

# 关于数学问题情境设计

## ——高中数学教学设计案例分析之一

李善良

(江苏省中小学教学研究室, 210013)

随着高中数学课程改革的不断深化, 教师普遍关注“问题情境”设计. 苏教版高中数学实验教材关于教学内容的呈现采用了“问题情境——学生活动(意义建构)——数学理论——数学运用——回顾反思”的方式, 特别注重问题情境的创设. 而在实际教学过程中, 有些教师对于问题情境的含义、类型、作用等却关注不够、认识模糊, 认为只有生活实例才是情境, 似乎每节课都要实际情境等, 因而出现人为制造、多余、无效, 乃至干扰学习的“假情境”. 问题情境的含义与内容是什么? 如何进行问题情境设计? 在进行问题情境设计时应当注意什么? 这些问题有必要进一步思考. 本文结合实际教学中的案例作一简要分析.

### 一、问题情境的含义

关于问题情境的含义, 目前有各种各样的理解. 就各种理解的本质, 概括起来有两大类: “问题——情境”、“情境——问题”.

所谓“问题——情境”是: 先有数学问题, 然后根据问题设计数学知识产生或应用的具体环境. 所谓“情境——问题”指的是: 先有具体的情境, 由情境提出数学问题, 为了解决问题而建立相应的数学知识.

其实, 这两大类没有截然的区别, 核心都是通过问题情境来提出问题, 情境与问题融合在一起, 问题是教学设计的核心. 新课标提出要培养学生“数学地提出问题的能力”, 在进行问题情境设计时, “情境——问题”是一个融合的整体. 刻意地去寻找热闹的“情境”,

或人为编造的问题, 都会出现偏差.

从教学内容看, 问题情境大致可以分为: 实际背景、数学背景、文化背景等. 实际背景主要指现实生活的情景. 生活情景包括: 原型、具体样例、直观事物、现实问题等素材, 在教学设计时选择适当的生活情景, 进而通过概括、抽象、想象、理想化等途径建立数学理论(概念、公式、法则、程序、模型等). 数学背景主要指数学内部规律、数学内部矛盾, 在教学设计时, 引导学生进行发现(归纳、类比、猜想、抽象概括、理想化、演绎等)、发明(创造、合理规定、约定、引入符号等)、创造(建立模型、构造等), 揭示数学内部规律、矛盾, 进而建立数学理论. 文化背景主要指数学发生、发展的历史和数学在认识自然改造自然过程中的作用等. 在进行教学设计时, 恰当地引入一些数学的文化背景, 有助于加深学生对数学的理解, 并引发他们对数学的兴趣.

从教学环节看, 问题情境包括引入新课的情境、过程展开的情境、回顾反思的情境等.

从呈现方式看, 问题情境包括叙述、活动、实物、问题、图形、游戏、欣赏等形式.

### 二、问题情境的设计

问题情境的设计主要是为了引起学生学习的兴趣, 激发学生的好奇, 从情境中自觉地提出数学问题, 进而为了解决问题而进行积极的数学活动. 因而, 问题情境设计的核心原则是有利于学生思维能力发展, 有利于学生探究能力发展, 有利于学生创新意识发展, 充

分关注学生思维发展的过程(提出问题——解决问题(研究方法)——反思升华).在设计问题情境时应注意问题情境的适度性、导向性、探究性.

### 1. 适度性

问题情境应与数学知识相连,与学生认知起点相吻合.有些情境过分追求数学理论的严谨性,追求数学的逻辑起点,而没有与学生已有的数学知识相连,这样的问题情境没有实际内容,难以发挥应有的积极效果.

#### 案例 1 复数概念的引入

设计 1 在遨游数学王国时,你还记得数的概念发生和发展的过程吗?在历经几次“添加新数”之后,数集已经扩充到实数集.但是,由于负数在实数范围内不能开平方,所以代数运算在实数集内仍不能永远实施.

我们知道,有些代数方程的问题在实数集内是无法解决或者解决得不够“完美”.例如,当  $b^2 - 4ac < 0$  时,实系数一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  没有实数根;一元三次方程  $x^3 = 1$  只有一个实数根,根的个数与方程的次数如此“不一致”,实在有悖于数学的“对称美”与“和谐美”.

数的概念需要进一步发展:实数集如何扩充?在新的数集里,怎样实施数的运算?

剖析 这里设计的问题情境符合“数”的科学扩充过程,但与学生已有知识相差太远.这个情境与问题,脱离了学生的认知起点,过分重视数学的逻辑起点,因而难以真正实现学生思维的启动.

设计 2 16世纪,意大利数学家卡尔达诺(Gardano)在解决求两个数,使其和为 10 积为 40 时,认为这两个数是“ $5 + \sqrt{-15}$  和  $5 - \sqrt{-15}$ ”,这是因为:

$$(5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15})$$

$$= 5 + 5 = 10$$

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15})$$

$$= 5 \times 5 - \sqrt{-15} \times \sqrt{-15}$$

$$= 25 - (-15)$$

$$= 40.$$

我们知道,在实数集内,一个正数有两个平方根,它们互为相反数,0的平方根是 0 然而,  $\sqrt{-15}$  表示什么意义呢?

尽管很长一段时间内,部分数学家都认为“ $5 + \sqrt{-15}$ ”和“ $5 - \sqrt{-15}$ ”这两个式子没有意义,是虚构的、想象的.但在解决许多问题中,使用类似于“ $\sqrt{-15}$ ”这样的式子却带来极大的方便.

那么,  $\sqrt{-15}$  能作为数吗?它真的是无意义的、虚幻的吗?

评析 这里,通过数学史上真实发生的故事作为情境,这个问题的确困扰过许多数学家.今天,高中学生同样会对这个看似荒谬但又难否定的问题感兴趣,这个情境与问题符合学生的认知起点,一般学生都能理解.从而顺利进入复数的概念的建立阶段.

教育心理学家奥苏伯尔在其名著《教育心理学——认知观点》的扉页上写道:“假如让我把全部教育心理学仅仅归结为一条原理的话,那么,我将一言以蔽之曰:影响学习的惟一最重要的因素,就是学习者已经知道了什么,要探明这一点,并应据此进行教学.”在进行问题情境设计时,首先要考虑的是学生的认知起点,这个起点与所要学习的数学的逻辑起点两者是否吻合.为了帮助学生顺利进行提出问题、解决问题的活动,问题情境的设计就要充分考虑情境的简单、直观,尽可能与概念的原型、定理(公式、法则)的特例情况相联系,以便于学生思维活动的顺利进行.有利于他们进行观察、归纳、概括、抽象、猜想、推理、论证等.

因此,问题情境设计必须要考虑学生的认知起点,必须与有关的数学知识相连.这就是问题情境设计的适度性原则.

违背这条原则,表现为过分追求知识的逻辑起点,忽视学生的认知起点,为了“尽快”让学生进入知识,而设计一些人造的情境,这些情境学生根本提不出数学问题,或者对教

师提出的问题, 学生根本难以理解, 表面上有“情境”、“问题”, 但这些情境、问题脱离于学生的实际, 未能真正启动学生的思维, 实际上仍然是教师的“灌输”, 有时连灌输都谈不上。

## 2 导向性

所谓导向性指所设计的问题情境要有利于学生提出问题, 有些情境设计过分追求视觉效果, 追求新奇, 追求浅层次的趣味。面对这样的情境, 学生不能产生疑问, 不能自觉提出问题。

### 案例 2 圆的标准方程

设计 1 展示生活图片 (如图 1), “创设情境, 引入新课”

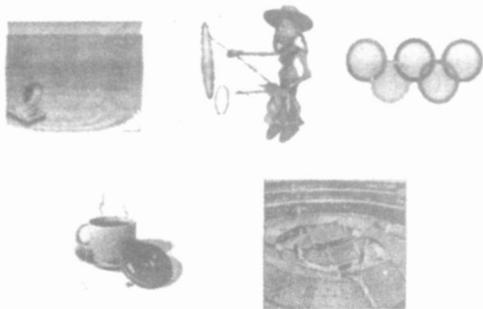


图 1

评析 这里给出几幅图片, 表面上看都与圆有关, 与生活实际联系密切。但整个情境没有问题, 学生只是在不断接受视觉的刺激, 而没有思维的发生。这样的情境不仅无助于本节课内容的学习, 相反可能会分散学生的注意力, 给学生带来负面的影响。

设计 2 圆是最美丽的曲线, 圆是到定点的距离等于定长的点的集合。定点是圆心, 定长是半径。

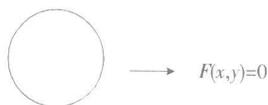


图 2

怎样求圆的方程呢?

评析 这里根据学生已经有的关于圆的知识, 直接给出圆的几何关系, 单刀直入, 引

导学生提出解析几何的基本问题: 如何把几何问题转化为代数问题。也为下一个问题做好铺垫: “求圆的方程, 是什么意思呢?” (写出圆的方程, 就是要建立适当的直角坐标系, 并写出圆上任意一点  $P(x, y)$  所满足的关系式)。

问题是数学的心脏, 问题是思维的核心, 没有问题, 思维便无法启动。这里的问题是以多种形式出现的, 但在问题情境设计时必须同时考虑问题的提出, 解决问题方案的思考、反思升华的方向。否则问题情境将失去价值, 会给学生带来思维的混乱, 难以达到预期的目的。因此, 问题情境设计必须遵循导向性原则。

## 3 探究性

问题情境应当是开放的、挑战的、新奇的, 应当能够激发学生探究欲望, 包括主动提出问题, 为了解决问题而进行探索、发现, 建立数学的整个过程。

### 案例 3 导数的意义

设计 1 通过极限引入导数概念。

这样的引入方式, 学生难以真正理解导数的意义, 而且借助于比较抽象的极限概念, 学生更难以理解。

设计 2 先引入平均变化率, 再逐步引入瞬时变化率, 进而给出导数的直观意义。

苏州市 2004 年 4 月 20 日最高气温为  $33.4^{\circ}\text{C}$ , 而此前的两天, 4 月 19 日和 4 月 18 日最高气温分别为  $24.4^{\circ}\text{C}$  和  $18.6^{\circ}\text{C}$ , 短短两天时间, 气温“陡增” $14.8^{\circ}\text{C}$ , 闷热中的人们无不感叹: “天气热得太快了!”

但是, 如果我们将该市 2004 年 3 月 18 日最高气温  $3.5^{\circ}\text{C}$  与 4 月 18 日最高气温  $18.6^{\circ}\text{C}$  进行比较, 我们发现两者温差为  $15.1^{\circ}\text{C}$ , 甚至超过了  $14.8^{\circ}\text{C}$ 。

人们发现, 前者变化得“太快”, 而后者变化得“缓慢”。那么, 用怎样的数学模型刻画变量 (温度) 变化的快与慢?

为了弄清这个问题, 我们先来观察下面的气温曲线图 (以 3 月 18 日作为第一天)。

○学习指导○

# 三角形“四心”的判断

周凤凯

(河北省衡水市第十四中学, 053000)

三角形的“四心”(即内心、外心、重心、垂心)是中学数学的一个基础知识点,需掌握它们的定义和性质.近几年,以平面向量知识为载体,加强了对它的考查,是高考的一个小的热点.本文就“四心”判断问题的解法方法作一归纳,供读者参考.

## 一、直接计算法

例1 设点O是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点,且 $(\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{BA} = (\vec{OB} + \vec{OC}) \cdot \vec{CB} = (\vec{OC} + \vec{OA}) \cdot \vec{AC}$ 则O为 $\triangle ABC$ 的( )

(A)重心 (B)内心

(C)外心 (D)垂心

$$\begin{aligned} \text{解 由 } \vec{BA} &= \vec{OA} - \vec{OB} \text{ 得} \\ (\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{BA} &= (\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} - \vec{OB}) \\ &= \vec{OA}^2 - \vec{OB}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同理 } (\vec{OB} + \vec{OC}) \cdot \vec{CB} &= \vec{OB}^2 - \vec{OC}^2, \\ (\vec{OC} + \vec{OA}) \cdot \vec{AC} &= \vec{OC}^2 - \vec{OA}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由题意可知 } \vec{OA}^2 - \vec{OB}^2 &= \vec{OB}^2 - \vec{OC}^2 \\ &= \vec{OC}^2 - \vec{OA}^2 \end{aligned}$$

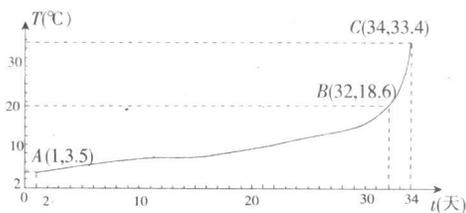


图3

容易看出B、C之间的曲线较A、B之间的曲线更加“陡峭”.陡峭的程度反映了气温变化的快与慢.

那么,如何用数学语言刻画不同的“陡峭”程度呢?

评析 这里的情境源于学生的实际生活,问题很自然,但所蕴涵数学意义却极为深刻.通过问题,引导学生去探究,在探究过程中,逐步建立导数概念.不仅如此,通过导数概念的建立过程,学生学到更一般地提出问题、解决问题的思想方法.

## 三、几点注意

从上述案例分析可以看出,在进行问题

情境设计时,应着眼于学生思维的发展这个核心进行,关注学生能从情境中自觉、主动提出问题,并在不断地解决问题的过程中完成对数学的学习.背离这条主线,就会带来诸多弊端,出现许多形式主义、教条化的现象.具体地说,应当注意以下几点:

(1)注重生活情境,防止出现惟生活情境,以生活情境代替问题情境的现象.在许多情况下,数学内部问题是好的问题情境.

(2)注重提出问题,防止出现假情境、为情境而情境、只有情境没有问题的现象.

(3)注重数学本质,防止出现人造情境和过分迎合学生浅层次趣味的现象,更不能出现去数学、非数学、反数学的现象.

(4)注重学生认知起点,防止出现过分重视数学逻辑起点,忽视学生接受能力的现象.

(5)注重一景多用,形成学生对所学内容的整体认识,防止出现一个内容一个情境,情境遍地开花的现象.