

数学表征与儿童学习

——基于认知心理学的教学探讨

吴 贤

(江苏省南京市北京东路小学,210008)

摘要:儿童的思维是内隐的,而课堂学习又需要尽可能多地了解儿童的学习情况。借助认知心理学的“表征”概念,教师可以通过观察儿童外部表征来推测其内部表征情况,以更充分地理解儿童,提高教学效率。发展儿童的数学表征能力,则需要教师唤醒儿童的表征意识,丰富儿童的表征形式,增进儿童多元表征间的联系。发展表征能力的终极目的是促进儿童学习,具体做法有:沟通表征联系,推进学习活动的深入;善用表征错误,深挖数学概念的内涵;转换表征形式,突破数量关系的难点,等等。

关键词:数学表征 儿童学习 数学教学

儿童的学习过程是一个高度主观的信息处理加工过程。只有理解儿童的学习是如何发生和发展变化的,教学活动才能有的放矢,产生良好的效果。但儿童学习过程天然的内隐性,又让他人难于对其进行有效的观察和跟踪,这也是教学活动中,儿童学习出现种种问题而难以解决的原因。

如何使得儿童内部的思维活动变得可以触摸和传递呢?我们不妨引入“表征”概念,通过观察儿童内、外部表征的转换,分析儿童的多元表征形式和不同表征间的转换能力,让儿童学习过程外显,以了解儿童学习的真实状态,这样就能够及时发现问题,给予儿童

恰当的指导,提高儿童的学习能力。

一、“表征”和“数学表征”

“表征”是认知心理学领域的一个核心概念,用来描述个体在认知活动中大脑对信息的加工过程。表征并不是一个简单的结果,而是一种认知的过程,反映的是人们如何在大脑中建构、组合、表示当前学习的知识;它同时也是认知活动的结果,即知识或信息是以什么样的形式储存在大脑中的。因此,表征是过程与结果的统一。

“数学表征”则是指用某种形式将数学概念或关系表达出来的一个过程。数学表征具有多元特质,即同一数学对象或概念会有不

同的表示形式,既可以是心理的、主观的内在表征,如个体思维中建构的数学知识结构;也可以是客观显现的外在表征,如言语、文字、符号、图片、具体的事物、活动或实际情境等。各个表征方式之间也不存在必然的优劣或先后关系,重要的是表征方式的多元性和相互之间的联系与转换。

为了形象地说明,我们可以把数学概念看作人体的神经元,那么它的每一种数学表征形式就是这个神经元所伸展出的一条神经突触。我们知道,神经元的突触越多,大脑信息交换与储存的能力就越强。同样的道理,一个数学概念,儿童表征形式越丰富,其对数学概念的理解也越完善,同时,这些神经突触还能够更好地建立与其他神经元的联系,即增进数学概念间的相互交融,这也有助于儿童数学问题的解决。当儿童将内部表征与外部表征建立良好的联系,其内在的学习过程就可以通过外部表征得以显现,而外部表征的过程,也能够引发儿童对内部表征中模糊和歧义的部分进行调整。所以说,儿童头脑中的数学表征的结构和内外部表征之间的相互转换能力,是其数学学习水平的直接标志。

我们不可能直接观察到儿童的内部表征,却可以通过儿童的外部表征推测他们的内部表征,从而了解儿童学习的内在过程,明确儿童数学学习的困难所在,真正理解学生,改进教学内容、方法和过程。因此,“表征”这一概念一直是国际数学教育、认知科学和教育心理学领域的热门话题。国外教育中“表征”是一个重要的指标,例如,美国《学校数学教学的原则和标准》中,数学过程标准的五个标准之一就是“表征”,对不同年龄段学生应达到的表征都有具体的目标设定。

二、如何发展儿童的数学表征能力

表征,尤其是数学表征能力,在个体上的

差异是天然存在的,这种差异并不会随着儿童年龄的增长而自然消解。恰恰相反,如果儿童的表征能力没有得到发展和提升,这种差异会继续保持甚至变大,从而引发儿童学习中理解力的局限,进而导致认知障碍和由此引起的情感障碍,使得儿童陷入学习困难。尽管儿童的内部表征无法直接获知,但通过外部表征可以进行部分的观察。因此,在数学教学中,我们不仅要关注儿童数学学习的结果,更要让儿童尽可能地进行思维活动的外部表征,以了解儿童表征的实际水平,通过多种方法发展儿童的表征能力。

(一)自主研究:唤醒儿童的表征意识

数学学习中,如果总是以教师的讲解为主,那么学生就会失去表征的需要。而在自主研究活动中,学生需要自己加工问题信息,建构知识概念,主动进行思维活动,并通过一定的方式表达自己的思考过程,这就使得表征成为必然。

在学习活动中,积极创设能引发儿童自主研究的情境或问题,并辅之以一些具体的要求,能让学生开始尝试进行初步的表征。如苏教版小学数学一年级上册《认识图形(一)》一课,教材以主题图的形式直接呈现了学习内容。这虽然能够形象地展示学习对象,引发学生的相关经验,但不容易激发他们深入地思考和表达。如何让学生已有的经验得以激活,自主建立内部更为有序的结构,并进行有效的外部表征呢?学习前,不妨设计一个自主活动(如图1),让学生回顾这些熟悉的图形名称和形状后,在身边找一找这些形状的物品。这些图形,学生在学前就已经有了初步的生活经验,几乎都知道了它们的名称,但也大多止步于此。“找一找”的过程,既尊重了学生原有的认知经验,也是对内部概念的一次外部表征;“说一说”的过程,进一步将学生对图形概念的内部视觉表象和空间

表征以语言表征的形式外显出来。

1.生活中,我们经常会看到长方体□、正方体□、圆柱○和球○。你能在身边找到这些形状的物品吗?找一找,想一想,怎样把你找到的这些物品介绍给小朋友们?试着当一次小老师,和你的爸爸妈妈说一说。

图 1

这一内容的学习,由于活动要求的驱动,学生的图形表征和语言表征都得到了激活和发展。当然,除了“找一找”“说一说”这样的要求以外,教师还可以在学生独立研究或合作学习中,经常性地要求他们把思考活动的过程“画一画”“做一做”或“打比方”“举例子”,使其有意识地把内部表征转化为可视的外部表征,提高表征的自觉意识。

(二)交流展现:丰富儿童的表征形式

有的儿童习惯于言语思维,其表征多以语言为主要形式;有的儿童习惯于符号思维,在学习活动中表征的方式则倾向于具体直观。尽管每一种表征方式并没有必然的优劣,但不同的表征可以提供不同的信息,支持不同的认知建构过程,如果儿童表征形式过于单一,则会影响他们对数学对象的深度加工,进而影响后继的学习。这就需要我们在数学学习中,重视对儿童表征形式的展示和点评,提升儿童表征工具的丰富性。

苏教版小学数学一年级下册《认识 100 以内的数》一课,在复习数的意义时,给出了几个不同的数,让学生想办法表示出自己对这个数的理解。从学生的作品中,能看出他们不同的表征方式:文字表征(如图 2)、用图形表征(如图 3)、数轴图表征(如图 4)等。



图 2

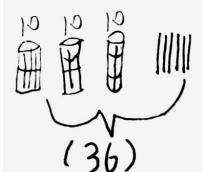


图 3

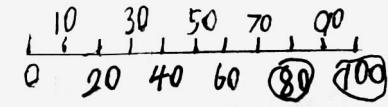


图 4

这说明,学生对 100 以内的数,有的习惯于从数的组成角度理解,有的习惯于从数的位值意义理解,还有的习惯于在数的关系中理解……这正是他们思维习惯的一种映射。但我们知道,表征的丰富性对于儿童数学概念的发展很重要。因此,在课堂上,教师不妨通过技术手段充分地展示这些不同形式的表征作品。展示作品的方式比较多样,可以请学生用语言说明,进一步辨析多种表征之间的关系;也可以直接呈现,让其他学生进行简单的概括,了解学生是否能够理解他人的思考方法。教师还可以在展示表征作品的过程中,总结全班学生在这次学习中的表征情况,点评典型的表征形式,对具有创造性的表征方法进行放大,提出希望和要求,让学生在形成自我表征特点的基础上,能够积极吸纳他人的表征形式,并在今后的学习中不断尝试应用,提升表征的丰富性。

(三)求同寻异:增进儿童多元表征间的联系

能根据问题情境选择表征形式,或在不同表征间灵活地进行转换,说明儿童对数学对象的内部表征有着较好的联系和沟通,真正学会了怎样学习数学。而要达到这样的要求,在学习活动中,还需要教师经常引导学生开展表征间的比较和沟通。

如学习乘法时,让学生想一想: 3×5 表示什么?从乘法的意义角度,学生能说出“ 3×5 ”表示“3 个 5”或者“5 个 3”,或用圆圈图表达“ 3×5 ”的意义。但这些其实还是停留在乘法表示“几个几”的层面,没有建立不同表征之间的关联。教师不妨让学生观察图像和文

字,进一步理解:为什么“ 3×5 ”既可以表示“3个5”,又可以表示“5个3”?它们有什么联系和区别呢?这样的比较沟通,可以进一步凸显乘法的意义,同时借助图像表征帮助学生理解意义中两数交换的内涵是“一份量”和“份数”的变化。教师还可以及时给出情境表征,如“每个孩子分到3颗糖,5个孩子分到多少颗糖”和“会议室里放了5排桌子,每排3张,一共有多少张桌子”,让学生在列式过程中,体会同样用 3×5 解决的这两个问题,有什么相同和不同。在后续学习中,不断地强化这样的沟通和比较,可以让原本孤立的关于乘法的图像语言、文字语言和符号语言之间产生更为有效的联结,这不仅能加深学生对乘法的理解,在学习倍的概念、归一问题、分数问题时,还能在不同知识之间建立更多的连接。

有效的数学思维活动应能引导儿童理解同一概念的不同表征之间的关系,理解表征之间结构的相似性或差异性,并有意识地对自己或他人的表征进行比较,发现不同表征之间的相同点和不同点,这样才能进一步发展儿童的表征水平,帮助儿童深入理解知识,灵活解决问题。

三、依托数学表征·促进儿童学习

发展儿童的数学表征能力,最终是为了更好地理解儿童数学学习的真实状态,帮助儿童找寻数学学习中的重点和难点,深入理解数学概念或对象,在解决问题的过程中形成有效的表征策略,提升数学学习效果和学习情感体验。

在不同的学习素材、问题研究或教学活动中,依托数学表征促进儿童学习的方法也是非常多样的。在此结合教学实践,谈几点具体的做法。

(一) 沟通表征联系:推进学习活动的深入

丰富的外在表征能够很好地展示数学对

象的多元属性,还有利于学习者对不同表征的认知连接。因此,我们在课堂学习活动中,应重视为学生提供丰富的数学表征资源,引导学生相互学习,将学习活动推向深入,促进学生内在表征间的联系和完善,最终将新的内容结构纳入已有表征系统中去。

以苏教版小学数学三年级下册“乘数末尾有0的乘法”内容的学习为例。对于“ 32×30 怎么算?”这个问题,让学生充分地思考后表达自己的想法,学生给出了口算、笔算的不同方法(如图5)。分析这些方法可以看出,具有不同表征倾向的学生在面对同一问题时有着不同的偏好:有的偏向于关系表征,则其思考的方式就表现为借助之前口算乘数是整十数的乘法知识,或乘数与积的变化规律进行口算;有的则偏向于原理表征,其头脑内部对两位数乘以两位数的结构较为稳固清晰,因此选择笔算解决;还有的通过课外学习已经了解了如何进行末尾有0的笔算乘法,并借助图示表征出来。

$1: 32 \times 30 = 960$ $3: \text{先算 } 3 \times 2 = 6, \text{再把末尾的 } 0 \text{ 加上。}$	$2: 30 \times 32 = 960$ 	$② 30 \times 32 = 960$
$① 32 \times 30 = 960$ 	$1: 32 \times 30 = 960$ 	$③ 32 \times 30 = 960$

图 5

有了对学生学习情况的充分认识后,我们的教学活动需要尊重每个学生已有的思考和经验,引发其内部的新的映射和思维,将学习活动进一步深入,让学生的内部表征结构更为完善、清晰。教学中,教师可以先让学生介绍自己的“作品”,用语言描述的形式还原解决问题的过程,唤醒其他学生的相似经验;通过“怎样笔算比较简便”“可以这样算吗?道理是什么”等问题,在对比联系中揭示各个

算法之间的内在联系,让学生体会简便笔算与口算方法、原有笔算方法间的关系,从而对算理、算法有更清晰的认知,并将这些新的认知顺利纳入原有内在表征体系中。

(二) 善用表征错误: 深挖数学概念的内涵

重视儿童的数学表征,是为了更好地了解儿童学习的真实过程与状态。在儿童表征概念的过程中,一定会出现各种错误。这些错误的表征信息,恰恰是儿童思考过程中问题节点,这也是我们教学中一个重要的立足点。尤其在概念学习中,善于发现和利用这些错误,更能让儿童准确抵达概念的本质。

例如,在苏教版小学数学四年级下册“认识三角形”内容的学习中,学生第一次开始认识图形中的高,对处于水平位置底上的高,他们的理解和认识相对容易;但当底的位置发生变化后,不少学生在操作中就出现了各种困难和错误——或凭感觉随手画,或只能关注到垂直于底边这一个要素,甚至画出和底边不对应的垂线段(见图 6)。

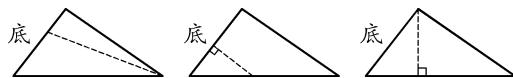


图 6

这说明,对于三角形的高这一概念,学生还存在着认知偏差。针对这些错误,教师可在教学中组织学生讨论“它们是三角形这条底边上的高吗”“为什么不是”,让学生对照三角形高的定义,在分析错误的过程中,借助具体的错点,对何为“从三角形的一个顶点到对边”,何为“垂直线段”,何为“这条对边”这些抽象的数学词汇,进行新的“图像—动作—语义”的多元表征,真正理解三角形高的内涵。

(三) 转换表征形式: 突破数量关系的难点

小学中、高年级数学学习中,学生对数量

关系的理解是一个重点,在解决实际问题、字母表示数、方程等学习中都会涉及。在学习活动中,总有一些学生很难正确把握由文字传递的数量关系,在解题中束手无策,错误较多。

这是由于学生在文字信息和数量关系之间没有建立良好的沟通方式,尽管每个字都能认识,但文字转化为数学关系还缺乏一个联系的有效媒介。小学阶段学生的思维对直观图示更为敏感,因此,在理解数量关系时,要鼓励学生尝试转换表征形式,将文字表征转换为视觉表征,以增强对文字信息的理解。

如苏教版小学数学三年级上册《解决问题的策略——从条件想起》的例 1,理解“以后每天都比前一天多 5 个”是学习的关键。教师可以设计一个让学生自己思考表达的活动:用画图的方法表示出你对这句话的理解。学生就会在阅读文字后,用圆圈、线段甚至图片,表达出后一天比前一天多 5 个的数量连续变化的情况,从而对已有条件之间的关系有清楚的认识,最终成功解决问题。

像这样的过程,如果从低年级学习比多比少、倍的概念等过程中就不断渗透强化,图示意识就能深入学生的表征策略中,当他们遇到理解困难的语句时,就会想到利用多种图示来把握数量间复杂的多少、倍比关系,以突破数量关系理解的障碍,顺利解决问题。

参考文献:

- [1] 曹才瀚,章建跃. 数学教育心理学[M]. 北京:北京师范大学出版社,2007.
- [2] 张兴华. 儿童学习心理与小学数学教学[M]. 南京:江苏教育出版社,2011.
- [3] 高文,徐斌艳,吴刚. 建构主义教育研究[M]. 北京:教育科学出版社,2008.