DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2011.03.020

第36卷 第3期 西南师范大学学报(自然科学版) 2011年6月
Vol.36 No.3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jun. 2011

文章编号:1000-5471(2011)03-0268-04

基于多元表征发展代数思维的教学模式研究①

李 静[1,2], 刘志扬[3], 宋乃庆[1]

1. 西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715; 2. 廊坊师院 数学与信息科学学院, 河北 廊坊 065000;
3. 广东科技学院 基础部, 广东 东莞 523000

摘要: 代数思维学习是国际中小学数学教育的主要任务. 代数思维发展源于代数思维的工具掌握与其载体的内容训练, 在于多元表征学习. 代数思维的多元表征教学, 可以促使学生理解代数知识和解决问题, 由此建构“基于多元表征发展代数思维的教学模式”.

关 键 词: 代数思维; 多元表征; 教学模式

中图分类号: G421 文献标志码: A

随着“数字化时代”的到来, 中小学数学教育突出了与计算机技术密切相关的算法思想, 代数思维的教学变得越来越重要了. 早在1994年2月, 全美数学教师理事会(NCTM)就通过了关于“为每个人的代数”的报告. 该报告指出, 所有中学生都应该有机会学习代数的思想和方法, 进而, 人们开始关注代数思维的教学研究[1].

国际数学测试表明, 我国学生虽然能够取得优异的成绩, 但理解和思考能力不如西方的学生, 尤其是创新思维方面. 国际数学教育家蔡金法对国际数学测试结果进行深入的研究, 发现中国学生在“过程受限”问题(是指那些通过实施标准算法就能解决的问题)中表现很好, 但在“过程开放”问题(是通常不能通过标准算法就可以解决, 而是需要对问题情境作新的探索的问题)中表现不如美国学生. 对原由进一步观察分析发现, 美国学生喜欢使用图示的、表格的、言辞的等直观、具体的表征和与之相应的直接策略, 突出非形式化的数学理解; 而中国学生擅长使用符号表征和与之相应的抽象策略, 过分强调形式化的数学抽象(参见文献[2]). 综合来看, 基于非形式化理解和形式化理解的多元表征(言语表征、图表表征和符号表征等)及其策略的学习, 可以各取两国所长, 发展学生的思维能力和创新能力.

1 代数思维的多元表征

代数思维的意义, 可以理解为它的工具和载体. 发展代数思维, 实质上是发展代数思维的工具和载体, 进而发展学生的多元表征.

1.1 发展代数思维的工具

代数思维的工具可以概括成3个基本范畴[3]: 问题解决技能、表征技能和推理技能. 问题解决技能就是问题解决策略的工具包, 例如: 猜测、检查、列清单、逆向工作、利用模型等. 表征技能就是能利用和获得数学信息的多种表征联系的能力. 代数知识内容可被展示为不同的形式, 包括可视的(例如图表、图像或曲线图)、数字的(例如表格、清单)、符号和口头等形式. 通常一个好的数学探索应包括这样的多元表征. 因为每个表征都对理解有所贡献, 学生的创造、解释和翻译的表征能力会带给学生强有力的代数思维工

① 收稿日期: 2010-08-09
基金项目: 全国教育科学“十一五”规划2010年度教育部重点课题“基于多元表征学习的初中代数变式教学研究——‘以学论教’改革实验”阶段性成果(GOA107019)

作者简介: 李 静(1966-), 男, 河北张北人, 副教授, 在读博士生, 主要从事数学课程与教学论的研究.
通信作者: 宋乃庆, 教授.

具．问题解决的推理包括归纳推理和演绎推理．归纳推理包括考查特定的案例引出定义模式和对这些案例间的关系的体悟，并且推广模式和关系，形成知识的观念性表征；演绎推理包括通过考查问题的结构，进而推出新的结论以形成代数知识思维逻辑表征链，并从中学会利用规则进行形式推理．可见，代数思维技能的掌握在于各类型各层次表征的训练．

1.2　发展代数思维的载体

代数思维的载体应是 3 个类别[3]：算术、代数语言和模型．算术可以帮助学生建立数的数感和运算意义及程序，为正式学习代数打基础．代数语言理解包括明白变量和变量之间表达式的含义，以及在公式中数字与符号的意义．代数作为数学语言包括的主要核心思想是等价．等价：任何数字、量、数字表达式、字母表达式或方程都能用多种方法表达同一情境，即数学情境和结构可用变量、表达式和方程表征成一个关系或模式．作为模型的方程、不等式和函数等，可以帮助学生理解代数知识体系和解决实际问题，其主要思想为关系和模式．关系：数学规则(关系)可被用于一集合元素给另一集合元素赋值，不同的变量通过关系形成模式．模式：一些数学情境中的数字和对象以可预言的方式重复出现，就可被用来表征关系和进行抽象概括．可见等价(或非等价)、关系和模式等的掌握在于形式化的抽象表征的形成．

2　代数思维的多元表征教学

无论是代数思维发展的工具，还是代数思维发展的载体，都是关于“表征思想”(取向于代数方法等)和“思想表征”(取向于代数内容等)的研究．所以说，作为教学表征而言，它们有助于学生的代数学习和思维发展．

表征既是数学的一部分又是理解数学的手段[4]．在数学领域中，表征必须能被用来表达数学模型、概念、观点或理论[5]．事实上，所有的数学内容涉及到观念、结构和信息的表征都有利于问题的解决和信息的操作[6]．人们已达成广泛共识，认为问题解决者的表征在他们解决问题中起关键作用[7]．表征成为解决数学问题中问题解决者的思维工具或问题解决交流的理解表达，成为问题解决者交流数学问题并解决问题的思维记录．从这个意义上讲，表征水平影响甚至决定问题解决者的能力水平．所以，在代数教学中，教师使用的表征影响学生对代数概括性策略的使用，从根本上决定学生代数思维的发展．

表征教学是指教师与学生在课堂上所使用的帮助他们解释概念、关系或关联以及解题的表达．Dreyfus 和 Eisenberg 指出：“任何表征将能够表达部分但不是全部的信息，凸显其中的一些方面而隐藏了另一些”[5]．因此，单一表征不利于学生的全面理解，平行与串行的多元表征才利于学生对代数知识系统全面深入的理解．例如，对于方程的理解，既要明确实物平衡(直观表征)、量的相等表述(言语表征)、量的相等关系式(符号表征)的几种平行表征类型的抽象概念，又要体会数字等式、字母表示数、不等式和方程等概念的串行加工表征中的内在联系和区别．教学中，一些表征有可能更适合表达某些知识与思维，以解释问题解决的过程．所以，恰当的教学表征的使用，如同在数学课堂上教学策略的选择，是很重要的．

代数教学表征，表现在概念性的静态理解上，应是言辞表征、直观表征(动作、实物和图画等)、符号表征等及其中的相互组合表征的平行种类；表现在过程性的动态操作上，应是具体表征到抽象表征的串行加工过程．我们认为，代数思维的形成应是学生表征种类丰富和层次深化的结果，代数思维的发展标志应是学生对抽象表征的使用．结合代数课堂教学的任务顺序，教师的表征教学应由学生基础、学习内容和学习目标而采用适当的表征导引，促使学生构建他们自己关于数学概念、法则和关系的心理表征．同时，教师应不断地用具体表征或实际操作来鼓励学生去运用他们自己的认知结构来解决问题和理解代数．学生的内在表征与外在表征的不断切换，可帮助学生形成更强的抽象性表征与策略，进而完善学生的代数认知结构．

学生的代数多元表征，有利于代数知识的理解和问题的解决，促进学生对数学本质规律的认识，发展学生的代数思维能力．其原因，一是多元表征能够反映事物的各种特征，尤其是从具体到抽象地把握数学的关系结构模式，其整个操作符合人们认识事物本质的规律，做到了不同特征的整体组合；二是通过对错误表征的分析，删除了事物的非本质特征，对正确表征的对比确认，强化了事物的本质特征．多元表征的使用，既丰富了对数学的理解又丰富了问题解决的策略．代数思维的多元表征教学，有利于学生对代数知识的理解和问题的解决，可以建构基于多元表征发展代数思维的有效教学模式．

3 基于多元表征发展代数思维的教学模式

我们知道，代数思维与代数问题紧密相连．只有在问题提出与解决的活动中，代数思维才可以得到培养．同样，灵活而深刻的代数思维有助于问题的提出与解决．多元表征学习是发展代数思维的有效手段，而问题可以促动学生的多元表征．所以，有效的代数思维教学程序是：先以问题或问题变式的提出激发学生的学习动机，促使学生对问题反映的知识内容的表征进行探究；其次引导学生对表征进行变式，形成多元表征，得到初步理解；然后将获得的符号表征应用于问题解决及其变式中，使之化解于各种知识网络结构中，强化对知识的深层理解；最后，通过对问题解决变式的探究，在培养思维品质的同时，形成代数知识内容的抽象表征，即对代数核心思想、等价(非等价)关系、模式的理解和应用．所以，代数思维的教学过程，应是“以师生提出问题为出发点，通过学生多元表征代数知识内容，以形成代数抽象表征为目标，以师生解决问题为落脚点”，贯穿其中的是问题或问题变式，并且其过程是以“提出问题——多元表征——解决问题——抽象表征”为单元的循环过程，其具体情形如图 1 所示：

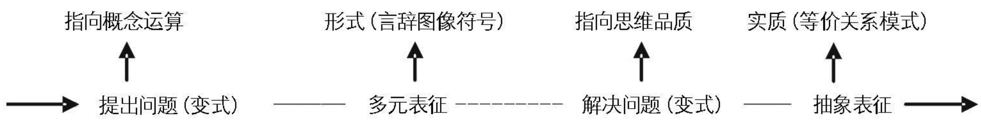


图 1 代数思维教学过程单元图景

4 教 例

例 1 小明每天早上要在 07∶50 之前赶到距家 1 000 m 的学校上学．一天，小明以 80 m/min 的速度出发，5 min 后，小明的爸爸发现小明忘了带语文书，于是爸爸立即以 180 m/min 的速度去追小明，并且在途中追上了他．问：

1）爸爸追上小明用了多长时间？

2）追上小明时，距离学校还有多远？

4 1 教师启发

无论什么样的题目，一定要明确题意，分清已知、未知，并分析量间的关系，尽量用各种手段和方法分析此问题的结构和意图．教师启发活动如下：

1）鼓励学生用自己熟悉的语言来表征题意；

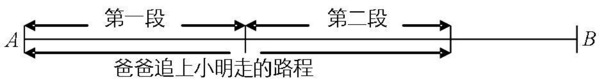
2）启发学生用不规则的草图结合自己的言语勾勒出题目中的已知量与未知量的关系；

3）让学生进一步明确量的关系，借助线段图和表格来进行分析；

4）让学生反思操作表征，形成方程的结构模式表征．

4 2 学生表征活动

按自己的理解，表达题目意义，并绘制分析图如图 2 所示．



线段 AB：小明家到学校的距离(1 000 m)；第一段：小明前 5 min 走的路；第二段：5 min 后爸爸追上小明时小明再走的路

图 2 学生对例 1 的图形分析

设爸爸追上小明用了 x min，追上小明时距离学校还有 y m 则可绘制等量关系表如表 1、表 2 所示．由表 1、表 2 中的等量方程即可解出例 1

表 1 关于路程的等量关系表

		速度/m/min	时间/min	路程/m	等量关系	等量方程
小明行程	第一段	80	5	80×5	小明走的路程等于爸爸走的路程	$80\times 5+80x=180x$
	第二段	80	x	$80\times x$		
爸爸行程		180	x	?		

表 2　关于时间的等量关系表

		速度/ m/ min	时间/ min	路程/ m	等量关系	等量方程
小明行程	第一段	80	5	80× 5	小明走第二段路程所用时间等于爸爸追上小明所用时间	$\frac{1\,000-y}{80}-5=\frac{1\,000-y}{180}$
	第二段	80	$\frac{1\,000-y}{80}-5$	?		
爸爸行程		180	$\frac{1\,000-y}{180}$	$1\,000-y$		

4 3　点　评

题意的理解，就是各种量间关系的表征过程．深入理解与对简便算法的选择，需要对涉及到的等量关系形成多元表征．言辞表征利于对情景的理解，线段表征利于对问题空间形成的理解，表格表征利于对等量关系的理解．全方位地思考与关系的建构，有利于整体掌握操作程序，发散学生的思维．通过“范例”的多元表征教学，帮助学生学会寻找问题的“等量关系”，逐步形成问题解决的抽象表征．多元表征的一题多解的变式教学使学生问题解决能力得到提高，代数思维和创新能力得到发展．

参考文献：

[1] KRIEGLER S. Just What Is Algebraic Thinking Submitted for Algebraic Concept in the Middle School [J]. A Special Edition of Mathematics: Teaching in the Middle School, 1994(5): 1—10.

[2] CAI J. Mathematical Thinking Involved in U. S. and Chinese Students' s Solving Process-Constrained and Process-Open Problems [J]. An International Journal: Mathematical Thinking and Learning Mathematical, 2000(2): 309—340.

[3] 曹一鸣，王竹婷. 数学“核心思想”代数思维教学研究 [J]. 数学教育学报，2007(2)：17—22.

[4] BALL D L, HALVES, TWOTHS. Constructing and Using Representational Contexts in Teaching Fractions [J]. An Integration of Research: Rational Numbers, 1993(3): 328—375.

[5] EISENBERG T. On Different Factes of Mathematics Thinking [J]. Mathematics Thinking, 1996, 32: 252—284.

[6] PUTNAM R T, LAMPERT M, PETERSON P L. Alternative Perspectives on Knowing Mathematics in Elementary Schools [M]. Washington: Review of Research in Education, 1990: 57—150.

[7] CAI J. U.S. and Chinese Teachers' s Knowing, Evaluating, and Constructing Representations in Mathematics Instruction [J]. An International Journal: Mathematical thinking and Learing, 2005(2): 135—169.

The Teaching Model Based on Multi-Representations about Development of Junior Algebraic Thinking

LI Jing[1,2], LIU Zhi-yang[3], SONG Nai-qing[1]

1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China;

2. Department of Mathematics and Information, Langfang Teacher' s College, Langfang Hebei 065000, China;

3. Department of Basic, Guangdong University of Science and Technology, Dongguan Guangdong 523000, China

Abstract: The algebraic thinking learning becomes into the primary mission in elementary and middle school mathematics education around the world. The development of algebraic thinking lies in grasping to algebraic thinking tool and training to algebraic thinking carrier content, and developing in multi-representations. The teaching based on multi-representations can help with algebraic understanding and problem-solving to students. It produces the teaching model based on multi-representations about development of junior algebraic thinking.

Key words: algebraic thinking; multi-representations; instructional model

责任编辑　廖　坤