首先是它明显地受到实验-科学家传统的影响——表达了这样一种观点，即自然科学的研究主要是关心于理解现状而不是去改变它。改变，那是别人的任务，而不是科学家的任务。第二个原因与个别国家的教育组织有更多的关系。在不是中央集权体制的地方，例如欧洲的大部分、美国与澳大利亚，数学教育的做法十分多种多样，因此很需要说明实际发生的事情。这就是为什么在这些国家中调查研究的方法如此经常地被讲授和为研究者所采用的主要原因。在比较中央集权的教育体系的社会主义国家和亚洲与非洲的许多国家中，发现该系统中所发生的事的需要对研究来说并不是一种十分重要的刺激。这当然并不是说在有中央集权的体制里，缺乏对那些系统正在发生的事情的知识，也不是说每个人都知道正在发生着什么，而是说在非中央集权的体制里，做法的多样性是容许的，它对研究成了一种有力的激励。当一个研究者越出了仅仅是获取实践的数据的范围，那么那些体制中的各种不同做法的多样性和分歧自然就会被看作为各种思想的源泉。

然而，调查不是发现教育过程中“现在是什么”的唯一方法。我们已经看到在一些国家中越来越多的研究者运用个案研究的方法去更好地关注个别的情况，去观察学习者、教师或者特殊的课堂。这些研究往往从一个心理学的观点开始进行，但近来人类学的方法已经被运用。也许“现在是什么”的方法确实被这些方法更



恰当地说明了,因为心理学家与人类学家都显然感觉到他们不是试图改变现状而仅仅是研究现状,这就有力地反映了他们实验主义的立场。

这一尺度的另一端是探索性研究,其明确的目标是在数学教育中寻求“可能是什么”。这种研究经常以教学法传统的形式出现,有时带有创新的与非常规的特点,但它们也会受到经院-哲学家传统的强烈影响。好的探索性研究应该是强有力的论理与论证的研究,因为它对社会的与政治的投资承担着责任。搞探索性研究就是向现状挑战,并且为了能进行这种研究,研究者需要有整套的和良好的技能凭证密切结合的理论分析和逻辑的武器。当然,我不是指那些在教育规范内易被接受的那些做法,而是指对社会内不管教育规范是什么都将提出挑战的思想的发展。在数学教育中,我们的确看见过一些有力的理论性的议论,它们提出了一些新的思想,为一些实验性的、创新性的活动所遵循。过去这类实验兼有小规模的,如带有构造装置的实验,和更大规模的,如在新数学时期所见的那样。现在,许多关于微型计算机的开创性工作是属于小规模的探索性差别,是对当今社会许多教育与数学规范的挑战。

存在于上述两种极端的研究之间的紧张状态,有时候被人说出来了,但很少被认真地写下来过;“现在是什么”的研究者可能会指责“可能是什么”的研究者忽略了现实情况,不知道该从何处着手,指责他们胡作非为,而不是搞真正的研究,甚至指责他们只在卖弄知识。而“现在是什么”的研究者同样也会被指责为支持一些不明确的教育价值观,着迷于收集一些所谓的客观事实,好钻牛角尖和缺乏教育理想的信仰。当然,这双方是能够互相学习的,而每一个研究人员必须按他们的社会和政治情况去做出适当的均衡。对此,我们将在最后一个关系的讨论中作更多的叙述。

## 数学和教育之间的关系

这一关系在数学教育中对每一个研究者来说都是关键性的,因为事实是这每一方面都能将研究导向非常不同的方向。教学法传统与实验-科学家传统都突出地关注于教育,而经院-哲学家传统则强调数学,这可以由以数学的“初等化”作为教育目的来加以说明。

对那些属于教育范畴的研究者来说,数学教育中的问题显然只是教育中问题的一部分,而对着重于数学的研究者而言,在研究中突出数学的独特性是至为关键的。对那些遵循现代科学家传统的人来说,问题是一种恰如其分的一般化;是研究的对象能否扩展到其他的教育情境或其他的数学情境。对现代教学法专家来讲,这一特殊关系的困难在于它本质上没有关注儿童;如果说“教育”意味着对儿童的关注,那么毫无疑问,教学法专家的同情就该给儿童。对经院-哲学家而言,看来是:关于数学问题的讨论,为数学教育的研究提供了基础。

从某种程度上来说,研究者的立场是由研究者工作的机构类型而完全确定的。在有些国家里,有了一些数学教育的专家研究中心,但在大多数国家中,研究者或者在教育部门,或者在数学部门中工作(例如,在各自的大学、学院、系或政府机构)。这一情境不可避免地影响他们,并决定着研究中是否教育占优势,其中数学所占据的位置可以由科学或语言替代;或者研究中数学占优势,以致在大多数情形下,把数学教育看作为一种数学训练,而在这一过程中,忽视了对整个儿童的教育。

教育占优势的数学教育研究将倾向于将数学看作为一种可一般化的、往往无差别的概念。在这种研究中由于关注于像教师态度的影响之类的教学问题,数学教育领域中的这种研究就有可能通过例如教师与学生对待数学的态度,并结合数学上成就的衡量来加以探索。只要运用数学概念与技能的有代表性的样本,就可

以进行研究,一般地人们就能作出数学方面的推论。在数学领域中取样时,通常会用标准化的数学度量,并且重点会放在所涉及的教育问题上。使用的有关理论也将是教育学方面的,并且这个研究领域会继续地受到其他教育领域研究和理论进展的强烈影响,受到其他冲击教育学的学科,特别是心理学、人类学、社会学和哲学的影响。

然而,在数学教育中更倾向于数学的研究者不满足于在数学范围内作广泛的取样;依他们的看法,各种数学思想的特点应被抓住和表达出来。几何与代数是不一样的,而算术与这两者都不一样。但是由于能发现每个数学领域都能引起其本身的独特的教育问题,因此人们作出了比上述更为精细的区分。在欧洲大陆有着坚强的基础的称为数学教学法的研究领域,从教育的观点出发,用这种方式集中全力于数学概念的详细分析。它清楚地是属于经院-哲学家的传统。数学课程的研究同样大量地属于这一传统,使用这一传统的和许多心理学研究所用的研究方法。然而,过度地划分是极危险的,科学、语言、艺术与技术的教育方面的令人激动的发展会逐渐地被忽略。但显然在研究中对数学细节的关注在我们的领域中一直有着强烈的影响。事实上数学教育之所以成为一门独特的学科,主要是由于数学与教育两方面的相互关系的增长而形成的。

### 问题与研究方法之间的关系

这一关系在任何领域中都是关键性的,对数学教育的研究者来说,也不例外。三种传统中的情景是清楚的:教学法专家关心新程序与新做法的发展;实验-科学家关心发展标准化的论证方法以解释现实;而经院-哲学家则关心理论分析与论证的质量。

实验-科学家的传统在应用的方法上显得最为保守,而其余两种传统更为关注所产生的思想与观点的质量,而不是所使用的方

法。当然,就研究质量的准则而论,科学家的传统表现为最注重于方法。例如,在那个传统里,认为研究方法是可传授的——可采用的课程与书本说明了这一点。对其他两种传统而言,方法远没有取得的观点那么重要,例如要找一本关于“如何成为一个好教员”或“如何成为一个教育方面优秀的经院-哲学家”的书都是很困难的。

显然,研究程序同论据是紧密联系的,它必须有方法证明;论据和实验-科学家所关心的随机思想、控制程序、样本质量和其他的统计概念与方法,对研究的目的而论,是互相妥善配合的。但是,除非实验的情境选择得很好,且在理论上是重要的,否则研究中所产生的一切都只是更多的论据,就其本身而论,是没有多少价值的。对此,前面已经指出过。相反地,这种方法的价值与作用在于,当被用于有趣的、完全理论化的问题时,它会产生重要的、有趣的数据,从而增加我们的理解。也许,如果这一方法只是为了达到解释的目标,那么对理论的注意可能是比应该做的要少。

对数学教育所作的实验-科学性研究,它有一个特点,即它的重要的研究发现好像很少有被人重复验证。试想皮亚杰的研究在世界各地被重复验证,而任何其他的研究却很少有这种情况,这就不免令人惊奇了。显然,对重要的研究进行复验是自然科学的一种传统,因此在众多的自然科学家的原则被教育科学家所确认,而唯独忽视了复验这一关键性原则,自然令人感到疑惑不解了。这不只是为了证实如皮亚杰的这种特殊的理论,而是为了通过设法对特殊有意义的情境的复验,去帮助理论的发展。也许是杂志的编辑并不欢迎这种复验性的研究工作吧。

当然并不是说以方法主导的研究只出现于实验-科学的传统之中。在经院-哲学家与教学法专家的研究中也存在着方法;例如,逻辑分析与理论性议论的质量在经院式的研究工作中被认为是重要的。如果假设事项是有根据的,逻辑推理稳妥有力,那么结

果一定是正确的。但是和科学性的研究工作一样,它们是否会引起兴趣和关心,那将依赖于出发点和所涉及的问题。

对教学法传统的研究者来说,主要的方法是与获取有见识、有意义结论的能力相配合的观察活动。因此在研究的质量以及结论的切合实际方面,敏锐的观察将是一条重要的准则。教学法研究者的报告是通过可信性与读者所领悟的重要性来加以判断的。很少有人能重复迪安尼斯、加蒂诺、贝伯曼、波利亚或弗赖登塔尔的方法,但是,他们的观察、思想与理论却在我们的思想中产生了深远的影响。

由此可见,以方法为主导的研究有利也有弊。那么,以问题为主导的研究又怎样呢?在我们的领域中,真正的以问题为主导的方法在过去被认为是不可能的,因为只有少数的研究程序才被认为是正统的。但是现在有了更多的社会学的、人类学的与人种学的研究方法出现,而且人们也认识到了它们的价值,从而着手进行真正的以问题为主导的研究,其可能性就大得多了。但是,这种研究该用什么准则去衡量呢?怎样对它进行判断呢?方法研究者会认为:如果缺乏方法论上的准则,那么这种研究是无意义的。问题的研究者可能是从所考察的问题能说明些什么这个角度来判断研究的质量的:即对于问题过去还不清楚的方面,研究工作告诉了我们一些什么东西?

当然,实际问题可能并不会被研究者真正地解决,但研究的目的是在于运用某种显得合适的研究程序去对问题做些阐明。这就意味着在这个问题上使用某些科学的方法可能是有意义的和可行的;在以问题为主导的研究中并不排除任何的方法论。一些研究者在阅读克鲁捷斯基(Krutetskii)的文章时会感到十分惊奇,他们首先看到作者对他人使用因素分析法的尖刻攻击,而后来又看到克鲁捷斯基本人也使用了因素分析法。当然,这并不是说这种方法是正确的还是错误的,而只是说克鲁捷斯基认为这一方法对第

一个问题是不合适的,但对第二个问题是合适的;对于克鲁捷斯基那样的以问题为主导的研究者来说,不存在正确的或错误的方法,而仅仅是更合适或不怎么合适而已。事实上,尽管我个人感到以问题为主导的方式看上去是教学法方式的一种延伸,但它能够影响到研究的所有三种传统。教学法传统的进步状况提出了所要解决的教育问题的思想,并且我觉得已经发生的是其他方法与技能已包括在那个方法之中。

克鲁捷斯基的故事说明了另外的一件事,是涉及到研究者是否应该在选择与提出问题中,在确定使用的研究程序中,同时也在对结果的分析与理论化中起到强有力的作用。以方法为主导的研究方式贬低个人研究者的作用,并倾向于否定整个活动中人的因素,从而强调他们所认为的方法的“客观性”。而另一方面,以问题为主导的研究,其成功与否,依赖于研究者个人特有的品质。在有些地方,研究者像艺术家,像工艺工作者,或者确实像教师,他需要在技术与任务之间,在问题与方法之间,在他们的教育体系所允许的范围内,努力达到他们自身的均衡。

## 研究者和教师之间的关系

这是数学教育中尤其重要的一种关系,因为数学教育是一个明显地与实践相关的领域,并且很显然涉及其他的专业人员,如教师。在教学法传统中,以前的研究者就是教师。这种传统今天依然继续着:由教师进行一些研究活动,而研究者经常就是善于思考的教师,例如在实验性的学校里对儿童试行某些想法。对其他两种传统来讲,其区别是明显的。经院-哲学家没有成为教师的意图,而满足于对数学教育的情境设计一种合适的理论框架。实验-科学家同样地与教师相分离;事实上,在这种传统中,教师根本不是什么研究者,而是科学家研究教/学情境,而当那情景包括了教师时,教师也就是研究的一个客观对象。

的确,就后两种传统而言,教师与研究者的作用是不一致的:教师必须以一种直接的、促进的方式行动及与学生相互作用,而在一种传统中,研究者需要思考与分析;在另一种传统中,则需要敏锐观察,并关心数据的收集与分析。此外,重要的还不只是作用上的不一致。人们以为教师是实践者,他的实践需要由研究者的研究工作去加以报导。这样,我们在这里就看到一个明显的层次:研究者向教师通报信息,但反过来却并不需要。这样,在某种意义上,科学家与经院-研究者起着“专家”的作用,而教师则是或者把研究者的个人建议贯彻到他的活动中去,或者把研究者的工作所制成的任何教学材料拿来使用。

在另一层次上,根据这两种观点,数学教学的分析与研究在研究中会把教师作为研究中的客观对象而不是主体。教师的个性与人性要尽可能成为无关的,它甚至于被认为会产生迷惑的影响。譬如说,在许多科学性的研究中,就是蓄意要消除教师的个人影响;而在哲学的分析中,教师,如果被考虑的话,将被看成是无差别的客观对象。这些传统对儿童的处理,也采用了同样的准则。儿童仅仅是舞台上的或一些特殊类型的例子,只是某些错误或技巧的表现者,或者是某些能力与观点的持有者。他们很少被认为是年青人。

如果研究者确实认为他们的任务是帮助教师改变他们的实践,那么研究者与教师联合进行研究应该更为合理。事实上,这类事正在越来越多地发生,但可能还不够。例如在数学教育关于性别的研究中,我们仍可以见到某些对于现状的研究,在他们的结果中,指责教师的一些不好的做法,而在研究者与教师结合起来设计用于帮助女学生在数学上取得进步的方面,却缺乏足够的更有用的探索性研究。当然,情况可能还是那样,即研究者认为他们的作用只是发展人类的知识与理解,那些知识应该用来做些什么,那是其他人的事(例如,政府教育官员、课程设计者或师范教育工作

者)。

特别是,在世界上的某些体系中,对教学材料与辅助读物方面的投资显然大大地多于师范教育方面的投资。虽然这类说法很难找到论据加以支持,并且很易受到非难,但看看例如俄国与美国在发展教学材料方面尽了多少人的努力,这也是有意义的。正如所料,在一个高度集权的体系中,例如在俄国,由教科书所施加的控制作用是突出的,因而数学教育中的研究更一般地指向教科书的建设,而不是指向教师的发展。而在美国,恐怕是由于与缺乏高质量的数学教师有关的理由,也对研究作了大量的投入,使得能在教科书的建设中加入某些新的思想。这种倾向也是受到了实验-科学家传统的影响的,在这个传统中,研究的成果会变成工具而形成新的科技产品。

在那些具有较重的教学法传统的国家里,如西欧与亚洲的部分地区,发展了更多的、承认在教学情境中教师的中心地位的研究。因而在如英国、法国与荷兰这样的国家中,关于数学教学的研究不仅是由教师参与协作完成,而且经常地是由教师指导完成的。教师作为一个行动研究者,这是一种十足的与教学法相关的模型。在英国的教师中心,在法国的 IREM(数学教育研究所),及在荷兰的数学教育发展研究所(IOWO),研究与教师培养几乎是同义词,以致于其他传统的研究者评论说,这些活动只不过是教师的在职教育,而不是正规的研究。

在教学法传统中质量的标准是难以描述的。就其本质而论,研究的质量依赖于有关的教学法专家的个人影响与声望,因此他们会被人指责为他们只在制造新的教育时尚或风潮。然而,高质量的教学法研究,将纪录并详细论述它所寻求的目的,论述创新的教育事件的社会内容,论述对学生的观察与教师的行动与感受,和最好是所有参与者事后的思考,所有这些描写是打算为教师和其他像教师那样的研究者而做的,它们需要仔细地加以阅读。与



教学法有关的研究叙述不宜精简或压缩,它的威力在于它的丰富,而不在于任何简洁的理论框架。波利亚或弗赖登塔尔的教学智慧是不能简单地以“发现学习”或“以学生为中心的教育”来理解的。这些教育家的智慧表现在高度理论化了的和精巧的创新做法上面,表现在对教育情境的带有感情色彩的详尽描述和对经验的有见识的分析之中。

尽管这一切看上去复杂,强调教师-研究者关系的重要性的观点似乎正在流行,因为从其他的研究来看,显然的是不论教科书或教学材料如何好或如何差,实际老师的作用还是关键性的,不容忽视。

这一关系的另一重要方面是研究应关注于数学的教还是数学的学。与儿童有关的以及与他们如何为掌握数学思想而努力有关的数学教育研究有着很长的历史了。这一研究显然与教学法的传统相联系。在含有大量的对学生观察的研究中,人们可以看到对教师的作用与地位的尊敬。如果我们离开这种传统,而走向那种把他们的理解建筑在细致的统计分析的基础上运用复杂的测试材料的科学家传统,那么他们那些思想可能对教科书的编著者或者是课程的制订者更为有用。

同样地,在与施教数学更为有关的研究中,我们可以见到一些对教师和他们的人文工作表示尊重的例子,也可以找到那种把教师作为研究对象,并作为一群变量中的一个变量的例子。在这里,我们再一次看见,前一种研究可能对那些在教师的发展领域工作的人更有价值,而后者则可能对教科书与材料的设计者更为有用。

在对研究带有强烈的经院-哲学家传统的国家里,人们可以发现其对课程问题更为关切。事实上,如果说,对于教学法传统说来,教师与学生是中心议题;而实验-科学家则强调情境条件,从而将其思想灌输到学习材料、研究工作与教科书中去,那么经院-哲学家似乎是把数学课程与教学计划看成是数学教育所要解决的主

要问题。在我们所讨论的关系里,还可以指出有大型课程研究(那些导致建设更好的整个学校课程与计划的分析)和微型课程研究(那些与教师局部地关心的事以及小规模课堂小组更为有关的分析)之分。将教师看作微型课程建设者的这种认识在许多国家中还不存在,而它即使被认识到了,也不一定被认为是一桩值得重视和值得发展的事。在那些确实认识到这一点的地方,逐渐注意到了师范教育对发展教师自身的数学知识与理解力的重要性。

这样,这一关系有着许多重要的方面。也许最后我们会思考人们怎样成为研究者这一问题。我推测在数学教育中从事研究的大多数人是或曾经是中学或大学的教师。从某种程度上看,这方面的经历及研究者对这种经验的感觉,将肯定在某种程度上影响任何一个研究者和他们的教师同事在理论和实践的态度上取得协调。

## 研究者和教育体系的关系

迄今为止,我们已经研究了四种关系,它们对任何国家数学教育领域的每个研究者都是关键性的。我们不能说这些关系之间有着任何唯一的线性次序,但读者仍然会以为我们是从研究者内部的问题开始,然后逐渐地讨论到研究者需要与之相互作用的人身上去。在这最后一种关系中,我们的目的将特别地集中在每个数学教育研究者所寻求的与他们在其中工作的教育体系之间的平衡上面。

也许对某些人来说,这一关系应该放在第一位加以考虑,因为对许多研究者来说,他们的工作情境——即与教育体系的关系——似乎决定了他们的研究空间。但是,由于这一章是为了给不同国家的研究者以帮助,我感到至关重要的是不从那个立场开始。因为研究者本人的自主与健全是最为关键的问题,这就是为什么我以讨论“现在是什么”与“可能是什么”的关系作为开始的理由,

也是为什么我现在在最后一段才探讨这第五种关系的理由。

如我们在前一种关系中所看到的,研究者与教师的关系,可以有许多不同的情况;研究者同教育体系中其他人的关系,也是这样。在许多国家内,在研究机构里和教育机构内部有数学教育方面的研究者,他们或者是由非政府的机构资助,或者直接由政府资助,因此他们的研究会受到这一资助的影响。那么,在那种意义上,一个人能说是一个独立自由的研究者么?显然,很少有政府出资,而研究者能自由地研究他们所希望研究的一切。较有可能的是,在资金独立的研究所工作的研究者及那些还兼有其他工作的研究者会感到他们的研究情境较为自由。可见雇主的性质对研究者的活动是会有影响的。

通常以为在大学里能享受到学术上的自由,而且大学必定是大量研究发展与兴旺的地方。这种想法会受到两方面的指责:首先,并非只在大学里存在学术自由。在相对开放和局部控制了的教育体系中,教师、师范教育工作者、课程开发者与教材开发者之间有很多地区性的研究活动,而他们中没有任何人是在大学工作的。其次,冷静地说,人们或许注意到:就是大学里的研究者的学术自由也会由于需要获得研究合同,为保持令人满意的发表著作的数量,及为满足各种各样的工作限制与工作合同而被剥夺。

当然,研究者的自由完全是相对的,就像所在国家教育体系中所反映的那样,它受社会的社会政治模式的控制。即使在所谓的自由社会里,就如我们所已经提到过的,研究者受许多社会控制所支配,特别在教育研究领域里,更是如此。社会可能会乐于容忍一个技术发明者研究如永动机那样的败局已定的东西,但不会那么容易地容忍一个教育创新者试图对关于应当如何教育孩子的基本设想进行挑战。矛盾的是,对某些人来说,没有理由怀疑为什么在一个更为中央集权的教育体系和一个明显缺乏自由的社会里,研究者不可能产生有意义的新思想。例如,在西方,在知识的发展和

数学教育研究方式上都没有独有的权力,并且任何人当然都不应该将数学教育做法与数学教育研究相混淆。同样地,研究者做些什么和他们被允许做些什么研究是一回事,而教育体系对研究者得出的成果如何对待,那是另一回事。

如果关注于研究者的自由,那么也必须关注研究者的责任。数学教育研究者对谁负有责任、负有义务呢?更确切地说,由于这些关系是由每个研究者所确定的,那么研究者对谁负有责任呢?我们已经看到许多教育体系之间的差异,在那些体系中,研究思想是要灌注入师范教育规划、课本与材料的建设,或课程的发展之中的,并且这种差异也可能对手头上的问题产生影响。

如果研究者的工作是在于帮助教师培养,那么正如我们所已经看到的,从很大程度上讲,它应该对教师负责。但是,看来实际情况是,教育体系自身在自行其是,使得研究者很难有机会直接同教师对话。现在有许多人以不同的方式工作,这些方式影响着学生的数学教育质量,而研究者日益需要能与这些群体进行交流对话。同样地,研究工作增长了我们的知识,使我们知道很多来自公共机构的、课程的、考核的、父母的、课本的、媒介的与教师的影响的效果。研究者是需要同更广泛的各种各样的人交流这些思想的,而许许多多的人也可能对他们的研究结果是有兴趣的。

起初,看上去研究者正对这一挑战作出响应。研究期刊正在增多,并且出现了越来越多的书和出版物,其中包含了研究报告与概要。越来越多的会议把研究工作作为他们基本着眼点。

然而,在实际中,研究者似乎并不直接同那些教育体系中的关键人物对话,而只是增强了彼此之间的交流。研究期刊由研究者编辑,编辑委员会也由研究者组成,这些杂志也越来越多地只供研究者阅读。研究的书刊价钱昂贵,因为出版商知道它们的市场极其有限——只有研究者才购买这些书。研究者专心于同其他研究者进行交流,而对其他人来说,变得越来越难以知道研究者之间交

流的内容是什么,更不用说理解它们了。也许这种情形是由于以问题为主导的研究被以方法为主导的研究所取代了的缘故;或者是由于随着研究的增长,理论有了其自身的动量,这意味着研究失去了它要为其提供信息的教育现实的联系。也许也是由于着迷于收集数据而相对地忽略了理论的、一般化的解释,或者是研究者对他们学术自由的关心使他们忘却了他们在教育方面的责任。

像这样与责任与义务有关的不仅仅是在哪里出版,如何出版和出版什么的问题。对研究者来说,写出报告,就认为他们的工作已经完成,那是不够的。如在以前讨论过的关系中所看到的,研究者不应该是那种教育专家,即那种告诉体系中的其他人做些什么的专家。研究者应是研究上的专家,他们要能够提出建议、提供信息、培养训练,并且一般地使研究过程大众化,但他们不可能是教育专家。我们不能忽视教育体系中越来越多的人具有重要的专业知识。

同样地,教育体系中其他的那些专家须要能够告诉研究者应该需要的建议与信息。目前在某些体系中存在的情形主要是研究者能决定他们将要研究些什么问题与使用怎样的研究方法。这种情形的产生,一部分是由于在教育体系中许多控制研究的研究者占据强有力的地位,而另一部分原因是研究者要维护学术自由的愿望,特别在他们感到这一点受到威胁的时候。

也许对研究者来说,在达到自由与责任之间合适的均衡中最大的困难在于,调查过程有着一些令人满意的地方,它产生着一种驱动力,使得对任意一个从事调查的人来说,它显得是永无止境的过程。大多数研究者都会制订一些研究纲要计划,其时间上的延续远远超过他们的寿命,而把他们能进行自己的纲要计划,看成是研究者所珍惜的希望目标之一。而使人感到失望的是,似乎总是其他领域的研究者,如文学、哲学、古代文明与核物理学的比起数学教育的研究者来更有可能实现自己的纲要计划。在我们和这些

数学教育研究者谈起来时,他们都以为那多半是难以思议的。其实,在其他领域中,社会与学术上的控制也是很大,并且自由与责任之间的紧张关系如同在数学教育中那样存在。

对数学教育的研究者来说,他们的责任是针对那些在教育领域中工作的人,特别是其专业知识对儿童的数学教育有影响的那些人。数学教育大大需要发展团体、小组的研究方式,不仅仅是跨学科的团体(尽管他们是有用的),而且还可以是内部同事组成的团体,包括教师、师范教育工作者、课程制订者、教材编写者与政府指导者,也包括研究者。所负的责任,在研究开始之初,研究进行之中和研究结束之后,都应该加以说明。那些否定责任存在的研究者必将遭受自由被剥夺的后果。

## 关于资料来源

在对那极端分散而复杂的领域所作的这份概括的研究中,我一直试图找出那些我感到是构成各地的数学教育的研究基础的问题。特别是,我一直是根据那些正在探索如何去更多地理解他们的领域,探索如何研究的研究者的观点来处理本章节。可以说我们只能通过走出我们自己的体系,通过将各方面的情况同其他国家的背景下的研究者的情况相比较,我们才能对我们自己的问题、研究方法、方式与价值有所了解。来自其他体系的研究者能为我们提供用于比较对照的丰富资料,只要我们准备并愿意理解这一切的话。

这一章本来可以到此结束了,但我上面的主张使我感到还有一个问题要讲一讲:即有关信息的来源的问题。我们怎么能知道其他的情况呢?本章中所使用的并且能为其他研究者运用的论据有两种来源。第一种是书面文献,第二种是通过大会、会议与合作研究活动中的讨论所得到的个人经验。同后者有关的主要问题是

相当明显的:即个人的偏好,偶然性的数据,个人选择的样本与有特殊的记忆等。以上种种,各有长处。关于书面文献,显然有大量的出现在期刊、书本、报告、会议论文集等等中的研究报告,所有这些我通称之为研究报告,然而从本章最后的观点看,我们应以怀疑的态度看待这些报告。例如,如果我们试图更仔细地了解研究者实际所完成的研究工作,那么由于竞争性的发行与销售决策上的一些因素,研究报告会缺乏提供完善的资料。

在会议上个人提交的论文是信息的另一个公开的来源,虽然由于花费和旅途与政治上的约束,并不是每一个有一些重要的事情要告诉研究公众的研究者都能参加国际会议。而且,用于国际交流的语言种类的有限性也限制了研究报告的可接受程度。例如,我估计本书用作资料的研究报告有 95% 是用英语写的,另外大约 4% 是用法语或德语写的。然而有许多所提交的、书面报告以各自地方语言书写,为当地人民提供信息,这些从来都未曾被外面所了解。

这样,由于任何社会都存在的社会-政治上的约束,只有一些研究可能被允许进行。在这些研究中,又只有一些研究报告被出版,而全球的公众又只能得到这些报告中的一些,那是由于是用了国际上通用的语言来写成的缘故。

然而,对本章的写作而言,从国内角度或从国际角度全面评述数学教育研究的各类论文、文章与书本,以及一年一度的 JRME(数学教育研究杂志)研究论文都有价值。特别是 ICME 上的总结报告是有价值的,就像全国性和国际会议上的报告一样有价值,由于他们是在复杂的社会-政治环境中制作出来的,这些国际性报告和总结既可视作为是第一手资料,又要谨慎加以对待。

特别地,就我所见,这些带有改变观念趋势的这些出版物,向我们揭示了我们的研究领域一般地显得既不是一个政治上公开的领域,也不是一个有严谨知识的领域。在认识到社会-政治对研究

的约束后,值得一提的是这一方面真正写下来的东西太少了。当然只是在最近的 20 年里,数学教育者才普遍地认真意识到他们所扮角色的社会-政治的色彩,也只是在最近 1988 年布达佩斯 ICME 会议上,在官方的规划中对这一方面才有适当的认识。虽然出席会议的许多进行研究的人肯定了解那些约束意味着什么,它对人们的研究纲要计划有何影响,但就官方规划的那一部分仍缺少关于社会-政治对研究的约束的讨论。

似乎很少有国际上一致同意的关于开展研究的规则,即人们可以用来评论和挑战其他人的研究程序与思想的规则,或用来对照测定自己研究的环境与背景的规则。人们想知道,究竟这是一时的事态,还是对教育的系统研究来说是独有的,教育本身是一种深受社会-政治控制的活动。

我所确信的是,比其他任何一个群体都更多的数学教育领域中的研究者,应该引导这一领域去培养一种国际性的精神,去开展互相批评,因为研究者活动的核心是承认无知。无知,或不理解是我们研究动机的根本。各处的研究者都是有这一动机的。一旦我们能认识我们国际上的相互无知状态,我们就能更为自由地听取各种不同的观点,并且我们可以毫无疑问地发现这一种建设性的观点差异,对我们的理解有利。



## 十四、关于数学教育的现状和发展方向的思考

Robert B. Davis \*

此时,人们也许希望,作为最后一章会预见一下未来,但事实却是预见并不起作用。谁会预见 PC 机目前的重要性?并不是大型的计算机制造商的两个总裁,在这一方面,他们与公众的努力是相抵触的,由乔布斯(Steve Jobs)与伍兹尼亚克(Steve Wozniak)两位年轻人发展了那一思想,建立了公司,以推广微型计算机。谁会预见到建立在混沌与分形基础上的中学几何学课程?然而,三个独立的研究与开发小组已经创建了三种这样的课程。谁会预见我们当前的失业情况;5.3%的全国失业率也许是“骗人的”,因为“劳动力中没有把正在增长的美国人人数计算在内”,并且到 1988 年的夏天,纽约市超过 16 岁的居住者中 45.3%不计算为劳动力者,因为他们“或者没有被雇佣,或者是不可能被雇佣的”。事实上这些人没有算入统计数中。差不多一半的纽约市民没有被雇佣,这一点谁能够预见到呢?

举一个更为生动的事情,谁会预见主要出版物的出现是有远见的,教育上精湛的,并且像 NCTM(全美数学教师理事会)的《标准》和国家研究委员会的《人人都会算》那样有影响力?现在是最好的时刻,又是最坏的时刻,如何结合在一起呢?我们正朝向何

---

\* 作者戴维斯(Robert B. Davis)是拉特格斯大学数学教育教授,《数学行为》杂志主编。

方？谁能预见呢？

如果预见未来太难的话，我们可以换一种有用的方式：我们可以看一下目前哪一些看上去是数学教育的研究和发展所面临的最为重要的挑战与机遇，这就是这一章想要做的事情。我首先提出 15 条当前重要的挑战与机遇，然后再展开来讨论其中的几条。

## 挑 战 与 机 遇

注意：首先，这里列出的 15 条看上去是互不联系的，很少有共同点，因而没有可辨认的信息，请不要放弃。深入的详尽研究将揭示贯穿着的共同之处。令人激动的前景是这 15 条会给我们带来某些认识未来的依据。

**1. 以学生实际思维的方式为基础** 传统的教学一开始总是教给学生应该如何去思维(关于某些特定的数学情境)，并且一直在探索将这种方法传授给学生。最近几年，产生了一种不同于传统的方式：仔细地观察学生实际上是如何对有待讨论的课题进行思考的，并以此为基础实施教学。

**2. 改善城市贫民中“低年级学生”的情况** 根据菲利普斯(Phillips)的统计，纽约市超过 16 岁的居住者中，45.3% 的人未被雇佣或不可被雇佣。这一点显然是极大的不幸，并且是无法接受的。这个数字接近于我们最大的城市人口的一半(这种情况不光在纽约；菲利普斯指出：“类似的情况出现在底特律和巴尔的摩两市，面对全国来说，比率数为人口的 34.5%)。几乎无法相信那么多美国人无法适应我们社会的生产。(某些人口统计者指出，纽约或其他地方的这些没有列入任何通常意义下的“被雇佣者”，实际

上是受雇佣的,但他们出于税收的原因没有报告他们的收入。这可能是一些修理工、保姆、打字员、割草工人或溜狗的人,也可能是一些靠倒卖偷来的东西谋生和贩卖麻醉药品的人——正如现在许多人所做的那样,那些人做买卖只用现金。)

**3. 创设、执行更多的形形色色的中学数学规划, 并进行评估** 19世纪60年代广泛认为, 解决许多我们最为紧迫的教育问题的那一部分方法包括更多的形形色色的中学数学规划, 例如佩奇(David Page)的伊利诺斯州数学计划和罗曼(Earle Loman)的小学的科学与数学一体化。“回到基础”的那一时代在大多数学校系统中避开了这一问题, 但是《标准》和《人人都会算》可能在这一方面显示了一些新的设想。然而, 如果学校系统在这一方向上还准备走得更远的话, 那么研究和发展就必须创设一些明确而又适宜的规划, 并且表明他们是能够产生可以接受的测试成绩的。

**4. 建立更多地强调创造性的评估程序, 以代替重复老一套的机械程序**

**5. 更多地注意测试和学校规划向学生所递送的某些隐含的信息** 威斯康星大学数学教授阿斯基(Richard Askey)最近在给纽约时报的一封信中, 比较了日本和美国的数学测试中的各个条项, 提到“在约翰尼学会买东西时, 浩子学会了思维”。这是一道选自日本九年级的测试题:

设  $a$ 、 $b$  和  $c$  都是整数, 并且  $a$  大于1小于9, 而  $b$  和  $c$  都大于0小于9。找出所有的三元数组  $(a, b, c)$ , 使其满足不等式

$$100a + 10b + c < 5(12a + 5b + c)。$$

经过比较, 阿斯基教授指出, 在他所调查的美国测试中, “几乎所有

的问题都是一步解决的问题”。阿斯基继续提出一点重要的看法：也许在测试中 25 道单步骤的题同 6 道多步骤的题一样产生高水平的学生，而那种多步骤的题需要认真的思维（可能包括一些创造性），但是它们传送给学生的信息是完全不同的。单步骤的题对学生说：“你们在数学上不需要作十分艰难的思维，也不必富于创造性，所有你必须做的就是课堂上认真听讲，顺从地记忆，勤奋地练习，这样你在测试中就不会遇到令你吃惊的情况。”日本的测试带来的是一种不同的信息——相当多的实质上是竞赛题，而这些美国学生很少遇到——从一开始就很明显，如果你在常规的技能上没有发展更多的技能，那么你将会毫无希望，显得无能，你必须追求独创性和创造力。

当然，比较日本和美国的教學大纲不是简单的事情，并且比较包含了一些不容易得到解决的错综复杂的问题。然而，阿斯基的基本观点是重要的：我们看书本、测试题和课堂练习题不应只看表面，还要看它们所传送给学生的隐含的，或者部分隐含的信息，尤其是看我们应该要求学生具有什么样的行为，以及学生应该做好哪些事情才能成功这方面的信息。

**6. 假若我们必须“告诉”学生如何做数学，要研究这样做的后果** 有一种特殊的情况值得更深入地研究：许多教师认为他们应该告诉学生如何处理数学问题，而有些人则持不同看法。在 19 世纪 60 年代，这种不同看法成为在“发现学习法”上的大量争论的基础；例如，舒尔曼(Shulman)和基斯勒(Keislar)主张必须告诉学生如何解决数学问题，他们辩解说如果我们不那样做，某些(或许多)学生将落后并很快变得士气低落，丧失能力。与此相反，那些反对这一主张的人则认为，以那种想法为基础的教学，会给学生传送“没有一个人能解决一个数学问题，除非有人告诉他们如何做”的信息。因此，学生很快放弃了独立思考的习惯，他们采取了仅仅试图

记住教师所讲的一切的对策。与学生广泛交谈的人都会发现许多学生会那样说(至少在效果上):“我无法做这个问题,因为你没有告诉我如何去做。”“告诉”观点的对立者认为,首先部分学生的这种态度使他们在数学上几乎无法有良好的进步,其次,这一态度不是不可避免的,而是教师和教科书反复向学生灌输一些隐隐约约的信息所造成的。

**7. 研究智力表示法** 一提到“以学生的实际思维为基础”,就会导致极为重要的对学生智力表示法的研究,这确实不是偶然的巧合。在最近召开的墨西哥涅克泰克的数学教育心理学国际小组会议上,最为活跃的工作小组之一就是由戈尔丁(Gerald Goldin)领导的表象工作小组。如果对他(或她)的所有智力表示法一无所知的话,那么你对他(或她)是如何思维的了解就很少了。特别有意思的是研究教师,确定(这里是有可能的)是否他们已对各学生使用的表示法作出了正确或不正确的评价。

**8. 找出课堂上真正发生的一切** 许多研究者正在积累一些记录课堂上实际发生的一切的录音磁带。这种做法可以使一些已经列出的题目明白地显示出来,并且看来也说明教师以不明确的、甚至有误导作用的语言谈论数学情境这种现象是多么普遍。

**9. 帮助学校更多地利用现有的优秀材料** 近几年,开发了許多高质量的课程或教学系列,包括福厄蔡格(Feurzeig)和罗伯茨(Roberts)的六年级代数教材,关于前面所提到的分形和混沌的三个高级中学的课程,由鲁宾(Andee Rubin)所发展的高级中学统计学课程,安德森(John Anderson)的几何学导引,及许多其他的材料,这些课程都已经过测试,据说效果都很好,但是他们并未在学校中使用。在某种程度上,这是由于执行这些规划在计算机上的花费

过大,但这可能并不是全部的真实情况。学校不了解教材所适用的场合,教师对如何运用它也没有把握。如果要使美国的学生能从这有潜在价值的教材中获得实质性的益处的话,那这儿将有大量的研究和发展工作需要付诸实行。

**10. 发展新的离散数学的课程** 很明显,现在对值得特别研究的离散数学领域人们十分感兴趣,并且十分活跃。举一个例子来说,离散数学和计算机科学理论的路泰格中心已经收到来自美国国家科学基金会的近一千万美元资金,投资一个项目,其中包括对大学预科水平的教学方法的发展。在美国,离散数学通常被看作是取代以物理学家和工程师所用的微积分为基础的后继课程的课程(这对经济学家、生物学家等来说,也是适合的)。在荷兰,人们以不同的眼光看待离散数学;应该感谢弗赖登塔尔、德朗格(de Lange)等人,荷兰人的方法已经意识到现有的学校课程系列中许多事情严重错了,而如果有可能的话,要纠正过来(甚至任何东西改变一点)也是很困难的。荷兰人已将离散数学看作一个崭新开端的机会。但是要使这件事情成功,需要相当精确地将现有的学校数学系列课程中的主要错误一一列出。没有数学教育界的认真引导,美国就不会充分地利用这一机会,特别是没有认识到在新的系列课程中可以避免现有的数学系列课程的缺陷,而新的后继课程可能以“离散数学”的名义出现。人们也应当留心避免在开创数学的过程中出现新的缺陷。

**11. 描述替换物** 现在对学校数学的主要替换方式的描述决不是容易的。几年之前,我们曾看到对“有引导的发现”和“讲授与证明”的对照和比较的尝试,但是这种讨论经常会走入迷途。我们在“开放式教育”中看到了好处。但这里,这些替换方式也经常被拙劣地提出,并且被严重地误解了。在课堂教学上如何鉴别结构

主义？什么称作为科布(Cobb),或马厄(Maher),或撒克逊(Saxon)的方式？他们互相之间如何区别？可以在豪森(Howson)、凯特尔(Keitel)、基尔帕特里克和所罗门(Solomon)的文章中找到两种关于不同的选用方法如何不同的讨论,在这种讨论中,使用了不相同的各种替换方式,但对可供选用方式的仔细描述仍有极大部分尚未完成。这是迫切需要的,缺乏这一点,就不能确认我们所观察的(或者试图贯彻完成的)方式,不能确认我们应该关注的成果目标。明显的误解是普遍存在的,正如我们看到的,在许多关于“开放式教育”的工作中,在60年代时期的“新数学”工作中存在许多误解。

在后面“更深入地观察”一节中,将研究最近的三项主要的替换物,但在这一章的最后,读者必定能得出这样的看法,定义各种替换方式,并将其与学校数学相比较、对照,这所有的工作仍摆在我们的面前,这些可能并不是简单的。

**12. 建立认识论** 同试图建立学生自己的思维方式的教学实践紧密相关的一种新的概念已经产生,它和我们希望学生获得的那种知识有关。新的方式较少强调规则的学习(例如,知道有关分数加法或二次方程求解的规则)和规则的应用;取而代之,着眼点放在获得一群合适的、有效的比喻。这一认识论上变化的支持也可以从使计算机比人类更多一点处理信息的努力中得到。

**13. 确定课程应如何对新技术能力作出反应** 曾经出现这样的情形,人们毫无选择,只能用纸笔算法把各项数字相加。他们不得不学会进行其他类似的算术算法,否则简直无法有效地得到每时每刻所需要的回答。

显然今天并不如此。便携式计算器几乎无处不有。我们可以用其他方法而不是纸笔算法得到答案,并且大多数时候,我们是那样做的。

有些类似的情形正在更高级的数学中产生。这要感谢 Maple、Reduce、Mathematica 和其他称为“计算机代数系统”的计算机软件。学校数学课程中的变化确实应该反映出这一点,以前一直很少注意到这一问题。尽管最值得注意的例外有费伊(James Fey)和他的同事的工作,教育上的保守主义还是明显的。但同样明显的是,我们所教的许多算法不再是必要的了,我们需要计划一下我们的课程和课堂教学以适应这一现实。

当然,数学教育可以作出选择去忽视新技术能力对课程的影响。要仔细地去看这些能力的最为有力的理由也许在于它们提供了作出某些变化的可能性,而这样的机会是非常少的。

**14. 提高公共政策的论辩** 最近的媒介讨论突出地反映了美国正规学校教育上的各种令人不满意的情况。如果美国的教育要实施任何真正实在的改进,那么确实需要进行公开的讨论,而这种讨论需要比过去大多数这方面的讨论更仔细的推理,更好地加以通报。数学教育研究和发展团体是否会在这一方面发挥其作用呢?我们是否能对这一方面有所贡献呢?

**15. 修订方法论** 期望学生形成的数学知识的种类上的变化恰好与教师所需要的教学法知识的种类有同步的变化。在这两种情况中,都存在摆脱“以规则为基础”的词句、公式和算法的知识,并朝着构造一群基本的比喻或同化范例的方向迁移。

事实上,确切地说这一迁移构成前面列出的几乎所有各条项的基础。它是如此重要,以致成为下列三个例子的依据:

**例 1.** 你有一堆三张蓝色扑克牌,还有一堆五张红色扑克牌,那么你一共有多少张扑克牌?

我们都知道(大多数学生也知道)这一实际情境完全是抽象的



加法模型。在这一点,我们可以用一个计算器,键入问题

$$3 + 5 =$$

并且从计算器中得到答案“8”。

例 2. 你有一个大碗和一个小的量杯。作为被测量的物体,你有一些相当大的卵石和一些细颗粒的沙粒。你反复地用卵石装满量杯,再将它们转移到大碗,一直到大碗装满。通过计算,你确定需要 27 杯卵石才能装满大碗。现在你将大碗倒空,准备进行下一部分的工作。

现在要问你的是计算需要多少杯沙子才能装满大碗,你看看相当大的卵石和十分细小颗粒的沙粒,首先你不能确定应该执行哪种运算(如果有的话)。最后你确定不论哪种情况都应有相同的大小比例,因而可能就是相同的量杯杯数的比例。因此,你回答需要 27 杯沙粒才能装满大碗。现在你确确实实来做这件事情,发现事实上是正确的,确实需要 27 杯沙粒才能装满大碗。你再次将碗倒空,准备做再下一步的工作。

最后,请你将 20 杯卵石放入空碗,并请你计算还需要多少杯沙粒才能装满大碗。你必然考虑这种情况是需要加法(我假设的一种情况是你可能将 27 与 20 相加,得到答案 47,但看来并非如此)还是需要减法(这样,你从 27 中减去 20,得出结论,除了已经在碗中的 20 杯卵石之外还需要 7 杯沙粒,才能装满大碗),或者某些其他的算术运算——或者你可能会得出结论,没有任何的算术运算能得出正确的答案。在你作出选择之后,你使用合适的计算(我们再次假设你用手携式计算器)。现在,你确确实实地做一下这件事,数一数需要多少杯沙粒才能装满大碗,看看你是否选择了正确的计算方法。

例 3. 给你这样一个问题:

在某一城镇， $\frac{2}{3}$ 的男人同 $\frac{3}{5}$ 的女人结婚(我们不计算

孩子)。那么该城镇中有几分之几的成人是结了婚的？

现在，如果存在某种运算的话，请你再次决定哪一种算术运算是合适的。在你作出决定之后，使用计算器进行计算(也许你将进行分数的运算，并得到一个分数的答案)。

现在，隐含在这三个例子后面的主要问题是：大多数没有机会认真考虑这种事情的人 would 认为数学就是计算器能够解决的那一部分问题。他们可能感到在装碗问题中粒子大小的确定，或在结婚问题中算术运算的选择都是令人烦恼的，而且他们可能并不把这些问题认为是数学的一个主要部分。在红和蓝的扑克牌问题中，他们可能根本不曾注意除了计算器所执行的计算之外还包含了其他的思维。

我认为这样的观察者确实是错误的。在实际的计算进行中很少有数学，这就是为什么“愚笨”的手携式机器能够这样可靠地做这一部分工作。数学主要在于分析实际的情境，决定如何用一个合适的抽象符号形式表现这一情境。

因为直到近来，机器才能做一些运算，所以很久以来一直有必要教会人们用一些缓慢的而又不可靠的纸笔方法进行这些运算。在这一过程中，我们一直(并不聪明地)将几乎所有我们在教学上的努力和测试项目投入于这些运算——并且我们把“将现实恰当地模型化”这个真正的数学任务当作理所当然的。

对一个五年级的女孩的采访使这一区分更为明显。陈玲，一个学生，给她出了这样一个问题：

芬妮有 $\frac{1}{3}$ 的棒糖。她将她的 $\frac{1}{2}$ 给了迈克，那么她给了迈克多少棒糖呢？

允许陈玲选择一种方法解决这一问题。她可以运用她的纸和

笔,一套木块模型,和各种其他的可以手工拨弄的材料。虽然她从未接受过任何有关使用实际的手工材料方法的教导,她还是选择了木块模型。她选了一个黄色六边形来表示原先整个的棒糖,一个蓝色的平行四边形表示芬妮具有的“三分之一”,一个小的绿色三角形表示芬妮给迈克的那一部分,这一切都选择得很好,因为三个蓝色的平行四边形恰好覆盖大的黄色六边形,而两个小的绿色三角形又恰好覆盖一个蓝色的平行四边形。根据这一问题在实际物体中的转换,陈玲得出了正确的答案:迈克得到了 $\frac{1}{6}$ 的棒糖。

接着人们问陈玲,是否可以“用数字”解决相同的问题。她写道

$$\frac{1}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

当然她已经正确地进行了计算,但她选择了错误的运算来表示这一问题的模型。

在一项长达六年多的系列研究中,马厄和她的同事已经对各种年级层次的学生进行录像,并且经常对同一个学生追踪几年。陈玲所显示出的那种困难不是例外而倒是常见。这些学生已经学会进行计算,并且具有高的成功比率,但是他们不会正确地解决问题,因为他们不知道如何用合适的抽象表示式建立问题的模型。

下面是第二个重要的问题:人们如何思考实际的情境,例如扑克牌,或男女结婚,或用砂粒和卵石混合装碗这些实际问题。

事实上,我们正开始了解那么一点有关这类信息的加工过程,部分是因为我们正试图利用计算机来做这些事情。但是正如我们所知道的,这些事情并不容易,人们学着去做这些事情,而目前多数计算机程序做得非常差劲,或是一点都不行。

这一区别是数学教育的中心任务,我必须强调这不是“方法”与“概念”的区别,而只是稍微有点类似。这是两种十分不同的信息处理模式之间的区别,虽然说,当我们考虑人类的思考方法时这

种区别变得更加重要一些,但是用计算机思想看,两者就比较容易接近。

直到最近,多数计算机还是被称为“冯·诺伊曼(Von Neumann)机器”,这是由它们的能力而定义的,即它们能每次执行一条指令,但每条指令都需要十分明确的识别。正如奥尔曼(William Allman)所指出的,其结果是和人的大脑十分不一样的信息处理机器。对人来说,“认出你的母亲是很容易的,但难以进行逻辑分析”(奥尔曼都已举出较好的例子来说明对人来说“进行逻辑分析”有多“难”)。与此相对比,一台冯·诺伊曼机器,“很难认出你的母亲,但容易进行逻辑分析”。

这是一个确凿的基本区别。冯·诺伊曼计算机是非常明确的机器,每一步都是完好定义的,它们的所有指令都是完好定义的,它们所执行的系统化的方式能被策划,其目标和子目标能被确认,等等。每件事情基本上都是非常有秩序,但这并不意味着它总是简单的——如同任何一个研究分类算法的人所完全意识到的——但它确实使我们可能找到去描述正在进行的事情的一种确定的方法。

一段时间以来,我们知道人的大脑并非是这样类型的机器。大脑有1千亿个神经元,并且每个神经元都可能与10万个那么多的其他神经元相联结。所以,即使和我们现在经常遇到的一类巨大的数字相比,大脑仍是庞大的。

大脑也非常缓慢——至少它的关键部分是缓慢的。单个的神经元要比一台典型的计算机转换器慢10万倍。然而这个巨大的一批缓慢的转换器还是以某种方式有规律地完成信息处理业绩,而这些是计算机所不可能完成的。驾驶一辆摩托车就是一个很好的例子:大多数人可以非常擅于这件事情;而没有一台计算机能学会甚至是最低水平的这种技能。奥尔曼将“辨认出你的母亲”作为测试事件,这并不是偶然的。再提一下,人们可以毫不费力地完成

这件事情,而计算机往往无法做到。

近几年,有一些开拓者已经较直接地接受了这一挑战,去建立称为“非-冯”或“连接器”那样的机器,在那里大量的极其简单的处理器相互作用,通常是以无法编程、无法描述的方式(正如现在我们无法描述人脑如何辨认自己的母亲一样)。生物学那一方面,在神经科学中已经有了很大的进步;尽管我们还无法理解人脑究竟是如何创造它的奇迹的,我们还是迅速地知道了越来越多的有关这一浩瀚谜语的部分信息。

当我们注意到典型的教学通常是那样的直接明确,并且许多时候以简单的、步步渐进的方式工作时,就开始同中学数学联系起来。同时也关注于创立和处理现实的抽象模型的“写在纸上的算法”,而且当试图处理形象化、概念化的任务时,经常采取“系统化的”程序,例如“寻找关键的‘索引’词”。像《标准》那么重要的书提出这一事情是进步的一个重要标志,就像它建议对“使用索引词来确定要做什么运算”要“少加关心”一样。

假若人脑确实表现出是一台非-冯的机器,那么通常的英国教育实践对此有许多建议:让孩子使用某些有关材料,加以议论,并用它们构造他们自己的问题等等。英国的做法经常是不成系统的。就像一个观察者所写的那样,对于英国的阅读教学,“你可以注视一整天的课,你从未看到有什么人在教阅读。然而所有的孩子都学会了阅读”(个人之间的交流)。这不应该看作是一个例外情形。

真正值得注意的有关将现实模型化的事情是能够思考这两堆扑克牌,能够将它们形象化,能够想象把“两堆牌放在一起”的行动等等。 $2+3$  这一计算式是普通的,然而这普通的计算正是多数学校的课程所关注的。形象化和想象是困难的,也是我们必须确保学生能够做到的。谈到这同一区别时,明斯基(Marvin Minsky)指出,早期人工智能方面的程序“能够进行大学水平的微积分”,但是

当这些程序的设计员开始工作,使计算机处理九年级的代数问题时,他们发现这一任务就难得多了。当程序设计员转而考虑初级中学的算术时,事情变得更难——甚至比他们试图让计算机进行一个学龄前孩子可以做的玩方块游戏还难。

使用拉科夫(George Lakoff)和他的同事所创建的语言教学与测试一直关注于抽象的计算,而忽略了在决定我们如何思维中起较大作用的基本的比喻的各种技能。擅长数学主要意味着擅长于将扑克牌堆形象化:设想把它们移动,结合,分解成大量的小一些的牌堆等等。它意味着能够想象奎逊纳棒首尾相联结地放置。它意味着能够想象橡皮筋在地板上产生的形状,或能够确定在一个 $4 \times 4 \times 4$ 的迪安尼斯(Dienes)MAB方块内部含有多少块立方块。

这也决非偶然,许多英国的程序包含一些问题,例如请一个孩子想象每个棱长1cm的小立方体暂时粘合成一个较大的立方体,其边长为5cm。现在将这个大立方体外表面漆成红色,然后再次将它分开成一个个小立方体。试问,有多少个小立方体,其六个面都是红色的?有多少个小立方体,其恰好有五个面是红色的?四个面呢?三个面呢?二个面呢?一个面呢?没有一个面是红色的呢?

但是如果这些想象构成较大的比喻集合的基础,而这种比喻说明了我们想要让孩子们获得的有关现实的数学模型的知识本质,那么同样研究者和教师也确实需要知道相同类型的有关教和学数学的知识。数学教育一直过多地关注那种抽象的一般法则,而这些法则已经被证明在物理上是极有用的——例如公式 $F = ma$ ,或 $PV = nRT$ 。最为需要的是扩大我们基本的比喻或同化范例的集合去运用一个更为皮亚杰式的表达方式。我已经在其他地方用相当长的篇幅讨论了这一情况,并且这里几乎没有什么地方再重新提出那些想法。但是我认为他们需要仔细地加以研究,尤其

是这个时代，现代的摄像设备允许我们直接地显示人们的行为，而这一切在以前只能用语言来加以描述。当人们看到孩子在创作数学时，他们就不大会去想象必须告诉孩子做什么和如何做。如果所有的参与者都已经能够确实地注意到今天当教师与学生之间能相互作用时，他们之间是如何相互影响的话，有关“纯发现”对“有引导的发现”及其所有别的变形之间的争论就可能永远不会发生。

也许对这一讨论的中心说明是由斯夸尔(Squire)提出的：

记忆在变化时储存在同一神经系统中，这一神经系统原本参与感性认识，分析，对学习掌握的信息的处理……[例如，下颞皮层]已被认为不仅是较高级的视觉处理区域，而且也是由这一处理所产生的视觉记忆的储存器。

事实上，如果斯夸尔和他的同事是正确的话，那么告诉学生如何将现实模型化就很少能得到长期的效益；他们必须亲自去体验一下。

看来人们显然在使用两种信息处理的方法。有时他们遵循明确的指导，而有时他们执行“模式辨识”那种格式塔的处理方法。这些从未在任何规则中学到，而是从个人的探索和经验中得到的。学校的数学课程和数学教育研究几乎完全地关注于前一种学习过程，而极大地忽略了后一种。在某种程度上，本章的所有其他课题的产生都仅仅过多地强调两种可能性的一种。在我们自己的职前教师教育工作中，我们常常屡次教一些课程，在那里我们给出了我们所能做的最好的描述，让未来的教师了解在数学课上教师和学生能相互作用的可能方式；然而当我们随后向他们显示实际的课堂教学录像时，他们惊讶了。“嗨”，发出一种典型的评论，“这就是你们的意思啊！”在他们的基本同化范例中，他们并未拥有许多种我们正试图加以描述的教学例子，并且我们所能创造的最好的描

述并未产生足够的效应,以至于不能把这些思想渗透入他们的头脑中去。

这一方面的知识还未得到几乎足够的注意。对“疾病的细菌理论”,巴士德(Pasteur)和他的同事给了我们什么呢?这几乎不是一个真正的抽象概括。正如西蒙(Herbeit Simon)所提出的,他们的概括看上去相当于:“如果你想知道为什么有人会生病,你就去寻找某种病菌!”那听上去更多地像友好的建议,而非“科学的”抽象。事实上,我们忽略了这一重要贡献对科学进步的真正的本质:它真正体现了我们的比喻或同化范例这一基本集合的增长。许多在科学上的最为重要的进步都确实具有这一点,并不是像  $F = ma$  那样的抽象概括,这可能在我们的教学数学的知识的许多进展中得到证实。过去我们忽视了许多这方面的知识,因为我们在寻找错误的那种知识。

### 认识论论点的总结

懂得算术的孩子,就能把扑克牌的重新放置,或者把钥匙圈上的钥匙重新排列这种事情形象化。这可能需要用到某些事情,如  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1/2$ ,而实际情境的正确模型是重要的,它不是能由价值3元的计算器执行的那部分任务。作为擅长数学的人,必须具有大量的基本比喻或同化范例,如“扑克牌堆”或“钥匙圈上排列钥匙的方式”。

那些具有包含在教学数学中的深刻知识的教师(或教育研究者)必须具有全套的基本比喻或同化范例——他或她必须通晓有大量的选择和可能性。教师可能还知道关于这些可能性的频数等等的一些事情,但是基本的同化范例的集合是教师积累的知识中的最有力量的源泉。相对地说,最强有力的知识中很少的部分会具有我们通常所寻求的概括抽象的形式。



## 更深入地观察

这一系列挑战和机遇值得我们更深入地加以观察,可能采取的最好方式是通过对某些典型学校里的典型班级的透视分析来观察这些挑战和机遇。我们可以从我所观察过的美国东北部一个学校的一个班级开始。

这一班级的学生已经在关于“基础数学”的一次州测试中遭到了失败,而如果他们想要得到高中文凭就必须通过这种测试。我们所观察的班级是为这些学生下一次应付这种测试作准备而开设的。

这一班级里的某些学生是第一次准备参加这个班,对另一些学生已是第二次了,而对一小部分学生来说则是第三次了,这就是被普遍称之谓的都市班级。大多数——也许是全部——学生来自低收入的家庭,并且多数是各种少数民族的学生。

这种特殊的班级是说明当代的都市教育如何会走入歧途的一个最为典型的例子。那天的教学主题是百分比。教师试图在课堂上插入某些至少带有点趣味性的内容,他要求学生带来以各种方式引用到百分比的广告或新闻故事,但很少有学生那样做。

课堂是吵闹嘈杂的——但这不是由学生所造成的,而是由于一个十分喧闹的蒸汽加热系统和其他从建筑物里发出的机械噪声。这使得富有思考的讨论对任何人来说都不可能,而这些学生中的大多数都并不自称在设法跟随课堂的讨论或以任一方式参与讨论。某些学生将他们的头伏在桌上,并且并不应答——一位观察者怀疑他们是否喝醉了(这个学校里这种情况并不希奇)。

教科书上有这么一个问题:“将 3.50 表示成一个百分数”,班上没有一个学生会做。解这道题有这么多的错误,以至于人们难以知道从何处着手。也许特殊的问题是良好的开端。并不只是学

生无法“将 3.50 表示成一个百分数”，我也不会。在随后的几天里，我仍然决定在其他人那儿试验一下。我请教了几位世界上最值得高度尊敬的数学家，他们中间也没有人会做这道题。我请教一家拥有 500 个公司的财团的掌管财务的人，他也不会。我们都相信，3.50 是 35 的 10%，或 350 的 1%，或 7 的 50%，或 0.5 的 700%。

现在，我真正了解了教科书的作者头脑里想的东西，那些作者一直设法提出仅仅在学校数学中出现的一些事请。这并不是成功的数学家，也不是主要工业中成功的经济管理者所了解的百分比。这里，我们几乎经常看到的是表面的细节，又必须加以处理，而这时隐含在表面之下的才是更为重要的。

怀着最美好的意愿，我们创立了数学课程，而这是与现实世界相脱离的。它包含了无意义的零碎东西，我们要求学生学习这些大量的无意义的零碎东西。我们的愿望一直是这样能使事物变得容易一些。从短暂的效果看是容易了。学生能学到一些零碎东西，通过测试，忘记它们，再学习一些更为细小的零碎东西，又通过测试，忘记它们等等。这并未积累成任何重要的东西，学生也知道这一点。对一个其父母能看到更多的含义、用处和模式的学生来说，这种过程可以忍受，因为他能够学到这些零碎东西所适合的富有意义的内容。但对那些感觉与我们社会疏远的年轻人来说（看上去显然这些学生中的多数是这样的），在要他们做的事情中没有吸引力的内在兴趣，而且他们很少了解做这些事情的理由。

我们可以看看学生的情况，看看这些学生以前的学习经历，看看我们目前正在观察的课程，看看社会已经创立的计划和评估体系，再来设法分析这个问题。在学生这一方面，纵然从 1950 年起我一直和少数民族的都市学生一起工作，而且今天仍继续在那样做，我还是愿意听听那些对这一问题有较好见解的人的意见。我确信现在的情况比 1958 年时更糟，许多其他的观察者也同意这一

点。然而我无法对此作出解释,而且我的确没有找到解决问题的对策。

从最近由美国纽约州立大学出版社出版的一系列书中可以收集到一些资料,包括洛莫蒂(Lomotey)的。也许最有意思的是摩西(Robert Moses)所作的分析,而迄今为止,他只是在专题讨论会和专业会议上(包括1990年1月15日在路易斯维尔,肯德基举行的人文数学网络会议)提出了这些分析,还没有得到出版。

另一种试图理解这些年轻人的困境和他们的世界观的方式有时被记作“情感”的研究。我们可以讨论“情感”与“认知”之间确切的界线——我认为这一切不是确切的,那种想法可以称为“认知的”问题,而产生的“感觉”可以称为“情感的”问题。

还有一种应认真加以实施的方式是在加利福尼亚-伯克利大学和其他地方所进行的特雷斯曼(Urie Treisman)的工作。这是另一个没有被出版加以充分记录的有价值的活动;人们不得不直接地加以观察或者与它的创立者进行交谈。特雷斯曼工作的主要方面是对少数民族的学生寄予较多的,而不是极少的期望。在你离开这种方式时,再注意一下杰克逊(Reggie Jackson)或杜安(Leon Durham)的工作。

关于这种学生先前所受到的学校教育和如何希望在将来能有所不同这些方面,数学教育可以提供一些东西。这里我们至少看到有三个明显的方案。一个是高度有结构的课程,大量地是纸和笔,但是尽可能地包含了许多含意和经验。这有它的严重危险,因为它容易滑入枯燥的学究式的类型,可能无法为许多这样的学生提供所需的那么多鼓舞和灵感。不幸的是,这一点没有成功,像某些类型的癌症一样,直到几年后才有所显示。到那个时候,学生可能开始更多地强调遵循指导,得到正确的答案,以少得多的时间和精力花费于有关处理问题的不同方式的思考上而。

第二种方案是那种小组形式的工作,运用其内在固有的有趣

任务和广泛地利用可操作的必要材料。伯恩斯(Marilyn Burns)、马厄和其他人已经使得这一工作得到了发展。

第三种方案通过引入一大批有相当多不同形式的活动而进一步进行,这些活动总体上把数学同日常生活的几乎每个方面都联系起来。这种方案在英国的变化最为熟悉。它包括作出各种事物的图形;喜欢的颜色,最为宠爱的事物,谁有最长的头发等等。它包括度量所有种类的事物——例如休息时的脉搏数相对于运动之后的脉搏数,体重和身高——绘制体育场,找出树和旗杆的高度等等。孩子利用“滚动的轮子”得出他们早上到学校所走的距离。孩子研究在不同量的日照下植物的生长率。他们玩一些靠运气取胜的游戏,测试其中的概率。

所有这三种方案的课程都能有价值。研究和发展还没有做的是描述每种课程的作用,相反,过去的研究将所有这三种课程放在同一个尺度来衡量,仅仅测试书面的算法公式。此外,由于这些方案本身还从未仔细地被描述过,所以你怎么能知道你确实是在以某种同它自身的目标和方法相一致的形式运用这一方案呢?

这三种方案也并没有试尽所有增进教育的重要可能方式,一种十分不相同的,又非常有创造力的是由卡米(Constance Kamii)在一系列显示真实课程的录像中提出并加以发展的方案。这一方案重视纸笔算法,但让学生自己去创造这些算法,寻求的是多种多样的算法,而这些算法不仅仅是在美国学校中通常所教的那些内容。

另外还有一种方案是由普渡大学的科布、亚克尔(Yackel)和伍德(Wood)发展起来的。在科布-亚克尔-伍德的方案中,二年级的学生参与以问题为中心的教学活动,在活动中运用斯特弗(Steffe)和他的同事发展起来的孩子学习的认知模式,以促进概念性的和程序方法性的两者的发展。在这些班级中,学生以小组和整个班级的形式自己找到解决问题的方法。评估研究指出这一方案中的学生在计算机部分的标准测试中的得分同传统情况的学生

差不多,但他们在概念和应用这一部分测试中做得明显较好。除此以外,在科布-亚克尔-伍德的方案中,学生认为数学应该是有意义的,理解和合作对成功来说是重要的。科布和他的同事的方案更多地强调帮助学生创造性地思考实际情境,而且即使用到传统教师对常用算法的示范也是极少的。在这一点上,他们可能更接近于本尼蔡特(L. P. Beneset)的著名工作,本尼蔡特直到六年级才介绍算术——但他用几年的时间为它作准备,在这几年里,他教学生对实际情境作数学思考。

我们实际上还没有对这些方案中的任何一个作出能够用来明确定义的基本描述,也不知道它们是如何互相区分的。虽然至少有两个州,佛蒙特州和加利福尼亚州现在正在进行评估问题的的工作,但我们还没有评估学生的令人满意的方法,使其同它们大多数的目标相一致。

这些方案寻求创立一种数学的文化,而不是让它仅仅停留在“教”的一门课上。米勒(George Miller)和他的同事,布朗(Brown)、科林斯(Collins)与杜吉德(Duguid)及其他人的最近的工作可以概括如下:对长期认真学习的人来说,他不是学习了事实,而是获得一种文化。这一观点同样也为佩帕特(Seymour Papert)所强调。

回过头去看看我们正在观察的高级中学补习班,可以试试发展带有更大的内在兴趣的课程——它可能以木工业或艺术或经营小规模的商业企业为基础——更大地强调小组合作和有效交流。当然,如果对学生继续要用类似于“将 3.50 表示成一个百分数”这样的问题来测试,那就无法这样进行有效交流。他们不会去学习这种事情,因为这种事情确实不是真正的数学文化的一部分——既不是“纯”数学,也不是应用数学,既不在每天所用的数学中,也不在数学真正发挥作用的现有文化的任何地方。

如果我们从我们社会怎样对待那些年轻人的需要出发分析补习班,就会产生一系列有意义的问题。对这些学生来说这个班级

真的仅仅像一个仓库？当然看上去是那样。有一部分学生具有比学会百分数更为深刻的需要，而这些需要并未被确定或满足。那个喝醉酒来到班上或者睡得无法醒来的学生，他的生活中发生着什么？有人会说这些应该是家庭关心的事，但有些这样的家庭并未处理好这些问题。如果我们真的尝试一下，这是不是一个我们不能解决的问题呢？

人们可以研究其他的班级（给我更多的篇幅和时间，我将乐于讨论我们一直正在研究的富余地区的一些班级），并且提出，数学教育中的研究和发展工作是如何正在帮助他们的，但在这一方向上的进一步讨论将留给读者进行，这是很值得做的一项练习。

## 数学的思想

一系列特别重要的研究已由马厄和她的同事开始进行了，他们运用课堂教学录像和教师日记，来确定学生是如何思考问题的（特别是他们使用的表示形式），确定教师是如何确信学生关于这些问题的思考的，确定在学生实际想法和教师对这些想法的认识之间的一致程度。

在一项研究中，一位五年级教师正在进行假分数的教学。她已经构造了一个有关孩子吃两个比萨饼的某些部分的问题。这一班级分成小组在进行讨论；布赖恩和斯科脱在一起讨论，并且一个摄像机正对着这两个男孩。布赖恩将问题模型化为木头形状，我们称之为模块，他得出了正确的答案（恰好是 $\frac{14}{24}$ ）。与此同时，教师在这个班级的其余地方转来转去，还没有机会观察到布赖恩和斯科脱所做的一切。她最后来到他们的桌子边上，看了看他们的工作。

当然，在这里教师与研究者相比处于极大的不利之中，研究者可以随时研究录像带，研究教师的日记，进一步做些以作业为基础

的面谈等等。而教师没有这些可利用的数据,并且必须立即作出决定以努力帮助学生。

教师自己错误地认为答案是 $\frac{14}{12}$ 。在她的日记中,她描述布赖恩的错误在于“将分母相加”。事实上,她是错了三次,答案应该是 $\frac{14}{24}$ ,布赖恩没有错。其次,布赖恩没有将分母相加——事实上,他根本没有分母。他没有作任何的书面计算来解决这一问题,而且他没有写下任何分数,除了他最后的答案。同许多学生一样,他使用具体的情境模型解决了这一问题。答案不一致的最终起源在于所使用的单位的选择。布赖恩运用了这一问题的表达实际所要求的单位;而教师并没有那样做。教师并没有意识到这是不同答案的源头所在。

这一类型的研究得出了数学真正的核心。数学关系到思想,而不是写在纸上的符号。但很少有数学教育中的研究着眼于学生头脑中的实际思想,或者着眼于研究教师如何能很好地识别这些思想,对此作出反应,以帮助学生改进这些思想。最近对“结构主义”和“心理表象”的关注表明了对人类数学思想最核心的部分的日益增长的认识以及作更仔细研究的需要的认识。偶尔,这些实际的课堂教学录像显示了教师和学生有很大一部分时间里有不正确的思想,而且经常相互误解——远远大于我们所想象的。

## 公开的讨论

如果没有公开的讨论和公众的参与,我们在为都市年轻人开设的补习班中所看到的问题是不会被解决的。主管方面告诉过我们,他们简直不敢作出任何可能导致较低的测试成绩的变动——即使有足够的理由说明应该实施这样的变动,说明较低的成绩可能不是较差情境的象征。首先是,测试经常涉及那些学生并不真

正需要知道的事情,或者像“将 3.50 表示成一个百分数”那样的例子,可能是学生最好不必掌握的事情。除非数学教育工作者发挥他们的作用,帮助公众理解为什么目前的测试经常不是衡量一个教育计划成功与否的良好尺度的原因,否则这些改进简直不可能发生。

作为设计适宜的课程这一大问题中的一个小的方面,我们考虑这一讨论,即某些拉特格斯大学的教师同来自两个拥有 500 个子公司财富的最高管理层之间的讨论。得克萨斯公司一直想找出为什么他们在欧洲成功地将计算器引入到学校而无法引入到美国的原因。在同其他两个公司的领导人的讨论中谈到了这一问题。商人强烈地感到他们不期望他们的雇员做书面运算,而希望他们运用计算器,那样,他们能更快更为精确地得到结果,这是令人信服的。快速、精确这两者都是他们商务中重要的方面。但是,在决定请哪一位工作应聘者参加面试时,两个公司的人事处利用了一些包括算术计算的测试。算术技能并非同工作相关,它仅仅作为一种减少必须面试人数的一种方法。在我们地区的一些学校,对使用计算器存在相当大的阻力,尤其是来自社会经济地位低下和蓝领阶层的父母。按照同商人的交谈,有一点变得更为清晰,即为什么会是如此。许多这样的双亲可能一直被要求做一些需要书面算法计算的测试,他们预见:如果他们必需用计算器进行算术运算的话,他们的孩子在寻找工作时会处于不利的局面。

这里有一个非常自相矛盾的情况。那些并不特别需要他们的雇员具有书面运算技能的公司,却在促使学校必须花费大量的时间来发展这些技能。学校里可以安排更有力地针对这些公司的实际需求的课程——但只有当公司自身的某些做法作了改变的时候——即使那时,只有当这一变化能与一般的公众进行有效的沟通的时候,才得以实施。对于所有这种事情,认真的公众讨论是绝对必要的。还可以给出许多其他的例子。事实上,在新泽西州的



一个富有的都市学校系统最近停止了使用他们已拥有的计算机,因为新的教育部门中的大多数认为“计算机是一时的风尚”,并且在质量教育中没有大的作用,所以这看来是设法节省一些钱财的好地方。

### 结束语

当人们着眼于需要继续进行的任务,需要解决的问题,以及更多的今天可用的有力的资源的时候,似乎有充足的理由表明摆在数学教育的面前,有一项重要的研究和发展工作。成功地进行这项工作需要利用过去很少用过的许多资源。我们需要考虑扩大我们个人和集体的基本同化范例的技能的方法。我们需要更多地关注描述学习环境和课程的问题,关注对它们之间差异的认识。我们需要更好地度量学习成果,尤其是长期的成果和看上去更像个人的标志而不像任务特殊的技能的成果。但是,严肃认真的需求,重要的机会和有力的资源都是有意义的研究和发展的组成部分。这些组成部分似乎都是适当的。谁能预见数学教育是否能应付这种局面呢?

## 选 译 后 记

数学教育研究近 20 年来有了蓬勃的发展,正如原书序言中所说,已经形成了一个新的研究领域,有着自己的研究课题和研究队伍。这本手册正是这 20 年来数学教育研究工作的一个比较全面而又深入的总结和对今后的研究提出新思路、新方向的一个蓝图。它的作者都是当今数学教育界中优秀的、活跃的、又有成就的权威人物。因此,它在 1992 年一出版,就立即受到国际数学教育界的重视,引起极大的反响。

我们华东师范大学数学系的一些同志,就是在这种背景下,在陈昌平教授的带领下,进行这本手册的翻译工作,为我国广大读者提供有益的观点和有用的信息,希望能对我国的数学教育研究的进展有所裨益。

这本手册原书共有五个部分,29 篇文章(详细目录见书末附录)。考虑到原书的篇幅太大,我们只是选择了我们认为其中最为重要的 14 篇文章。至于其他的篇章,有兴趣的读者可以查阅原书。本书(中译本)中的第一至第四篇属原书的第一部分“总论”,第五至第七篇属第二部分“数学教学”,第八至第十二篇属第三部分“从讲授中学习”,第十三、十四篇属第五部分“展望”。

本书的翻译工作由七位同志共同完成。各篇的主要翻译者是:第一篇陈昌平,第二、三、四、九篇陈美廉,第五、六、十二、十三、十四篇王继延,第七、八篇毛力熊、陆林,第十篇张远增,第十一篇

赵小平。

感谢原书主编 D.A. 格劳斯先生为本书所写的热情洋溢的序言。我们相信,随着研究工作的深入,我国的数学教育研究工作也必将得到更为蓬勃的发展,明天将更为灿烂。

我们还要感谢上海教育出版社的韩希塘同志,他为本书的翻译出版做了大量细致的工作,正是由于他的努力,本书得以顺利出版。

本书涉及范围广泛,内容新颖,限于我们的水平,在翻译过程中难免有欠妥之处,我们诚恳地希望广大读者给予指正。

译 者

1998 年 2 月于华东师范大学

## 附：原书目录

### 第一部分 总论

1. 一份数学教育研究的历史
2. 数学的性质：其任务及影响
3. 关于学术和研究方法观点
4. 具有理解的教和学

### 第二部分 数学教学

5. 数学课堂的培育工作：一个未知因素？
6. 数学教学实践及其效果
7. 教师的信念和观念：一份综合研究
8. 教师的知识及其影响
9. 数学的分组教学：对小组教学过程作有计划研究的呼吁
10. 职业化和数学教学
11. 成为一名数学教师

### 第三部分 从讲授中学习

12. 整数加减法的研究
13. 作为情境模型的乘除法
14. 有理数、比和比例
15. 学会数学地思维：数学中的问题解决、超认知和数学意识

### 16. 估计和数感

### 17. 学校代数的学习和教学

### 18. 几何和空间推理

### 19. 概率统计的研究：反思与展望

### 20. 朝着高等数学思维的转变：函数，极限，无限和论证

### 第四部分 热点问题

### 21. 技术和数学教育

### 22. 民族数学和大众认知

### 23. 数学教育中情感的研究：重新概念化

### 24. 数学和性别：观点的改变

### 25. 民族、种族地位、社会阶层、语言和数学成就

### 26. 学生数学知识的评价：转向理论

### 第五部分 展望

### 27. 数学成就的国际研究

### 28. 数学教育研究的一些国际观点

### 29. 关于数学教育的现状和发展方向的思考