

“分数的初步认识”中的多元表征学习问题

■曹 新

摘 要:相对于分数意义教学的多次讨论与争论,对“分数初步认识”的探讨却显得不够。在《分数的初步认识》的学习中,学生感受了情境却可能没有体会引入分数的必要性;顺利地进行了操作活动却可能没有涉及分数的本质。鉴于表征在学习过程中的重要意义,从多元表征的视角分析这一内容,发现众多的教学设计与实施都存在过于偏向符号表征、忽视表征的发展层次、忽略表征间的转换与转译等倾向,这些倾向将为学生进一步理解分数的意义埋下潜在障碍。为此,提出应该关注“分数的初步认识”中的多元表征学习问题。

关键词:外在表征;内在表征;多元表征;概念理解;分数的初步认识

基金项目:江西省高等学校教学改革研究课题“‘教师教育课程标准’的学科化研究与实践探索”(编号:JXJG-12-11-4);江西省教育科学规划课题“新课改背景下高师数学高效教学行为研究”(编号:11YB 205);赣南师范学院重点学科招标课题“数学课堂教学研究”。

中图分类号:G62 **文献标识码:**A **文章编号:**1674-2311(2013)12-0070-06

作者简介:曹新,男,赣南师范学院数学与计算机科学学院副教授,硕士生导师;南京师范大学数学科学学院访问学者。主要研究方向:数学课程与教学论(江西赣州 341000)。

分数是小学数学的核心概念,是代数学习的基础。为了帮助学生更好地理解分数,课程标准及教科书将分数的学习分别安排在两个学段:第一学段——三年级(分数的初步认识),第二学段——五年级(分数的意义和性质)。尽管如此,由于分数对学生而言存在的学习难度,多次引起各方面的讨论甚至争论,而争论的焦点主要集中在五年级分数的意义,并将其作为一个重要的研究论题。^{[1][2][3]}相对而言,由于对分数的初步认识,多半是从“切大饼”或“分蛋糕”开始的,即借助于直观模型(面积模型、数线模型)初步理解分数刻画的“部分-整体”之间的比率关系(作为“率”的分数),教学内容与教学方法没有太大的异议。^[4]而且,在生活中分数主要表示部分与整体的关系。而“整体”、“总量”这样的概念,学生是熟悉的,也是非常容易接受的。^[2]然而,对“分数的初步认识”学习的调查却显示:通过近距离的课堂观察,让我们没有想到的是——事实上长期来认为理所当然且习以为常的操作活动中,学生却不是按我们的预想在进行数学

思考。由此引发的反思是:在问题情境中,孩子真正体会到学习分数的必要性了吗?在顺利的操作活动中,学生在进行数学本质的思考吗?^[5]如果学生在情境、活动中没有经历真实的数学思维过程,那么理解又何以产生?

数学学习心理的研究表明,理解概念的关键在于将数学概念的抽象定义的含意转换成易于学生理解和运用的适当的心理表象,^[6]这里的“转换”,是将抽象概念与学生已有知识经验建立有层次的联系:引导学生在概念的抽象定义、半抽象模型(或操作)、具体原型(或活动)之间进行寻找意义与数学化的过程。换句话说,学习者需要通过内化概念的多种表达形式并与已有的内在表象发生相互作用,以此促进或影响学习者的数学理解。^[7]所以,理解概念涉及:概念的丰富表达形式——外在表征,概念的心理表达(表象)形式——内在表征,以及内外表征之间的转换。因而,笔者拟从概念表征的视角对“分数的初步认识”的教学作相对深入的分析 and 探讨,并简要评论文^[5]的质疑。

一、分数学习的难点与学生已有知识经验

教学设计与实施首先要考察课程目标,因为它是教学活动推进的向导。义务教育数学课程标准(实验稿)对“分数的初步认识”的要求是:能结合具体情境初步理解分数的意义,能认、读、写简单的分数;能运用分数表示日常生活中的一些事物,并进行交流。^[8]人教版义务教育课程标准实验教科书《数学》将这一内容安排在三年级(上)第七单元第一节,包括:几分之一、几分之几。教材的教学目标定位是:主要利用直观的方式,使学生通过折一折、涂一涂等动手操作的方式,初步理解分数的意义,掌握分数的大小。实现这些目标,需要对教学内容进行分析,以充分了解分数学习的困难之处;也需要对学情进行分析,以找准教学的出发点:学生的认知发展水平——已有的知识经验。

(一)分数学习的难点

一直以来,在学生的心目中并不承认分数是个“数”,是个“结果”。^[4]这是因为:其一,分数并非“十进制”,这是与整数及其运算的最大差别。整数的运算是基于数单位“1”的累加(减),呈现“逢十进一”的特点,与学生的日常经验相吻合。但分数由于“平均分”分成的份数不同,而凸显不同的分数单位,因而学生难以将自然数的认识迁移过来。事实上,只有分数单位相同的分数相加减时才具备“十进制”的特点,但学生一开始无法理解这一性质。其二,引入分数是为了表示“量”,但“几分之一”表示的却是部分与整体之间的“比率”。这样,表示相同“比率”的分数可以表示不同的“量”;比较表示“比率”的分数大小时又要转换成“量”来思考。这种不断更换问题情境、变换比较视角的做法,往往让学生感觉扑朔迷离,难明所以。其三,分数所能表示的“量”有更易于学生接受的替代物——小数,分数所能表示的“比率”也有更易于学生接受的替代物——百分数与比(这些后续学习的内容在生活中却先接触)。事实上,对于小数、百分数与比,学生有着更为丰富的生活经验,也有着形式多样的表达方式。其四,分数反映了数学概念的二重性:^[6]既表现为一种过程操作——先分,把一个对象平均分,分之后就确定了分母,就创造了一个分数单位。然后再取一份或几份,即数有多少个单位,也就是确定分子;又表现为对象、结构—— a/b 。这种兼具算法与结果的特点,给学生带来很大的认知负荷,影响着他们的认知加工。只有当学生经历过程操作的内化、压缩与对象的实体化之后,他们才能把握分数本质的实体对象。

(二)学生已有的知识经验

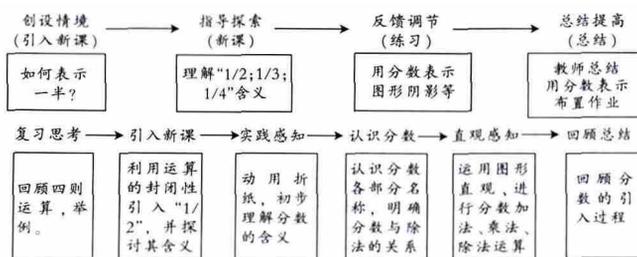
尽管分数是个复杂的概念,学生还是具备丰富的前概念。调查表明,大多数学生在学习这部分知识前,对“几分之一”的说法并不陌生,并有一定的生活经验和认知基础,能借助生活现象大致体会“几分之一”的意义。但在表达水平上有较大的差异,对“几分之几”的理解则较为生疏,写分数和读分数出错较多。^[5]具体分析,学生的知识经验包括:一是具备“平均分”的认识。如“把8个苹果平均分为4份”,学生知道每份2个。学生缺乏的是进一步的认识——逆向思维:“2个”就是4份中的1份,即“四分之一”,以及由此引出新数——分数的意识。二是具有诸多与“分数学习”有关的操作体验,如切东西、搭积木、折纸、涂颜色等。在这些操作中,经常涉及平均分后取一份或几份的活动,学生缺乏的是探究操作活动中蕴含的数学知识——所取的份数与整体的“比率”关系。因此,学生拥有的知识经验与分数概念之间有着明显的落差,这个落差就是教学设计与实施的“最近发展区”。

二、《分数的初步认识》的教学设计分析

对于分数的入门教学,一线教学研究人员进行了大量的探索。以篇名《分数的初步认识》并以1980-2013为时间区间,笔者在中国期刊网CNKI数字图书馆检索到教学设计案例、课堂实录与相关研讨文章共计195篇(最新期刊数据截至2012年11月)。

(一)教学设计的两种基本思路

对众多的教学设计、课堂实录及案例评析进行梳理,可以发现“分数的初步认识”教学设计的两种基本思路:一种以“‘分数的初步认识’课堂实录”为代表,^[9]这一思路可以追溯到“‘分数的初步认识’教案”。^[10]这两个跨度近三十年的案例的共性是基于平均分的情境导出问题:如何表示“半个”,进而引出分数;两个案例的主要差异是一个活动多、讨论多,另一个练习多、作业多。需要提及的是,旧教材的内容安排在三年级(下)。另一种从运算的封闭性引入分数(教学设计甲),同时也探讨了第一种思路(教学设计乙),^[11]并将两种教学设计的教学情况进行了对比研究。^[12]上述两种设计思路的具体教学流程如下:



(二)两种教学设计思路对分数表征的处理

为了思考数学概念和交流,我们需要能以某种方式来表示(representation,即表征)。为了交流,表征的方法应该是外部的,它的形式是口头语言、书面符号、图画或是物理客体。一个特定的数学概念常常可以用任意一种或是所有这些表征方式,^[13]这就是概念的外在表征。外在表征具有多元性:①表征的感觉通道多元,可以是触觉表征、听觉表征、视觉表征;②表征的计算属性多元,可以是口语、书写文本、数学公式和逻辑表示等抽象形式;也可以是图形表征、图表表征、图像表征等形象形式;③表征的存在状态多元,可以是静态的图片表征,也可以是动画等动态表征。^[14]因此,多元外在表征就是指同一数学学习对象的多种表征形式。在数学学习中,学习者如果要深刻理解数学对象,一方面需要学习多个表征,因为单个表征仅仅反映数学对象的某个侧面;另一方面需要学习表征系统内的相互作用:系统内表征形式之间的精致与系统间的转换、转译。^[7]另外,由于外在表征经内化而成为内在表征,因而外在表征与内在表征之间存在着某种对应的关系。

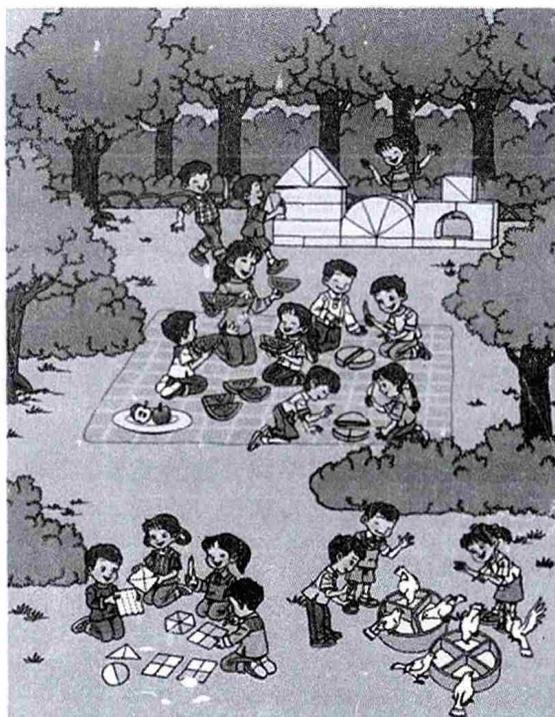
尽管上述两种教学设计思路都体现了用教材教的理念,都关注学生积极、主动且富有挑战性的学习,同时,也注意利用课文呈现的分数外在表征方式设计教学流程。不过从学生理解数学的心理过程来看,两种设计思路都没有探讨以下问题:①课文呈现的分数外在表征之间有没有层次性?若有,怎样在教学中加以体现?②分数的外在表征有哪些类型?类型之内、类型之间有怎样的关系?这些关系对教学设计有怎样的要求?③分数的外在表征与内在表征有怎样的关系?这种关系对于分数的学习设计有怎样的启发?

三、分数的外在表征分析

三年级的学生属于建构性的思维者,必须经历归纳、抽象、概括来建构自己的概念,或是整体直觉把握概念,逐渐实现数学形式化。^[7]由于学生初次接触分数,因而应该基于他们的前概念,通过观察、操作、举例解释等直观途径,采用想、说、做、写的结合,逐步在分数的外在表征内部、外在表征之间进行精致、转换与转译。这样,学生才能在操作的同时进行数学思维,进而接近分数的本质,并在头脑中留下火热思考的痕迹。

(一)课本情境中的多元外在表征

课本 91 页的情境(下图)包含多种外在表征方式:实物操作——切西瓜、苹果、月饼;模型操作——

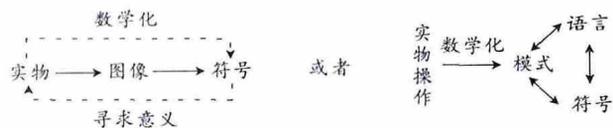


搭积木、折纸;喂养鸽子的盒子兼具实物与模型的特点。另外,积木、地毯还隐含着线段图、面积图,周边的树木可以作为外在表征的实物。这些方式囊括了关于“部分与整体关系”意义模式的四个渠道:范围、长度、集合和面积。^[3]这些外在表征都是分数概念的现实原型,可以分为具体的表征、半具体半抽象的表征。教学活动需要从这些表征中引申出分数的抽象表征——符号表征,还需要在不同的外在表征之间建立关系。

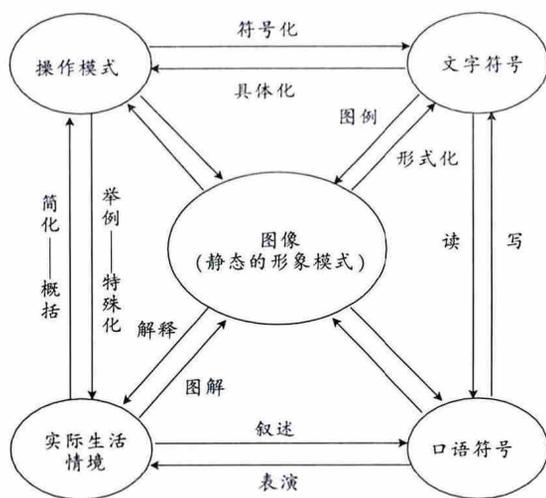
(二)数学多元外在表征及其关系

数学对象的多元外在表征能够具体形象地凸显一个数学对象的多元外在属性,便于学习者对不同表征的认知连接。^[15]

基于思维的发展水平,布鲁纳将数学的外在表征分为三类:活动性表征、图像性表征和符号性表征,并且它们按照这样的前后顺序出现和发展。^[6]各种水平的思维活动特点如下:活动性表征——必须借助实物或具体事物的实际操作进行思维;图像性表征——能依据实物的影像构造的心像进行内在的思维活动;符号性表征——能直接对数学符号进行思维操作。既然外在表征有不同的思维活动水平,所以要把分数的多元外在表征及其学习设计成既让学生经历“具体→半具体半抽象→抽象”的数学化过程,也让学生体验“抽象→半具体半抽象→具体”的寻求意义的过程;^{[16][3]}



基于数学表征在数学学习中的交流和认知的作用,莱旭(Lesh)将布鲁纳的分类发展为五种:书面(文字)符号、口头语言(口语符号)、操作性模型(模式)、图形(图像)、实物(实际生活情境)(下图)。并强调:它们之间不一定存在先后的发展顺序,主要应重视它们之间的转换与相互影响,因为这种转换与影响对于学生的概念形成和理解有重要的意义。^[6]既然理解数学概念的关键在于促成不同表征形式之间的转换与相互影响,那就需要把分数的多元外在表征及其学习,设计成引导学生在不同的外在表征方式之间进行转换与转译的过程。



基于表征符号的本质差异,认知心理学家将外在表征分为:叙述性表征与描述性表征两大类。^[7]两种表征具有各自的特点与功能:叙述性(言语化)表征,其本质为抽象符号,通过言语对被表征的对象进行抽象的描述。如,口语、书写文本、数学公式和逻辑表示等。这一类表征与约定内容紧密相关,而且包含反映关系的各种符号,能够描述和表达抽象的、逻辑的意义。描述性(视觉化)表征,其本质为直观模式,通过图式元素对被表征的对象进行形象的描绘。如,实物模型、图形、图表、图像等。这一类表征描绘了具体的、形象的、直觉的意义,便于人们较为快捷地“可视化”数学的整体结构和意义。^[4]比较而言,叙述性表征适合于逻辑思维,有助于逻辑、理性思辨的培养;描述性表征适合于形象、直觉思维,有助于创新思维的培养。既然表征间的转换或转译体现了逻辑思维与非逻辑思维的互补,那就需要把分数的多元外在表征及其学习设计成引导学生在两类表征之间进行参照:转换与转译的过程,促进他们形象思维、直觉思维、逻辑思维的共同发展。

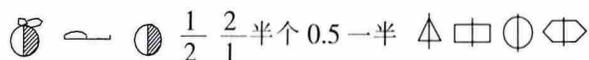
(三) 两种教学设计思路对外在表征处理的不足之处

综上可知:一方面,多元外在表征在思维活动层次上有不同的水平,因而教学设计既需要体现“具体→半具体半抽象→抽象”的数学化过程,也需要反映“抽象→半具体半抽象→具体”的寻求意义的过程;另一方面,多元外在表征在呈现方式上具有多种不同的方式,这些方式可以归结为言语化表征与视觉化表征,因而教学设计要体现言语化表征内部的精致、视觉化表征内部的精致、言语化表征与视觉化表征之间的参照。于是观之,尽管两种教学设计思路都关注了多元外在表征,但是过于强调符号化表征,且没有清晰刻画水平层次的数学化与寻求意义的过程,也没有系统设计两类多元外在表征之间的转换、转译的过程。由于情境与数学化、符号表达与意义生成、活动与对数学本质的思考之间没有建立起内在的、必然的联系,因而,文^[5]对课堂观察之后的反思就成为题中的应有之义。

四、分数的多元表征学习分析

对外部表征的系统研究有助于我们了解许多有关内部意识(表征)的知识,因为内部意识的结构是对外部环境结构的反映。^[17]也就是说,对数学外在表征的分析,可以更好地理解数学内在表征的特点。因为数学外在表征是数学学习对象的一个替代符号——数学学习对象的外在形式,包括数学符号系统、结构性的学习情境;而数学内在表征是学习对象的外在表征内化在人脑中的心理表征——个体对于数学学习对象的意义赋予与建构,它在本质上也是外在数学学习对象的一个替代符号。^[7]因此,内在表征与外在表征之间存在着对应的关系。这种对应关系,一则揭示了内在表征的多元性;外在表征内化在认知结构中的数学概念、数学命题、心像、心智模型、视空间表征、图式和对数学的情感等;^[14]二则为学生的多元表征学习提供了启示。

考察课堂实录^[9]及文^[18]中的几个片段:①教师让学生用自己喜欢的方式表示“半个”:



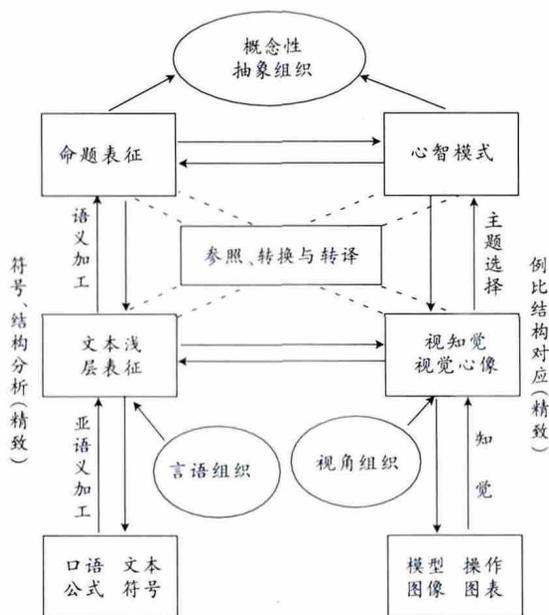
并让他们解释每种表示方法的含义;②向学生介绍一种“更科学、更简洁”的表示方法——“1/2”;③教师指着上面的图示说:老师想和你们商量一下,这些图、线段和文字都表示把一个物体平均分成两份,表示其中的一份。如果你认为“1/2”这个分数,能表示你

的意思,就可以擦掉你所写的;如果你认为你的表现方法更好,也可以保留意见。结果很多同学纷纷跑上去擦掉自己写的文字、画的图与线段,只有一位同学坚持认为自己画的图更好,他所画的图被保留在黑板上;④教师请坚持画图的同学用画图的方法表示“ $1/100$ ”,这位同学画了一会,说太麻烦了,还是分数表示好,边说边擦掉了自己所画的图。

事实上,教师在课堂一直采用多元外在表征。但上述片段却表明教师一心要把学生对分数的表征方式限制在符号表征一种方式上,这不利于学生进行多元表征学习,并影响学生对分数意义的建构。蔡金法研究发现,中国小学生在“过程受限”问题中表现很好,但在“过程开放”问题中表现不如美国学生。对原由进一步观察分析发现,美国学生喜欢使用图示的、表格的、言辞的等直观、具体的表征和与之相应的直接策略,突出非形式化的数学理解;而中国学生擅长使用符号表征和与之相应的抽象策略,过分强调形式化的数学抽象。^[19]下面我们结合数学多元学习的认知模型进一步说明。

(一)数学多元表征学习的认知模型

结合数学外在表征的分类研究,我们将根特纳与马克曼的研究^[7]稍加修改,提出数学多元表征学习的认知模型(下图)。不管是外在表征还是内在表征,从表征的符号本质来看,都可以分为言语化表征与视觉化表征。每一类表征,依思维加工由浅到深可以分为不同的水平层次:言语符号→文本浅层表征→命题表征;视觉情境→视知觉/视觉心像→心智模式;最后,命题表征与心智模式整合为概念性抽象组织。在言语化



表征与视觉化表征的不同发展阶段,两类表征的对应层次及不同层次之间需要进行相互参照:转换与转译,从而促进每一类表征的精致,最终促进命题表征与心智模式的整合,建立对概念的恰当图式。

(二)促进多元表征学习,加深学生对分数概念的理解

由于初次接触分数,学生不可能形成概念性抽象组织。不过,利用数学多元表征学习的认知模型,我们可以考察分数的初步认识中的教学设计与实施需要关注的问题。

由于课文情境呈现的实物操作与模型操作都属于视觉化表征,而分数的语言表达与符号表示则属于言语化表征,因而把促进学生言语化表征的形成与发展作为教学的大方向是正确的。但问题在于学生的言语化表征的形成需要视觉化表征支持,同时视觉化表征亦需要进一步发展。因此将本课教学定位于“促进学生的视觉化表征进一步发展,提高认知加工水平;引导学生把视觉化表征转换为言语化表征,发展口头语言、文字语言与符号语言,促进三类语言的转换;在言语化表征与视觉化表征之间建立转换与转译的关系。进而初步把握分数的言语化表征”,也许更为恰当。因为这也更充分地体现了课标要求的“情境-数学-情境”的联结所追求的“视觉化表征-言语化表征-两类表征的结合”的教学设计。为此:

第一,从均分物体的视觉化表征转换为言语化表征时,注意体现言语化表征的发展层次:口头通俗言语(如,把一个物体平均分成两份,每一份是这个物体的一半),也就是平均分成的两份中的一份)→书面精炼语言(二等分,取其一)→数学文字语言(二分之一)→数学符号语言($1/2$)。

第二,结合情境,充分体现作为“量”的分数——带单位(如,三分之一的圆)与作为“比率”的分数——不带单位(如,三分之一)之间的转换过程,并引导学生参与这个过程(当然不能直接提“量”的分数与“比率”的分数),因为这是从视觉化表征转向言语化表征的一个关键环节。

第三,关注操作活动后面的数学思考,促成学生在分数的视觉化表征与言语化表征之间的转换与转译。因为,即使学生没有接触过分数,也能顺利地完成“折一折”、“涂一涂”的操作活动。但是只有在操作活动与“几等分,取其一”所表达的“几分之一”之间建立了转换与转译关系,学生才能从情境走向数学,把活动与思考数学结合起来。

第四。允许学生用不同的方式表征分数。尽管学习符号化的表达是一个目标,但是达到这一目标需要通过视觉化表征的转换与转译才能实现。而且,表征之间的相互参照是两种表征不断发展——精致的需要,自然成为建立分数恰当图式的必要条件。

数学多元表征学习要求同一数学学习对象必须具有叙述性和描述性两类本质不同的表征,这也是对“数形结合”数学思想的本质刻画。“数形结合”反映的就是言语化表征与视觉化表征在概念理解与运用过程中的精致、转换与转译,反映的就是视觉化表征的直觉启示与言语化表征的逻辑抽象的整合。因此,从教学的角度看,我们更应深入地研究教师在教学中应当如何使用各种外部表征,才能帮助学生建立真正反映概念本质的内在表征。^[20]

参考文献

- [1]人民教育出版社.本期话题:“分数”意义的再叩问[J].人民教育,2011,(6):37.
- [2]华应龙.分数:先分后数——“分数的意义”教学新路径[J].人民教育,2011,(6):37-38.
- [3]杨豫辉,宋乃庆.小学五年级“分数的意义”教学结构研究[J].课程·教材·教法,2010,(4):54-58.
- [4]刘加霞.通过“分”与“数 shù”,分数是个“数 shù”?兼评华应龙老师执教的“分数的意义”[J].人民教育,2011,(6):39-42.
- [5]刘庆华.“课堂观察”,读懂学生真实的想法——以“分数初步认识”为例的专题研究[J].四川教育,2010,(7-8):67-69.
- [6]李士錡.PME:数学教育心理[M].上海:华东师范大学出版社,2001:54,110,114,35,36.
- [7]唐剑岚.数学多元表征学习及教学[M].南京:南京师范大学

出版社,2009:15,35,3,33,23-24,66.

- [8]中华人民共和国教育部.全日制义务教育数学课程标准(实验稿)[M].北京:北京师范大学出版社,2001:12.
- [9]吴正宪.“分数的初步认识”课堂实录[J].教育理论与实践·B,2007,(9):35-37.
- [10]曾庆雅.“分数的初步认识”教案[J].四川教育,1980,(5):33-34.
- [11]朱乐平.“分数的初步认识”课堂教学案例的比较研究(上)[J].小学教学设计,2006,(11):14-19.
- [12]朱乐平.“分数的初步认识”课堂教学案例的比较研究(下)[J].小学教学设计,2006,(12):15-19.
- [13](美)D.A.格劳斯主编.数学教与学研究手册[M].陈昌平等译.上海:上海教育出版社,1999:132.
- [14]唐剑岚.国外关于数学学习中多元外在表征的研究述评[J].数学教育学报,2008,(2):30-34.
- [15]Keller B.A,Hirsch C.R.Student Preferences for Representations of Functions.International Journal of Mathematical Education in Science & Technology,1998,29(1):1-17.
- [16]范良火,黄毅英,蔡金法,李士錡.华人如何学习数学[M].南京:江苏教育出版社,2005:261.
- [17]Zhang J.The nature of external representation in problem solving. Cognitive Science, 1997, 21(2): 179-217.
- [18]史息良.为学生的发展而教——吴正宪“分数的初步认识”教学片段欣赏及思考[J].教学月刊·小学版,2005,(3上):40-43.
- [19]李静,刘志扬,宋乃庆.基于多元表征发展代数思维的教学模式研究[J].西南师范大学学报(自然科学版),2011,(6):268-271.
- [20]郑毓信.多元表征理论与概念教学[J].小学数学教育,2011,(10):3-7.

责任编辑:武杰

A Discussion on Multiple Representations of “Preliminary Comprehending of Fraction”

Cao Xin

(College of Mathematics and Computer Science,Gannan Normal University,Ganzhou Jiangxi 341000,China)

Abstract: There are many debates about “Teaching of Fraction Meaning”, but it appeared less exploration in “Preliminary comprehension of fraction”. Some surveys show that students may have experienced the situation but didn’t realize the necessity of learning fraction. They can operate well but never think about the essence of mathematics. As representation is crucial for the understanding of concepts, making the analysis of teaching design in Preliminary Comprehending of Fraction from the perspective of multiple representations is important. It found that two kinds of tendencies of over favoring symbol representation, ignoring the development level of representation and the teaching behavior of transformation and translation between different representations, which are potential barriers for students’ further comprehending of fraction. Issues of multiple representations about learning in Preliminary Comprehend of Fraction should be seriously considered.

Key words: external representation; internal representation; multiple representations; comprehension of concept; Preliminary comprehending of fraction