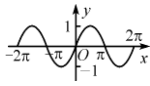
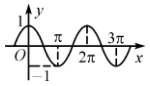


第 5 讲 三角函数的图象和性质

【知识清单】

1. 三角函数的图象和性质

三角函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
图象			
定义域			
值域和最值	值域: 最大值: 最小值:	值域: 最大值: 最小值:	值域: 无最值
周期			
奇偶性			
对称性	关于直线 对称 对称中心:	关于直线 对称 对称中心:	对称中心是
单调区间	在_____上单调递增, 在_____上单调递减	在_____上单调递增, 在_____上单调递减	在_____上单调递增

2. “五点法”作图

“五点法”作图原理：在确定正弦函数 $y = \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象形状时，起关键作用的五个点是_____，_____，_____，_____，_____.

3. 三角函数的周期

三角函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 和 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的周期均为_____；函数 $y = A\tan(\omega x + \varphi)$ 的周期为_____.

【课前预习】

- (必修 4P33.练习 2 改编) 函数 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域为_____.

2. 函数 $f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为_____.

3. （必修 4P32 练习 5 改编）函数 $y=\sin x$ ($\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{2\pi}{3}$) 的值域为_____.

4. 函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$ 的单调增区间为_____.

5. 函数 $y=\sin^2x+\sin x-1$ 的值域为_____.

【典型例题】

目标 1 三角函数的定义域和值域

例 1 已知函数 $f(x) = -2a\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2a + b$, $f(x)$ 的值域是 $[-5, 1]$, 则 $a =$ _____.

【借题发挥】

变式 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = -2a\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2a + b$, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时 $f(x)$ 的值域是 $[-5, 1]$, 则 a 的值为_____.

【规律方法】

三角函数的值域问题, 一要考虑三角函数的图象, 结合三角函数的图象回答函数的值域, 二要考虑换元, 将三角函数式整体看作一个新元, 再利用其他函数的知识求解. 要注意的是新元的取值范围. 常用的方法有:

(1) 直接法: 直接利用 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的值域求解.

(2) 化一法: 把所给三角函数化为 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + k$ 的形式, 由正弦函数单调性写出函数的值域.

(3) 换元法: 把 $\sin x$ 、 $\cos x$ 、 $\sin x \cos x$ 或 $\sin x \pm \cos x$ 换成 t , 转化为二次函数.

含参数的值域(或最值)问题, 要讨论参数对值域(或最值)的影响.

【同步拓展】

1. 当 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ 时, 函数 $y = 3 - \sin x - 2\cos^2 x$ 的最小值是_____, 最大值是_____.

2. 求下列函数的值域:

$$\textcircled{1} y = \frac{\sin x - 2}{\sin x - 1}; \textcircled{2} y = \frac{\sin x \cos x}{\sin x - \cos x + 1} (0 < x < \pi).$$

目标 2 三角函数的单调性和对称性

例2 设 $\omega > 0$, 若函数 $y = 4\sin \omega x$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增, 求 ω 的取值范围.

【借题发挥】

变式 1 已知函数 $y = \tan \omega x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是减函数, 求 ω 的取值范围.

变式 2 函数 $y = \cos \omega x$ 在 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 求正整数 ω 的值.

【规律方法】

求三角函数单调区间的方法

(1)代换法：就是将比较复杂的三角函数含自变量的代数式整体当作一个角 u (或 t)，利用基本三角函数的单调性列不等式求解.

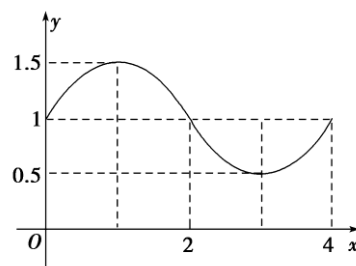
(2)图象法：画出三角函数的正、余弦曲线，结合图象求它的单调区间.

【同步拓展】

设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ (A, ω, φ 是常数, $A>0, \omega>0$). 若 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为_____.

目标 3 三角函数的周期性

例 3 若三角函数 $f(x)$ 的部分图象如图, 则函数 $f(x)$ 的解析式为_____, $S=f(1)+f(2)+\cdots+f(2\ 018)$ 的值等于_____.



【借题发挥】

变式 1 已知函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0, 0<\varphi<\pi$) 为偶函数, 其图象与直线 $y=2$ 某两个交点的横坐标分别为 x_1, x_2 , 若 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 π , 则该函数的单调增区间为_____.

变式 2 将函数 $y=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega>0$) 的图象分别向左、向右各平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后, 所得的两个图象对称轴重合, 则 ω 的最小值为_____.

【规律方法】

由周期函数的定义“函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(a+x)(a>0)$ ，则 $f(x)$ 是周期为 a 的周期函数”得：

(1) 若函数 $f(x)$ 满足 $-f(x)=f(a+x)$ ，则 $T=2a$ ；

(2) 若 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$ ($f(x)\neq 0$) 恒成立，则 $T=2a$ ；

(3) 若 $f(x+a)=\frac{f(x)+1}{f(x)-1}$ ($f(x)\neq 1$)，则 $T=2a$ 。

以上结论对三角函数仍然适用。

【归纳分析】

1. 闭区间上最值或值域问题，首先要在定义域基础上分析单调性；含参数的最值问题，要讨论参数对最值的影响。
2. 要注意求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的单调区间时 A 和 ω 的符号，尽量化成 $\omega>0$ 时情况，避免出现增减区间的混淆。
3. 计算形如 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ ， $x\in[a, b]$ 形式的函数最值时，不要将 $\omega x+\varphi$ 的范围和 x 的范围混淆。

【课后作业】

1. 函数 $f(x)=3\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega>0$) 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$ ，则 $f(\pi)=$ _____。
2. 若 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ ， $x \in [0, 2\pi]$ ，则 x 的取值集合是_____。
3. 函数 $y=\sqrt{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 的定义域为_____。
4. 若函数 $f(x)=\sin \omega x$ ($\omega>0$) 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，则 $\omega=$ _____。
5. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0$) 图象的两条相邻的对称轴的距离为 $\frac{\pi}{3}$ 。若角 φ 的终边经过点 $P(1, -2)$ ，则 $f\left(\frac{7\pi}{3}\right)=$ _____。
6. 如果函数 $y=3\cos(2x+\varphi)$ 的图象关于点 $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$ 中心对称，那么 $|\varphi|$ 的最小值为_____。

7. 已知函数 $f(x)=\sin x(x \in [0, \pi])$ 和函数 $g(x)=\frac{1}{2}\tan x$ 的图像交于 A, B, C 三点, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

8. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$, 其中 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \alpha\right]$. 若 $f(x)$ 的值域是 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, 则 α 的取值范围是_____.

9. 求函数 $y=\cos^2 x + \sin x \left(x \leq \frac{\pi}{4}\right)$ 的最大值与最小值.

10. 已知 $f(x)=x^2+2x \tan \theta - 1, x \in [-1, \sqrt{3}]$, 其中 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 求 θ 的取值范围, 使 $y=f(x)$ 在区间 $[-1, \sqrt{3}]$ 上是单调函数.

11. 已知 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

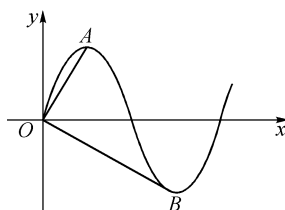
(1) 求函数 $f(x)$ 图象的对称轴方程;

(2) 求 $f(x)$ 的单调增区间;

(3) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值.

【提优训练】

1. 如图, 已知 A, B 分别是函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin \omega x (\omega > 0)$ 在 y 轴右侧图像上的第一个最高点和第一个最低点, 且 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, 则该函数的最小正周期是_____.



2. 定义在区间 $[0, 3\pi]$ 上的函数 $y=\sin 2x$ 的图象与 $y=\cos x$ 的图象的交点个数是_____.

3. 设函数 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)-2\cos^2\frac{\pi x}{8}+1$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 若函数 $y=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 求当 $x \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$ 时, $y=g(x)$ 的最大值.