

多元表征视域下揭示数学运算本质

刘京莉,王倩,李佳,张亚婷

(北京师范大学教育学部,北京 100875)

[摘要] 运算能力是小学数学关键能力之一。从多元表征出发,采用案例分析法,对整数、小数、分数及四则运算的实物表征、竖式表征、十进制数表征、语言表征、图形表征之间的关联与转换进行研究,挖掘小学数学运算本质。结果表明,知识有多种表征方式,可以从多角度思考问题。另外,不同的表征方式具有不同的作用,用多种形式表征运算,并注重各种表征之间的关联与转换,会更加深入地理解运算的本质。

[关键词] 多元表征;关联与转换;小学;数学运算

《义务教育数学课程标准(2011年版)》明确提出运算能力是十大核心概念之一。从它的定义来看,运算能力是指根据法则和运算律正确地进行运算的能力;从它的地位来看,运算能力是数学基本能力之一,是每个人必须具备的素养之一,是理解数学与生活实际联系的途径之一,在数学学习中占有较大比重,发挥重要作用;从它的作用来看,培养运算能力有助于学生理解运算的算理,寻求合理简洁的运算途径解决问题。由于整数、小数、分数自身具有不同的特征,它们可以用多种方式进行表征。因此,本文采取案例分析法,首先对小学数学教材中数及运算的多元表征进行归纳,再从多元表征的关联和转换揭示数学运算本质。

一、数学多元表征

“表征”在《辞海》中的解释为,“揭示;阐明。也指事物显露在外的征象”^[1]。帕尔默(S.E.Palmer)从认知心理学的观点指出,表征一般是指用某一种形式(物理的或心理的)将一种事、物、想法或知识重新表现出来。因此,一定存在一个“表征”世界,也必定存在一个“被表征”的世界。表征的含义,即指在这两个世界的特征或元素之间有一种对应的关系。^[2]多元表征指的是信息如数学概念或数学问题,通过心像码的建构过程,对信息进行编码和形成多种转译,从而形成对信息的多元化的表征。数

学教育的多元表征主要有以下几种分类方式。^[3]爱里克斯(Alex)和迈克尔(Michael)认为数学表征可以分为文字表征(verbal representation)、数字表征(numerical representation)、图形表征(graphical representation)和代数表征(algebraic representation)四类。徐斌艳认为数学表征可以分为形式化表征、图像化表征、动作化表征和语言化表征四类。^[4]莱什(Lesh)等结合数学学科的特点,扩展了数学多元表征的含义,将数学学习的外在表征分为五种类型:口语、图像、书写符号、操作、真实情景,并指出数学多元表征系统间转换与转译的重要性。^[5]

根据我国现行小学数学教材内容的呈现方式以及已有研究中对数学表征的分类,本研究将小学数学多元表征归纳为实物表征、图形表征、语言表征、算式表征。实物表征指解释学习内容或问题的真实世界的实际物品,如用小棒、水果的个数表示数;图形表征是指用具有一定结构的直观图形表示数量或数量关系,如小棒图、数轴图、线段图等;语言表征是根据数学知识的意义表征数量关系,如有12名学生,1/3是女生,女生有多少人;算式表征在小学数学阶段包括十进制数表征、竖式表征、运算律和法则表征等,其中十进制数表征不仅表示数,而且还可以表示算式如 $abcde=a\times 10000+b\times 1000+c\times 100+d\times 10+e\times 1$ 。每种表征具有各自的特点,虽然不

[作者简介] 刘京莉,副教授,研究方向:课程与教学论、数学教育;王倩,硕士研究生,研究方向:课程与教学论;李佳,硕士研究生,研究方向:课程与教学论;张亚婷,硕士研究生,研究方向:课程与教学论。

同的数学内容都具有最适合自己的表征方式,但是相对于单一表征,多元表征具有互补功能,教师在教学过程中若注重加强多元表征之间的联系与转换,就会对学生理解数学算理、掌握数学算法产生直接的影响。

二、用多元表征探究小学数学运算

数的运算前提是数的认识。在数的认识中,教师经常会借用实物表征帮助学生认识数,再通过十进制数表征去理解数学运算的算理,进行竖式运算。下文将从整数的乘除、小数的四则运算、分数的乘除法出发,分析这些运算的十进制数表征、竖式表征、图形表征与语言表征及其表征之间的关联和转换,体会多元表征对数学运算的重要性。

(一)整数运算:十进制数表征与竖式表征的转换

整数乘除法是数学运算的重要组成部分,是学生容易出现错误的知识点。比如有的学生在 34×12 的竖式中会出现以下错误(见图1),他们会把12中的1看成是1个1,而不是1个10,从而出现 $34 \times 12 = 34 \times 2 + 34 \times 1$ 的错误,这是因为学生头脑中根本就没有十进制数的概念,没有注意到十进制数包括数位和数位上的个数。如果学生将十进制数表征和乘法竖式表征联系在一起,他们就能明确 34×12 竖式中每一步的算理,其中竖式中的1用十进制数表示应该是10,即 $34 \times 12 = 34 \times (10 + 2) = 34 \times 10 + 34 \times 2$,所以竖式中12的十进制数表征应该是 $10 + 2$,34与1个10相乘应该是 $34 \times 10 = 340$ 。

十进制数在整数除法竖式运算中具有更突出的作用。如果没有将整数除法竖式和十进制数关联起来,会出现一些常见的错误,比如图2中 $2018 \div 2 = 1009$,学生在千位上试商时,千位上有2个1000,它的意义是“2个1000除以2,商几个1000”,商1个1000。学生在百位上试商时,百位上

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 12 \\ \hline 68 \\ 34 \\ \hline 102 \end{array}$$

图 1

$$\begin{array}{r} 109 \\ 2 \overline{) 2018} \\ \underline{2} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 0 \end{array}$$

图 2

$$\begin{array}{l} \boxed{3} \\ \dots\dots 10 \times 4 \rightarrow \\ \dots\dots 3 \times 4 \end{array}$$

图 3

$$\begin{array}{r} 13 \\ 4 \overline{) 52} \\ \underline{40} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

有0个100,因此除以2商是0个100,商0。学生在十位上试商时,十位上只有一个10,它的意义就是“1个10除以2,商几个10”,显然没有答案,只能商0,因此这个10退到个位,个位拥有了18个1,18除以2商几个1,商9。如果学生明白了2018的十进制数表征并与除法竖式表征联系起来,就不会出现图2的错误。综上所述,教师在强调整数除法运算法则时,要将十进制数的表征与整数除法竖式表征结合起来,加深学生对算理的理解。

从十进制数表征的角度考虑整数除法竖式运算时,可分别考虑不同数位的商。如图3左边的竖式,先在十位上试商,5个10除以4,商1个10;再在个位上试商,12个1除以4,商3个1。然后把二者求和得到答案13。为了简洁起见,在小学数学教学中大多以图3中右边的竖式,用数位线更清晰地呈现出整数除法竖式表征与十进制数表征的关系。在简化的写法中,我们应该注重商的数位。

(二)小数运算:十进制数表征与算式表征的关联

小数的表达遵循十进制数的原则,每个小数除了数字本身外,还结合其所在的位置表示一定的数值。为此,加强十进制数的表征可以帮助学生理解小数的含义。例如,42.195中4表示4个“10”,2表示2个“1”,1表示1个“0.1”,9表示9个“0.01”,5则表示5个“0.001”,即 $42.195 = 4 \times 10 + 2 \times 1 + 1 \times 0.1 + 9 \times 0.01 + 5 \times 0.001$,这样便把42.195表示的十进制计数单位和计数单位上的个数都展现出来了。这样的十进制数表征方式是小数四则运算法则的基础。

1. 小数加减法中十进制数表征与算式表征的关联

小数加减法的运算法则是:先把小数点对齐,再从右往左把两个小数相同数位上的两个数依次相加减。十进制数表征中数位及其个数是关键,在

十进制数中进行加减法时,要求我们把相同数位的数字进行加减。这两者的本质是一致的。但是在实际教学中,当进行两个不同位数的小数加减法竖式计算时,学生往往会出现对齐右边第一个数,而不是对齐小数点的错误(参见图4)。

$$\begin{array}{r} 4.82 \\ + 2.4 \\ \hline 50.6 \end{array}$$

图 4

图4中小数竖式计算错误的原因,可能是学生受之前学习的整数加减法的负迁移的影响,只是机械地模仿末位对齐,学生并没有把十进制数与小数加减法的竖式计算进行关联。学生不理解4.82中的4表示4个“1”,8表示8个“0.1”,2表示2个“0.01”。2.4中的2表示2个“1”,4表示4个“0.1”。所以不知道4.82中的4和2.4中的2有相同的计数单位“个”,在相同的数位上,应该对齐相加;同理,4.82中的8应该和2.4中的4对齐后再相加。

此外,在小数加减法的运算中采用十进制数表征与竖式表征结合,还有助于突破教学中的难点。被减数与减数的小数数位个数不同,是小数减法教学中的难点。 $5.3-3.45$ (如图5),被减数百分位上没有数字,而减数的百分位上却有5。根据小数的性质,便可以在被减数的百分位上添0使它与减数保持相同的位数。再根据十进制数表征分别找到被减数与减数中相同数位上的数进行相减。通过此题,将学生不容易理解的知识点用不同的多元表征呈现,即将十进制数表征与小数减法竖式表征结合,帮助我们有效突破教学中的难点,使得学生更容易理解。

2. 小数乘除法中十进制数表征与算式表征的关联

小数乘法的运算法则是:先按照整数乘法算出乘积,再点小数点;点小数点时,看乘数中一共有几位小数,就从积最右边起数出几位,点上小数点。学生在初学小数乘法时,容易把结果中的小数点遗忘或点错位置。如 $42 \times 0.97 = 40.74$,学生易把结果写成4074。学生出现这种错误是因为没有真正理解小数乘法的算理,没有将小数与整数之间进行转化。为加强学生对此转化的理解,可以借助算式 $42 \times 0.97 = 42 \times 97 \div 100$,帮助学生理解乘法运算过程

和结果中小数点位置的移动。

又如,请根据 $8.6 \div 3$ 的竖式,写出除法算式:被除数=商 $\times$ 除数+余数。除数是整数的小数除法运算步骤:先按照整数除法的法则去除;然后商的小数点要和被除数的小数点对齐;最后除到被除数的末尾,留下余数,见图6。学生在答题时,经常出现的错误是写成了 $8.6 = 3 \times 2.8 + 2$,忽视了竖式中余数2的数位,把余数2误以为是整数2。但是如果把 $8.6 \div 3$ 的竖式写成如图7所示,即在小数点处画一条数位线,就可以更清晰地为我们呈现出小数除法竖式表征与十进制数表征的关系,学生就很容易发现竖式中余数2的数位是十分位,即余数是0.2。由此可见,通过一条数位线把小数的十进制数表征、竖式表征、算式表征之间建立联系,可以有助于加深学生对带余数小数除法运算法则的理解。

(三) 分数运算:语言表征与图形表征的转换

分数的几何意义可以理解为,用一个几何测度B做标准(度量单位)去度量一个几何体A,如果量了几次恰好量尽,就可以用一个整数去表示度量的结果。如果不能恰好量尽,可以把B分成n等份,用其中的一份作为新的度量单位去度量A,如量m次恰好量尽,那么A包含将B分成n等份后的m份。如果仍用B做度量单位表示度量A的结果,就得到了形如 $\frac{m}{n}$ 的数。

如果将原始度量单位B看作单位“1”,那么分数 $\frac{m}{n}$,就是将单位“1”等分为n份后,表示m个这样的一份的数。其中一份数作为新的度量单位 $\frac{1}{n}$,叫作分数单位。 $\frac{m}{n}$ 的分数单位是由分母来决定的,分子m是A包含的分数单位的个数。例如:用单位“1”B去度量A(见图8),当B(1m)无法度量A时,如果将

$$\begin{array}{r} 5.30 \\ -3.45 \\ \hline 1.85 \end{array}$$

图 5

$$\begin{array}{r} 2.8 \\ 3 \overline{) 8.6} \\ \underline{6} \\ 26 \\ \underline{24} \\ 02 \end{array}$$

图 6

$$\begin{array}{r} 2.8 \\ 3 \overline{) 8.6} \\ \underline{6} \\ 26 \\ \underline{24} \\ 2 \end{array}$$

图 7

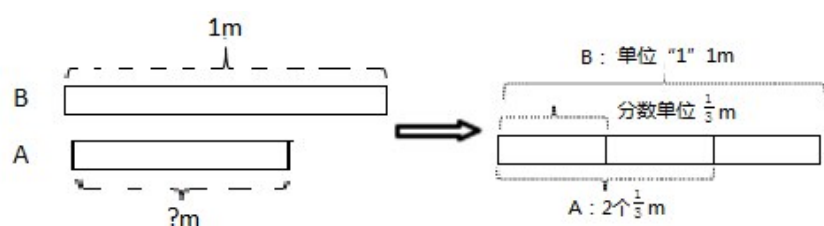


图 8

B(1m)三等分之后可以度量A,那么 $\frac{1}{3}$ m就是新的度量单位,即分数单位。A包含2个分数单位。

由此可见原度量单位,即单位“1”、新度量单位即分数单位、分数单位的个数这三者是分数认识的主要因素。分数认识中,用图形表征单位“1”、分数单位、分数单位的个数,可以帮助我们理解分数的意义和解决分数运算问题。

如,分数除法运算中,为什么只需运用“颠倒相乘”的方法就能求得答案?运用上述法则进行除法运算不难,但要解释为什么法则成立,还需借助除法运算的实物表征、语言表征和图形表征的关联和转换。我们将分数除法问题转换为实物表征,假设 $\frac{3}{4}$ L(升)的果汁质量是 $\frac{2}{5}$ kg,1L果汁有多重?由除法的语言表征可知,果汁的质量 $\div$ 容积=1L的质量,即 $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$,用图形表征为图9。借助除法的图形表征,我们先得到 $\frac{1}{4}$ L果汁的质量是 $\frac{2}{5} \div 3$,而 $\frac{1}{4}$ L果汁的质量的4倍就是1L果汁的质量($\frac{2}{5} \div 3$) $\times 4$,即 $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = (\frac{2}{5} \div 3) \times 4 = \frac{2}{5 \times 3} \times 4 = \frac{2 \times 4}{5 \times 3}$ 。

在分数除法运算中,多元不同表征元素间的联系和转换帮助我们一步一步探索运算规律,发现运算规律,进而概括出抽象的算法,并理解、掌握运算法则,提高运算能力。

三、启示

在现实教学中,众多一线教师已经发现了数形结合是有效解决数学问题的一种思想方法,其实,数形结合只是多元表征关联与转换的一种形式。多元表征内涵丰富,形式多样,只有当教师充分意识到多元表征的价值,才能更准确地理解数学运算的本质,有利于数学运算教学,从而有助于学生正

确理解数学运算法则和算理,有助于拓展学生寻找解决问题的途径,有助于培养学生的数学思维能力。

另外,本文对整数、小数、分数及其运算的竖式表征、十进制数表征、语言表征、图形表征之间的关联与转换进行研究。研究结果表明,不同的表征方式具有不同的作用,注重各种表征之间的关联与转换,尤其是在运算教学中,注重十进制数表征与数运算的竖式表征之间的关联与转换,能够更好地揭示小数、整数四则运算法则的本质,帮助教师突破运算教学中的难点。对于分数,它的图形表征与语言表征、算式表征的结合和转换非常重要,能够促进学生多方位、多角度理解抽象的运算法则和运算律,从而有效提升运算能力。

综上所述,小学数学运算的多元表征既是数学知识内容的一部分,又是解决小学数学运算问题的思想方法,同时也是促进学生理解数学运算重点难点的重要途径。即使随着时代的变迁,计算器等设备逐渐普及,但是运算能力一直都是处于数学学习重中之重的地位,它不仅承担着应用生活的功能,还对学生思维等方面的能力有促进作用。因此学好运算是人类必须具备的能力,同样理解好运算的多元表征也是教师教学的重要前提。▲

参考文献:

- [1] 夏征农.辞海[M].上海:上海辞书出版社,1999:105-106.
- [2] Palmer S E. Fundamental aspects of cognitive representation [M]//Rosch E, Lloyd B. Cognition and Categorization.Hillsdale,New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates,Publishers, 1978:259-303.
- [3] 吕程,周莹,唐剑岚.多元表征:探寻数学智慧课堂的一把密钥[J].教育与教学研究,2012(6):107-110,114.
- [4] 徐斌艳.数学教育展望[M].上海:华东师范大学出版社,2001:141-142.
- [5] Lesh R, Post T, Behr M. Representation and translation among representation in mathematics learning and problem solving[M]//Janvier C. Problem of representation in teaching and learning of mathematics. Hillsdale,NJ:Erlbaum, 1987:33-40.

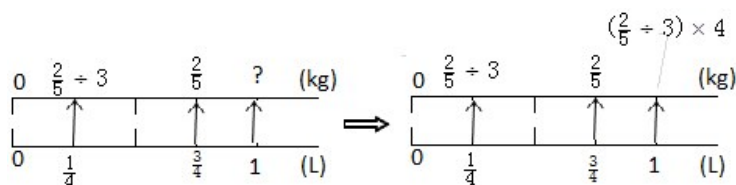


图 9