

数学表征与变换能力的评价指标 体系研究综述^{*}

张晋宇 姜慧慧 谢海燕

摘要 表征与变换能力是数学能力发展的重要组成部分。本文在梳理数学表征与变换能力相关研究的基础上 构建适合我国义务教育阶段数学表征与变换能力的评价框架和指标体系。希望通过指向性测试任务的编制 将学生数学表征变换能力水平定位在不同的评价维度和指标下 为更为深入细致地研究我国中小学生数学表征和变换能力发展特点提供思路。

关键词 数学学科; 表征与变换能力; 评价框架; 指标体系

作者简介 张晋宇/华东师范大学数学系博士研究生 (上海 200241)

姜慧慧/上海中学教师 (上海 200231)

谢海燕/华东师范大学数学系博士研究生 (上海 200241)

抽象是数学的核心本质之一,同一个数学概念拥有不同的表征形式,在数学活动过程中通过对相同结构的外部表征(数学符号、表格、图像、模型等)进行解读和转换,发展和建立抽象的数学世界和丰富的现实生活之间的联系,对加深数学概念的理解非常重要。^[1]上海《进入 21 世纪的中小学数学教育行动纲领》中将数学基础能力进一步扩展。“不再局限于通常所说的计算能力、逻辑推理能力和空间想象能力,而是指数学抽象的能力、数学符号变换的能力和数学应用的能力。”其中针对符号变换能力“既包括数量计算和逻辑演绎,也包括经验归纳甚至空间联想,这是数学的基本方法。”^[2]

美国 2061 计划在其出版的《科学的素养》一书中指出“数学中为数不多的令人满意的成果是:证明以前认为是截然分开的两部分内容其实是某一个更加抽象表述的两个平行而不同的事例。”而数学教学的重点应该是“尽量创造条件,使所有的学生都能亲自发现:一个概念可以用不同的或类似的方法来表述。”^[3]在 2000 年全美数学教师理事会 NCTM(National Council of Teachers of Mathematics) 出版的学校数学教育的原则和标准中,将表征能力作为五种核心数学能力的基本成分,并强调其对于概念理解和问题解决的重要性。^[4]学生能力

^{*} 本文系教育部人文社会科学重点研究基地重大项目“义务教育阶段数学学科核心能力模型与测评框架研究”(项目编号:11JJD880027)阶段性成果。

国际评价项目 PISA (the Program for International Student Assessment) 对数学素养 (mathematics literacy) 的评价框架中,表征与转换能力一直都是数学能力评价框架中的一项重要指标。^[5]已有的大量研究表明,数学表征和转换能力在数学学习和问题解决过程中扮演重要角色,是确保顺利进入更高阶段代数与几何学习的因素之一。^[6]

一、数学表征与变换能力的内涵

近年来,随着对数学教学活动和问题解决过程中表征问题的深入研究,表征与变换的内涵逐步发展,其界定广泛来源于数学、数学教学心理学、问题解决心理学、课堂教学以及信息技术融入教学的整合研究等。在美国 2061 计划《科学素养的导航图》(2001)一书中,通过来自对“统计学推理”“计算机”“设计系统”等学科特点的整合,设计并提出 K12 阶段学习和使用数学“符号系统”和“图像系统”的教学目标。^[7]丹麦数学教育家 Mogens Niss 认为数学表征应该具有以下内容:能够解读、诠释及辨识数学对象、现象、情境的各类表征;了解相同数学对象不同表征间的关系,并掌握不同表征的优势与限制;可以在表征之间进行选择 and 转化。^[8]在 Mogens Niss 的基础上,从 PISA2000 到 PISA2012,表征的内涵得到逐步发展,PISA 中对表征的定义概述为“数学素养的发展离不开个体对数学对象和情境的表征,以及各种表征之间的相互转换。表征涉及建模和问题解决过程中的各个环节,包括面对数学情境和对象时,个体通过选择、表示、转换各种表征来抓住问题的数学本质,进而解决问题。数学表征包括图像、图表、图示、具体事物。”^[9]

通过对相关研究的文献分析发现,表征与变换能力的内涵大致集中在了以下三个方面:

(一) 数学知识的外部表征发展

认知科学的发展带动了对个体内部认知规律的研究,研究者则从可视化表征入手,发现表征的多元化和具体化有利于促进学生对数学概念的理解,提高学生的问题解决能力和推理能力。^[10-11]随着计算机进入人们的生活和学习之中,使用计算机辅助教学也成为热点研究领域。从认知科学角度来看,计算机可以直观并且动态地展现抽象的数学概念和原理,为表征的多元化注入了新的元素。^[12-13]

但是表征的多元化与具体化并不总能推动个体对数学概念的理解,个体并不能够认识到不同背景和表征方式下相同的数学结构,并表现出“非守恒操作 (Non-conservation of Operations)”行为。^[14]可见,外部表征多元化与具体化对于不同个体的作用不尽相同。因此,从内部认知来探索形成个体差异性的原因是十分必要的。

(二) 数学知识的内部表征建构

探讨个体在表征能力表现的差异性表征是表征问题研究的另一个热点,主要集

中在讨论个体在头脑中如何操作不同的表征。Perkins 和 Unger(1994) 认为表征是“用代表性的数学符号、数学定义、数学语言、图表等代表整个符号系统”,从认知心理学的角度看,这种表征方式可以减轻认知负荷,帮助个体更加快速准确地理清问题空间,对问题解决过程中解释、预测、修正步骤提供帮助。^[15]

Goldin 和 Shteingold 进一步将表征分为内部表征(internal representation) 和外部表征(external representation),外部表征从传统的数学符号系统(例如十进制数系、形式代数符号、实数数轴、笛卡尔坐标系) 到结构性的学习环境(例如那些包含具体操作材料的数学学习情景、基于电脑的微观学习环境),内部表征包括学生个人的符号意义建构,对于数学符号的意义赋予,以及学生的自然语言、视觉想象和空间表征、解题策略、启发方法和关于数学的情感。^[16]同时,其相关的研究中讨论了类比、意象以及隐喻等方式在个体建构外部表征的作用,指出由于代替数学概念的各种表征不像数学定义那样精确,所以容易对个体准确理解数学概念产生阻碍作用。对内部表征建构的深入讨论,沟通了行为主义和认知学派之间的鸿沟。^[17]

(三) 数学知识的表征系统变换

Richard(1983) 将知识表征方式分为书面符号表征、图形表征、情景表征、操作性表征模型、语言表征,上述表征方式共同构成了表征系统。不同表征方式之间互相转化,推动学生数学概念的理解(见图 1)。^[18]

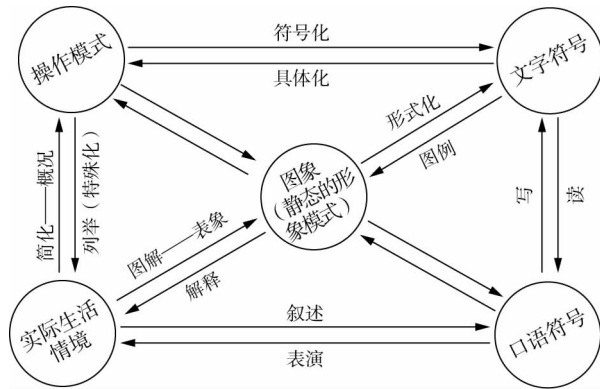


图 1 表征系统中不同表征方式之间的作用

表征变换多发生在问题解决过程中,或者说,个体的表征变换行为更易于在问题解决背景中得到呈现。NCTM 在 2000 年提出的新的数学课程标准中强调数学表征能力对于数学问题解决过程的重要性,指出“在问题解决过程中,能够创造和使用表征去组织、记录和沟通数学的观念,能选择、应用和转换数学的表征以解决问题,能使用表征建构出模型并能解释自然界、社会及数学的现象”。基于问题解决的表征研究近年来发展迅速,在问题解决过程中,表征行为并不是静止的,而是一个动态过程。在这个动态过程中,个体对于数学概念的认知水平影响其能否成功对问题背景和真实情景进行数学化。^[19]在不同表征方式之间的变换中,个体对不同表征的“同构”(Isomorphism) 的识别非常重要。在不受表面

信息的影响下对不同情景中相同的结构和关系进行识别,是数学认知发展的重要阶段。[20]

基于以上关于表征内涵的文献分析,该研究对于数学表征和变换能力的内涵定义如下:“数学表征能力界定为:用某种形式,例如书面符号、图形(表)、情景、操作性模型、文字(包括口头文字)等,表达要学习的或处理的数学概念或关系,以便最终解决问题。数学变换是指在数学问题解决过程中,保持数学问题的某些不变性质,改变信息形态,将要解决的问题进行数学转化,使之达到由繁到简,由未知到已知,由陌生到熟悉的目的。”[21]

二、数学表征与变换能力评价指标体系的建构

随着对表征系统研究的深入,个体在问题解决过程中表现出的表征和变换能力渐渐进入研究人员的视野。在美国 2061 计划《科学素养的导航图》中,通过对关联学科特点和数学家活动方式的分析,建构了基于数学探索活动过程的表征与变换能力要求。例如,对于 6 至 8 年级学段,对学生表征与模型过程的描述为:可以利用不同的模型代表相同的事物。选用哪种模型,以及选用模型的复杂程度取决于它的用途。选择一个有用的模型,是直觉和创意在科学、数学和工程学中起作用的实例之一。

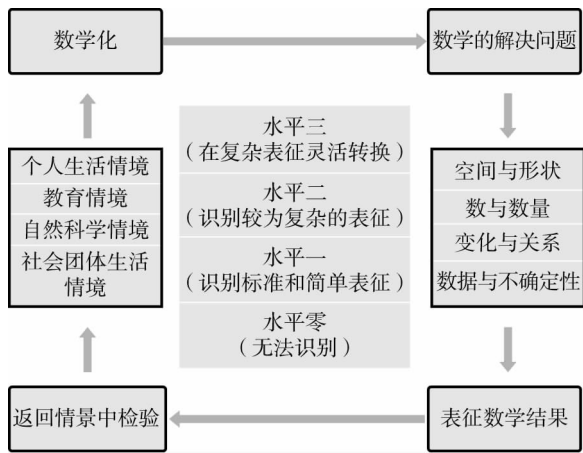
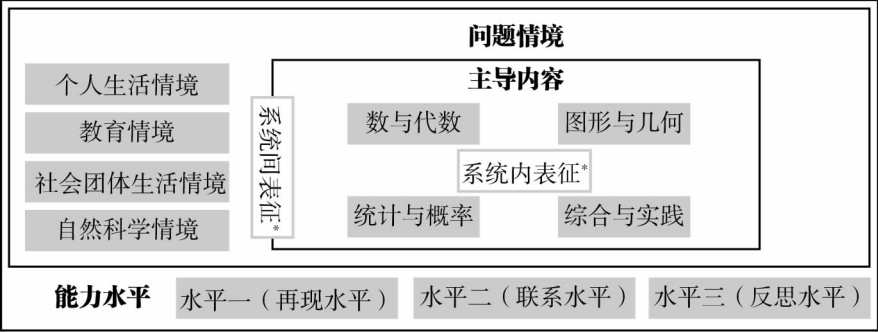


图2 PISA2009 评价框架

美国 2061 计划重视通过学科间关联在数学活动中发展学生的表征能力。与科学素养蓝图不同的是,PISA 侧重于如何评价学生在数学活动过程中表征能力的水平。PISA 能力水平测试通过不同指向的问题,将学生表征能力定位在数学问题解决的四个活动过程中(见图2)。在问题情境的数学化、数学的解决问题、解读数学结果、返回情境检验四个环节中,学生逐步将情境问题转化成同构的数学问题,然后通过数学方法解决问题并回到情境中进行解读和检验。在文献分析的基础上,本研究拟参考 PISA 对于数学能力评价框架来构建了对于义务

教育阶段数学表征能力的评价框架 ,如图 3 所示。



* 系统内表征: 不同表征系统间的映射过程; * 系统间表征: 同一表征系统内的变换过程。

图 3 义务教育阶段学生数学表征能力评价框架

框架拟采用指向性测试任务评价学生的数学表征能力 ,测试题目的设计和编制拟基于以下三个维度: (1) 数学内容和知识; (2) 呈现问题的情境; (3) 数学表征能力及其水平。上述三个维度互相独立 ,相对应测试题根据考察指向性的不同而各异。数学表征能力及其水平维度也决定了任务需要不同的类型。测试题将从五个指标(主导内容、问题情境、任务类型、能力表现形式和能力水平) 评价学生的数学表征与变换能力。

主导内容维度方面 与 PISA 评价框架不同的是 ,由于此次评价项目面向义务教育阶段的学生 ,所以拟根据我国义务教育阶段数学课程标准 ,将四大板块(数与数与代数、图形与几何、统计与概率以及综合与实践) 作为主要内容维度指导评价题型的设计。研究表明 ,知识和能力的关系密不可分 ,知识学习和能力发展对于以抽象符号为载体 ,以培养高层次思维能力为目标的数学教学尤为重要。^[22]

问题情境维度方面 ,评价项目将参考 PISA 评价框架 ,依据评价主体对于问题情境的熟悉程度分为: (1) 个人生活情境 ,即个体接触最为紧密的生活环境 ,如折纸等具体个人操作行为; (2) 教育情境 ,即个体所处的学校教育环境 ,如学科相关知识等; (3) 社会团体生活情境 ,即关系到某些社会或市场的问题 ,如股票市场波动或超市促销相关问题; (4) 自然科学情境 ,即关系到自然界中的某些科学问题 ,如用声音测量距离问题。^[23] 本研究评价任务中所涉及的问题情境主要为个人生活情境和教育情境。

三、数学表征与变换能力指向性评价题型的设计

个体在问题解决过程中 ,数学表征行为方式和能力水平随着问题情境和内容的改变而不同。因此 ,此次项目拟采用标准任务和开放任务两种题型全面评估学生的表征和变换能力。两种题型对于表征和变换能力的要求各不相同 ,开放题以现实问题为背景 ,需要个体通过分析情境实质 ,建立情境与数学内容之间的映射 ,将问题情境数学化后应用数学知识和方法进行解决。开放题侧重评价学生系统间的表征和变换能力 ,题目的设计指向能力水平二和能力水平三(图

3)。标准任务为常规解答题,涵盖数学内容的四个模块,依据个体表征形式的不同,分为两种,一类测试题目指向与系统内表征,即学生需要通过在不同数学书面符号系统、几何表征系统、语言文字系统以及操作性表征系统之间的映射活动解决问题。另一个测试题则侧重于评价在同一表征系统内对数学问题应用恒等变形、初等几何变换等方式对问题进行转化达到解决问题的目的。标准任务指向系统间和系统内变换两种方式(见图3),侧重于评价表征与变换能力水平一和水平二。

(一) 系统间表征

系统间的数学表征,是一种映射过程,即实际生活情境的数学化,以及在相同数学结构的书面符号表征系统、几何图形(表)表征系统、语言文字(口头)表征系统以及操作性表征系统四个数学表征系统之间进行多元转换。系统间表征体现个体在复杂问题和现实生活情境中表征能力和水平。以下面一道测试题为例:

某一正方形的边长是3,在其中有一个半径为1的圆,小明将一粒豆子(面积不计)任意丢进正方形内,若豆子一定能掉到正方形内,问:这粒豆子更可能落在圆内还是圆外?并说明你的判断理由并写下思考过程。

该题型为开放题,以生活背景为问题情境,考察的主导内容维概率与统计。任务以文字形式进行表征,个体需要通过模型、图像等对问题进行转换,将豆子视为一个点,并体现问题中正方形、圆以及两者之间位置关系。进一步结合面积知识计算出豆子落在圆中的概率。学生的具体行为描述见表1。在解决问题的过程中,个体需要在上述四个数学表征系统中进行转换以达到解决问题的目标。

表1 系统间表征能力的具体行为描述

系 统 间 表 征	具体行为描述
	将以其他系统形式出现的问题直接或间接转化为数、代数、运算符等书面符号表征系统的形式予以解决。
	将以其他系统形式出现的问题直接或间接转化为线段距离、图形等的几何图形(表)表征系统形式予以解决。
	将以其他系统形式出现的问题直接或间接转化为具体的手势表达、实物列举等现实操作性表征系统,用以实现原问题中的结构本质或解决问题。
系 统 内 表 征	将以其他系统形式出现的问题直接运用或间接转化为语言、文字等语言文字(口头)表征系统形式,表达或解释或予以解决。

(二) 系统内表征

系统内的数学表征,是一种数学变换过程。在同一个表征系统内,通过对问题进行数学转化,以达到化繁为简,由未知到已知,从陌生到熟悉的目的。基础教育阶段数学学科中常见的系统内表征方式有三角变换、恒等变形、初等几何变换、分割变换、参数变换等。在学科内容分析和教师访谈的基础上,归纳总结出框架拟采用的四种系统内表征形式作为题型设计指标:变量替换、初等几何变换、恒等变形以及映射变换。其中变量替换与恒等变形数学数与代数板块,初等几何变换属于图形与几何板块,而映射变换涵盖四个内容板块。

在上述四种数学变换方式中,映射变换对于陌生问题情境的转化、负责问题的简化尤为重要。从集合与对应的观点来看,映射是在两个集合之间建立特殊的对应关系。以映射变换为指向的任务设计如下:

证明关于 x 的方程: $2x^2 - (3m + n)x + mn = 0$ (其中 m, n 为实数,且 $m > n > 0$) 的两根一个大于 n ,另一个根小于 n 。

该任务为标准题型,内容为数与代数板块,学生需要证明一元二次方程的两根需要分别满足一定的取值范围。若直接使用求根公式表达两根并分别利用不等式进行证明,则过程复杂。因此利用映射变换的方法,根据根与系数关系,将两根取值范围问题转化为系数取值范围问题,则原问题得到简化。学生在解决此类问题过程中的具体行为描述见表 2。

表 2 系统内表征具体行为描述

系统内表征	具体行为描述
	在数与代数系统中,用另外一种数学变量来替换原变量用于数学问题更为简单的解决,如使用换元法去解决问题。
	在几何与图形系统中,通过在原有的几何结构基础上通过对图形的旋转、平移、对称或添加辅助线等变换使得原有条件更为集中或者直接用于问题解决。
	在数与代数系统中,将原有问题中对于数或代数式进行等价转换或灵活演绎,以利于问题的简便解决,如在分数和小数的形式之间变换形式。 在某个特定系统中,将原命题进行恒等转述或将原问题或转化为另一个更易于求解问题,最终实现原问题的解决。

(三) 数学表征能力水平的划分

为体现个体在问题解决过程中表现出的不同表征与变换能力水平,题型设计所基于的情景与内容非常重要。由于函数概念对于代数学习的重要性,目前较多的研究以函数内容为基础评价个体表征能力水平。^[24]在 Cifarelli(1998)的研究中,通过对 14 名大一新生解决一系列相似的代数文字表征题目后,总结出问题解决过程中概念结构发展的三个水平(Levels of Conceptual Structure)(见表 3)。^[25]

表 3 概念发展的水平

水平三(结构性抽象)	个体在正式解决问题前构思不同解决思路,在进行解题前预测到结论。
水平二(再表征)	个体回忆先前活动,预测到潜在难度。
水平一(识别)	个体识别出相似问题。

PISA 在其评价框架中将表征能力根据认知水平划分为四个水平(见图 2)在相关文献分析的基础上,框架拟将学生表征能力按照认知水平分为三个层次如下。

1. 标准化数学表征的应用(水平一:再现水平)

该层次的认知包含数学学习过程中最基本的要素:数学过程、数学知识、数学技能。相对应的评测试题包含个体在日常的学习和练习过程中常用的标准数学表征(公式、图表等),问题的情景中含有提示,帮助引导学生对常用的表征方式进行回忆和再现。

若 a, b, c 代表一个三角形的三个边长,其中 $a < c, b < c$ 请用含有 a

, b , c 的数学式子表示“此三角形是直角三角形”。

任务的设计以引导学生再现和回忆相关知识为主,内容属于图形与几何,考察的知识点为直角三角形的三边关系,其符号表征方式属于表征形式。

2. 多元化数学表征的应用(水平二:联系水平)

该层次的认知体现出较高的数学表征能力,能够在非常规但包含熟悉信息的情境下进行问题解决。相对应的评测试题将熟悉的内容知识融合在问题情境中,个体需要在非常规的问题情境下识别和转化出熟悉的表征方式。

有一张正三角形纸片,请问如何剪裁,将其拼接成一个平行四边形,请至少拼接成两个形状不同的平行四边形,并描述你的过程。

任务设计的内容属于图形与几何,考察的知识点包括正三角形、平行四边形等。问题以个人生活情境为主,学生需要将操作性表征转化为图形表征,结合已有的数学知识提出解决方案,并加以检验。

3. 数学表征的迁移与构建(水平三:反思水平)

该层次的认知属于高水平的数学能力,能够在较为复杂的问题情境中提取并转化出有利于问题解决的表征方式。相对应的评测试题抽象度高,个体需要通过分析、编码、解码等过程,构建并创造性地迁移不同的表征方式解决问题。

一个数加上 168 就得到一个正整数的平方,加上 100 得到另一个正整数的平方,请问这个数是多少?

任务设计的背景较为抽象,没有明确的信息引导学生识别和应用熟悉的表征方式,需要在分析的基础上构建合适的表征方式来转化问题。通过系统内表征变换的手段逐步将问题简化,将未知转变为已知,进而解决问题。

以上三种水平在问题解决过程中的具体行为描述见下表(见表 4):

表 4 数学表征与变换能力水平的具体行为描述

水平三 (反思水平)	能够理解和应用非标准形式的表征(非标准形式的表征是指需要大量的解码和转换才能成为熟悉的表征形式的表征);能够在较为复杂的问题情境中,为问题的关键步骤设计出特定的表征;能够比较并权衡不同的表征形式。
水平二 (联系水平)	在非常规但含有某些熟悉信息的问题情境中,能够清楚地区别和转换两个以上不同的表征形式,如对某种表征进行调整,或者自主选择使用某种较为熟悉的表征形式。
水平一 (再现水平)	能够在较为熟悉和标准化的情境下直接处理给定较为熟悉的表征并加以利用,或在有暗示的情况下对于某种数学表征形式进行转换,如将熟悉的文字表达转化为数、代数、图形和图表,或完成题设指定的较为熟悉的数学变换过程。

参考文献:

- [1] Even, R. Factors Involved in Linking Representations of Functions [J]. The Journal of Mathematical Behavior, 1998, 17(1): 105 - 121.
- [2] 《进入 21 世纪的中小学数学教育行动纲领》课题组. 进入 21 世纪的中小学数学教育行动纲领(讨论稿)(1997~2010) [J]. 上海教育, 1997(9): 7 - 13.
- [3] 美国科学促进协会. 科学素养的基准[M]. 中国科学技术协会,译. 北京:科学普及出版社,2011.
- [4] Gagatsis, A. & M. Shiakalli. Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving [J]. Educational Psychology, 2004, 24(5): 645 - 657.

- [5][9][23] OECD. PISA 2012 Assessment and Analytical Framework[J]. Paris: OECD Publishing 2013:265.
- [6] Goldin ,G. A. Representational Systems ,Learning ,and Problem Solving in Mathematics [J]. The Journal of Mathematical Behavior ,1998 ,17(2) : 137 – 165.
- [7] 美国科学促进协会. 科学素养的导航图[M]. 中国科学技术协会 ,译. 北京: 科学普及出版社 2008.
- [8] Niss M. Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project [J]. 2003:115 – 124.
- [10] Arcavi ,A. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics [J]. Educational Studies in Mathematics 2003 ,52(3) :215 – 241.
- [11] Pape S.J. & M. A. Tchoshanov. The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding[J]. Theory into Practice 2001 ,40(2) : 118 – 127.
- [12] Edwards L. D. Embodying Mathematics and Science[J]. Journal of Mathematical Behavior ,1998 ,17(1) :53 – 78.
- [13] Scheiter ,K. ,P. Gerjets & J. Schuh. The Acquisition of Problem-solving Skills in Mathematics [J]. Instructional Science 2010 ,38(5) :487 – 502.
- [14][20] Greer B. & G. Harel. The Role of Isomorphisms in Mathematical Cognition [J]. Journal of Mathematical Behavior ,1998 ,17(1) :5 – 24.
- [15] Perkins D. N. & C. Unger. A New Look in Representations for Mathematics and Science Learning [J]. Instructional Science ,1994 ,22(1) :1 – 37.
- [16] Goldin ,G. & N. Shteingold. Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts [J]. The Roles of Representation in School Mathematics(2001) 2001: 1 – 23.
- [17] Goldin ,G. A. Representations and the Psychology of Mathematics Education [J]. Journal of Mathematical Behavior ,1998 ,17(2) :135.
- [18] Lesh R. A. & M. Landau. Acquisition of Mathematics Concepts and Processes [M]. 济南: 山东教育出版社 ,1991:450.
- [19] Gérard ,V. A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education [J]. Journal of Mathematical Behavior ,1998 ,17(2) :167 – 181.
- [21] 徐斌艳. 数学学科核心能力研究[J]. 全球教育展望 2013(6) :67 – 95.
- [22] 鲍建生. 关于数学能力的几点思考[J]. 人民教育 2014(5) :48 – 51.
- [24] Hitt F. Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function [J]. The Journal of Mathematical Behavior ,1998 ,17(1) :123 – 134.
- [25] Cifarelli ,V. V. The Development of Mental Representations as a Problem Solving Activity [J]. Journal of Mathematical Behavior ,1998 ,17(2) :239 – 264.

Assessment and Analytical Framework of K-12 Mathematical Representational and Translate Competency in China

ZHANG Jinyu ,JIANG Huihui & XIE Haiyan

(Department of Mathematics ,East China Normal University ,Shanghai 200241 ,China;
Shanghai High School ,Shanghai 200231 ,China)

Abstract: Representational and transform ability plays an important role in the development of mathematical competency. Based on the related researches internationally ,this article focuses on the assessment and analytical framework which is built for K-12 students in China. Different tasks are developed for more accurate and deep analysis of students' representational and transform ability , which we hope can provide ideas for future researchers.

Key words: mathematics curriculum; representational competency; assessment framework; coding system

(责任校对: 邵 丽)