

第 6 讲 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象及其应用

【知识清单】

1. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0, \omega>0$) 的有关性质

名称	函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0, \omega>0$) 的性质
定义域	
值域	
周期性	
对称中心	
对称轴	
奇偶性	
单调性	

2. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 与函数 $y=\sin x$ 的图象的关系

(1) 左右平移变换

将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点 向左 ($\varphi>0$ 时) 或 向右 ($\varphi<0$ 时) 平移 $|\varphi|$ 个单位, 得到函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象.

(2) 左右伸缩变换

将函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象上所有点的横坐标 伸长 ($0<\omega<1$ 时) 或 压缩 ($\omega>1$ 时) 到原来的 倍 (纵坐标不变), 得到函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象, 周期由 2π 变为.

(3) 上下伸缩变换

将函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象上所有点的纵坐标 伸长 ($A>1$ 时) 或 缩短 ($0<A<1$ 时) 到原来的 A 倍 (横坐标不变), 得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

(4) 上下平移变换

将函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象上所有点 向上 ($k>0$ 时) 或 向下 ($k<0$ 时) 平移 $|k|$ 个单位, 得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 的图象.

4. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中各量的物理意义

当函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0, \omega>0$), $x\in[0, +\infty)$ 表示简谐振动 (匀速圆周运动) 时, 几个相关的概念如下表:

简谐振动	振幅	周期	频率	相位	初相
$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0, \omega>0),$ $x\in[0, +\infty)$	A	$T=\frac{2\pi}{\omega}$	$f=\frac{1}{T}$	$\omega x+\varphi$	φ

【课前预习】

1. 函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($x \in \mathbb{R}, \omega > 0$) 的最小正周期为 4π , 则 ω 的值为_____

2. 函数 $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 与 y 轴最近的对称轴方程是_____.

2. 函数 $y = 3\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ ($x \in [0, \pi]$) 的递增区间为_____

4. 函数 $f(x) = \tan \omega x$ ($\omega > 0$) 的图象的相邻两支截直线 $y = 2$ 所得线段长为 $\frac{\pi}{2}$, 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ _____.

5. 在函数 $y = -2\sin\left(4x + \frac{2}{3}\pi\right)$ 的图象与 x 轴的交点中, 离原点最近的交点坐标是_____.

【典型例题】

目标 1 五点法作图及图象变换

例 1 设函数 $f(x) = \sin(-2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$), $y = f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x = \frac{\pi}{8}$.

(1) 求 φ ; (2) 作出函数 $f(x)$ 的图象.

【借题发挥】

变式 1 求本例中函数 $y = f(x)$ 的单调区间.

变式 2 将本例中的函数向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 后, 得到偶函数, 求 φ .

【规律方法】

(1) 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ 或 $y = A\cos(\omega x + \varphi) + b$ 的周期是 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$; 函数 $y = A\tan(\omega x + \varphi) + b$ 的周期是 $T = \frac{\pi}{|\omega|}$.

(2) 函数 $y = |A\sin(\omega x + \varphi)|$ 的周期 $T = \frac{\pi}{|\omega|}$, 函数 $y = |A\cos(\omega x + \varphi)|$ 的周期 $T = \frac{\pi}{|\omega|}$, 函数 $y = |A\tan(\omega x + \varphi)|$ 的周期 $T = \frac{\pi}{|\omega|}$.

(3) 在三角函数中, 判定奇偶性的前提是定义域关于原点对称, 奇函数一般可化为 $y = A\sin \omega x$ 或 $y = A\tan \omega x$ 的形式, 而偶函数一般可化为 $y = A\cos \omega x + b$ 的形式.

(4) 对于函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, 其对称轴一定经过图象的最高点或最低点, 对称中心的横坐标一定是函数的零点, 因此在判断直线 $x = x_0$ 或点 $(x_0, 0)$ 是否是函数的对称轴或对称中心时, 可通过检验 $f(x_0)$ 的值进行判断.

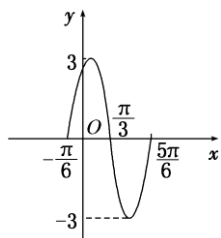
【同步拓展】

1. 已知一个简谐振动可以用函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, 0 < \omega < \pi$) 来表示, 且其离开平衡位置的最大距离为 2, 一个振动周期为 π , 且初相为 $\frac{\pi}{6}$. (1) 写出这个振动量的函数表达式; (2) 画出这个振动量函数一个周期内的简图.

2. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\frac{\pi}{2} - x)\sin x + (\sin x + \cos x)^2$. (1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间; (2) 把 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再把得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 求 $g(\frac{\pi}{6})$ 的值.

目标 2 根据图象求解析式

例 2 如图是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0$, $\omega>0$, $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$) 的图象的一部分, 求此函数的解析式.



【规律方法】

确定 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ ($A>0$, $\omega>0$) 的解析式的步骤

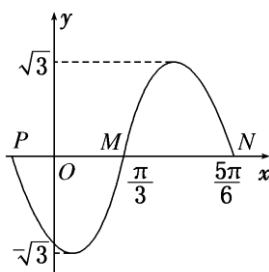
(1) 求 A , b , 确定函数的最大值 M 和最小值 m , 则 $A=\frac{M-m}{2}$, $b=\frac{M+m}{2}$.

(2) 求 ω , 确定函数的周期 T , 则 $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

(3) 常用代入法求 φ .

【同步拓展】

1. 如图为函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0$, $\omega>0$) 的图象的一部分, 试求该函数的解析式.

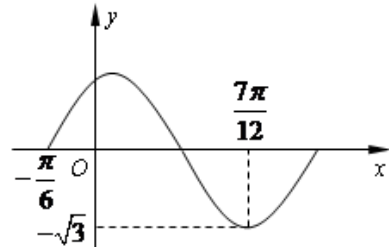


2. 设函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 为常数, 且 $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分图象如图所示.

(1) 求 A, ω, φ 的值;

(2) 设 θ 为锐角, 且 $f(\theta) = -\frac{3}{5}\sqrt{3}$,

求 $f(\theta - \frac{\pi}{6})$ 的值.



目标 3 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的性质及应用

例 3 某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象时, 列表并填入了部分数据, 如下表:

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x + \varphi)$	0	5		-5	0

(1) 请将上表数据补充完整, 并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 将 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $y = g(x)$ 的图象, 求 $y = g(x)$ 的图象离原点 O 最近的对称中心.

【借题发挥】

变式 1 在本题条件下, 若将 $y=f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 $\theta(\theta>0)$ 个单位长度, 得到 $y=g(x)$ 的图象. 若 $y=g(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$, 求 θ 的最小值.

变式 2 在本题条件下, 说明函数 $f(x)$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变换而得到的.

.

【同步拓展】

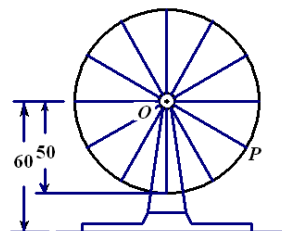
1. $f(x)=(\sqrt{3}\sin x+\cos x)(\sqrt{3}\cos x-\sin x)$ 的最小正周期是_____.

2. 已知函数 $f(x)=\sin(x+\theta)+\sqrt{3}\cos(x+\theta)$ $\left(\theta\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 是偶函数, 则 θ 的值为_____.

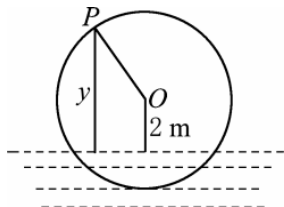
例 4 如图，摩天轮的半径为 50 m，点 O 距地面的高度为 60 m，摩天轮做匀速转动，每 3 min 转一圈，摩天轮上点 P 的起始位置在最低点处.

(1) 试确定在时刻 t (min) 时点 P 距离地面的高度；

(2) 在摩天轮转动的一圈内，有多长时间点 P 距离地面超过 85 m?



变式 如图为一半径是 3m 的水轮，水轮圆心 O 距离水面 2m，已知水轮每分钟旋转 4 圈，水轮上的点 P 到水面的距离 y (m) 与时间 t (s) 满足函数关系 $y = A\sin(\omega t + \varphi) + 2$ ($\omega > 0, A > 0$)，则 $\omega =$ _____.

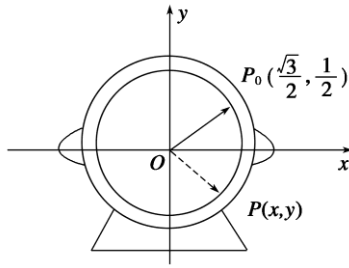


【规律方法】

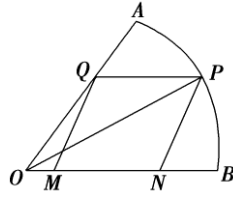
三角函数模型的应用体现在两个方面：一是已知函数模型求解数学问题；二是把实际问题抽象转化成数学问题，建立三角函数模型，再利用三角函数的有关知识解决问题.

【同步拓展】

1. 如图，为了研究钟表与三角函数的关系，建立如图所示的坐标系，设秒针尖位置 $P(x, y)$. 若初始位置为 $P_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ，当秒针从 P_0 (注：此时 $t=0$) 正常开始走时，那么点 P 的纵坐标 y 与时间 t 的函数关系式为_____.



2. 如图，现要在一块半径为 1 m，圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形白铁片 AOB 上剪出一个平行四边形 $MNPQ$ ，使点 P 在弧 AB 上，点 Q 在 OA 上，点 M, N 在 OB 上，设 $\angle BOP = \theta$ ，平行四边形 $MNPQ$ 的面积为 S .



- (1) 求 S 关于 θ 的函数关系式.
- (2) 求 S 的最大值及相应的 θ 角.

【归纳分析】

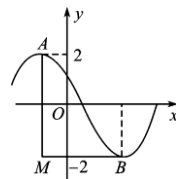
1. 函数图象变换要明确，要弄清楚是平移哪个函数的图象，得到哪个函数的图象；
2. 要注意平移前后两个函数的名称是否一致，若不一致，应先利用诱导公式化为同名函数；
3. 由 $y = A\sin\omega x$ 的图象得到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象时，需平移的单位数应为 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ ，而不是 $|\varphi|$.

【课后作业】

1. 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + 1$ ($A > 0, \omega > 0$) 的最大值为 5，则 $A =$ _____.
2. 将函数 $f(x) = 2\sin 2x$ 的图像上每一点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得函数 $y = g(x)$ 的图像，则 $g(x) =$ _____.

3. 设函数 $y = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($0 < x < \pi$)，当且仅当 $x = \frac{\pi}{12}$ 时， y 取得最大值，则正数 $\omega =$ _____.

4. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的部分图像如图所示，若 $AB = 5$ ，则 ω 的值为_____.



5. 函数 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 图象的一条对称轴为 $x = \alpha$ ，若 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ，则 $\alpha =$ _____.

6. 正弦函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + k$ ($A > 0, \omega > 0$) 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，周期为 $\frac{2\pi}{3}$ ，初相为 $\frac{\pi}{6}$ ，值域为 $[-1, 3]$ ，则 $f(x) =$ _____.

7. 已知 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 满足 $f(x) = -f(x + \pi)$ ， $f(0) = \frac{1}{2}$ ，则 $g(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为_____.

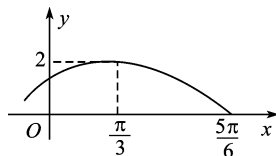
8. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 \leq \varphi \leq \pi$) 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，若其图象关于点 $M\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ 对称，且在区间

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数, 则 ω 的值为_____.

9. 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, x \in \mathbf{R}$) 的部分图像如图所示.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式;

(2) 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 求 $f(x)$ 的取值范围.



10. 已知函数 $f(x) = 2 \sin\left(\omega x + \varphi - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ ($0 < \varphi < \pi, \omega > 0$) 为

偶函数, 且函数 $f(x)$

的图象的两相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

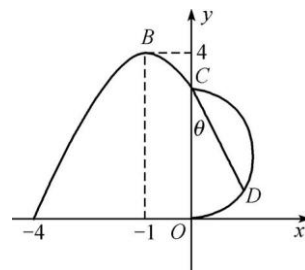
(1) 求 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 的值;

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 再将得到的图象上各点的横坐标伸长为原来的 4 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 求函数 $g(x)$ 的单调递减区间.

11. 如图, 某市新体育公园的中心广场平面图如图所示, 在 y 轴左侧的观光道曲线段是函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi, x \in [-4, 0]$) 时的图象, 且最高点为 $B(-1, 4)$, 在 y 轴右侧的曲线段是以 CO 为直径的半圆弧.

(1) 试确定 A, ω 和 φ 的值;

(2) 现要在右侧的半圆中修建一条步行道 CDO (单位: m), 在点 C 与半圆弧上的一点 D 之间设计为直线段 (造价为 2 万元/m), 从点 D 到点 O 之间设计为沿半圆弧的弧形 (造价为 1 万元/m). 设 $\angle DCO = \theta$ (单位: rad), 试用 θ 来表示修建步行道的造价预算, 并求造价预算的最大值. (注: 只考虑步行道的长度, 不考虑步行道的宽度)



【提优训练】

1. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($0 \leq x < \pi$), 且 $f(\alpha) = f(\beta) = \frac{1}{2}$ ($\alpha \neq \beta$), 则 $\alpha + \beta =$ _____.

2. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$), $x = -\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $y = f(x)$ 图象的对称轴, 且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}\right)$ 上单调, 则 ω 的最大值为_____.

3. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x \cos\omega x + \cos^2\omega x - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$), 其最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度, 再将图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变), 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 若关于 x 的方程 $g(x) + k = 0$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有且只有一个实数解, 求实数 k 的取值范围.