

基于教学立意分析的高中数学课堂教学评价思考

陈传熙

(浙江省玉环县玉城中学 317600)

数学学习中,基础知识和基本技能构成学生的“知识基础”,蕴含其中的基本思想和方法形成学生的“思维与能力”,过程中所体现的学习品质与学习心理构成其“人格意志”,而学生的主体性通过教学的“再创造”与数学应用来加以体现^[1].相应地,数学教学设计也就包含了“知识立意”“能力立意”“人文立意”这三个维度,其本质就是教学设计的目标定位,这恰好与课程标准目标的“知识与技能”“过程与方法”“情感、态度与价值观”^[2]这三个维度相呼应.

高中数学教学立意的高低取决于教师“理解数学”“理解学生”的能力.表面上看,“知识立意”仅着眼于知识学习与技能训练,“能力立意”重点关注学习中思维能力的提高.如果教师能透过知识去挖掘其中蕴含的基本数学思想,就能突破“知识立意”的框框而上升到“能力立意”.如果教师能进一步关注学生经历和体验数学发现的过程与乐趣^[3],在知识学习与能力培养的过程中融入“人文立意”,就能启发学生逐步揭示问题的本质,形成数学素养,不断从中获得发展.实施高立意的课堂教学必须要从低起点入手^[4],以学生已有认知基础为出发点,以数学知识背景以及概念、定理、法则、公式等的逻辑意义与内在联系的把握为前提,在旧知识的运用、知识载体的选取、教学情境的设计、数学问题的层次、学生错误的分析、数学思维的延伸、学生想法的利用、师生的交流互动等方面加以精心设计,使得学生逐步领悟知识内在的数学思想与方法,不断挖掘与体验其中蕴涵的科学方法、理性思维过程和价值观资源^[4].

为了进行基于教学立意分析的高中数学课堂教学的评价,我们以具体课堂教学设计的反馈与评价为抓手,从中得出相应的评价标准,为进一步开展教学立意评价、提升教学立意奠定基础.

1 课堂教学设计的反馈评价

以“数学归纳法^[5]”的教学立意评价为例.在此以前,学生已经学习了合情与演绎推理、直接与间接证明等内容.教材的安排完全合乎数学的逻辑顺序,因为数学归纳法集归纳(但不同于一般)与证明(用有限来证明无限)于一身,具有内容的抽象性与逻辑的严密性.因此,教学着重关注两点,一是化抽象为形象的情境设计,较好的做法是采用“多米诺骨牌游戏”来实现,二是将严密性逐步分解的过程设计,这是最大的难点.相应的评价也立足于两点,一是数学归纳法的本质揭示是否深刻,二是学生的理解是否到位.前者基于知识与能力的立意,后者基于“以生为本”的立意.

下面给出了学生数学基础较差的A班和基础较好的B班的教学实录,以便比较与评价.

1.1 A班的教学与反馈评价

(1)问题引入 已知数列 $\{a_n\}$, $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+a_n}$,求通项 a_n .计算可知 $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{1}{3}$, $a_4=\frac{1}{4}$,并归纳猜想得 $a_n=\frac{1}{n}$.如何证明?

反馈评价 问题起点较低,学生既能动手计算又能获得猜想,学习气氛较活跃,可见问题设计合乎学生的认知基础,先归纳后猜想激发了学生的思维.

(2)知识学习 作出解释: $a_1=1$ 符合猜想,若假设 $a_k=\frac{1}{k}$,可知 $a_{k+1}=\frac{a_k}{1+a_k}=\frac{1}{k+1}$ 也符合猜想,故猜想正确.直接给出数学归纳法的定义并板书证明步骤,学生看书理解.

反馈评价 从反应来看,少数学生能大致听懂.教师既不采用“多米诺骨牌游戏”这一形象载体,又不详细分析定义与证明步骤,实在出人意料.经询问,其原因居然是节省时间以增加模仿与

练习. 这样真的能加深理解并有助于掌握方法? 难道教师不清楚自己学生的知识与能力基础吗?

(3) 方法运用 若等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 用数学归纳法证明 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ 对于一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立. 教师讲解并板书要点, 再用数学归纳法证明 $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2 = -n(2n+1)$. 讲解板书后, 让学生感受规范的证明步骤.

反馈评价 两个例子由易到难, 前者的知识背景学生较熟, 尚能简单应和, 后者就难以下手了. 而教师的讲解与板书均较简单, 大多学生只是安静地听, 其思维状况不得而知. 此情此景倒也“合乎情理”.

(4) 深化理解 练习: ①对一切 $n \in \mathbf{N}^*$, 比较 $2^n, n^2$ 的大小; ②利用数学归纳法证明“凸多边形对角线的条数是 $\frac{1}{2}n(n-3)$ ”时, n 的第一个取值 n_0 应当是 _____. 接着判断: $1+4+7+\cdots+(3n-2) = \frac{1}{2}n(3n-1)$ 的证明方法(注: 用等差数列求和来代替递推过程)是否数学归纳法?

反馈评价 练习的设计目的是为了强调归纳奠基这一基本步骤. 对于①, 经引导得出了结果. 对于②, 学生回答错误. 判断的设计目的是为了强调归纳递推这一重要步骤, 但学生的理解已是一片模糊, 何谈“伪证”. 故教师只能“一言堂”, 也无心启发与引导了.

(5) 灵活运用 分别给出两个难度更大的问题(具体略).

反馈评价 此时学生一片寂静, 只有教师的讲解板书. 显然, 本节课的教学要求与难度均相当得高, 学生的主动参与和师生互动的程度均不高, 犯错的机会也很少, 更不用说情感体验了.

1.2 B 班的教学与反馈评价

(1) 情境引入 先讲两个故事: ①甲学写字, 只学了一、二、三, 便以为学会了. 一天, 其父让其写请帖, 只见甲满头大汗地划着横线, 并不停念叨: “姓什么不好, 偏偏姓万”; ②乙有四个儿子, 前三个分别叫一毛、二毛和三毛, 第四个叫什么? 再判断真假: ①已知 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = (n^2 - 5n + 5)^2$, 易知 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1$, 则 $a_n = 1$; ②若 $a_n \in \{1, 2, 4, 8\}$, 则 $a_n = 2^{n-1} (n \leq 4)$. 之后说明完全归纳法与不完全归纳法的区别及归纳法的

含义.

反馈评价 两个情境呈现时, 学生表现非常活跃. 但情境显然指向学生已学的归纳法, 这对本节的学习有多大作用?

(2) 知识学习 已知数列 $\{a_n\}, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$, 求通项 a_n . 经计算, 学生归纳猜想 $a_n = \frac{1}{n}$, 是否正确? 验证知 $a_5 = \frac{1}{5}, a_6 = \frac{1}{6}, a_7 = \frac{1}{7}$, 但不能无限验证. 那么, 如何用有限的步骤去证明无限呢? 教师播放“多米诺骨牌游戏”视频, 引导探讨骨牌全部倒下的条件. 学生仅回答出条件(2), 教师补充条件(1), 进而完整归纳并用表格呈现游戏与数列问题的相似性(提示递推关系):

多米诺骨牌游戏的原理	数列问题的原理
(1) 第 1 张牌倒下	(1) 当 $n=1$ 时猜想成立
(2) 第 k 张牌倒下使第 $k+1$ 张牌也倒下	(2) 假设 $n=k$ 时猜想成立, 则 $n=k+1$ 时猜想也成立
根据(1)(2), 可知所有牌全倒下	根据(1)(2), 可知猜想成立

接着, 给出数列问题的完整证明, 并提出用数学归纳法证明与正整数有关命题的一般步骤:

①(归纳奠基) 当 $n=n_0$ 时, 命题成立;

②(归纳递推) 假设 $n=k (k > n_0)$ 时命题成立, 证明 $n=k+1$ 时命题也成立.

综合①②, 可知命题对任意正整数都成立.

最后, 用流程图表示数学归纳法的证明步骤.

反馈评价 从归纳猜想验证无限, 易使学生产生认知冲突, 可惜这层“纸”是由老师捅破的. 面对学习障碍, 运用视频引导既形象又合理. 但遗憾的是, 在条件的探讨中未让学生充分领悟, 在相似性的类比中也未让学生体会其中的递推关系, 在得出数学归纳法的证明步骤中更未让学生充分理解如何实现从有限到无限的转化. 或许教师以为这些都是容易理解的.

(3) 方法运用 尝试证明: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} (n \in \mathbf{N}^*)$. 接着提问, 学生 1 表示不会, 学生 2 写出了 $n=k+1$ 时的相应命题却用分析法证明, 学生 3 仅写出 $n=k+1$ 时的递推式

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} +$$

$(n+1)^2$. 之后,教师讲解并板书.

反馈评价 生 1 不会是因为没有理解,生 2 用分析法的深层原因是尚未真正理解递推本质,生 3 抓住了关键却无法解决,三人的表现均是前面处理不到位所致,上述遗憾不幸成为现实. 教师居然未板书结论,说明其意识到了问题并感到了紧张.

(4) 深化理解 用数学归纳法证明:① $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$;② $2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}=4(2^n-1)$. 板演讲评后,给出②的另一证法(其中第二步不用递推而采用等比数列求和),来强调归纳递推的重要性和数学归纳法的伪证. 最后,呈现 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2+1$ 的证明过程(缺第一步),来强调归纳奠基的必要性.

反馈评价 学生暴露了许多问题,诸如“命题成立”“假设”“命题也成立”等关键词语缺失,结论缺失,归纳递推步骤不会推导,这些问题是上述遗憾的自然延伸. 当然,“亡羊而补牢,未为迟也.”教师后续的设计比较合理,问题选择的针对性也较强,应有助于学生的理解与掌握.

(5) 灵活运用 用数学归纳法证明: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{2n})$ (n 为任意正偶数). 强调对于偶数,应由 $n=k$ 来证明 $n=k+2$ 时命题也成立.

反馈评价 因时间紧张,在学生简单思考后就进行了讲评与强调. 设想一下,若直接删除教学环节(1),环节(2)处理更精细些并弥补上三个遗憾,环节(3)更详细些,则学生的理解与领悟的时间就会更多些,相信教与学的效果也会更好些.

2 高中数学教学立意的评价标准

前面分别对 A、B 班教学中的情境引入、知识学习、方法运用、深化理解与灵活运用这五个环节进行了相关评价. 在此基础上,我们将进一步对情境环节中的认知基础与情境设计进行考察,对知识学习、理解、应用环节中的问题分析、典例呈现、教师牵引、学生思维进行分析,并从整体上对思想方法、学生体验进行评价,最终得出基于教学立意分析的评价标准.

2.1 认知基础的契合度

上述 A、B 两个教学设计均从同一问题出发研究,是因为其起点较低,合乎学生的认知基础与实际思维水平,学生均能参与计算、归纳、猜想并引发思维. 因数学归纳法的内容过于抽象,故“多米诺骨牌游戏”视频即可提供一个形象的“铺垫”与类比的对象. A 班教学中直接引出数学归纳法原理,这与学生的认知基础相距甚远,说明教师太不了解学生. 我们应以较低姿态走向学生,努力从学生的认知基础出发,不能在学习的起点就脱离学生的实际而变相地抛弃学生. 与此相反, B 班“学写字”等四个小情境的认知基础又过低,对本节内容的学习无多大作用,实乃多此一举.

2.2 情境设计的合理性

数列问题既不偏离学生认知的“最近发展区”,又能引发认知冲突,可谓是本节知识学习与发展的良好“激发点”. 而“多米诺骨牌游戏”情境能较好地承载数学归纳法的想象与类比功能,合乎教学要求,适于知识生长与学生学习. B 班中“学写字”等四个小情境引发了非常热烈的课堂气氛,但对本节学习而言,认知水平过低,而最关键的是指向错误,其合理性有较大欠缺,说明教师对数学归纳法的理解存在一定偏差,这在后续的遗憾中得到印证.

2.3 问题分析的激发度

由于教师的理解偏差,认为学生容易理解只需套用即可,故两班教学中更多的是直接告知或稍加引导. 笔者认为,在归纳猜想 $a_n = \frac{1}{n}$ 后必须要让学生去尝试证明,若一项一项地验证,虽然每项都成立,却不能无限地进行下去. 这种“直觉上的正确”与“实际中的无奈”将产生较为强烈的认知冲击,从而激发学生的探究兴趣与问题意识. 此时,教师可引导学生联想这种无限问题的处理方法(如函数单调性),就能另辟蹊径,使学生产生“用有限来证明无限”的顿悟,只能通过有限步骤的推理,来证明对 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立.

2.4 典例呈现的层次性

两个设计在知识学习后均提出了不同层次的几个问题,先是整体的模仿与套用,再逐步理解两个步骤的作用,之后加以灵活运用. 若不考虑别的因素,应该说两个设计的问题处理均比较合理、有序和有效. 在 B 班的方法运用环节中,如果教师

提出若干渐进式的问题,来强调归纳奠基与递推两步骤的落实,关注 $n=k$ 与 $n=k+1$ 时的命题变化与推理方法,以及结论所起的作用,即可将问题规范、分层、有效地解决.当然,教师在深化理解环节处理得较好,练习中既渗透了变式又进行了二次运用,体现了较好的层次性.

2.5 教师牵引的松紧度

为了用1课时来完成教学任务,两位教师均紧紧攥住思维的方向,控制学生的思维时间与空间,师生交流互动较少或不够深入.尤其是类比得出数学归纳法的过程,学生基本上被教师牵着鼻子走,缺乏深入理解与体验,致使A班学生沉默不语,B班学生错误连连.而实际上,B班学生的知识基础、思维水平均比较好.在知识学习环节,如果教师在骨牌倒下条件的探讨中、游戏与数列问题相似性的类比中、数学归纳法证明步骤的得出中放手让学生去讨论、思考与理解的话,可能学生的认识就会更加到位,也能少些错误,教学也少些遗憾.

2.6 学生思维的主动性

引发认知冲突后,应引导学生主动思考无限的处理、联想搜索已学的方法,在类比中获得思维的启发.在对游戏的探讨中,要放手让学生探讨两个条件,让其自己意识到第一块骨牌倒下的必要性以及前后递推的重要性,尤其是第 $k+1$ 块倒下的前提是第 k 块必须先倒下.类比地,由 $a_4 = \frac{1}{4}$ 推得 $a_5 = \frac{1}{5}$,由 $a_5 = \frac{1}{5}$ 推得 $a_6 = \frac{1}{6}$,继续往下,让学生主动感受到递推关系.这种关系是否具有—般性?要让学生主动思考得出处理方法:假设 $a_k = \frac{1}{k}$ 成立,推出 $a_{k+1} = \frac{a_k}{1+a_k} = \frac{1}{k+1}$ 即 $a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$ 必能成立,于是当 n 从1到2,从2到3,从3到4, ..., 从 k 到 $k+1$, ..., 直至无穷, $a_n = \frac{1}{n}$ 均成立.

2.7 思想方法的渗透度

在游戏与数列问题的类比中,必须启发学生主动认识到第 k 块倒下相当于 a_k 成立.故第一块倒下就相当于 a_1 成立,而“第 k 块倒下致使第 $k+1$ 块也倒下”就相当于“利用 a_k 成立一定能推出 a_{k+1} 也成立”.这是游戏问题数学化的关键环节.进一步,必须用 $n=k$ 时的命题来证明 $n=k+1$ 时的命题,这相当

于第 $k+1$ 块倒下是第 k 块碰倒的结果,这才是归纳递推的本质.于是,从 a_1 成立 $\rightarrow a_2$ 成立, a_2 成立 $\rightarrow a_3$ 成立, a_3 成立 $\rightarrow a_4$ 成立, ..., a_k 成立 $\rightarrow a_{k+1}$ 成立, ..., 直至无穷,从而命题成立.这是数学归纳法精细化的重要环节,也是教学中不可或缺的一环.上述处理中,数学化(符号化、模型化)思想、类比、转化等数学思想自然联系、融为一体,从理解与思想的层面实现“高立意、低起点”的数学教学.

2.8 学生体验的深刻性

综合上述,相关数学思想方法的渗透是否成功取决于学生在游戏的探讨、相似性的类比、数学归纳法的得出这三个关键处的体验是否深刻.如果教学中充分激发学生思维的主动性,在形象化的思维中探讨两个关键条件,在游戏的类比与数学化中逐步揭示无穷递推思想的本质,在精细化的处理中逐步形成用有限来证明无限的思想,真正理解数学归纳法的本质.在此过程中,学生始终在主动地参与、深入地思考、深刻地体验,教师的关键点拨与学生的体会领悟合理地交融,真正体现了“以学生为本”并着眼于数学的本质理解与学生能力提升的高立意.否则,学生获得的体验可能只是游戏有意思、方法可套用、证明比较难,甚至产生所有与自然数有关的命题都可用数学归纳法来证明的错误观点,这是我们所不愿看到的.

一个好的数学教学设计,应是高立意、低起点的^[6].从常见的生活实际或数学问题出发,来引发主动思维,体验思想的历程,品尝数学的味道,逐步形成用数学的眼光、意识、思想、方法去观察、分析和解决问题,培养较好的数学素养,这是数学教学的最终目的.

参考文献

- 1 王光明等.现代数学教育选讲[M].重庆:西南师大出版社,1998,12
- 2 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(实验)[S].北京:人民教育出版社,2003,4
- 3 陈柏良.教学立意 优质课堂教学建构的基石[J].数学通报,2011,8
- 4 章建跃.中学数学课改的十个论题[J].中学数学教学参考,2010,3
- 5 人民教育出版社.普通高中课程标准实验教科书·数学·选修2-2·A版[M].北京:人民教育出版社,2007,1(第2版)
- 6 罗增儒.中学数学课例分析[M].西安:陕西师范大学出版社,2003,2