

培养图形表征能力的教学策略研究

李 晓 飞

(睢宁县古邳镇中心小学,江苏 睢宁 221241)

〔摘 要〕用图形语言转译数学思维,是借助直观手段抽象思维的一种方式。学生通过用图形表征一个或一组数学对象,逐步抽象出图形及其内涵的表征方法;通过对图形表征的操作技能及其内涵的经验迁移,训练图形表征方法;通过培养学生图形表征的应用意识和策略意识,提升图形表征能力。图形语言的应用与发展,最终指向学生的思维训练和思维能力提升。

〔关键词〕 数学交流;图形表征;思维训练;经验迁移;应用意识

〔中图分类号〕 G424.1;G442

〔文献标志码〕 A

〔文章编号〕 1002-1477(2019)08-0032-05

数学交流离不开数学语言。数学语言是数学思维的物质外壳,包括文字、符号和图形三种语言形式;“数学思维是人脑对数学概念和数学表象在头脑中的表征及认识过程”^[1],包括形象思维、抽象思维和灵感思维三种形式。数学学习至少需要形象和抽象两种思维形式参与,小学生的心理特点决定了他们以形象思维为主,遇到抽象的数学知识必须采用直观手段处理,才能顺利完成数学学习与交流,即使在中高年级逐步向抽象思维过渡和发展阶段,具体形象思维始终占有主导地位。数学语言中的图形语言最具直观性,因此将图和数相结合(数形结合)的表征方法,是外显小学生数学思维的最佳途径,是交流活动中常用的手段。

数形结合思想方法融合了形象思维和抽象思维。图形语言从属形象思维,而对图形中隐含的概念、规律或性质进行分析概括的过程则从属于抽象思维。图形语言表达能力直接影响数学交流的质量,也能反映学生的抽象思维发展水平。所以,课堂教学必须多措并举提升数形结合能力,形成图形表征技能。

一、掌握图形表征内涵

数形结合能够直观表征抽象的数学知识。在应用图形表征交流时,受到学生思维差异和学习内容特点的影响,表征图形的选择与使用也能体现出思维水平的差异。思维水平越高,数形演绎能力越强,图形语言运用更加精简准确,数学本质展现也更为生动具体。因此,教师在培养学生有意数形结合时,应注重优化多种表征方法,丰富抽象内涵,以此培养图形表征能力。

具体教学中,直观表征抽象化一般包括两种情况。

1. 表征对象相同,表征外显不同

同一个表征对象,思维差异会导致表征外显成果不尽相同。在交流中比较各种外显成果,舍弃它们中的相异因素而提取和纯化相同属性,进行抽象概括形成概念,达成直观表征抽象化目的。教学苏教版三年级上册“认识二分之一”时,在演示切蛋糕的过程后,教师提出“你能想办法表示出二分之一吗”,鼓励学生自主创造。学生展示作品大致分为四种情况(见图1)。从图1可知,创造的图形越写实,思维水平越低,对概念的理解仍停留在表象上;创造的图形越抽象,思维水平就越高,易于触摸数学本质,方

〔收稿日期〕 2018-07-22

〔基金项目〕 江苏省“十三五”规划乡村教师专项课题(XC-c/2018/14)。

〔作者简介〕 李晓飞(1979—),女,江苏睢宁人,中小学高级教师,睢宁县名教师,徐州市优秀教育工作者,徐州市学科带头人。

便概念的建立。此时要及时组织学生观察比较作品,说一说更赞同哪一种方法,先初步感受图形抽象的价值,再鼓励学生找一找表示其他物体二分之一的例子,然后再次对比作品,思考“用谁表示二分之一更合适呢”,体会简洁的图形其表征内涵更具有一般性,培养学生图形抽象的能力。抽象图形是将图形语言从低级向高级援引的过程,也是直观表征抽象化的过程。

2. 表征对象不同,表征外显相同

运用图形语言表达一组数学概念间的关系,思维差异会导致表征外显相同而表征内涵不同。可对比一组表征对象,寻找它们之间相关属性和概念进行借用或参照,用以发现和表示概念间的区别与联系,丰富图形语言的内涵,提高学生图形表征的能力。苏教版六年级上册体积单元有寻求“长度单位、面积单位和体积单位之间的关系”习题。六年级学生能基于对每一个概念的理解,分别选择线段、正方形和正方体进行表征(见图2),而这三者

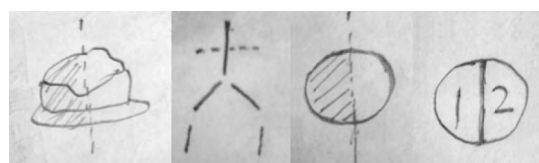


图1 图示二分之一

长度单位	面积单位	体积单位
厘米	平方厘米	立方厘米
分米	平方分米	立方分米
米	平方米	立方米

图2 图示长度、面积、体积各单位关系

之间的关系虽然与基于它们所建立的图形外部特征距离较近,存在直接的对应关系,但学生的思维差异造成解读图形语言能力的高低。有的学生只能发现“长度单位用来计量线段长短、面积用来计量平面图形大小、体积单位用来计量物体所占空间大小以及它们各自相邻进率”,有的学生不仅能表述各自属性和特征,还能发现三者之间在实际应用中存在一一对应关系。同样在苏教版四年级下册“运算律整理”这一课中,启发学生运用图形表征运算律和运算性质(见图3),虽然表征对象各不相同,但是它们本质属性与各自图形外部特征一致,能够帮助学生根据图形将运算律分类;而它们的本质属性又与图形表征的“结果相等而运算顺序不同”这一内涵相符,这种直接的对应关系能够帮助学生深刻理解运算律。教学中教师提出“观察这组图形你发现了什么”,大多数学生能发现“加法运算律和减法性质只要用线段图就可以表示、乘法运算律必须借助长方形或长方体表示”,少部分学生还能发现“它们的运算顺序不同而结果相等”。同一组图形其表征内涵的解读并不相同,前者形象思维占主导,后者抽象思维占主导。因此,教师必须引导学生充分感知图形语言的内涵,体会图形表征的价值。

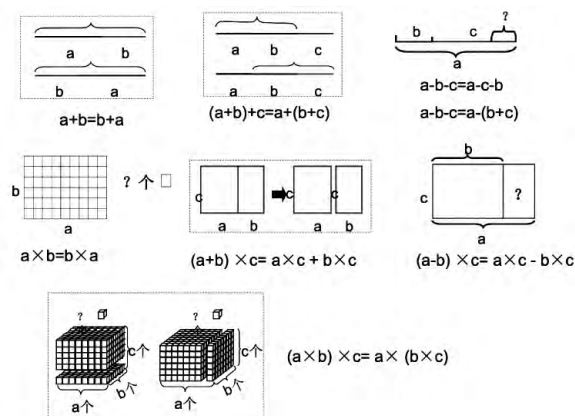


图3 图示运算律

用组图表征概念间的关系是数形结合思想方法的高级形式,是点思维向线思维发展的标志。学生虽然能用图形表征每个对象,但是未必清晰一组对象之间隐含的关系。因此,培养学生图形语言交流能力,必须引导学生从关注独立的表征对象转变为关注一组表征对象,通过观察对比图形,对应各自概念之间的相关性。这一直观表征抽象化的过程,是培养学生图形表征能力的有效途径。

二、迁移图形表征经验

“迁移是指学生的学习经验对以后的学习产生影响及其将所学到知识应用于实践的心理活动过程”^[2]。因此,实际教学中可以借助“迁移”来发展学生图形表征能力。

迁移的发生需要前提条件,只有“新旧两种知识或两种同类技能、能力,若有共同思维要素(或思维活动方式、方法),这时就能产生迁移”^[3],共性越多,迁移就越容易。教师在激发了学生图形表征数学思维的潜能后,应在教学中抓住契机,为学生创设运用图形语言交流的情境,鼓励他们借助已有经验进行迁移,自主创设图形表征各种复杂抽象的概念,既能向他人传递图形表征的内涵,也能够解读他人的图形语言。

1. 操作技能性经验可迁移

图形语言潜存于学生数学语言系统中,一旦被激发,就会爆发出强大的潜能。教师要根据知识间的联系,抓住共性要素创设问题情境,促使图形表征技能产生迁移,并确保迁移活动的可操作性。以苏教版四年级下册“运算律的整理”为例。在教学运算律新授课时,是通过观察具有同等形式规律的等式,采用不完全归纳法概括出来的,致使学生缺乏对运算律的深刻理解。因此在整理运算律时,可启发学生将数、形结合,运用图形表征法更能把握运算律本质。由于加法运算律和减法性质在知识技能和思维方式方法上有诸多共性因素,都可以用线段图表示,这样就促成图形表征技能的迁移条件。教师首先提出“除了能用字母表示运算律还可能用什么方法呢”,引发学生数形结合表征意识。鼓励学生从最简单的加法交换律开始联想,通过讨论交流,画出线段图(见图4),并提出“为什么可以用这幅图形表示加法交换律”,以此充分理解图形表征的意义,体会其表征数学概念的直观性,积累图形表征运算律经验。在此基础上启发学生“还能想办法表示其他的运算律吗”,学生通过迁移加法交换律图形表征经验,能够画线段图表示加法结合律(见图5)及衍生的减法性质(见图6)。再鼓励学生“想一想乘法运算律可以怎样表示呢”,此时,学生在操作中迁移“画线段图表征”的经验遇阻,转而继续运用“画图表征”经验寻求其他图形表征,最终发现乘法运算律可以借助长方形或正方体表示(见图7)。反观这一教学过程,迁移绝不是简单的复制,而是借助已有经验并融合新的思考进行的创新思维活动。

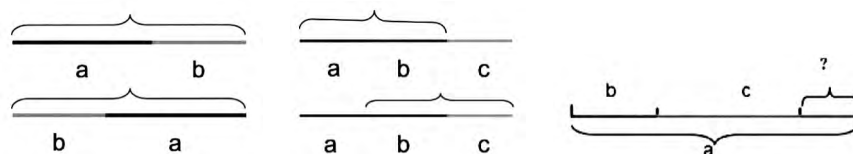


图4 图示加法交换律

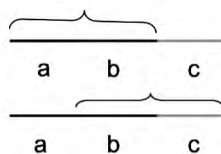


图5 图示加法结合律

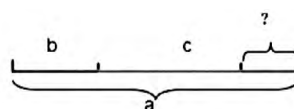
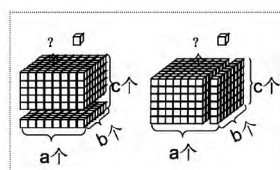
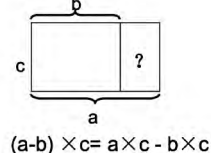
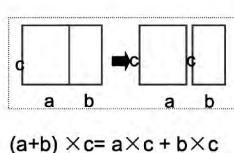
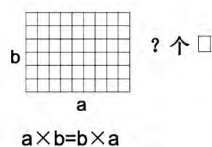


图6 图示减法性质



$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

图7 图示乘法算律

2. 表征内涵性经验可迁移

丰富的内涵是语言存在的意义。图形表征经验的迁移不单纯表现在外显的表征技能上,其内涵也能够借助思维活动产生迁移。以苏教版四年级上册“两、三位数除以整十数口算”为例。教材创设具体情境列出算式 $60 \div 20$,其意图是想让学生借助表内除法的商进行类推,由于算理过于抽象,能够想到的学生极少。即使在教师提示下进行表内除法联想,很多学生只是从形式上推导出 $6 \div 2 = 3$,所以得出 $60 \div 20 = 30$,但他们凭着数感很快就会推翻结论,有少数学生凭着数学直觉完成推导而无法给出理由。此处应尊重学生的认知水平,巧用图形语言表达算理并进行适度迁移,将抽象算理直观化,高效解

读数学语言,促进思维发展。在学生提出“因为 $6 \div 2 = 3$ 所以 $60 \div 20 = 3$ ”时,教师要及时追问“为什么可以这样想呢”,显然学生是疑惑的。教师提示“先想一想6除以2为什么等于3?能用图形表示出来吗?”学生从一年级就借助小棒认识整数及整数四则运算,因此他们会用分小棒(见图8)表示“6里面有3个2”。教师启发学生思考“如果只有这6根小棒,能表示出 $60 \div 20$ 的过程吗?”学生独立思考后全班

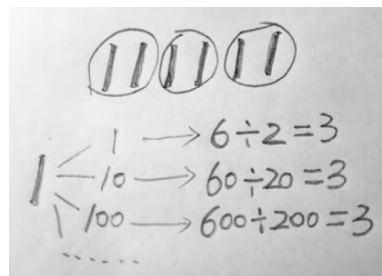


图8 图示除数是整十数的口算算理

交流得出:既能把1根小棒看作1个一,也可以看作1个十,6根小棒就是6个十,每2根一份,就表示 $60 \div 20$,和 $6 \div 2$ 一样得到3份。还可以把1根小棒看作一个百、一个千……借助直观图,把 $6 \div 2 = 3$ 和 $60 \div 20 = 3$ 的计数单位联系起来,理解了算理自然就掌握了算法。这里将一根小棒表示的计数单位逐级拓展的过程,就是图形语言内涵的迁移过程。

图形语言外显为图形的操作,内显为表征意义。实际上,在选择恰当的图形语言进行表征的时候,这两者是无法截然分开的,它们是一个有机的整体。表征的意义附着在图形中,才使得图形具有语言表征的作用;如果图形无法表征需要的意义,也就不具备图形语言的表征作用。因此,当图形表征经验发生迁移时,操作技能和抽象内涵两者同时发生作用,只是根据实际情况各自侧重不同。

三、灵活进行图形表征

要提高图形表征能力,必须培养图形语言应用意识,要使学生从图形表征的角度发现问题和提出问题,能应用图形表征并解决问题,从而增强图形表征的应用意识,提高图形表征的实践能力。学习图形表征的目的就是会用图形转译数学语言便于交流,在解决实际问题中充分发挥作用。

学生在应用过程中会主动运用图形表征数学并自觉发生甄别和遴选的思维活动,活动结果直接指向“用怎样的图形解决怎样的问题”。对自主选择的图形表征数学语言进行分析归类,可形成图形表征应用策略的过程,是图形表征技能的高阶思维表现。应用意识是一种自发的思维活动。因此,教学中必须营造能让学生自发产生图形表征的强烈意愿、自主应用图形表征数学问题以及解决问题的策略意识。

小学阶段数与代数领域,除了学习整数,还认识了分数和小数。“分数是小学数学中的一个核心概念,当测量连续量不能以整数尽需要更小分割或计算中除不尽时就会产生分数,而小数是用10的乘幂为分母的分数的一种表示形式”^[4]。由于小学生在实际生活中更趋向于整数的应用,因此对于分数和小数知识学习起来会有难度。教学中要以此为契机,尊重教材编写意图,鼓励学生自主探究,培养应用意识(见图9)。

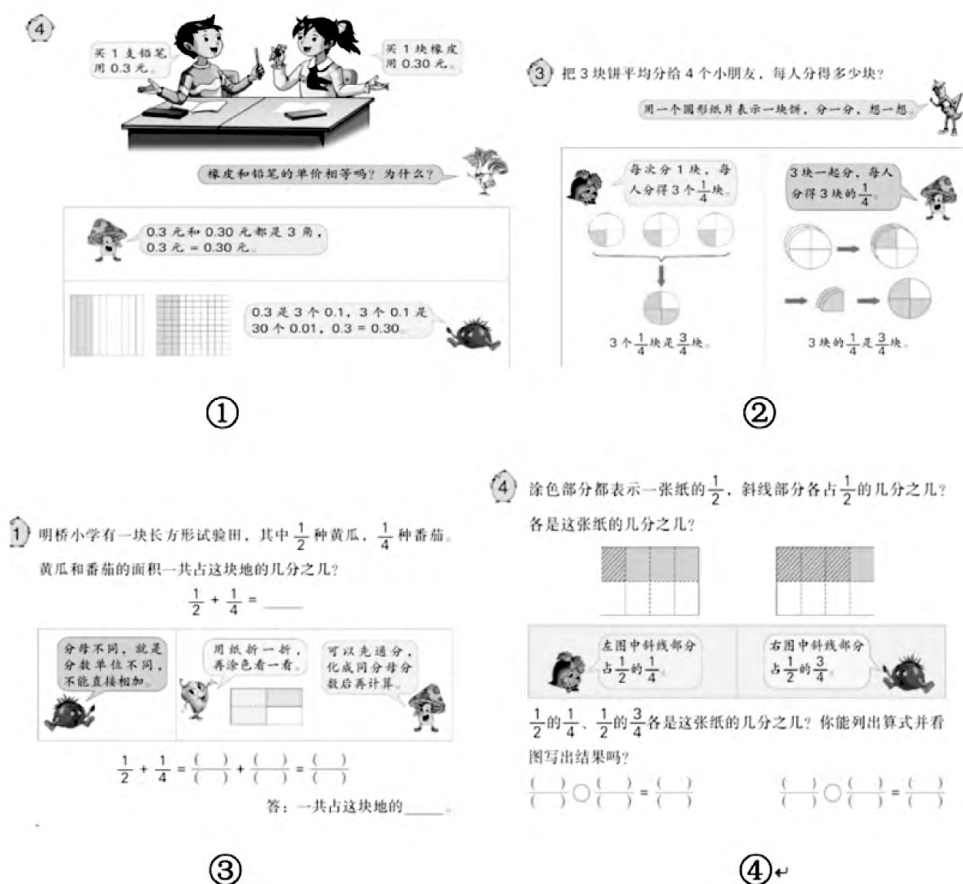


图9 小数与分数的概念及运算教材

图9按编号顺序依次是:小数的性质、分数与除法的关系、异分母分数加减法和分数乘分数,是从分

数与小数领域选取的一些典型。学生在实际学习中,只要涉及分数与小数的有关概念、运算、规律及应用等知识,学生都能借助图形表征找到答案,然后在此基础上再探究其他数学方法。此处对图形表征的应用,是学生自觉将数与形结合进行新知探究的一种自主意识,是主动运用图形语言转译抽象数学思维的内在需求。因此,教学中不能以费时费力等理由扬弃学生的图形表征方法,而应给予充分的肯定与支持,培养学生图形表征应用意识和策略意识,让学生的思维发展拾级而上。

谈及图形表征的策略意识,不得不提图形语言在解决实际问题中的特定价值,其中线段图最为典型。线段图把数字和图形结合起来,可以帮助学生理解条件与条件、条件和问题之间的联系,通过图形的直观性更容易找到解题的思路。

图 10 是苏教版三年级教材安排解决问题策略单元的例 2 以及随后的想想做做,学生第一次接触线段图,体会到图形表征是数学的另一种语言,在其后解决问题中发挥重要作用。而要将图形语言主动应用到问题解决中,一方面需要积累丰富的经验形成个人方法,另一方面需要体会其特定的价值形成策略意识。苏教版四年级下册专门设置了“画线段图解决问题”(见图 11)。此部分内容就是为了让学生充分感受线段图在解决问题中存在的意义:即能直观表征隐含的数量关系,从而帮助学生分析数量关系确定解题思路,正确解决问题。让学生在应用中感受策略的价值,从而培养主动应用意识。



图 10 苏教版三下解决问题策略例 2

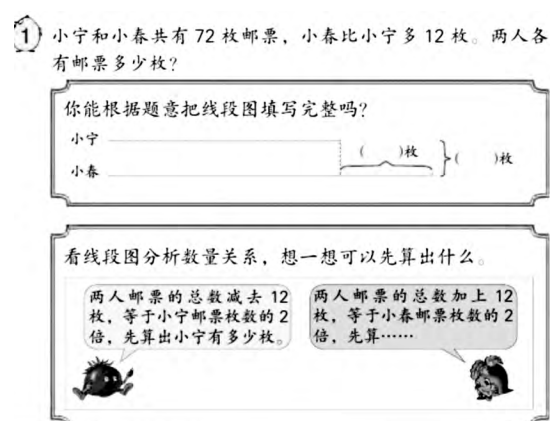


图 11 苏教版四下解决问题策略例 1

当然,图形表征方法不仅存在于数与代数领域,图形与几何、统计与概率及综合与实践这些领域都会用到图形表征方法,只是在小学阶段,数形结合的思想方法在分数、小数及实际应用知识领域体现明显,也是学生常用的学习方法。

总之,图形表征是数学交流中常用的语言形式,能够将抽象知识直观化,也是符合小学生认知特点的思维方法,提高图形表征能力的实质是提高思维能力。教师要有图形语言教学发展观,在学习过程中抓住契机向学生介绍什么是图形语言,并鼓励学生大胆交流图形语言,深刻挖掘图形语言的内涵,感受数学本质,为学生的终身学习奠定基础。

[参考文献]

- [1] 中国大百科全书出版社编辑部. 中国大百科全书: 哲学 II [M]. 北京: 中国大百科全书出版社, 1985: 828.
- [2] 中国大百科全书出版社编辑部. 中国大百科全书: 心理学 [M]. 北京: 中国大百科全书出版社, 1991: 49.
- [3] 温寒江. 学习与思维, 学习中思维的全面协调可持续发展 [M]. 北京: 教学科学出版社, 2010: 99-104.
- [4] 张天孝. 现代新思维小学数学教育: 分数和小数的认识与运算 [M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2017: 321.

[责任编辑: 张 捷]