正本清源，谈谈函数极值的教学

常州市第三中学 常州市李金蛟名教师工作室 侯卫婷

摘要：函数的极值是利用导数研究函数性质中的一节内容，那么这是一节导数知识的练习拓展课，还是一节概念课？如何让学生正确理解极值与导数的关系，如何在教学设计中落实核心素养，都需要我们从正确的理解知识开始。

关键字：函数的极值

笔者最近听了两节同题异构的课，课题为“极大值与极小值”。两位教师的设计大同小异，首先给出一个三次函数，回顾上节课的内容：利用导数研究函数的单调性并求出单调区间，结合提出极值这个现象。然后共同阅读极值的课本定义，接着按照格式列出表格，完成引例。一位老师在解题完成后做了几个概念辨析，另一位没有。接着给出一个三次函数题做练习，让学生在解题的过程中再一次熟悉格式和规范。最后给出例二，一个四次函数，在列出表格后结合具体数据提出新问题：函数在某处导数为零是不是一定在该处有极值？由于时间没有控制好，在这个问题上两位老师都没能充分展开而只能草草的给出结论。听完课后，笔者对其中的一些共性现象进行了思考。

1.这是一节概念教学课，应体现概念课的特征。

极值作为本课的一个新概念，应该如何引入？弗莱登塔尔说过，“数学是系统化了的常识，常识要成为数学，必须经过提炼和组织，而凝聚成法则，这些法则在更高的层面上又成为常识，再一次被提炼和组织，而凝聚成新的法则，这些法则又会成为新的常识，如此不断螺旋上升，以致无穷”。统览“利用导数研究函数性质”的三段内容，第一段，导数是常识，单调性是法则；第二段，单调性是常识，极值成为法则；第三段，极值是常识，最值成为法则。理解数学，就是要理解极值的来龙去脉：我们研究函数，指的是从数与形两个方面研究函数的各种变化及其规律性，然后予以归纳总结。从数的角度，函数值的大小变化是发现和总结函数规律的重要特征，从形的角度，首先体现为函数图像的升降变化，从中我们抽象出了函数的单调性，并给出了函数的单调区间。当单调性成为常识，连续函数的两个单调区间的交界处自然成为新的研究对象，作为一个静态的点，代数上的在附近极大（小）和几何上的在附近极高（低），都是它自然而明显的特征，同时也体现了函数运动的永恒性与静止的暂时性之间的辩证统一。如果函数有多次单调性的变化，那么就会出现多个这样的点，极值概念的内涵就自然地呈现了出来，将其进行表征也就成为客观需要。再将视野从局部放到整体，对函数值的大小变化的考察就转化成了对极值与端点处的函数值（如果有的话）的考察，体现了特殊性与一般性的辩证统一。从中又产生了最值的概念，进而就能给出函数的值域。到此，对函数值的大小变化与分布的研究有了一个基本的结构。

基于上面的理解，产生函数极值的根本原因在于函数单调性的变化。也就是说，单调性变化是因，极值是果。要得到果，就要研究因，那么如何得到函数的单调性变化呢，就要找到一些可靠的工具，几何上可以看图像，代数上可以用单调性的定义，或者借助于导数。本课中，两位老师都是通过用复习前课内容：用导数求函数的单调区间，再引导学生观察处的点有何特点，接着用投影展示极值的概念来引入的。这种方式虽然与教材的结构一致，但却窄化了对极值的认知：极值是导数的产物。如果能在后面紧跟几个其他类型的例子，例如等来丰富概念的归纳过程，尚可弥补，但遗憾的是两位老师没有这么做。

对于概念的辨析，一位老师选择在后面的解题训练中不断解释概念，另一位老师有独立的概念辨析环节，通过提出几个问题来进行强化。两位老师都提出的问题有：极值是否唯一，端点能否称为极值点，极大值与极小值有没有大小关系。但笔者认为，这都属于我们熟悉的“一个定义，三项注意”的教学方式。因为概念的生成过程，本就是辨析的过程，正是在大量丰富的实例中，我们去粗取精，把一般性从具体例子中归纳出来，去伪存真，把研究对象的本质特征与非本质特征区别开来，化繁为简，把本质属性从表象中抽象出来。这既是数学概念的形成过程，也是学生必须要经历的过程，也正是我们常说的学生要参与到概念的构建过程中来。学生只有自己去触摸概念，把玩概念，才能最终拥有概念。为什么概念如此重要？章建跃教授的观点是：“数学概念高度凝结着数学家的思维，是数学地认识事物的思想精华，是数学家智慧的结晶，蕴含了最丰富的创新教育素材，数学是玩概念的，数学是用概念思维的，在概念学习中养成的思维方式、方法迁移能力也最强。所以数学概念教学的意义不仅在于使学生掌握书本知识，更重要的是让他们从中体验数学家概括数学概念的心路历程，领悟数学家用数学的观点看待和认识世界的思想真谛，学会用数学概念，进而发展智力和培养能力”。

2.区别对待本节设计与本课设计，都要有理有序。

或许是因为公开课的缘故，两位老师都想在一节课内完成本节知识的主体内容，也就是完整的呈现：概念要素的构建、重要题型的演练、解法规范的强化这三个重要部分，但最后的结果都只能是差强人意。原因是显然的：对于重点，教学时就要不惜时，不惜力，所以一节课的教学重点只能是一个或两个，处处是重点，那等于处处不是重点。还会导致为了保证课堂上的面面俱到，忽视了能力和思维的训练，概念构建变成告知注意，题型演练变成走马观花，解法规范变成机械模仿。

笔者认为，这节内容应该分成两节课完成，只有在整体上对这节内容进行教学设计，才能清楚第一节课的教学要做些什么，要做到什么什么程度。在第一部分，我们已经分析了极值的地位和作用，那么对于这节内容的设计，教学目标应该是：感知和构建极值概念，能利用有效的手段来研究具体函数的极值，能利用极值的知识来处理一些初步的问题。其中，感知和构建极值的概念是第一节课的重点，而利用有效的手段来研究具体函数的极值则必须结合学生的实际情况，课堂上的实际教学效果来动态的组织，是一个预设与生成紧密联系的部分。如前所述，产生极值的根本原因是单调性的变化，而观察、判断函数单调性的方法是多样的，每一种方法都应该有对应的题目让学生进行尝试。当然，我们需要在用导数法求函数单调性上重点练习，但这应该是学生在解决问题过程中的一种自我需要和自我实现，而不是因为教师只提供了一类问题，并且规定或展示了唯一的方法。两位老师使用的题目中，只有三次函数和四次函数，并且三次函数的题目都出现了两次以上，解决具体的三次函数求导运算又占用了大量的时间，直接倒逼前面的概念构建只能草草完成。如果将三次函数与其他函数并列，在与其他函数研究单调性的方法对比过程中提出使用导数（这在本课是很自然的），那么教师就只需要引导学生去思考：如何将思路转化为合理的书写才能成为严密的论证。而强化解题规范，也就是求导求根列表判号下结论等等固化的步骤，完全可以结合课堂教学的实际情况予以调整。

另一个设计的共同点，是两位老师最后都使用了一个四次函数来说明与函数在处取极值之间的关系，但是由于时间紧张，都没有充分的展开讲解。关于这一点，笔者的观点是：这本是概念构建的一个重点，设计时就应放在前面，即便放在后面，也不能简单带过，如果时间不够，不妨在本课悬置，放在下一课详细展开。

这个知识点在本课有三个位置。第一次是在构建极值概念时，在得到单调性对极值的决定作用时，联想研究单调性的方法，引出导数法。引导学生思考“导函数值的正负交替必然得到零点，那么导函数有零点必然得到函数值的正负交替吗？”此时学生会比较全面的思考反例，得到是自然的。第二次是在研究完三次函数以后，在总结时结合表格提出这个问题，这时概念构建已经完成，学生会认为已经得到了完整的概念，思考就会比较被动，可能会需要教师进一步的提示反例来完成。第三次就是这个四次函数，学生会认为这是一个特殊的例子需要额外的注意，而很难再把它纳入到已经形成的知识网中去。

3.基于以上的分析，笔者试着给出自己关于本课的设计简案。

一．教学目标

（1）通过观察、比较和归纳，能给出极值的定义，体验用数学语言刻画对象的严谨性，深刻性。能求出一些简单函数的极值。

（2）掌握用导数求函数极值的方法，能完成清晰的说理和规范的书面表达。体验数学证明的严密性和逻辑性。

（3）体会数形结合，从特殊到一般等数学方法，增强抽象，推理等基本数学素养。

二．重点和难点

 重点是极值概念的构建，用导数法求极值的一般过程。

 难点是用数学语言刻画极值概念的过程。

三．教学内容

（1）概念构建

师：前一节课我们学习了利用导数研究函数的单调性，我有两个问题：是不是所有函数的单调性都需要通过求导数来判断，你还有别的判断函数单调性的方法吗？

生：不是，例如我们已知的一次函数，二次函数，正弦余弦函数等，判断单调性的方法还有图像观察，定义法，复合函数法。（教师可以配合补充）

师：单调性的作用是什么？在几何上，它决定了函数图像的增减变化；在代数上，它决定了...？

生：函数值的大小变化。（如果学生回答不出来，教师也可提示函数值）

师：正确。在单调区间里，函数值有明确的大小关系。以下我们谈论的函数，都是连续函数。

例如，引入函数在上增，在上减。（画出示意图）那么有何特点？

生：它在区间和上都是最大的，所以它是上的最大值。

师：可以是上的最大值吗，可以是是的最大值吗？

生：可以。

师：因为处于两个单调区间的交界，所以与两个区间内的函数值有明确的大小关系。你能举出类似的函数例子吗？

结合学生的举例，教师可以配合补充以及有多次单调变化的函数图像等丰富学生的素材，多次单调变化的函数不能局限于正余弦函数，更应该出现极大值小于极小值的函数图像，为将来剥离极值间的大小关系这个非本质特征做准备。

师：那么这两个函数中有类似的情况吗：（分段函数的作图不是本课的要点，对于基础弱的班级教师可以直接给出图像）。

生：一只有一个单调区间，不行。二中间那段是单调区间吗？（教师应给学生讨论和思考的时间，如果学生达不到，教师也可相应点拨，最后达成共识。）

师：回到引例，我们把称为函数的极大值，称为函数的极大值点。请大家讨论：哪些性质是得到极值必须具备的？

经由学生讨论，补充，师生共同完成极值的数学化定义。可以推定，当学生从单调性的增减变化（函数值的大小变化）来定义极值，从相邻单调区间的交界来刻画极值点，那么如何解释“附近”，端点是不是极值点，极值之间能不能比大小之类的问题，不再成为“三项注意”，而是内含在概念构建的进程之中，成为概念的一部分。到目前为止，极值与导数尚未产生联系。

（2）联系导数

师：极值产生的根本原因是函数单调性的变化，前一课我们学习了用导数研究函数的单调性，回到引例，你能用导数的知识来描述极值的定义吗？

在学生回答后，完成下面的判断，从判断中你有何收获？

<1>原函数的增减变化，得到极值；原函数有极值，极值附近必有增减变化。

<2>导函数值的正负交替，得到零点；导函数有零点，零点附近必有导函数值的正负

交替。

通过两个问题训练学生的逆向思维和推理能力，并得到结论。类比“原函数的增减变化是因，极值是果”，那么“导函数值的正负交替是因，出现零点是果”，利用导数法求极值，必须找到因：导函数值的正负交替。然后通过一个具体的三次函数来完成三个阶段目标：一是判断此题适用导数法求极值；二是引导学生完成合理的说理过程；三是给出规范的表格结构。

1. 练习或小结。

4.一点反思。

 新一轮的课改在强调核心素养，笔者认为，核心素养不是什么神秘的东西。它广泛的存在于平时的课堂教学之中，教师要在设计和实践中为学生搭建平台，提供机会，指导学生的知识获得，能力发展和思维提高。本课中，概念构建的过程就是培养数学抽象能力，复杂函数中求解和证明极值的过程就是培养逻辑推理能力和数学运算能力。但这些素养的获得同时需要教师精心的设计来实现。虽然极值出现在“利用导数研究函数性质”这一节之中，但它并不是导数知识的外延，极值概念有独立的发生发展过程，与函数的其他知识有着密切且本质的联系。而导数只是研究极值的工具之一，教师要能看到这一点。这就要求教师创造性的使用教材来进行教学而不是盲从于课本，要求教师能站在数学知识的系统性和联系性的高度来解读教材。所有这些，都需要教师平时勤于学习和思考，敢于尝试和实践。

1. 曹新，明小青.向量加法的教学应该关注些什么[J].中学数学研究，2010(5):3—6
2. 章建跃.数学概念教学中培养创造能力[J].中小学数学（高中版），2009（11），封底

作者信息：

侯卫婷 常州市第三中学 213002

手机：13815016372

邮箱：hwt620@163.com