〔美〕R·W·柯普兰著

中小学数学教学论著译丛

儿童怎样学习数学

——皮亚杰研究的教育含义

上海教育出版社

责任编辑　陈　和
封面设计　张瑞邦

统一书号：7150·3346
定　　价：2.00 元

中小学数学教学论著译丛

儿童怎样学习数学

——皮亚杰研究的教育含义

(美)R·W·柯普兰 著

李其维 康清镳 译
左 任 侠 校

上海教育出版社

HOW CHILDREN LEARN MATHEMATICS

TEACHING IMPLICATIONS OF PIAGET'S RESEARCH

(Third Edition)

Richard W. Copeland

Macmillan Publishing Co., Inc.

New York 1979

中小学数学教学论著译丛

儿童怎样学习数学

——皮亚杰研究的教育含义

(美) R. W. 柯普兰 著

李其维 康清镳 译

左任侠 校

上海教育出版社出版

(上海永福路123号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 12.75 字数 302,000

1985年12月第1版 1985年12月第1次印刷

印数 1—8,600 本

统一书号：7150·3346 定价：2.00 元

中译者前言

美国柯普兰(R. W. Copeland)所著《儿童怎样学习数学》一书，正如其副题明示，主要论述"皮亚杰研究的教育含义"。全书既有理论的扼要介绍，又紧密结合数学教学实际，并且还为读者提供了如何进行科学研究的具体范例。这本书还有一大特点，即它是"从儿童怎样学，而不是从教师怎样教"的角度来阐述儿童逐步把握数学概念的过程的，作者以此作为全书的宗旨，显然是深得皮亚杰理论的要领。

目前，国内译介皮亚杰著作和思想的文章日渐增多，皮亚杰的大名也逐渐为人所知。皮亚杰一生著作很多，涉及的知识领域十分广泛。一般从事教育的同志不可能通读这些著作。但如果要准确地理解他的基本理论，从中获得有益的启示，以期改进教学工作，加速对儿童智力的开发，那么选择一、二本研究、评论皮亚杰理论的专著作比较深入的阅读，还是很有必要的。柯普兰也原是为此目的而写作这本书的，它的主要读者对象是师范院校的学生和中小学教师。在某种意义上，这是一本小型的皮亚杰著作选。作者浓缩和概括了皮亚杰的十二本著作以及多篇教育专论的丰富内容，写得简明而通俗。这本书共有廿二章，基本上可分为三大部分。第1、2、3章介绍皮亚杰发生认识论的基本观点、他对教育的基本看法以及儿童智慧发展的阶段论。第21、22两章，介绍了一种贯彻皮亚杰思想的教学形式，并对全书作出总结。从第4至第20章则具体分析儿童把握各种数学概念和规则的发展过程，它们构成全书的主要内容。

尽管这本书是迄今为止介绍皮亚杰理论的同类书籍中较为浅近的一本，不过对从未接触过皮氏著作或接触不多的读者来说，阅读时可能还会有一定困难。因此，我打算在此占点篇幅，把皮亚杰的理论及其对教育的影响作一概略的介绍，或许对读者理解本书有所助益。如读者在阅毕全书后，对此没有蛇足之感，那更是作者所愿。

一、发生认识论的基本出发点

一般把皮亚杰称作儿童心理学家或发展心理学家，其实确切地说，他是一名发生认识论者。他创立了叫作发生认识论的理论体系。所谓发生认识论就是通过科学概念的个体发生、发展来研究人的认识的可变性。因此，皮亚杰理论的着眼点是认识论，是个体认识的发展史。

既然要从发展的角度来探讨认识论问题，就必然要重视儿童心理学和发展心理学，因为认识(知识)的增长是不能与智慧的发展分割开来的。所以皮亚杰有时又把发生认识论比作“智慧的胚胎学”。好象生物的胚胎发育一样——遗传的基因群与后天环境中的诸因素相互作用而逐步衍生出成熟的个体来，智慧也要经历这样一个类似的过程。皮亚杰还认为，知识的增长，智慧的发展，不只是量的累积，而必然伴随着认知结构的质的变化，如同个体发育过程中的身体结构也是日趋复杂的一样。因此，在整个皮亚杰的体系中，发生认识论、“智慧的胚胎学”与认知结构的形成理论，三者是统一的。

前面讲到发生认识论是研究科学概念的个体发生的，那么，何谓科学概念？根据皮亚杰的理论，科学概念包含两大类型，一类是逻辑数学的概念，它们的形式化就是人的认知结构；另一类是对于现实世界的(自然的、社会的)规律性的认识，它们的形式化则是现

实的客观因果性结构。发生认识论的最基本观点是，这两类知识和两类结构都派生于人的活动，前者是活动中主体动作内化的结果，后者是活动中客观算符(算子)彼此协调的结果。正因为它们都是在活动中发生发展的，所以这两种结构——外部的因果结构与我们自己的(主体的)运算结构之间存在着某种持久的、尽管不是同一性的联系。皮亚杰曾在一次题为“心理学是什么”的讲演中说：“代数的结构、几何结构、基本的动力结构(因果结构)、一般的逻辑结构，我花了五十多年时间从事的就是这类研究。”①皮亚杰所指的科学概念就是这些结构，认识的发展即指这些结构的发展。

发生认识论探悉了个体在与外物相互作用的活动中，如何随着智慧的发展，逐步把握那些通过人类实践而沉淀、凝聚起来的“逻辑的格”的。它的主要贡献在于从发展的角度回答了人为什么能获得对世界的真理性认识这一重大的认识论问题。人的知识是不断构造起来的，不仅认识的形式(运算逻辑结构)如此，而且认识的内容(现实结构)亦如此。两类结构之间的紧密联系一方面表现在现实结构的获得不能离开运算逻辑结构，另一方面也表现在现实结构可以转化概括为运算逻辑的结构。它们的关系是内容与形式的对立统一。统一的基础就是主、客体相互作用的活动。

二、两种经验、两种抽象和两种水平的反省

感性活动不同于感知经验，这是我们了解皮亚杰的理论首先要明确之点。皮亚杰反对认为科学知识起源于感知的经验论解释，但并不一般地反对感知经验，感知经验也可以向我们提供有关外物的许多信息。视觉、听觉、触觉等等对形成物理经验形态的知识起着重大的作用，如关于木块浮在水里，水结成冰，物体的颜色，声音的高低，物体表面的光滑程度等等。但它们对另一类更为重要

① 《美国心理学家》，1978年第7期。

的知识形态——逻辑-数理知识的形成则无能为力了。后者不是产生于静止的感知，而是产生于主体对客体所施加的动作即主体的感性活动之中。

皮亚杰的感性活动概念远比感知经验具有更为丰富的内涵。一般说，感知经验从属于感性活动。在主客体积极的相互作用的活动中，客体才能被更好地感知。更为重要的是，感知所获得的仅是静止的心理表象，只是一些图式化的东西，它们之间的联结在还没有从属于思维的运转方面并与后者协调一致的时候，是远不能达到逻辑的水平，实现对事物的因果认识的。而思维的运转方面则是主体动作的内化与概括，它并不导源于感知的经验而是产生于动作的经验——皮亚杰称之为逻辑-数理的经验。在这个意义上，我们也可以称皮亚杰为广义的经验主义者。

在本书第2章中，皮亚杰谈到了一个具体的关于逻辑-数理的经验的例子。皮亚杰有一位数学家朋友。这位朋友小时候有一次在沙滩上玩耍，他把十个卵石排成一行。他发觉无论从哪端开始数都是十个；然后他又把它们排成另外的形状，数出来的数目仍然不变。他感到十分惊奇，并由此产生了对数学的兴趣。皮亚杰认为，这件事对我们成人来说极为平常，但对儿童来说却是一件了不起的发现。他证实了加法交换性的存在——石子的总数不依赖于计数的次序。这一认识不是由感知的直观提供的，感知的直观充其量只形成各种形状的心理表象。正是儿童自己的动作才使儿童有了数和交换性的观念。倘若没有这些实际的动作，那么表象就永远是表象，即使是一连串的表象，也不可能产生对总数和交换性的认识。

皮亚杰还举了另一个关于重量传递性的例子来说明逻辑-数理经验的重要。美国心理学家斯墨茨隆德曾做过一个让五、六岁的儿童学习重量传递性的实验。有三个物体，A 与 B 一样重，B 与 C 一样重。显然，根据等量传递的性质，A 与 C 也应该一样重。

但是实验仅让儿童看着天平，并不让他们实际动手操作。因此，这种外界的强化并不足以建立传递性的认知结构。在不能直接用天平比较 A 与 C 从而直观地告知他 A 与 C 一样重的情况下，儿童是不会根据传递性说出 A 与 C 的重量是相等的。

通过上面两个例子可以看出，皮亚杰所谓的逻辑-数理的经验，是感性的而不是感知的。正是这种经验，为日后逻辑-数理的抽象结构的形成奠定了基础。一切认知结构都由此而来。皮亚杰在区分了两种经验的同时，又区分了两种性质不同的抽象，即所谓本义的抽象和"反省的"抽象。前者是对感知获得的物理经验的抽象，后者则是对动作中的逻辑-数理经验而言。

反省的抽象对认知结构的形成具有举足轻重的作用。皮亚杰认为，"从一个动作或一个运算中抽出一种属性，只是把这种属性从其它被弃置的属性中分离出来是不够的(即保存其'形式'而弃置其'内容')。这种保存下来的属性或形式还必须另外转移于别处，就是转移到动作或运算的另一种水平上"①。就是说，任何动作或运算，它们作为主体的活动，总有其形式方面。活动的形式经过重复，概括就会形成一定的格式；而这些格式又趋向于综合，趋向于彼此间的协调。这种协调具有一种组织化或结构化的倾向，从而导致认知结构的产生。皮亚杰所说的所谓"保存"活动的形式的属性并把它们"转移于别处"，即指通过反省抽象产生认知结构之意。在认知结构的逻辑中蕴含、概括着这些形式的属性。当然，反省抽象存在着不同的意识水平。它的最高的层次就是主体对认知结构的自我意识。在多数情况下，这些结构往往不被主体自身所认识：它在意识中是不清晰的，但可通过主体的动作或思维中推理的实际过程而显现出来。

皮亚杰认为，存在着两种性质稍有不同的反省。第一种是由前运算的动作思维(直觉思维，即本书中所说的"溢绎"水平的思

① "皮亚杰的理论"，载缪森主编的《儿童心理学手册》，第一卷，第九章。

维)向具体运算过渡的反省。动作或动作格式之间的协调,它们所产生的反省,必然会"折射"到某个平面并在这个平面上进行加工,于是形成具体运算水平的认知结构。然后,在此基础上,具体运算之间或具体运算格式之间,又产生新的协调。由这种协调而产生的反省又导致新的运算,即形式运算的产生。由于后者不是从动作而是从运算中反省得到的,所以它跟动作只有间接的联系,当然,它们最初的根源都是感性活动中有关动作协调的逻辑-数理经验。"源远"才能"流长",因此,要使高级水平的智慧运算充分发展,必须重视逻辑-数理经验的积累。

关于动作和运算,具体运算和形式运算的区别,下面我们介绍皮亚杰关于儿童智慧发展阶段论的内容时再作进一步的说明。

三、儿童智慧发展的阶段论

皮亚杰认为,儿童智慧的发展一般都要经历如下四个阶段:感知运动阶段,前运算阶段,具体运算阶段和形式运算阶段。它们彼此衔接而不能超越;大体对应于某个年龄阶段,但又存在着相当大的个体差异。有些人也许由于早期阶段的发展不善,甚至终身不能掌握形式运算。这四个阶段各有其质的特点,但前两个与后两个阶段之间的区别尤为重要。因为以运算的获得为标志,儿童从此步入了逻辑思维的门槛。本书所述的大部分数学观念也是在这之后达到所谓"阶段3"的水平而被儿童把握的。

那么,什么叫运算呢?运算就是内化了的、可逆的、组成系统(结构)且具有守恒性的动作。运算是皮亚杰理论中最核心最关键的概念。皮亚杰曾指出,知识总是与动作联系在一起的。这里的"动作"就广义而言,它包括运算;"知识"也是一种广义的知识,它包括逻辑-数理的知识和广义的物质世界因果性的知识。两类知识的密切联系,盖因为它们都是在主体活动中产生的——前者直

接为主体动作协调的产物，它的形式表述就是皮亚杰所独创的运算逻辑；后者虽然反映的是外界信息(客观算子)之间的协调关系，但它不能脱离主体的动作协调而实现。概言之，人们只有通过认知结构和运算逻辑，才能获得大千现实世界的各种具体的科学知识，了解事物之间错综复杂的因果规律。

儿童在大约一岁半到二岁以前处于感知运动阶段。这时他们与客观世界的联系仅表现在感知动作方面，而且最初是主、客体不分的。主体仿佛是世界的中心，还不能意识到自己的存在。随着动作的发展，终于产生了一种皮亚杰称之为“哥白尼式的革命”，儿童开始把自己仅看作是由无限众多客体组成的世界中的一个客体而已。这个“哥白尼式的革命”是感知运动智慧的最大成就。它表现在三个方面。一是恒定客体的格式形成了，如在玩具前拉上一块幕布后，玩具看不见了，但儿童仍知道它还在原处。二是空(间)-时(间)的组织也达到了一定水平。形成了空间“位移群”的基本结构。对恒定客体的定位可以按“位移”的线路追踪出来。位移不仅反映了空间的特性，同时也体现了时间序列的特点，因为位移总是遵循一定顺序发生的。三是因果性认识的萌芽。皮亚杰认为，恒定客体及其位移的体系又是同因果性结构不能分离的。儿童最初的因果性认识产生于自己的动作与动作的结果的分化，然后扩及客体之间的运动关系。当儿童能运用一系列协调的动作实现某个目的——如用手拉动面前的毯子，拿到放在毯子上的玩具的时候，就意味着因果性认识已产生了。即使在如此简单的活动中，也可以看出儿童的因果认识(因果性结构)与逻辑-数理结构之间的密切联系，因为在这一活动中已蕴含着丰富的逻辑-数理经验：有对应的“逻辑”——作为手段的动作与作为目的的效果的对应；有次序的“逻辑”——得到玩具在拉动毯子的动作和毯子的移动之后；有包含的逻辑——整个活动中包括着一系列的简单动作。

在一岁半、二岁到六、七岁之间，儿童处于前运算时期。这一

阶段的特点是语言和心理表象等符号功能逐渐产生了。符号功能的出现对儿童智慧发展来说，意义也很重大。因为有了心理表象，才使心理上的思维成为可能。但是，由于这时候儿童的心理表象还只是物的图象，并不是动作格式的内化，换言之，内化仅具有静态的性质，所以儿童还不能在思维中把事物的图式与造成图式改变的动作的格式协调起来，不能使前者从属于后者，因而无法进行真正符合逻辑的推理。例如，当把一个“矮”而“粗”的杯子里的水倒入另一个高而“细”的杯子时，儿童或注意到高度(液面高了)，或注意到宽度(液面大了)，于是他们认为水量变了。这就说明，由知觉而得到的心理表象在思维中占有支配地位，他们还没有把初始的图式和倾倒后的图式，跟倾倒动作本身联系起来考虑，因而得出错误的结论。显而易见，即使前运算时期的儿童这时是在进行推理，他们的推理也只是不合逻辑的“滥绎”。本书所述各种数学概念的“阶段 2”水平，都是指这种情况。

概言之，前运算的儿童尽管有了内化功能，但严格地说，他们还不能把动作加以内化。儿童在前运算水平的心理表象几乎完全是对静态事物的表象，他在再现运动的或变形的表象时会遇到困难。皮亚杰认为，表象不足以产生运算结构，即使它是运动的或变形的表象，因为表象本身仍保持着不连续的性质，也就是说，还未表现出客体守恒性的特征。正如列宁所指出的：“表象不能把握整个运动，例如它不能把握秒速为 30 万公里的运动，而思维则能够把握而且应当把握。”①思维的运算只能由动作内化而来。

动作要内化为运算，必须得到可逆性的支持。具有可逆性的内化动作才是真正的运算。这时表象就从属于运算了。所谓可逆性，即指动作可以在心理上逆转。前述例子中儿童之所以回答错误，就因为他还不能“在头脑中”把倾倒的动作逆转过来，使水恢复原来的样子，以致受到眼前知觉的愚弄。

① 《列宁全集》第 38 卷，人民出版社，1959 年版，第 246 页。

运算的到来，意味着具体运算这一新的智慧时期的开始。儿童在类、关系、数和测量、时间和空间以及因果性等概念方面，均有了长足的进步。智慧的成就，硕果累累。但所有这些果实，形象地说，都长在“类的逻辑结构”和“关系的逻辑结构”这两棵大树之上，有的甚至结在嫁接于两树的枝条上。还应指出，这两棵树的树干正是可逆性。以可逆性来说明认知结构和解释智慧，这是皮亚杰的一大创见，也是一大特色，把握了这一点，也就掌握了理解皮亚杰理论的钥匙。本书谈到的大部分概念，都是由于可逆性之功而使儿童能够理解的。

可逆性分为两种，一种是反演可逆性，另一种是互反可逆性。它们分别支配着类的系统和关系系统，成为类的运算逻辑和关系的运算逻辑的支柱。

反演可逆性，按照皮亚杰的说法，即一个运算可由另一相反进行的运算消除掉，其结果为0。这个消除的运算就是原运算的反演运算，同样，原运算也是消除运算的反演运算。减法就是加法的反演运算。红花加上白花等于全部的花，从全部的花中拿掉红花或白花就等于白花或红花。高杯中的水可以倒入矮杯中，也可以从矮杯中再倒回去。这些运算之间的关系都是反演关系。有了这种反演可逆性，儿童才能认识部分与整体，总类与子类，集合与元素之间的包含关系。

互反可逆性的特征是，原运算与它的互反运算相结合而产生一个等值。如在天平的平衡问题中，如果在天平一端挂一重物，天平失去平衡，如何才能使天平重新恢复平衡呢？有两种方法，一是把重物拿掉，二是在天平的另一端挂上同样重量的物体。前者就是反演运算，其结果是以消除整个东西实现平衡，后者是互反运算，其结果则是在新的条件下实现平衡(即产生一个等值)。互反可逆性涉及两个事物的关系。两个事物之间的最一般关系又分为两种，一种是对称关系，另一种是不对称关系。兄弟关系是对称

的，兄妹关系则是不对称的。数学中的“等于”关系也是对称性的，而“大于”、“小于”则是不对称的。

儿童在具体运算阶段所获得的主要智慧成就有：他们产生了类的认识，掌握了类的逻辑，能够进行加法性和乘法性的分类(详见第五章)；他们也能在互反可逆性的基础上，借助传递性，把许多同类事物按某种性质排成一个序列，还能把不同类事物(互补的或非互补的)进行序列的一一对应，也能进行二维(二元)乘法性的序列排列(详见第6章)；在包含关系和序列关系综合的基础上，儿童在运算水平上掌握了数概念，并使空间和时间的测量活动成为可能，对空间和时间的认识有了很大发展(详见本书有关各章)。此外，以长度、质量、体积、面积、重量等等守恒性的出现为标志，儿童对现实的物质世界的认识也大大向前跨越了一步。

具体运算对儿童思维能力的扩展作用很大，但毕竟仍有不足，因为它仍离不开具体事物的支持或仅是对具体事物进行类或关系的运算。而且这两个系统还未能综合起来而协调为一个整体的结构。只有到形式运算阶段才能达到这一水平。

形式运算与具体运算的最大区别，就是思维可以脱离具体对象而在抽象形式的层次上展开，思维表现为命题的假设-演绎过程。所以形式运算又称为命题运算。这时候，儿童的逻辑也由上一阶段的关系逻辑和类逻辑发展到命题逻辑或演绎逻辑，或者，更确切地说，关系逻辑和类逻辑被吸收融化到了后者之中，因为即使在形式运算的命题内，关系和类仍是存在的，命题的内容仍是表达某种关系或类的性质。因此，形式运算的演绎逻辑也可以说是一种命题间的逻辑。它的运算是一种对具体运算再加反省的运算，即所谓运算之上的运算。皮亚杰又把形式运算称为二次幂运算(或二阶运算)。

从逻辑-数理方面来说，这一时期的儿童产生了两种新的整体结构：四元转换群结构和组合性格结构。群与格是皮亚杰从抽象

代数学引入的概念，用以作为把这些认知结构形式化的模型。

四元转换群是以可逆性为轴心构造起来的整体认知结构。任何一个命题都有四个转换的命题，或者说，它可以转换成四个互相区别的命题。其中有一个转换是重复原来的命题，称为恒等性转换(I)。另三个转换是依据于反演可逆性的反演性转换(N)和依据于互反可逆性的互反性转换(R)以及建立在这两种可逆性基础之上的对射性转换(C)。这四次转换所获得的四个命题(其中有一个原命题)就构成了一个关于"转换"的群，因为它们之间的关系符合群结构所必须有的四个基本条件。四元转换群中两种可逆性的综合体现在对射性转换上，因为对射就是互反的反演或反演的互反。

组合性结构是形式运算总的系统特征。皮亚杰认为，"形式思维最根本的性质就是在现实性与可能性之间的可逆性"①。组合性结构就是由这些可能性组成的。它大大增强了智慧的演绎推理能力。组合性结构一经构成，儿童就能把物体和物体、因素和因素组合起来，或是把概念和概念或命题和命题组合起来，去推论某一特定的事实。组合性结构最简单的运用是实际的组合运算；其复杂的形式则是命题的组合，以二元命题为例，它共存在16种逻辑关系，它们是可以相互转换的，由此构成了一个命题的组合系统。

以上所说的是形式运算的逻辑-数理方面，是这一阶段儿童认知结构的形式化。儿童运用他的认知结构能够完成认识世界的任务，并形成了一系列典型的形式运算格式，例如，比例格式，排列组合格式，杠杆平衡格式，概率运算格式，双参照系格式，等等。皮亚杰认为，这些基本运算格式中一个小数目就足以解释非常复杂的物理结构，如度量、空间、时间、运动、物理因果等等概念的发展。这些格式中蕴含着实际的物理内容，它们是形式运算的物理方面。这两方面是密不可分的。逻辑-数理结构与物理结构之间的关系，

① 皮亚杰和英海尔德：《从儿童到青年逻辑思维的发展》，1958年英文版，第255页。

类同于遗传学中基因型与表现型的关系。

以上我们约略介绍了儿童智慧发展阶段的一般特点，读者倘对此有个基本认识，那么阅读本书就不致感到十分困难了。在阅读本书时还要注意智慧发展阶段与概念掌握的三个阶段的区别。本书介绍的数学观念，大体有三种情况，它们分别在前运算、具体运算和形式运算时期获得，尤以具体运算时最多(见附录)，因为绝大部分数学观念都需要可逆性的支持。这正是强调前运算向运算发展的重要性的原因。

四、皮亚杰理论对教育的影响

皮亚杰理论中，蕴含着丰富的教育意义。它对教育产生了多方面的深远影响。皮亚杰指出："教育的最高要求应该(使学生)具有逻辑推理能力以及掌握复杂抽象概念的能力"，"智慧训练的目的是形成智慧而不是贮存记忆，是培养出智慧的探索者，而不仅仅是博学之才。"①皮亚杰认为他在发生认识论中所发现的东西完全可以运用于教育领域，它能够超出传统的学习理论——他认为这种理论忽视主体的构造作用过于强调外因，从而提供另一种学习的方法。

从皮亚杰理论的基本事实中，可以引导出如下一些教育原则。

1．关于学习的顺序

学习顺序的问题指学习的(心理)准备性问题，即向一定年龄的儿童讲授的材料存在着固有的限制，有准备才能进行有效的学习。皮亚杰反对布鲁纳(J. S. Bruner)等人所主张的所谓只要"采用智慧上诚实的方法"，就可以对任何年龄的儿童，教会他想要教的任何东西。

要在教学中具体贯彻准备性的原则，首先必须做到不去教给

① 皮亚杰：《教育科学与儿童心理学》，1970年英文版，第61页。

儿童那些明显超出其认知发展阶段的材料；其次教师应力图避免从外部人为地加速儿童对某种问题的认识过程。对内容的彻底掌握比速度快慢更为重要；第三，向儿童教授新概念应尽可能按其在自发的认识过程中的顺序进行。例如，根据皮亚杰的研究，“儿童几何概念的心理发展的次序更加接近于现代几何的演绎结构或公理结构的次序，而并不接近于几何学本身发展的历史次序”(详见本书第16章)。因此应根据这一发展顺序为儿童选择适当的几何活动。

对学习顺序和学习准备性的强调，必然引起两个密切有关的技术性问题：一是关于儿童的准备性如何诊断，二是如何进行个别化的教学以适合各人的准备性。本书详尽介绍了许多鉴别儿童准备性的诊断活动，不妨一试。当儿童对某一概念处于阶段2的过渡水平时，是进行教学的最好时机。从理论上说，应针对每个儿童准备性的特点来制定适合每个人的个别化的教学程序。实际执行可能有一定困难，但教师应尽可能考虑儿童的个别差异，这是皮亚杰式教育的重要原则之一。

2．课程的内容

课程的内容，也是皮亚杰理论对教育影响的一个重要方面。皮亚杰的许多经典实验基本上均属于一种广义的“数学”。把这些内容引进初中、小学课程(主要是小学)，特别是围绕守恒性或不变性(它的基础是可逆性)进行逻辑训练，对儿童思维水平的提高和学习能力的发展，意义极为重大。因为各种基本的推理形式——逻辑的、算术的、几何的以及物理的推理，都是建立在运算守恒性原理之上的。

3．教学方法

从皮亚杰理论中，至少可以总结出以下几个方法：

① 活动法　如前所说，智慧自动作发端。活动是连结主、客体的桥梁。把活动原则实施于教学过程，就应放手让儿童去动手、

动脑探索外物，获得丰富的逻辑-数理经验，通过反省的抽象，逐步形成、发展自己的认知结构。这就象织网，活动愈多，则经纬交错愈缜密，认知结构同化外来信息的功能就愈强。对教师来说，强调活动即意味着应着眼于儿童认知结构的发展，而不必舍本逐末过多地拘泥于一事一物的记忆。

② 自我发现法　根据皮亚杰理论，儿童自我发现的东西才能积极地被同化从而产生深刻的理解。自我发现法与"向儿童呈现学习的材料，强化正确的答案"的传统学习方法相比，其学习效果远优于后者。皮亚杰指出："每次过早地教给一些儿童自己日后能够发现的东西，这样会使他不能有所创造，结果也不能对这种东西有真正的理解。"① 自我发现体现了认知结构由儿童主动构造起来的特点。

③ 冲突法　冲突法又可叫新颖法，即让儿童学习那些与自己已经具有的知识有所不同的新事物。对冲突法的理论解释，涉及皮亚杰关于认知发展的平衡化思想。平衡化是一种动态平衡过程，它是影响发展的最重要因素。处于某一发展阶段的儿童具有一定水平的认知结构，儿童运用这些结构去同化传入的信息，有些能同化，有些则不能。于是，在能够同化与企图同化的两种信息之间就有了矛盾，导致认知结构内部的不平衡。这种内部的不平衡接着又可能引起认知结构的变化(即顺化作用)，这样就使结构得到了发展。

运用冲突法，要注意冲突的适当性，即适度新颖的原则，这样才能激起儿童求知的欲望，增强学习的动机。新旧知识的衔接、承启、组织，从激发学生学习动机的角度来说，是十分重要的。欲望、动机、兴趣，甚至意志，这是认知活动不可忽视的动力方面。皮亚杰曾指出，行为的情感方面、社会性方面和认知方面，三者事实上是不能截然分开的，它们形成了一个所谓"机能的统一体"。这就

① "皮亚杰的理论"，载缪森主编的《儿童心理学手册》，第一卷，第九章。

要求教师在进行教学时，要将自己的目光转向认知以外的广阔视野。

④ 同伴影响法(peer teaching) 皮亚杰一贯重视儿童之间的互教和相互影响。儿童之间彼此看法的交流，可使他们不断了解他人的观点。在同一认知水平上的其他儿童似比成人更能促使儿童从自我中心解脱出来。我们在分析感知运动水平的儿童的自我意识时，曾指出这种“解脱”(即“离中化”)对儿童达到客体恒定性的认识和形成空间位移群的作用。皮亚杰指出，这种感知运动水平的“哥白尼式革命”，还会在前运算的表象思维和社会关系方面再进行一次。这就是说，运算的到来，不仅需要儿童自身动作的协调，而且还要与他人的观点相协调。

本书第21章专门介绍了一种名曰“数学实验室”的数学教学程序。它将个别化教学方法与同伴之间的相互影响和相互作用结合起来，在欧美一些学校颇为流行(详见第21章)。与这种趋势相一致，也有不少人主张，要打破传统课堂的呆板模式和严肃气氛，给儿童更多的活动与交流的自由。然而实际实行起来，仍有许多困难与阻力。不过应该指出，这种“把课堂作为儿童的实验室”或把“实验室搬到课堂中去”的设想与实践，是符合皮亚杰关于儿童学习和认知发展的基本思想的。

总之，皮亚杰理论对教育的影响是很大的。但是他的理论远非是完美无缺的，即使在国外也有所争论。李其维和康清镳两同志译出本书，为我国广大中小学数学教师了解、借鉴皮亚杰的理论，做了一件很好的工作。愿本书中译本的出版，能对我国的数学教学改革有所裨益。

左任侠

于华东师大心理系

1984.4.30.

英文原版前言

目　　的

本书有两个主要目的。一是诊断性的——它有助于辨别儿童的发展阶段，以确定儿童对学习某种类型的数学所具有的准备性。第二个主要目的是为师范教育的“数学教学法”课程服务。读者会发觉本书与其它讲教学法的书不同，因为它是以“儿童怎样学”，而不是以“教师如何教”为基础的，它将能使读者从经历各个发展阶段的儿童的角度去看待数学。

正如本书所指出的，教师应该善于运用谈话的技巧，本书引用的许多谈话记录乃是儿童与教师之间的实际对话。不替儿童作出问题的答案，这样设计为的是让儿童在具有回答这些问题的能力时，能自己说出答案。教师也应该熟悉数学实验室的各种材料，这些材料是儿童在具体运算阶段学习数学概念所需要的。在本书的许多实例中，以及在“数学实验室”这一章中，对这些材料都有描述。

关于本书第三版的简单说明

本书第三版与第二版相比有所改动。增加了四章新内容。其中三章取材于皮亚杰的最近著作。

第 8 章“记忆与数学”是根据皮亚杰 1973 年著的“记忆与智

慧”一书编写的①。这一章阐明，记忆并不是按许多教师所设想的方式在起作用的。

第4章“数学的理解与操作”（“Knowing versus Performing Math”）以皮亚杰1976年写的“意识的把握”②一书为基础。它阐明知道如何演算可以比知道或理解包含于其中的数学过程早达六年之久。

第13章“机遇和概率”，以“儿童机遇观念的起源”③一书为基础，它研究儿童掌握这些观念的困难。这章内容特别及时，因为有关概率的题目现在已在小学数学教材中出现了。

新增添的第四个章节是第6章“次序化和序列化”（主要引自皮亚杰的“儿童的数概念”④一书），它只从序数意义上来讨论数的观念而不涉及基数思想，后者是第7章的题目。这两章内容每章都有其不同的心理学和数学的结构。

每章涉及的活动，在引述时都编了号，并且在附录中依次列出了它们的题目和出现页数。

让·皮亚杰（Jean Piaget）

许多数学教师都认识到皮亚杰理论的重要性，也知道贯彻皮亚杰的思想有着大量的工作要做。一个基本的问题是语言的障

① 皮亚杰（J. Piaget）和英海尔德（B. Inhelder）：《记忆与智慧》（Memory and Intelligence），纽约：Basic 图书出版公司，1973。

② 皮亚杰：《意识的把握——幼儿的动作与观念》（The Grasp of Consiousness——Action and Concept in the Young Child），坎布里奇：哈佛大学出版社，1976（此书法文原著出版于1974年——中译者注）。

③ 皮亚杰和英海尔德：《儿童机遇观念的起源》（The Origin of the Idea of Chance in Children），纽约：Norton 公司，1975。

④ 皮亚杰：《儿童的数概念》（The Child's Conception of Number），纽约：Norton 公司，1965。

碍。如"儿童的时间概念"一书，虽然它的法文原著写于1946年，但直到1969年才被译成英文。甚至英文的皮亚杰的著作也不容易读懂。

已有一些与守恒和序列等概念有关的活动在小学教材中出现了，但直到现在还没有全面贯彻皮亚杰研究成果的数学教学大纲，本书企图至少为此提供一个开端。

目 录

1 发生认识论和数学

他[皮亚杰]以一种彻底的经验方式，探索了一直具有排它性的一些哲学问题，创立了作为一种科学的认识论，使它从哲学中分离出来，而与所有关于人的科学互相发生联系①。

人的智慧对那些从事教育工作的人们具有根本的重要意义。为了教育、教学或促进学习，就必须知道智慧怎样发挥着它的机能。

过去，智慧首先被说成是"固定的"或"静止的"，理由是它基于个体的遗传"基因"。IQ（智商）因此是恒定不变的。这就导致另一个假设：发展是预先决定于身体和神经组织的发育和成熟的。在这一过程中，智慧的能力会自然地和机械地展现出来。至于教育，倘若被提到的话，其含义不是推进儿童的发展，而只是允许儿童自然地展现和发展而已。卢梭（J. J. Rousseau）和裴斯特洛齐（J. H. Pestalozzi）是这一思想和教育路线的有影响的人物。

比纳(A. Binet)，其测验方法虽然已被广泛地用来测定这一稳定的智商，但他本人并不同意上述观点。他说：

我们必须坚决反对并与这种盲目的悲观主义作斗争……我说儿童的智慧是可以提高的。人们总在提高那种构成一个学童智力的东西，也就是说，儿童在教学指导下总在提高学习和改善自己的

① 引自美国心理学会授予皮亚杰优秀科学贡献奖的公报。

能力。①

一种研究环境对智力影响的方法是对分开抚养的同卵双生子进行观察。因为同卵双生子具有同样的基因型，他们之间任何有意义的智力上的差异，必定是由环境而不是由遗传造成的。在这类研究中，纽曼(H. H. Newman)、弗里曼(F. N. Freeman)和霍尔津格(K. J. Holzinger)②，发现同卵双生子之间智商的差异达24点(分)之多。

环境或经验会对智商起作用，这一认识导致产生了新的理论。其中有一种理论认为头脑中的思想是心理实体或官能的集合，它的作用与肌肉的作用相类似。这是一种认为心理可由练习而扩展的思想。这种思想导致在学校的智力练习中采用更加机械的活动。据说，一个人进行记忆的锻炼会使他较易回想，在科学中，精细地作图会使人更加善于观察。

桑代克(E. L. Thorndike)及其他不同意这些观点的人代之以联想主义——刺激-反应系列的观点，在这一系列中，心理成为以机体对刺激的效应为基础的各种刺激的反应网络。这一多少有点机械的和过于简单的理论，早已让位于在心理内部刺激与反应之间必然会实现某些概念过程的理论。

早在1912年，亨特尔(W. S. Hunter)③就主张：人脑必然具有进行某种符号过程的能力。人脑拥有能够进行这样一种符号过程的中枢系统的观念，在1958年已被纽厄尔(Newell)等人认为带有信息加工系统的特征了。

---

① 比纳(A. Binet)：《关于儿童的现代观念》(les Idées modernes sur les enfants)，巴黎：Ernest Flamrion，1909。引自 G. D. Stoddard："智商：它的兴起和衰落"，《教育记事》，20(1939)第44～57页。

② 纽曼(H. H. Newman)、弗里曼(F. N. Freeman)和霍尔津格(K. J. Holzinger)：《双生子：遗传与环境的研究》(Twins: A Study of Heredity and Environment)，芝加哥：芝加哥大学出版社，1937，第18～20页，325～327页。

③ 亨特尔(W. S. Hunter)："动物和儿童的延缓反应"(The Delayed Reaction in Animals and Children)，《行为专论》，2(1)1912，第1～85页。

我们假定存在一个具有巨大贮存能力的信息加工系统，其中具有可以由刺激诱发的复杂的策略(程序)。①

亨特(Hunt)报告：

他们对于控制系统的性质提出了三条公设：a)它有一些包含着符号化信息的记忆，这些记忆是通过各种次序关系互相联系着的；b)它有一些对记忆中的信息进行运算的过程；c)它有一定数目的把这些过程结合成加工程序的规则……②

简言之，心理(心灵)是能够同电子计算机一样进行运算的。并不缺少脑细胞去从事这类工作，因人脑大约有1200亿个细胞。

神经系统的发展与经验

大多数动物不同于人的反应模式可能主要是由遗传因素决定的(蜜蜂之间的方位传递，鸟的迁徙，等等)，但新生儿的脑还装置得不够完备，把这架复杂的脑电子计算机装配完备主要还是靠学习的经验。正因为如此，有许多事情幼儿显然是无能学习的。

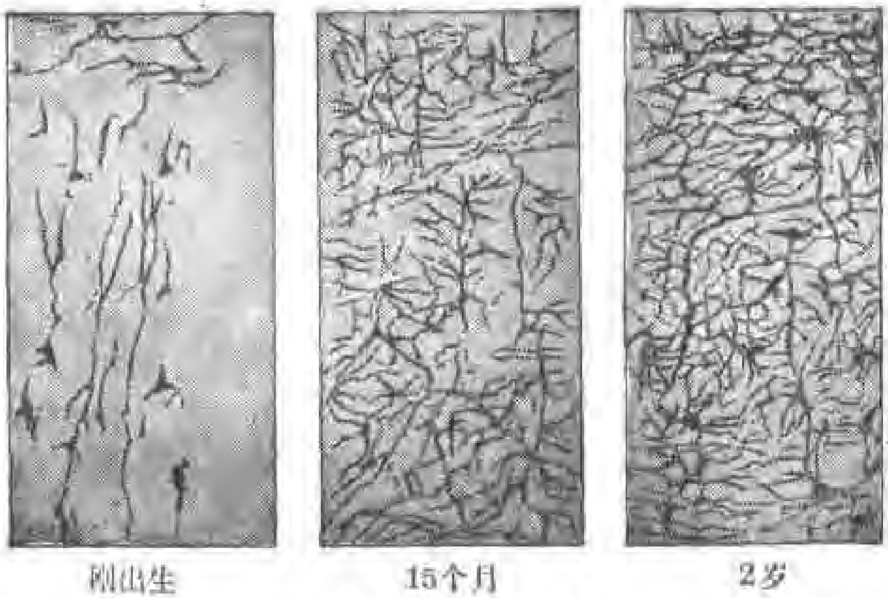
脑的发展和个体能力之间的联系不是单向的，而是相互影响的；经验促进神经系统的发展，而神经系统的发展又促进更高水平的学习。有些事实表明，在青年期以前神经系统的发展不会完全结束③。

脑的机能是不断成熟的，我们可以从脑电图(EEG)记录的发展变化中得出这样的推论。脑，跟身体其它部分的神经一样，也产

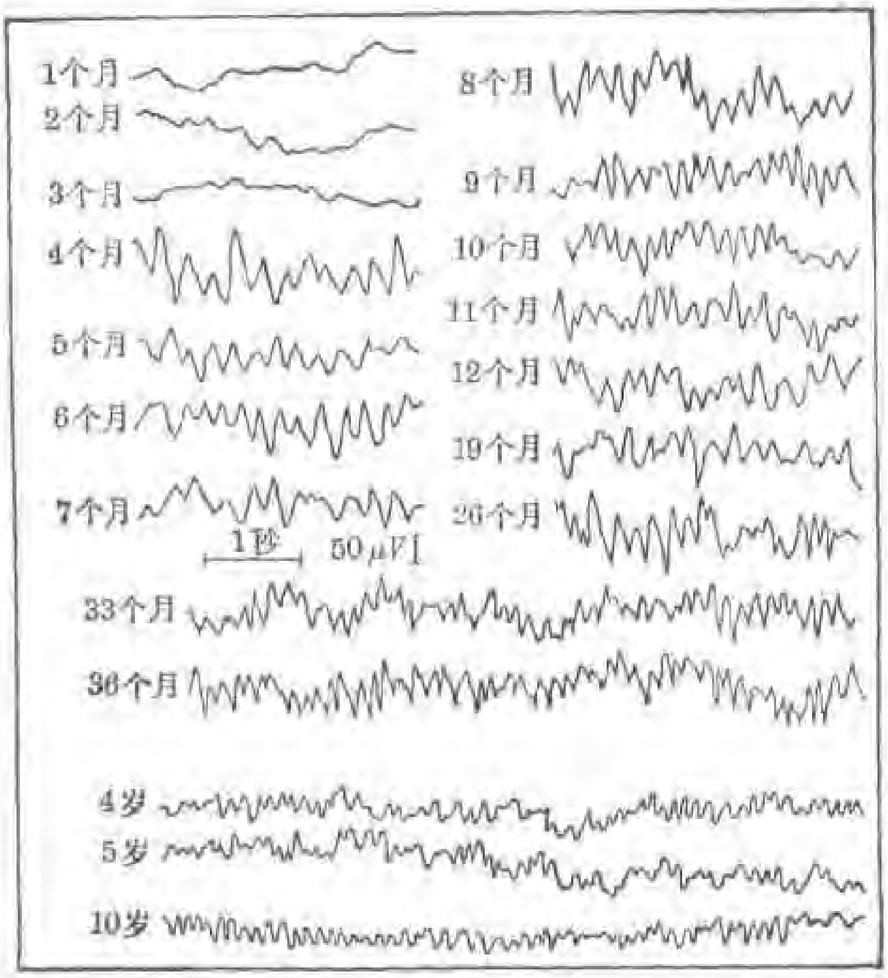
① 纽厄尔(Newell)、肖(Shaw)和西蒙(Simon)："一种人类解决问题理论的要义"(Elements of a Theory of Human Problem Solving)，《心理学评论》(1958)，第163页。

② 亨特(J. M. Hunt)：《智慧与经验》(Intelligence and Experience)，纽约：Ronald出版公司，1961，第75～76页。

③ 奥提斯(J. Oates)和弗罗德(Ann Floyd)：《发展的进程》(The Course of Development)，第4图册，英格兰Walton Hall, Milton Keynes：开放大学出版社，1976，第53～54页。



神经的相互联系的发展



脑电图节律随年龄发展的形态变化

生电冲动，使用灵敏的放大装置，能够把这些电冲动从附于头皮的电极接引出来。这种电冲动的形式是由不同频率的波所组成的复杂的模式，从每秒5周到突发的更高的频率①。

完全成人型的脑电图，平均频率大约是每秒9.5周，这要到十一～十三岁即相当于皮亚杰的形式运算阶段才能达到。新生儿主要为代尔塔(delta)型波，即不规则的大振幅低频波（每秒不到7周）。到五岁时，阿尔法(alpha)型波占优势(大约每秒8周)。以后频率逐渐增高，大约到十一岁时，才达到成人的水平②。

让·皮亚杰(Jean Piaget)

在作了以上概述之后，下面我们来介绍瑞士心理学家、生物学家、逻辑学家和数学家让·皮亚杰的工作。他的工作对数学教学的含义，以后我们将详细研究。关于皮亚杰，亨特(Hunt)说：

> 作为解决问题能力（基于符号表象的多层次组织和相当程度上来源于过去经验的信息加工策略）的智慧概念，发生于好几个源泉。这些源泉包括对人类解决问题行为的观察，电子计算机的程序设计，以及神经心理学的研究。有趣的是，也能从皮亚杰对儿童智力发展的观察中发现这样的概念。③

不幸的是，皮亚杰的早期工作在美国几乎未产生什么影响，这是由于当时联想主义的学习理论和指向内容的心理测量在美国心理学界占统治地位的缘故。而目前学术界则存在一种离开实验室大鼠向电子计算机进军的寻求理论模型的认识趋势④。

皮亚杰的理论是认知的而不是联想主义的。它更关心的是跟理解有关的心理的结构。它与行为主义理论不同，行为主义关心的

①、② 同上(即同上文前注，下同)。

③ 亨特：《智慧与经验》，第109页。

④ 菲力浦斯(J. L. Philips)：《智慧的起源——皮亚杰的理论》(The Origins of Intellect-Piaget's Theory)，旧金山：W. H. Freeman 出版公司，1969，第viii页。

是对由外部操纵的行为或知识的预测和控制。

发生认识论

发生认识论的基本假设是，逻辑(或知识的理性组织)上的进展与相应的心理形成过程之间存在着一种平行关系①。

康托尔(G. Cantor)集合论的发展就是一个例子，它是建立在一一对应的基本运算之上的。一一对应运算从何而来？康托尔发现，远在他转向数学之前，这就存在于他的思维中，是他的心理装置的一部分。最基本的心理学观察揭示一一对应是一种最原始的运算②。

有某种最基本的数学结构吗？布尔巴基数学学派试图从所有的数学结构中分离出基本的结构。他们建立了三种母结构：代数结构(它的原型是群的概念)，序的结构和拓扑结构。这些结构后来被修改而包括范畴的概念③。

问题随之而来，这些基本的数学或逻辑结构与儿童头脑中的心理结构的关系如何？一群数学家和心理学家在巴黎的一次题为“心理结构和数学结构”的会议上会面了。皮亚杰报告道：

> 数学家裘东尼(Dieudonne)代表布尔巴基学派，他一点也不信任心理学。裘东尼作了一次讲演，谈到(数学上的)三个母结构。然后，我也作了一次讲演，我描述了我们在儿童思维中发现的结构。使我们两人都感到惊奇的是，我们看到这三个数学结构和儿童运算思维的三个结构之间有着非常直接的联系。当然，我们彼此留下了深刻的影响，裘东尼甚至对我说：“这是我第一次严肃地对待心理学，它可能是最后一次，但毕竟是第一次。”④

① 皮亚杰：发生认识论(Genetic Epistemology)，纽约：哥伦比亚大学出版社，1970，第13页。

② 同上，第5页。

③ 同上，第3页。

④ 同上，第26页。

逻辑和心理学

在逻辑学家和心理学家之间也可发现同样的合作问题。在《逻辑和心理学》一书中，皮亚杰考察了人类思维的数学和逻辑的基础或模型。

> 从理论上说，了解逻辑所描述的结构和心理学所研究的实际思维过程之间存在何种对应关系，是重要的。①
>
> 因此，逻辑代数能够帮助心理学家，给予心理学家鉴定某些结构的一种正确的方法，因为它们是从思维运算机制的分析中产生出来的②。
>
> 布尔(Boole)，作为以其姓氏命名的布尔代数的发明者，他始终相信，他所描述的是"思维的法则"。③

逻辑学家埃弗特·贝思(Evert Beth)，在最初审阅皮亚杰对逻辑的运算机制的研究时，曾作出"非常严肃"的批评。可是，十年之后，贝思和皮亚杰两人合作写了一本名为"数学认识论与心理学"的著作④。

数学的和心理学的基本结构

在儿童思维中，基本的代数结构最容易在类的逻辑或逻辑分类中找到(第5章)。对相互联系的物体进行适当分类所必需的心理学的结构，是类包含的数学的或逻辑的关系。一个6岁或7岁

---

① 皮亚杰:《逻辑学和心理学》(Logic and Psychology)，纽约: Basic图书出版公司，1960，第xvii页。

② 同上，第xviii页。

③ 同上，第2页。

④ 贝思(E. Beth)和皮亚杰:《数学认识论和心理学》(Mathematical Epistemology and Psychology)，荷兰Dordrecht: D. Reidel出版公司，1966，第xii页。

的儿童会同意，所有的鸭子都是家禽，而不是所有的家禽都是鸭子，但是，倘若问他，家禽多还是鸭子多，他就不知道了。他还没有获得必要的代数结构。

鸭子＋别的家禽＝全部家禽

家禽＋别的动物＝全部动物

这样，一种分类的层次就构造起来了，它建立在包含关系的逻辑基础之上。

幼儿没有否定的可逆性，如：如果全部家禽死了，还会有任何鸭子剩下吗？或者，所有的鸭子都死了，还会有任何家禽剩下吗？(见第5章)

第二种心理学的结构为序的结构，它直到近7岁时才会产生，它是数学上序的结构的必要前提。在这一年龄之前，当我们要求儿童把10根木棒按长度或高度排列时，儿童就把它们分成一对一对，如把两根短的放在一起，两根长的放在一起，或者三根一组地加以排列。后来，儿童运用尝试-错误的方法——先拿一根试试，然后再拿另一根，看看哪一根合适。这时还没有一个全面协调的方法。

要使次序化活动获得成功，儿童必须具有理解数学或逻辑的传递关系所必需的心理学的结构。即如果 B 比 A 长，C 比 B 长，那么在逻辑上 C 就比 A 长。但问幼儿 A 与 C 相比结果怎样时，他会说必须让他再"看"一次，然后他把 C 放在 A 的旁边"看出" C 比较长(见第6章)。

虽然历史上(和学校教学中)首先研究的几何类型是欧几里得几何，但根据布尔巴基学派的观点，第三种类型的基本数学结构是拓扑性质的。皮亚杰也发现，儿童在能解决欧几里得几何问题之前就能解决拓扑问题了。比如儿童能够分清内和外，并能在区别诸如圆形和方形等欧几里得几何图形之前，就能区分封闭图形与开放图形(进一步讨论见第16章)。

生物学与智慧

皮亚杰在研究智慧时，采用适应这一生物学的模型，这一模型在五十年前比今天更为流行。通过适应的一般过程来研究智慧，适应就被当作行为来研究。

皮亚杰与心理学中的极端的行为主义学派，在关于行为的概念上存在着尖锐的分歧。皮亚杰认为，研究行为就是研究人或其它动物的全部组织。与智慧最有关系的方面不是个体做什么(作为一种外部活动)，而是个体内部控制和支配行动的规则或组织。这是比刺激-反应(S-R)研究方法广义得多的观点，在刺激-反应方法中，研究的只是作为一种反应的动作本身。越是有限的机械的S-R研究方法，越有利于对实验室类型的实验加以仔细控制，但它并不能向我们提供重要的答案。

皮亚杰象达尔文或佛洛伊德一样，能在其它人除了无意义的童稚活动之外再也看不到什么的地方，发现出结构来，从而把对儿童的经验的观察加以系统化①。爱因斯坦把皮亚杰的发展研究方法说成是"一种如此简明的天才思想"②。由于皮亚杰的这些研究方法或实验常被说成是"不科学的"，"未加控制的"，"样组"规模不够大等，因而使得他的理论很久才为人们所接受。

从生物学的观点来看，智慧不是一种特殊的生物器官，而是一种行为的方式，它由进化或适应的一般规律所决定。成人的智慧同动物和幼儿智慧的区别，可以从把一根钉子钉入一块木头这类动作中看出来。幼儿和猿也许都能举起或挥动锤子，但他们没有空间坐标(垂直的和水平的)的内部协调，这种协调将能使他们把自己的动作矫正为所需要的动作。但幼儿后来是能够这样做的。

① 弗思(H. G. Furth)：《皮亚杰和知识》(Piaget and Knowledge)，美国恩格尔伍德：Prentice-Hall 公司，1969，第172页。

② 同上，第6页。

2 皮亚杰和教育

我们仍然停留在对现代教育技术所达到的成果的无知之中(对此我们不能无动于衷)。①

让·皮亚杰1896年生于瑞士。他早先是一名生物学家,后来成为一名心理学家。十岁那年,他在«纽沙特尔(Neuchâtel)博物杂志»上发表了第一篇论文,内容是关于一种稀有的白化麻雀的研究。

后来,他尽管是一名主修生物学的大学生,却对哲学和心理学深感兴趣。由于他母亲不良的精神状况,他也曾对心理分析和病理心理学产生过兴趣,但是他宁愿进行正常心理的研究和理智的探索,而不愿去搞什么无意识的玩意儿。1918年,他在苏黎士(Zurich)大学的心理学实验室从事研究。自1919年至1921年,在巴黎比纳(A. Binet)实验室工作。在这期间,他也曾受业于普菲斯特(Pfister)、容格(Jung)和佛洛伊德(Freud)。

从1929年到1939年期间,他提出了群集(groupings)这一心理学概念,它与他的认知发展的理论是联系在一起的。在二次世界大战期间及以后的岁月中,皮亚杰继续其研究工作——以日内瓦大学科学思想史教授、卢梭(J.J. Rousseau)学院②院长助理和国际教育局局长三种身份从事教学和著述。皮亚杰现为日内瓦大

① 皮亚杰:«教育科学与儿童心理学»(Science of Education and the Psychology of the Child),纽约:Orion出版社,1970,第5页。

② 后改名为教育学院。——中译者注

学发生认识论和实验心理学教授①。1972年他离开活跃的教学活动而以全部时间从事写作。

出版的著作

皮亚杰本人所写的著作和别人论述他的著作大概比当今活着的任何人都要多。因为他主要关心的一直是逻辑-数学智慧的发展，所以他的许多书对数学教育工作者来说，是很有教益的。

要综观皮亚杰的思想，《儿童心理学》和《发生认识论》是两本较理想的著作，它们是最近出版的，而且比他的其它一些著作较易理解。记述他教育思想的著作是《教育科学与儿童心理学》一书。

对本书写作最有参考价值的著作如下：

书名	英译本出版时间	出版社
皮亚杰：儿童的数概念	1952年	纽约：W. W. Norton公司
皮亚杰 英海尔德：儿童的空间概念	1967年	纽约：W. W. Norton公司
皮亚杰 英海尔德 御敏斯卡：儿童的几何概念	1960年	纽约：Basic图书出版公司
皮亚杰 英海尔德：儿童逻辑的早期发展	1964年	纽约：W. W. Norton公司
贝思 皮亚杰：数学认识论与心理学	1966年	荷兰Dordrecht：D. Reidel出版公司
皮亚杰 英海尔德：儿童心理学	1969年	纽约：Basic图书出版公司
皮亚杰：儿童的时间概念	1969年	纽约：Basic图书出版公司
皮亚杰：发生认识论	1970年	纽约：哥伦比亚大学出版社
皮亚杰：教育科学与儿童心理学	1970年	纽约：Orion出版社
皮亚杰 英海尔德：记忆与智慧	1973年	纽约：Basic图书出版公司
皮亚杰 英海尔德：儿童机遇观念的起源	1975年	纽约：W. W. Norton公司
皮亚杰：意识的把握	1976年	麻省：哈佛大学出版社

① 此书为1979年版，皮亚杰已于1980年9月16日逝世。——中译者注

专 业 教 育

当要求皮亚杰对1935～1965期间的教育和教学的发展作出评价时，他的看法非常悲观，并为

> 我们已经付出的努力之巨大，以及在我们的教学方法、教学大纲、……以及被视为一种指导学科的整个教育学中缺乏任何基本的革新

而感到震惊①。

首先可以观察到的情况是"我们仍然停留在对现代教育技术所达到的成果的无知之中"②。

教育还没有发展成为一门科学。教育部门的政府官员，没有受到由专业权威们提供原则和实际材料的、公正而客观的训练。其结果就是由政府决定用于教育的一些原则。然后，作为政府雇员的公立学校的教育者们，执行由政府官员决定的原则和政策。这与卫生部门的政府官员正相反，他们是由专业医疗人员为之提供基本的原则和政策。"我们的学校系统则由那些保守主义者所构成，他们更多地考虑让儿童迎合传统的学习模式，而很少考虑如何去诱导发明和批判的心灵。"③

培训小学教师

> 与科学的潮流以及能为他们注入新的活力的研究和实验的气氛隔绝，教师们埋头于获取所需的教育上的名声，他们接受建议做一些片断的研究工作，一旦完成之后，就如释重负，而从来不去再做更多的事情④。

① 皮亚杰：《教育科学与儿童心理学》，第3页。

② 同上，第5页。

③ 同上，第124页。

④ 普拉斯吉(M. A. S. Pulaski)：《理解皮亚杰》(Understanding Piaget)，纽约：Harper & Row出版公司，1971，第196页。

根据皮亚杰的观点，根本的问题在于教师对教学比对儿童更感兴趣。他们的注意和培训集中在方法和课程上，而不是儿童心理学。教师只想到教以及让学生听自己的教。

本书“数学实验室”一章中简略描述的英国的幼儿学校，力图贯彻皮亚杰的思想，它们允许儿童自由地走动，互相谈话，自己去探究各种材料。这些材料有纽扣、念珠、绳子，测量的材料，以及商业材料，如可探索许多数学问题的数学天平。

教师培训学院有一个缺点，就是把自己局限于教育本身，或者说它创造了一个封闭的社会实体①，小学教师所必需的心理学的训练，除非学员有机会亲自从事研究，否则是不能获得的。一个人不参加研究工作就不能学好儿童心理学。把课程限定在其结果已为人所知的练习和实际工作上是无用的②。

这种研究只有大学才有，只有在大学，中小学教师才能学习成为研究人员，从而超过只是传授知识的水平③。

在日内瓦大学，研究规划逐年由教授制定并由助手们实施。助手每天下午与儿童们一起工作。学员们二、三人一组地跟随着助手。他们学习：(1)记录事实，(2)如何向儿童提问，(3)定期作出关于研究进展情况的报告。“概言之，正是通过这些研究，才使教师的职业不只是一种谋生手段了。”④

儿童早期(学前期)教育

皮亚杰报告：当智慧被认为是起源于知觉或感觉的相互作用时，一种“感觉的教育”就会应运而生。福禄培尔(F. W. A.

① 皮亚杰：《教育科学与儿童心理学》，第125页。

② 同上，第126页。

③ 同上。

④ 同上，第130页。

Froebel)用他编制的练习为此提供了一种基本的模型。后来，蒙台梭利(M. Montessori)运用了同样的原理，但是"加上了相当数量的动作，虽然这些动作是由预先装置好的器械引导出来的。"①

皮亚杰、杜威(J. Deway)和蒙台梭利都承认儿童需要探索性的活动，他们赞成实行一种允许儿童对物体进行物理探索的活动型的大纲。然而皮亚杰和杜威批评蒙台梭利仅以事先计划好的方式使用高度结构化的材料。正如杜威所说：

> [蒙台梭利]要求的那些材料，已受到心灵的完善的加工。这种材料将控制学生的操作以防止错误发生，这是真实的。认为儿童在对这种材料进行的操作中将会汲取智慧并有利于它的独创性的形成，是荒谬的。只有使用原始材料，使这些材料受到有目的的操作，他才能获得体现于经过操作的材料之中的智慧。②

皮亚杰对奎逊纳(Cuisenaire)棒也有同样的批评。必须允许儿童自己探索这些棒，同时发展自己有关的数学思想。这与告诉儿童如何把棒适当地放在一起以得到正确答案的结构化了的课程不同。

我们应把重点放在学前阶段的感知运动类型的教育上，至于读、写、算方面的系统学习应该推迟。皮亚杰还说：感知运动的活动为儿童的逻辑运算作准备，因为逻辑在语言水平上形式化之前，它是建立在行动的一般协调基础上的③。

今天，存在着在儿童早期便开始学校教育的这种值得注意的压力(布鲁纳的假设)。争论的焦点是，这一时期是否是智慧成长的关键期。艾尔肯(D. Elkind)问道：学前期的教育对智慧成长

---

① 同上，第98页。

② 杜威(J. Dewey)：《民主与教育：教育哲学导论》(Democracy and Education: An Introduction to the Philosophy of Education)，纽约：Macmillan出版公司，1916，第232页。

③ 皮亚杰：《教育科学与儿童心理学》，第98页。

有持续效果的证据何在？回答是否定的①。关于这种教育的持久性质，不仅没有明显的纵向材料，甚至有相反方面的证据。有些研究者认为有否定的相关，提出了相反的假设：在一定范围内，正式的教育推迟得越久，最终可能达到的成就的水平将越高②。

艾尔肯根据皮亚杰划分的发展阶段争辩道，小学阶段对智慧成长最为关键。这一阶段的大部分时间即从6、7岁到12岁，儿童处于真正逻辑思维的第一个阶段——具体运算阶段。

教学的辅助手段

皮亚杰对许多教学的辅助手段持有淡漠的看法，原因是那些略通一些心理学皮毛的教师常把"活动的"方法与"知觉"或直观方法相混淆。例如，电影和电视，它们可以产生"图象"过程而不是运算的或逻辑的过程。知觉，或我们所"看见"的东西，产生的是一种所见事物的心理摹本或印象，它充其量是个摹本而已，它与那种产生包含着原理的灵活、可逆、稳定的理解是相反的。象电影这样的手段，它所提供的仅是一种表象，它可能比讲演或口头解释要多少好点，因为它包括两种感觉（视和听）而不仅是听觉。但在这两种情况下，学习者都没有身体动作的参与。

同样，斯金纳（B. F. Skinner）的教学机器是成功的，如果这一成功意味着仅在所期答案的言语复述方面的话：

> 这些机器倒为我们做了一大好事，那就是它毫无疑问地揭示出传统教育方法中小学校长职能的机械特点……③（参阅本书第18～19页皮亚杰对斯金纳观点的评价）。

---

① 转引自艾尔肯（Elkind），第129页。（原书未注出处。——中译者注）

② 同上。

③ 皮亚杰：《教育科学与儿童心理学》，第77页。

激发学习者的动机

教师最应关心的问题，是是否激发了或如何激发学习者的动机。试问，对认识活动的“需要”，它的心理学基础是什么？

皮亚杰反对这样一种观念：把外部力量作为激发认识活动的首要因素。因此，他反对作为行为主义及其学习理论核心的“强化”概念①。

认识活动的动因首先来自个体内部，而不是外部。一旦必要的认识结构发挥作用了，就有了一种同化和顺化环境的内在趋势。

皮亚杰的主张是：只有当经验与儿童对其作出反应的能力十分相称时，动机才能从(1)儿童和(2)环境中形成。

皮亚杰不把动机的形成看作是一种抽象的、孤立的心理学的产物。他的生物学研究方式，使他把动机的形成看成是机体的一个必然的机能部分。因为生物体是逐渐发展的，所以皮亚杰认为动机的形成也是一个逐渐增强的问题。某一情景所激发的动机是面向顺化中所要求的那些相互作用的。对一个一岁幼儿来说，阅读不能激起动机，因为文字的描述是如此超出他现有的格式，以致顺化完全不可能实现。但一个新的拨浪鼓似乎能引起动机，因为它与他的某些格式足够地接近，可被顺化于这些格式中。同样，对熟悉的物体缺乏动因，也可这样解释：旧的拨浪鼓被再三玩弄，对它已没有顺化的必要；因此，这格式不再能激发这样玩的动机。

在儿童的一个格式不断发展从而包含更多种可能性的同时，

---

① 瓦兹沃思(B. J. Wadsworth)：《皮亚杰的认知发展理论》(Piaget's Theory of Cognitive Development)，纽约：David Mc Kay公司，1971，第24页。

它也在激发个体去顺化更多的情境。这正是生物发展的本性的一部分。

然而，我们需要探讨皮亚杰动机形成的理论同那些似乎缺乏动机的儿童有怎样的关系。值得注意的是，虽然“缺乏动机”一词似乎常被用来描述个体的一般特征，但它几乎总是根据成人或教师，而不是根据儿童选定的特殊的格局和任务来研究的。

一个儿童可能在某一特殊情境中缺乏动机，如果这情境的特征与儿童已获得完满发展格式的其它情境差异太大，以致他不能把这一情境顺化于这些格式的话。用某种专业的语言来说，就是教室情境也许离“儿童生活的环境”太远了。

课时计划中社会的相互作用和个别化的程序

重点应该放在允许儿童对物体施加动作方面，并把它作为发展必要的智慧结构或智慧加工的一个基础。数学实验室就是在这方面显示出希望的一种手段。

但在这种数学实验室中儿童只应单独活动吗？皮亚杰指出：

> 没有思想的相互交流和与他人的合作，个体将永远不能把他的运算集合成一个连贯的整体……①

在教育过程中，既需要对物体的动作，也需要与他人交往的行为。在课时计划中，应该规定集体活动，以鼓励儿童发问和进行思想交流。既要让儿童进行个别的计划，又要让儿童在数学实验中开展小组活动，这样做也许是可取的。

---

① 同上，第193页。

操作和以能力为基础的培养目标

美国目前那种以"行为"和"操作"为目标的教育趋势，大概更信奉"斯金纳的"而不是"皮亚杰的"对教育的研究。为此，皮亚杰评述道：

与苏联反射论的巴甫洛夫学派多少有些联系，美国心理学家发展了相当多的建立在刺激-反应观点上的学习理论……美国伟大的学习理论学者中最近的一位——斯金纳，作为一位令人注目的鸽子试验的首倡者……深信一些中间变量[心理]具有难以接近的本性，他决定把自己的注意力限制在能够随意加以改变的刺激或输入和能观察到的反应或输出上，然后仅对它们之间的直接联系作出说明，而不管其内部联系如何。这种有机体的"空箱"概念，正如其名称所示的，它故意蔑视所有类型的心理事实，仅仅把自身局限于行为的最物质的方面。①

程序学习的原理实际上是以某些初步的定义作为其出发点。由此，学生必须在向他提供的几种选择的形式中得出正确的结论。如果他的选择是正确的，就继续做下去，如果错了，就得再重复进行练习。

这种教学方法的价值，皮亚杰总结如下：

如果事关某种固定内容的学习，如语言的教学，机器似乎的确能为此提供不可否认的帮助。但在那些要靠思维去反复推敲一系列推理的情况下，例如，在学习数学的情况下，虽然机器不排斥儿童的理解或推理，但它的确在引导他们陷入一条不幸的道路，从而排除了首创的可能性②。

另外还可指出，在伍兹霍尔(Woods Hole)举行的数学家和物理学

① 皮亚杰：《教育科学与儿童心理学》，第76页。

② 同上，第78页。

家的会议上，与会者对斯金纳的观点仅表示出“有限的热情”①。

皮亚杰认为，我们所关心的逻辑数学水平的知识，它们大多是内部的而不是外部的过程。他反对“空箱”概念，因为正是这个箱子或心理的结构，才是在智慧中首要考虑的问题。而且重复或外部强化，作为程序教学法纠正误差的实践，也不能纠正错误，因为重复或外部强化不能构造或修改必要的智慧结构，以成功地思考诸如包含关系或传递性这样的数学思想。在以后几章我们可以看到这方面的事实。

① 同上。

3 皮亚杰的智慧发展理论

言语大概不是一条通往理解的捷径，情况似乎是理解的水平修改着使用的语言而不是相反。①

本章阐述儿童思维发展的基本阶段以及影响发展的因素。这要涉及知识的三种基本类型以及学习、记忆和语言的发展。在儿童思维中发现的作为逻辑-数学知识发展基础的三种基本的数学结构，前面已约略说到，在以后的第5、第6、第15章中还要分别再作进一步的说明。

发展的阶段

皮亚杰认为心理结构的发展有四个基本阶段。每一阶段又有小的阶段，这些小的阶段我们就不在这里叙述了。对此有兴趣的读者，可参阅皮亚杰和英海尔德合写的《儿童心理学》一书。

为避免误解，应该指出，皮亚杰使用的"阶段"一词常有两种含义。下面所说的"阶段"的意思也许用儿童生活中的"时期"表示更好。虽然并未给它们编号，但它们实际上是按照描述的次序出现的。而以后我们标上数字的阶段，如阶段1，阶段2和阶段3等，则是用来表示每一个别概念的理解水平的。阶段1表示毫无理

① 达克沃思(E. Duckworth)："被再发现的皮亚杰"(Piaget Rediscovered)，维克多(E. Victor)和勒纳(M. Lerner)主编：《小学科学教育读本》(Reading in Science Education for Elementary School)，纽约：Macmillan出版公司，1967，第319页。

解，阶段 2 表示部分理解，阶段 3 表示完全理解（见第 103～109 页）。

感知运动阶段

从出生到一岁半的第一阶段是前语言和前符号的时期。这是一个直接动作（direct-action）的时期（吮吸、注视、抓握等动作，起初这些动作是不协调的，然后逐渐协调起来），比方说，抓住并注视着某个物体。这种动作类型的智慧，可能部分是遗传的，如一种反射的动作——吮吸动作，但其中一定有着一种行动的协调，如同我们在观察婴儿寻找奶头时所看到的，开始他是乱找，但后来动作协调了。父母用各种刺激逗引婴儿笑乐时，如抓挠婴儿的脚心或抱着他在空中摇晃时，也可观察到婴儿的反射动作。

在感知运动时期，从自发运动和反射，到获得性习惯，再到智慧，这是一个连续的进程。儿童第一个习惯动作是吮吸拇指，它不是反射的动作，而是儿童显露出来并从中得到满足的一种习惯。

这种习惯可能产生于儿童的动作或是外界条件作用的结果。一个著名的条件性行为的例子就是巴甫洛夫的狗的行为，当狗听到铃声时，它就流出唾液（只要在铃响之后给它喂食）。

大约一岁时，儿童的行为中产生了新的成分。他能确定一个目标，如要去拿一个手勾不着的球，随后产生得到球的步骤，比方说，如果球在他勾得到的毯子上，他可能注意到移动毯子时球也跟着移动，所以他就把毯子（和球一起）拉向自己。

皮亚杰认为这种动作带有智慧的特征，一种智慧的行动，是指这种行动首先具有目的或结果，然后有对于达到这个结果的适当手段的寻求。对手段的寻求也许包括以前从未使用过的格式。这种手段最初是由物理的或外部的试探性摸索所决定的，如碰巧拉动了毯子。后来，则产生于对一切可能性的心理上的（内化的）考虑。

前运算阶段

这一时期从一岁半或二岁开始，一直持续到将近七岁。较聪明

的儿童早一、二年到达这一阶段，而智力较差的儿童则要比七岁晚一、二年。前运算智慧时期以表象或象征为特征。在第一时期即感知运动阶段，儿童还未以字词或象征来表征事物，没有想象、不会玩"让我们假装干什么"或用玩具娃娃做"娃娃家"之类的游戏。而要能进行这些活动，思维就必须达到表象的水平。言语被用来表征事物了。在"让我们假装干什么"中就包含有想象——包含一种表征某些事物的能力，如象母亲那样给婴儿喂奶或穿衣。

在感知运动阶段，儿童被限制在与环境的直接的相互作用中，但在前运算阶段，他开始能运用他生活于其中的客观世界的象征或表象了。前运算时期常指从二岁到七岁的年龄阶段，然而正如我们将在以下几章会看到的，这仅是一个粗略的说明。对某些数学概念来说，儿童直到九、十岁才能脱离前运算的阶段。

在感知运动阶段结束或在前运算阶段开始时，存在着一种半逻辑，即单向映射的逻辑。用心理学的语言来说，就是儿童已能做到拉动绳子打开幕布，或拉动上面放着球的毯子来得到球。这种因果联系仍然只是一种旨在得到结果的动作型的智慧。

儿童这时还不存在可逆的思维过程，这种可逆的思维过程有待于下一阶段即具体运算阶段使用的逻辑类型来实现。

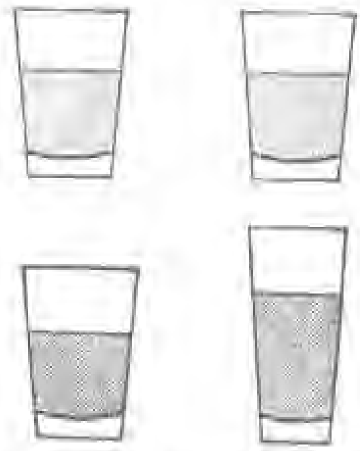
具体运算阶段

第三阶段从大约七岁到十一或十二岁，这是具体运算阶段。对小学教师来说，这一阶段尤其重要，因为儿童在小学里学习的大部分时间是在这一发展阶段。

这一阶段标志逻辑-数学思维的开始。儿童这时的思维被认为是属于"运算"水平的。之所以称这个阶段为具体运算阶段，是因为此时必要的逻辑思维是部分地建立在对客体的具体操作的基础上的。儿童不再以知觉或感觉的提示(线索)去解答那些需要逻辑思维的问题。

皮亚杰是从守恒性(conservation)或不变性(invariance)这

一观点来研究具体运算阶段的，因为守恒性是这一阶段的基本特征。例如，给儿童看两个装着同样份量水的玻璃杯。然后把一个杯中的水倒入另一个较高较细的杯中。只要儿童懂得水的份量仍是一样的而不管知觉到的情况如何（有一个看上去好象多些），他就是在运用逻辑。对于这一概念，他就达到了具体运算的思维水平。



儿童这时的逻辑或是同一性的或恒定性的（总量没有改变，还是同样这些水），或是可逆性的（可以把水倒回去，它还是达到杯子原来的地方，所以水的总量并未改变）。

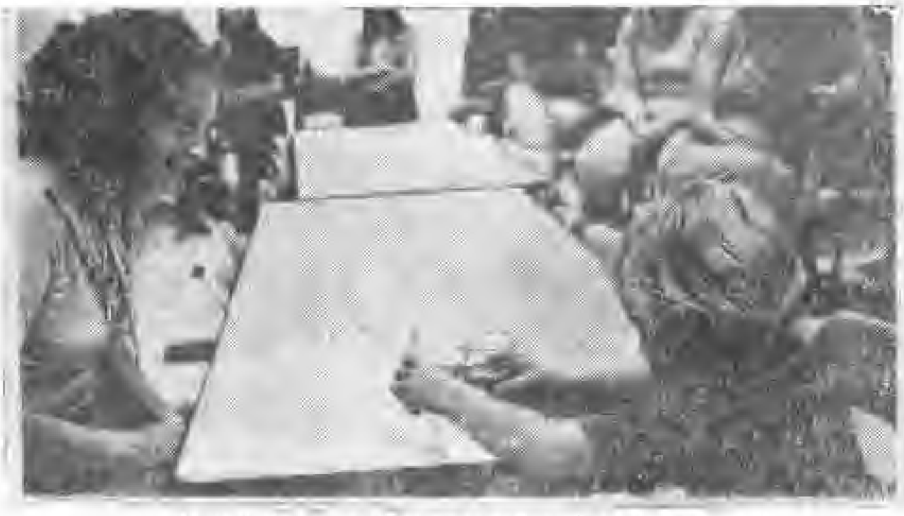
水的总量通过这种倒回去的操作后被认为是保持不变的情况，可称为具有守恒或不变的特征。儿童这时认识到这一操作过程是可以逆转的——就是说，如果液体被倒回原来的容器，其总量仍是一样的。可逆运算（+A 通过 −A 作逆转）的心理学的准则也就是守恒的准则。

这是一种具体运算阶段，因为儿童是从对水、粘土这样的具体物体的动作中获得以上思想的。在具体运算水平开始时，儿童的思想仍建立在对客观世界物体的观察和经验之上，但他已开始进行概括，或开始从以摆弄客观物体为认知方式的情况中解放出来。只要这些概括是完满的和正确的，儿童就是处在具体运算的水平。

这一水平对于数学，与对心理学一样重要，因为这些运算中的许多运算实质上就是数学的运算。例如，那些具体水平的运算，根据皮亚杰的理论，就包括"分类、次序化的运算，数概念的构造，空间和时间运算，以及所有初等数学、初等几何甚至初等物理中的类和关系的初等逻辑的基本运算"①。

① 皮亚杰："发展与学习"（Development and Learning），《科学教育研究杂志》（Journal of Research in Science Teaching），2(1964)，第3页。

六岁的桑达处于定量守恒的前运算时期。她认为把液体倒入不同形状的容器中后，它的数量改变了，因为它"看上去"多了些。



有些儿童(如六岁的罗伯特)在开始进行守恒作业时喜欢自己去确定液体的相等。

这一水平的运算包含有皮亚杰称之为"群集"("grouping")的数学结构——把客体聚合拢来归为一类，把一个聚合再分为子类，以某种方式把元素加以次序化，把事件按时间排次序，如此等等。

类包含的观念对前运算时期的儿童来说，是不可能具有的。他不能考虑家禽类与鸭类哪一个更大些(见第5章)。

形式运算阶段

最后一个阶段即第四个阶段是形式运算阶段。这一阶段在十

七岁的密司迪处于系统分类的前运算时期，她不能对鸭子、家禽和动物作出必要的分类。

苏珊和约翰都是九岁，他们处于具体运算水平，他们能对某个系统作出必要的分类。

一、十二岁之前一般不会到来。儿童在这一阶段是用符号或观念而不需用客观世界中的物体作为推理或假设的思维基础。他能用论证的形式进行运算，而不管它的经验内容。他能使用逻辑学者或科学家的思维步骤——一种假设-演绎的、不再使其思维拘泥于现存事实的步骤。他获得了新的心理结构，构成了新的运算。

这些新的结构包括符号逻辑的命题组合——蕴涵（如果-则），析取（或-或，两者都），排斥（或-或），互反蕴涵，等等①。

① 详尽的讨论，请参阅皮亚杰和英海尔德合著的《儿童心理学》(The Psychology of the Child)，纽约：Basic图书出版公司，1969，第5章。

在形式运算水平，儿童能够在含有单个，两个，三个等等元素的类之间建立任何的联系。这种分类和次序关系的概括化最终发展成为一个组合系统——组合和排列。这种组合系统对思维力的扩展具有首要的重要性①。

儿童对组合的理解，可以通过询问儿童能把不同颜色的筹码组成多少个不同的含有两个或三个筹码的较小的集合来进行考查。对排列的理解可以这样进行研究：让儿童看一列不同颜色的物体，然后问他们那一列物体可用多少种方式进行排列。具体运算水平的儿童在做一件不具体的工作时，不能进行必要的概括。十二岁左右处于形式运算水平的儿童，能够想出一种解决问题的完满方法（首先是组合，稍后是排列），当然，他们并没有从中发现什么公式②（见第 13 章）。

这时儿童也能考虑很有用的关于比例的数学观念，这一观念使他能按照任意的缩尺画地图——解决时间和距离的问题，概率的问题和涉及相似的几何问题。

INRC 群的逻辑包含于对比例的理解中。*INRC* 表示同一（*I*），否定（反演）（*N*），互反（*R*）和对射（*C*）的转换。

让我们把这一观念应用于权衡轻重的天平问题中。先把一些重物（法码）放在沿秤臂的不同距离处，然后要求儿童设法使秤平衡。七岁左右的儿童认识到减少（反演）或增加重物是取得平衡的手段。然而，在具体运算水平的思维过程中，大量运用的是试误方法。但在大约十二岁时，在形式运算阶段，儿童就能够运用比例的逻辑了——就是离开支点的水平距离与重量是一种反比例关系（见下页的照片）。

INRC 群描述的是命题格式，如果某一重物破坏了平衡，那么这个重物可以被拿掉（否定），或者把一个重量相等的物体加在

---

① 同上，第 133 页。

② 同上。

另一端与支点距离相等的地方(互反)，或者把一个较重的物体放在较靠近支点的地方或把较轻的物体放在较远处(对射)，或者把全部重物都拿掉，恢复到平衡的状态(同一件)。

这些观念在符号逻辑里可以用 p 和 q 的语言来表述，同样也能用一种更加精致的被称为格的结构来表述(皮亚杰:《逻辑学和心理学》)。

四名处于阶段2水平的九～十岁的儿童，只能通过试误的方法获得成功。

皮亚杰和英海尔德，用四个装着不同的无色液体的长颈瓶，来测验儿童运用这种格结构的能力。另有一瓶碘化钾，它能与某种液体化合而变成黄色。只有在十二、十三岁时(形式运算水平)，儿童才能拟定出检验的全部16种可能性①。

于是皮亚杰发现，这一水平的思维最合适的模式具有数学的特性——特别是克莱因(klein)的"四元群"，格和布尔巴基的结构

① 英海尔德和皮亚杰:《从儿童到青年逻辑思维的发展》(The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence)，纽约：Basic图书出版公司，1958，第117页。

(代数的、序的和拓扑的结构)。在具体运算水平所使用的部分或不完善的结构，皮亚杰称之为“准群”或“群集”。①

几何问题——儿童企图把球滚撞到板壁上，使它反弹回来碰到积木。只有在形式运算水平，儿童才意识到反射角与入射角相等。在这之前，他们的注意集中于球碰撞板壁的位置。

由于儿童在离开小学的时候，只是处于形式运算的门槛，所以本书首先关心的是思维的具体运算水平。当那些教自然科学的初中教师对小学教师说："即使你不教学生别的什么东西，也请教好他们怎样运用比例"，要求可能是太高了。

影响智慧发展的因素

虽然企图加速上述各阶段的发展可能是困难的或不需要的，但教师在为学生提供适当的准备活动和提出合适的启发问题方面乃是重要的。不然的话，儿童就可能延缓到达各个发展阶段。在

① 英海尔德："皮亚杰对认知发展的研究方法的某些特点"(Some Aspects of Piaget's Genetic Approach to Cognition)，《儿童的认知发展》(Cognitive Development in Children)，芝加哥：芝加哥大学出版社，1970，第20页。

下面提到的影响智慧发展的四个因素中的两个——经验和社会传递方面，教师可以发挥强烈的影响。

在儿童经历上述发展阶段的过程中，影响智慧发展的四个因素是机体生长（成熟），经验，社会的相互作用（或传递）和平衡化。

机体生长因素

这些因素中的第一个是机体生长，特别是神经系统和内分泌系统的成熟。成熟实质上是为某种行为类型的出现提供新的可能性，它是一种必要的而不是充分的条件。比方说，虽然视觉在四个半月时就协调了，但对视知觉来说，它的机体条件直到青春期还没有完全成熟①。

经验因素

至于经验因素，存在着两种类型的经验，从心理学的观点来说，它们是不相同的；从教学的观点来看，它们都是很重要的。第一，存在着一种物理经验，其次是一种逻辑数学的经验。称一称两个物体的重量看看它们的重量是否相同，这是一种物理的经验，重量是一个物体或一些物体的性质，例如小石子的性质。

逻辑数学经验与此相反，它不是来自物体本身而是来自主体对客体施加的动作，比方说给一名不到七岁的儿童一堆小石子，让他把它们排成一行。先叫他按一个方向去数石子，然后再换一个方向数。于是，他把小石子排成一个圆圈，先从一个方向数，然后又换一个方向数。然后他试图把小石子排成另一种形式。他发现，石子数目不依赖于次序，它们总是一样的。他发现了一种他施加于小石子上面的动作的性质而不是小石子的性质。这是完全不同的另一种形式的经验。它标志着数学抽象的开始。其后发生的演绎就是“内化”了的原来作用于石子上的动作，到那时候石子就不再是必要的了。

---

① 皮亚杰和英海尔德：《儿童心理学》，第154页。

同样，可以让儿童去称三个物体：A、B 和 C。这是一种物理的经验，但是如果 B 比 A 重，C 比 B 重，那么儿童能够预料 C 和 A 中哪个更重一些，还是必须把 C 和 A 再称一次呢？

逻辑或数学的传递性结构作为认识"C 必定重于 A"的必要条件，就包含着一种逻辑或数学的经验。虽然我们可以通过让儿童做那种称物体之类的事情，为儿童提供物理的环境和物理的知识，但数学的传递性结构不是"教会的"。这一观点将在后面关于皮亚杰对斯墨茨隆德(Smedslund)所做实验的答复中再作讨论。

社会传递因素

第三个因素即社会传递或教育传递，它包括使用语言进行知识的传授。这一因素，只有当儿童已具有一种"结构"能使他理解所使用的语言时，才是重要的。正是在这点上，儿童往往不知所措，可是教师却没有意识到儿童还没有形成必要的结构。例如，对幼儿来说，他理解"……的兄弟"或"……的姐妹"的关系在一定程度上是与成人不同的。他把别的儿童看作他的兄弟和姐妹，但不把自己看作是同一家庭中其它儿童"的兄弟"。"兄弟的"或"姐妹的"关系的可逆性还未被理解。儿童只能沿着一个方向思考。

平衡化因素

根据皮亚杰的理论，第四个因素是平衡化或自动调节，它是一个基本的因素。平衡化的一种形式是前述三种因素的协调。但还有另一种形式。向经历了必要的成熟阶段的儿童呈示两个同样体积的泥球。教师用言语指导，要求儿童把其中一个球捏扁，然后问他，这个球是否比另一个泥多一些。儿童不能肯定回答，而只去作补偿动作，即通过把扁体恢复成原先的形状来补偿把球捏扁的动作，然后他才知道它们是同样的东西。正是补偿动作或可逆性才使他最后达到认识形状的改变并不改变数量这样一种平衡化阶段。这种平衡化的过程是一个主动的过程，它包含着一个方向的变化由另一个相反方向的变化所补偿的作用。平衡化或自动调节

一词，是在控制论的意义上被使用着——指那些带有反馈和前馈(feed forward)的过程，它是一种通过一些系统的补偿递进地调节着自身的过程，某种意义上就象电子计算机一样。

不到七岁的儿童常不能避免这样一些明显的矛盾，例如把一根木棒放在另一根之上，它看上去就长一些，而把它放在旁边则两根木棒就被看成一样长。较大的儿童能够顺化这些信息——木棒所占的位置，不决定它的长度。这时，一种新的智慧"平衡"已建立起来了。

为了使这种平衡得以产生，儿童必须亲自对物体施加动作或"运算"。要使概念成为儿童本身的智慧结构的一部分，光向儿童解释道理是不够的。

皮亚杰同意杜威的说法：儿童必须亲身经验一些事物。好的教育将向儿童提供一个环境，儿童在其中能够自己试验某些事情，并找到自己的答案。皮亚杰甚至这样说：

> 如果他们读它，那就跟所有不是产生于主体自己活动结果的学习一样，它会被畸变。……[真正的]教，意味着创造可以从中发现结构的情境；它不意味着向儿童传授只可能被同化于言语水平的结构……一个教师最应做的事不是纠正儿童的格式，而是向儿童提供他可以自我改正它们的情境……言语大概不是一条通往理解的捷径；情况似乎是理解的水平修改着使用的语言而不是相反①。

作为一种生物过程的平衡化

把"本能"作为知(knowing)或知识的一种方式的观念在心理学上一直未被接受。在进化论的、生物学的趋向中，本能的或先天的知识是可以接受的——一种知识是某个物种经历千万年发展的结果。在这一格局中，个体的学习可以被看作是处于生命进化过程的核心地位的生物学习的一种特殊情况。

① 转引自达克沃思："被再发现的皮亚杰"，《小学科学教育读本》，第317～319页。

皮亚杰同意达尔文的看法，进化的知识来自环境的压力和偶然性的基因突变。发展的这一方面是非常重要的，但它几乎未受到过什么注意。

在这种进化论的和个体发展的框架中，皮亚杰认为：存在着一种调节的和组织的因素，一种前面称之为平衡化的自动调节因素。在较低级的动物中，这种内部协调运动的因素是非常僵硬的，虽然也可能是十分复杂的（如蜜蜂定位蜜源）。哺乳动物的行为模式不是由遗传给定或决定的。行为的模式不是特殊的，也不是必然由感觉线索（提示）所引起的。哺乳动物的行为在它的适应过程中不是僵化不变的。关于非特殊化的活动的最好例子之一是人类的手。通过施加于客体的动作和操作活动，儿童就开始发展关于他的环境的知识。

进化到人时，一些本能行为的模式中断了，它们被一种遗传程序所取代，这种遗传程序有利于两种新的更灵活和更富构造性的自动调节或适应：同化和顺化。同化包含对来自外界的资料进行处理、过滤或修改，用这样的方式使它们体现到个体的智慧结构中去。当新资料与旧资料矛盾时，内部格式就进行修改从而顺应或顺化于这些新资料，这就叫做顺化。这些过程包括修正部分的理解，扩大概念，建立一种观念与另一种观念的联系。

皮亚杰坚持认为，这些同化和顺化的组织机制首先是内部的活动。但它们受到下述心理学派的忽视，这一学派把智慧置于联想机制之上，即置于一种由教师或心理学家控制的外部教学过程的基础之上。联想意指通过“链条”，亦即通过一系列的外界刺激或者输入来获得某些输出，以实现对心理的控制或使之发展。于是心理就仅仅是在刺激-反应水平上工作的一种反应机制。

皮亚杰的同事英海尔德写道：

> 我们同意信息加工技术在认知发展的研究中具有重大意义，然而似有必要强调，信息加工技术有着好多个不同的方面，而布鲁纳

及其同事们仅仅研究其中的几个方面。

一方面，信息加工技术似由选择、贮存、有关线索的重新恢复所组成。另一方面，这些技术蕴涵着信息的转换及其协调。后者是我们所关心的。

对我们来说，信息的转换蕴涵着同化和顺化的过程，如果没有这两种过程间的协调，信息就会受到歪曲。我们的实验似乎表明，信息的选择、贮存和恢复能在程序中学会，而协调则不能①。

人类过去的全部历史预示了人类今天的逻辑思维能力。但是，在个体身上，逻辑思维能力是发展的，包含着发展的一些阶段，每个儿童在思维达到运算或逻辑水平之前，必须先通过这些阶段。

心理的运算（或运转）和数学的运算

根据皮亚杰的理论，知道一个外物或一个事件，并不仅仅是看见它或听到它，并对它产生一个心理摹本或影象。知识不是现实的摹本。知道一个外物就是对它施加动作，变更它或转化它，并在这一过程中，理解了这个外物被构造出来的方式。这样的动作就被称为运转（运算）。有一种运转或运算是知识的本质。它是一种内化了的（心理的）变更外物的动作。这种动作就是心理的运转（现在中文译名统称为运算。——中译者注）。

在数学上，运算一词也有特殊的意义。算术的基本过程（如加法）也是运算。在3+2=5这一式子中，“+”这个符号表示对3和2所作的一个运算，这个运算产生了5这个数。

在数学中，加和减可能被当作两个不同的运算，而在心理学意义上，加和减则是一个可逆的运算，如果这个运算不能被逆转，那么加对儿童来说就没有意义。如果3+2=5，那么5跟哪两个

① 英海尔德：“评论”(Comment)，《美国心理学家》(American Psychology)，21:160，1966。

数相等呢?

在具体水平上,可以通过合并物体的集合和注意所产生的数来向儿童讲授加法。这种集合的"合并"是另一种数学的运算,我们称之为集合的并。

运算的定义

皮亚杰凭借以下四个基本特征来定义运算:

1. 运算是一种能够内化的动作,就是说,它不仅可以在物质上,而且也可以在思想上进行。

2. 运算是一种可逆的动作——既可以朝一个方向进行,也可以朝另一方向进行。比方说,时间是不可逆的,但加法是可逆的。1和1相加得2,从2中减去1又得1。有两种类型的可逆性。一种叫反演或否定:$+A-A=0$ 或 $+1-1=0$。另一种是互反可逆性,它是次序的逆反而不是否定。如果 $A=B$,则 $B=A$ (对称)。

3. 一个运算总假定某些守恒性或不变性的存在,即使它是一种转换或动作。比如在加法中,我们可以改变组合加数的方式,如 $4+1$ 或 $3+2$,但其总数保持不变。

4. 一个运算不能单独存在,它只是一个大的结构或运算系统的一部分,例如整数运算,它包括许多数学结构,如加法群以及结合性、交换性、传递性和封闭性等法则。

同样,在逻辑学中,一个逻辑的类也不能孤立存在,而只是整个分类结构的一部分。运用包含关系来分类,例如,让我们来考虑迈阿密(Miami)、佛罗里达(Florida)吧。迈阿密存在于或被"包括于"佛罗里达州内,佛罗里达州又被"包括于"美国,美国又被"包括于"北美洲内,北美洲又被"包括于"北半球内,北半球又被"包括于"地球内,而地球又被"包括于"太阳系内,如此等等。这样,分类的等级就被建立起来了。正是这些分类的运算结构成为自然的心

理实体，是人类知识发展的基础。

生物学、数学和三种知识类型

知识的意义，特别是跟生物学有关的"逻辑-数学的"知识，是皮亚杰在《生物学和知识》①一书中所讲的主要内容。皮亚杰对逻辑-数学知识的高度注意，使得数学教育工作者对这本书具有特别的兴趣。

依据皮亚杰的说法，大多数生物学家采取这种立场：知识基本上是由从环境中提取的信息(获得的经验)和感觉刺激引起的形象或运动的反应所组成的。② 这就是众所周知的刺激-反应机制或S-R 联系，大脑只不过是一种反应、记录和登记来自机体外部资料的器官而已。

与这种普遍持有的过于简单化的观点相反，皮亚杰则认为，智慧和知识只有按照人类机体的发展水平来考查才有意义。

认识机能的基本类型包括：

1．其程序为先天遗传的本能的或反射的动作——吮吸、眨眼、手脚乱动、等等。

2．知觉和感觉活动——看颜色、摸物体表面，等等。

3．获得的行为，包括条件性反射(巴甫洛夫氏狗)、形成习惯、以及各种类型的记忆。

4．逻辑-数学结构。

这些认识机能在人身上运行的结果就形成了三种形态的知识。第一种是本能性的，它在人身上是很有限的，而在一些动物身上却是非常复杂的(虽然是僵化的)，比如鸟的迁徙。第二种更广泛的

① 皮亚杰：《生物学与知识》(Biology and Knowledge)，芝加哥：芝加哥大学出版社，1971。

② 同上，第2页。

知识形态为物理的经验——空间存在的物理客体的经验，如关于木块浮在水里，水结成冰之类的事实。知识的第三种形态是逻辑-数学经验，它是第二种知识的扩展，这种知识已成就为一种独立的经验，甚至在那些与客体有密切关系的地方，这些知识也宁可说是从对客体所施加的动作中而不是从客体本身中涌现出来的。①

作为逻辑-数学知识的一个例子，皮亚杰经常引述一位数学家朋友小时候对数学第一次发生兴趣的情况。他把一堆小石子排成一行，发现无论从哪端开始去数石子，石子总数都是一样的。次序不在石子之中；正是他自己把石子排成一条线。总数不在石子之中；也正是他自己把它们合并在一起。这个实验也可用黄豆或纽扣来做。

皮亚杰认为前一种动作的特征是个别的动作——扔、推、碰、等等。这种加在物体上的动作的结果，就可能产生一种简单类型的抽象。

但第二种类型的抽象是反省的抽象，它不是建立在个别动作的基础之上，而是建立在协调的动作之上。协调的动作可以具有几种类型：

1. 它们可能被并合在一起(加法性的协调)。
2. 它们可能连续产生(次序的或序列的协调)。
3. 两个动作之间的对应。
4. 动作之间的交叉。

所有这些协调的动作，在逻辑结构方面均有与之相平行的内容，当它们后来在思维中发展时，就构成了逻辑结构的基础。②

这些逻辑-数学结构包含的大多是内部的活动，这跟主要是外部活动的知觉的性质和作为智慧的一种类型的条件性反射是不一样的。

---

① 皮亚杰：《发生认识论》，第16～17页。
② 同上，第18页。

当然，数学教师特别感兴趣的是逻辑-数学结构。更为重要的是，如果这些过程大部分是内部的，那么教师扮演的又是什么角色呢？经常使用的条件性过程当然是不适合的。

许多内容可以在知觉或感觉运动的水平上通过条件反射方式教会儿童，如学习颜色名称，机械地计数或认识钟面上的数字等等，但要理解数学，那怕是初等的数学，也必须有象可逆性这样的逻辑思维结构才行。

学　　习

在前面关于知识的讨论中，皮亚杰把知识定义为一种包含生理的、情绪的和智慧的系统全部发展的自发过程。与此相反，教师或心理学家却把学习视作一个被激起的而不是自发的有限过程——局限在某一单个问题或结构上。有一种学习的基本理论（桑代克）就是建立在一种刺激-反应联系或图式之上的。皮亚杰反对这种理论，认为它忽略了学习者智慧"结构"这一生动的媒介：

> 我认为刺激-反应图式，我不愿说它是骗人的，在任何情况下用它去解释认知的学习都是无能为力的。为什么这么说呢？因为当你运用刺激-反应图式时，你通常想到的是，先有一个刺激，然后由此引起一个反应。就我看来，我深信反应倒是早先存在的……而一个刺激，只有当它有意义时，才成其为刺激。刺激变得有意义的条件是，存在一个允许它被同化的结构，一个能够融合这个刺激并同时发放一个反应的结构。我想建议：刺激-反应图式可写成一种循环的形式——它不仅仅是单向的……①

在刺激-反应图式中，基本的关系是联想。与此相反，皮亚杰认为基本的关系是同化和顺化，它们被定义为把任何种类的现实融合于一个心理的结构，并且他认为这具有首要的教学意义，他的智

① 转引自达克沃思："被再发现的皮亚杰"，《小学科学教育读本》，第329～330页。

慧概念明显地不同于许多智力测验设计者的(智力)概念。皮亚杰的理论蕴涵着一种质的次序的"智力"量表，它与那种多少固定的智商观点，在一些重大方面是相对立的①。

至于如何获得有组织的知识，皮亚杰发觉用成熟的和学习的理论去研究都是不恰当的。成熟过程仅凭本身不足以解释学习。刺激-反应的学习理论也不能充分说明。这两种理论的结合还是不能充分解释学习。皮亚杰相信，第三种发展过程即他所说的平衡化必定会应运而生。

例如，儿童通过社会的学习或对环境的经验，获得了一些未经组织的观念，但是在某个方面，这些观念或"格式"相互矛盾着，于是一些力量必然会来协调这些矛盾着的观念。这就是平衡化的过程，它在儿童发展的某个阶段开始出现。它是一种逻辑-数学的过程。七岁左右的儿童常能放弃表面的印象而代之以逻辑：如果两根并排放着的木棒开始是一样长，那么即使其中一根移动位置后可能看上去长些，但由于这个过程能够逆转而使那根木棒回到原来的位置，因此逻辑上，两根木棒必定保持同样的长度。

斯坦特勒(Stendler)用以下一段话来概括皮亚杰的智慧或认知发展的理论：

> 对皮亚杰来说，智慧不是那种在出生时就在质和量上固定了的东西，宁可说是一种以平衡化为其特征的适应形式。人的生物遗传部分不仅在其它生理过程中，而且也在心理过程中尽力获得平衡。它包含着一对过程：同化和顺化。儿童同化来自环境的信息，这也可能打乱已存在的平衡，于是就把现存的结构顺化于新的结构，使平衡得以恢复。②

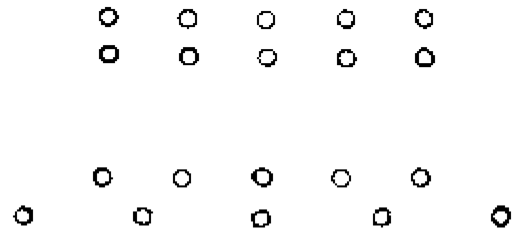
学习的加速

那么，在多大程度上，这些智慧的结构能被影响，或者说它们

① 亨特：《智慧与经验》，第39页。

② 斯坦特勒(C. B. Stendler)："皮亚杰的学习发展理论及其对科学教育的含义"(Piaget's Developmental Theory of Learning and Its Implication for Instruction in Science)，《小学科学教育读本》，第330页。

的发展能被学习所加速呢？比方说，对各种事物的概念的守恒能被加速吗？



一名六岁儿童观察两组物体，说它们的数目是一样的。他数了数，发觉每一组都是“五个”。然后把其中一组散开来摆，儿童就说散开的一组多一些。这时数仍然是无意义的。即使让儿童再数一遍，他发觉每一组还是五个，这个儿童也往往再次回答某个组多一些。

皮亚杰答道：

> [加速学习]这一问题必定使日内瓦的学员和教员们感到可笑，因为他们把它视作典型的美国人的问题。跟一个美国人说，儿童在七岁时发展了某种思维方式；他会立刻动手，尝试在六岁甚至五岁的儿童身上去发展这些同样的思维方式。美国之外的其它国家的研究者已尝试加速逻辑思维的发展。今天我们已获得大量有关的研究材料，有些行得通，有些行不通，其中大部分是行不通的。行不通的原因，是因为实验者们未曾注意到平衡化的理论。研究者们宁可力图去教一种答案，即一种个别的反应，而不去发展运算。他们试图教儿童，红香肠(用泥土捏成的)当然可以称得同泥球一样重，这只要把两者放到天平的两个盘上就能做到。但儿童除非运用一个或多个我们所说的运算把材料在头脑中往返加工，否则是不会完全相信这一结论的。用强化的方式学习一件事实，不会在其过程中或由它导致智慧的适应。①

米尔德里德·阿尔米(Mildred Almy)证实了皮亚杰的结论：“总的看来，这样一些企图一直是非常不成功的。”②经验是发展的一个因素，但它不是主要的因素。

---

① 同上，第343页。

② 阿尔米(M. Almy)：《幼儿的思维》(Young Children's Thinking)，纽约：哥伦比亚大学教育学院出版社，1967，第42页。

只就一个集合中物体数目的守恒而论，最明白的教学方法是让儿童在物体排列前后去数数。如果他经常这样做了，那么用适当的强化就能帮助他认识到，正确的回答是——数目是一样的，与排列无关。可以期望他最终会使这一认识转变为守恒。(在另一场合，皮亚杰则坚持这样的数数是无意义的……)①

在能够向儿童"教授"数之前，儿童必须首先发展到数的守恒阶段，这通常是在六岁半到七岁之间。

幼儿观察两个同样重量的泥球的情形也是如此。一个球被捏成了香肠形，然后问儿童：它们是否仍一样重或重量是否保持不变？直到八岁或九岁，一般儿童才能合理地推出这一思想。体积的守恒，直到十一至十二岁才达到。

皮亚杰介绍了一位美国心理学家斯墨茨隆德(Smedslund)的工作，他让儿童进行关于重量守恒和重量传递性的实验，即如果 A 与 B 一样重，B 与 C 一样重，那么 A 就与 C 一样重。在一系列重量实验中，他成功地使五至六岁的儿童认识到形状改变时重量不变。但儿童难以接受传递的观点，不能概括出上面的结论。

在评论这一研究时，皮亚杰说：

他成功地得到了一次我们称之为物理经验的学习(因为这仅是一个记录物体事实的问题，所以并不令人惊奇)，但他未能成功地获得构造逻辑结构的学习。这并不令我奇怪，因为逻辑结构并不是物理经验的结果。它不能通过外界的强化而获得。逻辑结构只有通过自动调节的内部的平衡化才能达到。看看天平，这种外部的强化并不足以建立起传递性的结构。②

艾尔肯③所做的一个研究，证实了皮亚杰关于儿童在哪些年

① 同上，第42～43页。

② 斯坦特勒："皮亚杰的学习发展理论及其对科学教育的含义"，《小学科学教育读本》，第330页。

③ 艾尔肯(D. Elkind)："儿童对质量、重量和体积的理解"(Children's Discovery of Mass, Weight and Volume)，西格尔(I. E. Sigel)和霍泊(E. H. Hooper)编：《儿童的逻辑思维》(Logical Thinking in Children)，纽约：Holt, Rinehart and Winston, 1968，第17页。

龄能够实现数量、重量和体积守恒。

皮亚杰在《幼儿的思维》一书的前言中，再次表明他的立场：

在逻辑-数学结构领域，儿童只对那种他亲自创造的事物才有真正的理解。每当我们试图过急地教给他们什么东西的时候，我们就会阻止儿童去亲自再创造它们。因此不存在什么试图过快地加速这种发展的正当理由；在亲身探索中看来是浪费的时间，对方法的构成是真正有益的。①

杰罗姆·布鲁纳认为皮亚杰"无疑在认知发展领域内是最有影响的人物"，②但皮亚杰并不赞同他的关于加速发展的观点。1967年3月皮亚杰在纽约大学的一次讲演中，作了以下的评论：

几年以前，布鲁纳的一个主张迄今仍使我感到惊讶不已；即云，你可以通过一种智慧上诚实的方式，教会任何年龄的儿童以任何内容，只要你方法得当。噢，我不知道他现在是否还相信这一点。……加速大概是可能的，但不可能指望有极大的加速。似乎存在一个最佳期，什么时候是最佳期必定依赖于每一个儿童本身和学科的性质。③

皮亚杰得出结论：

学习从属于发展而不是相反。……无疑你可能提出一些研究者已成功地教会儿童运算结构的例子而对此持有异议。但是，当我面对这些事实时，我经常产生三个疑问……第一，这个学习能保持下来吗？二周或一个月后会留下什么呢？……第二，究竟可能有多大程度的概括？使学习变得有趣的东西，是"迁移"到一种新情境的可能性……[第三]在学习之前，受试的运算水平如何，这种学习到底成功地获得了那种更复杂的结构？④

在逻辑概念能够教给儿童，或说得更正确一点，儿童能够学习

① 达克沃思："被再发现的皮亚杰"，《小学科学教育读本》，第 vi 页。

② 布鲁纳(J. Bruner)：《通向教学论之路》(Toward a Theory of Instruction)，哈佛大学出版社，1967，第6～7页。

③ 詹宁士(F. Jennings)："皮亚杰谈学习"(Jean Piaget, Note on Learning)，《星期六评论》(Saturday Review)，1967年5月20日，第82页。

④ 皮亚杰："发展与学习"，《小学科学教育读本》，第332～333页。

逻辑概念之前，存在一个儿童必须达到的准备阶段。这对教师来说，也许是令人沮丧的。然而在组织一个让儿童能在其中尽其所能、发展自己的合适的环境方面，教师是可能发挥指导作用的。

不过关于逻辑概念的教学，皮亚杰又说过，如果你想要教的结构，能够得到儿童已经具有的较简单的更初步的逻辑数学结构的支持，那么有些也是可以教的。皮亚杰以此作为自己对这一问题的补充说明。比如，能教给一个儿童数的守恒吗？有个实验是这样做的：给儿童七个蓝筹码，然后要他摆出一样多的红筹码。在前运算阶段，儿童把一个红筹码放在每一个蓝筹码的对面，但如果此后把红筹码散开来，他就不再认为蓝筹码与红筹码有一样多的数目了。这个实验中数的守恒一般要到六或七岁才实现。但一种较简单的实验可以加速这个过程——比方说，给儿童一串珠子，要他把珠子分别放到每个瓶子中去，这样一直做下去。如果在他继续做的过程中，当他的面把其中一个瓶子藏起来，那么他还保持这个数的观念吗？每个瓶子中仍有同样的数目吗？四岁儿童不会去作什么预言或概括，但这种概括在五岁半儿童身上出现了——这是比出现关于红、蓝筹码的概括较早的年龄。但皮亚杰对任何这种由较简单的实验而引起的加速却加以限制，他说：概括“也许”产生了，其影响“也许不是直接的”。

语言和智慧

人作为最高度发展的哺乳动物，有着最高度发展的语言或交际能力。在人类知识的扩展上，交际一直是极其重要的。然而在五至十二岁儿童的水平上，语言则是另一回事。

有一种流行的观点，即语言有一种组织思想的性质，或者说语言产生思维；因此通过语言就可教会儿童概念。但正如弗思

(Furth)所指出的[①]：皮亚杰如果不是唯一的，那也是极少数不认为语言对运算思维是（真正）内在必需的几位学者中的一位。“运算思维”指的是逻辑思维或推理能力，而不是指回忆一件事实，如“里士满(Richmond)是弗吉尼亚(Virginia)的首府”这种能力。但“首府”的含义包含着运算思维。

在发展的最高运算水平（命题或假设-演绎思维阶段），思维和语言之间存在着密切的联系，但这一阶段不到十二岁前后通常不会产生。如果皮亚杰是正确的，这就意味着大多数五至十二岁儿童不能获得运算思维或通过语词进行推理的能力，他们必须通过自己施加于客观世界的物体上的动作才能进行上述的思维活动，就象在实验室中所做的一样。

在解决问题的过程中，用语言提出“这有帮助吗？”的问题，也许可能把我们的注意引向有关的因素。在说“注意这儿”这句话时，语言也可以支配知觉的活动。即使语言能够为运算提供准备，但它在具体运算阶段中，对思维的形成既不是充分条件也不是必要条件[②]。

皮亚杰在 1963 年的一次讨论会上再次陈述了他的观点，“言语理解和具体推理这两个领域之间只有极少的联系，似乎在这阶段（具体运算）一个人必须应付两个不同的过程。”[③]

作为这一观点的论据，皮亚杰[④]首先引用的材料是，儿童一岁左右就有了一种感知运动类型的智慧，而语言的出现则要到第二年年中。这种感知运动类型的智慧，是以一种旨在获取某种结果的行动或智慧的实践类型为特征的。比如婴儿发展了一种拿到毯子上玩具的手段——把毯子拉过来。这种智慧是能够被

① 弗思：《皮亚杰与知识》，第 109 页。

② 同上，第 130 页。

③ 同上，第 129 页。

④ 皮亚杰：《发生认识论》，第 45～49 页。

重复并被概括(为一种格式)的。皮亚杰在这种感知运动的智慧中发现了某种包含、次序和对应的逻辑，这些将是以后的逻辑数学结构的基础。这时也有某种守恒性和可逆性的特征，一岁左右的儿童认识到，一个从他眼前被藏起来的物体仍然存在(客体稳定性)。

第二个论据，是建立在那些思维是逻辑思维但却没有语言可以利用的儿童——聋哑儿童的基础上的。这些儿童与正常儿童相比，他们的思维发展是延迟了，但延迟程度不如盲童。盲童有很大的不利，他们不能进行与聋哑儿童同样的空间的协调。

第三个论据是基于乔姆斯基(Chomsky)的工作。乔姆斯基推翻了逻辑派生于语言的传统观点，而代之以语言是建立在智慧结构之上的新观点。逻辑不派生于语言，语言倒是建立在一种理性的核心之上。

第四个也是最后一个论据，是心理语言学家辛克莱尔(H. Sinclair)的工作。她做过一个实验：对一组未达到守恒阶段的儿童进行语言训练。她发现，经过语言训练后，儿童只有极小的进步，即只有10%的儿童在守恒性方面取得了进步。

虽然在具体运算水平，语词并不"给出(赋予)"理解，但儿童使用的词汇往往可标志他们的理解水平。对很小的儿童来说，任何男人都可能是"爹爹"，这是一种就性别而言的逻辑上正确的分类，爹爹是一个男人，不过当然不是所有的男人都是爹爹。

前运算水平的儿童常使用绝对的词汇。比方说，在比较两个数量时，一个比另一个大些，儿童会说，有"很多"或有"一点"，这个"小"，那个"大"，而并没有说出两个数目之间的关系。相反，在具体运算水平，儿童常使用比较级的词汇来表示两个数量之间的关系，如说这个比那个"多一些"或"少一些"。他们也可能用一个句子表示两个性质；在比较一支短而粗，另一支长而细的两支铅笔时，儿童的回答就可能是一支比另一支"长一点和细一点"。

社会的相互作用

鉴于对语言的重要性可能有所贬低，皮亚杰又说："没有与他人在思想上的相互交流和合作，个体永远不能把他的运算集合成一个连贯的整体……"①

尽管语言不构成思维，但它可以为思想提供观念，否则这一思想也许就不会被考虑到。与他人交往的行动和作用于外物的行动是同样重要的。

皮亚杰著作中的"合作"一词值得注意。应将学习过程中的重点放在合作而不是竞争上。

皮亚杰与智商(IQ)测验

在智慧研究中，皮亚杰学派的发展方法和智力测验或心理测量方法之间的异同点是什么呢？②

两种观点都主张智慧能力至少部分地是由遗传决定的。从这一假设出发，它们都承认成熟过程的重要性。

智慧的心理测量学的概念假定：在某一给定的人口全域内，智力是随机分布的，并且这种分布类似于象钟形一样的正态概率曲线。这就便于把个体与全域中的其它人作比较。

与此相反，皮亚杰更关心的却是智慧的遗传决定因素中的非偶然因素——生物化学的形成体和有机体的中心，以及它们在儿

① 皮亚杰：《儿童智慧的起源》(The Origins of Intelligence in Children)，纽约：W. W. Norton 公司，1963，第193页。

② 本节主要引自艾尔肯（D. Elkind）："智慧的两个研究途径"（Two Approaches to Intelligence），《儿童与青年——关于皮亚杰思想的解释性论文》(Children and Adolescents-Interpretative Essays on Jean Piaget)，纽约：牛津大学出版社，1970，第115～135页。

童从一个发展阶段向下一个阶段变动时，如何有序地发挥作用。他认为这个顺序是不变的。皮亚杰更关心的是发展进程中个体内部的变化；心理测验更关注的却是个体间的能力差异或是把某一个体去跟另一些个体相比较。

在考虑心理发展的时序问题时，心理测量方法只是绘出一条学习曲线。比方说，一个儿童八岁时被测定出一个IQ分数，这曲线便预先决定了他在任何年龄的智力水平。这些分数不能对知识的数量和质量作出任何说明，而只是做到这一点：根据儿童在某一年龄的得分预先决定他将来能够达到何种智力程度。

根据皮亚杰的观点来看待这一问题，心理发展意味着新的心理结构的形成，以及随之出现的一种新的心理能力。从应用的角度分析，皮亚杰的方法是一种定性方法，它对学习过程中障碍的诊断特别有用。相反，IQ测验主要是一种定量方法，它在评定学校成就方面具有实用的价值。

智商测验总是由测验智力的各种水准的项目所组成，但当我们不管各种测验项目所包含的心理过程而给予相等的点分数时，就忽视了智力的水平或质的差异。

将皮亚杰的课题心理测量化

某些智力量表和智力测验，现今正在编制得与皮亚杰的课题比较一致起来。这类测验的价值将会怎样？艾尔肯①认为，在现阶段它们没有什么价值。因为一般的智力测验在一种更广泛的意义上看待人类能力。它们测量的是语言能力、机械的记忆、知觉运动协调和推理能力。

教育成就测验一般适合于学校所教的那些东西，而且它们相当可靠地测量出在学校中的进步。相反，皮亚杰的课题则在于评价那些多多少少是由儿童自身学习到的一些概念。若要把皮亚杰的课题广泛应用来测查学校的教学成就，那就须重新制定学校的课

① 同上，第133页。

程。

种族团体智力

有人要求皮亚杰对詹森(A. Jensen)博士发表在《哈佛教育评论》上的关于"辅助提高程序设计的失败"这个报告加以评论。詹森的报告断言，存在一种抽象的智力，而这种智力黑人儿童在遗传上一般是较低的。对此，皮亚杰发表了如下两点基本看法：

1. 很明显，遗传因素在智力的发展中起着某种作用。但是，它们只是提供某些可能性。它们并不能使这些可能性现实化。心理中没有任何先天的结构能仅由自身实现。所有智慧的结构必须通过有机体与其生活环境的相互作用才能构成。所以用遗传因素或成熟去解释任何一个年龄什么结构会真正产生，是不恰当的。

2. 其次，詹森怎样测量智力？智力能只以某些行为为基础而测量到吗？我们得到的真是内部结构的能力吗？皮亚杰认为，全部被测量的恐怕只是作业成绩，而作业成绩则会因为社会环境的不同而表现出差异来。"我不相信那种建立在智商基础上的量数或其它作业量数。"①

---

① 伊万斯(R. I. Evens)：《皮亚杰其人及其思想》(Jean Piaget, The Man and His Ideas)，纽约：E. P. Dutton 公司，1973，第 32 页。

4 数学的理解和操作

什么时候儿童在解答数学问题时能完全意识到自己正在进行的工作？皮亚杰在他最近出版的一本书《意识的把握——幼儿的动作和概念》中指出①：儿童可能正确地完成一种活动，如做加法或乘法，但并未真正意识到其中的过程。

对逻辑-数学过程的意识可能落后于正确的动作操作达六年之久。毫无疑问，这一点对心理学或教育学来说，有着极端重要的意义。

用四肢走路

〔诊断活动 1.1〕

一个儿童在地上爬行或用四肢走路时，他是否意识到或"知道"自己所做的动作？②他想到哪儿就到哪儿，似乎意识是不重要的，然而对解决数学问题也能这样说吗？

用四肢爬行是一种非常简单的感知运动型的活动，而儿童对自己进行一系列运动时的意识则是另一回事。与这种情况相似，一定水平的数学题可以在感知运动的水平上讲授，如"3+2是多少"，但儿童对这一过程的意识又如何呢？

为了研究儿童对用四肢走路的意识，我们第一步可先要求儿童用四肢爬行10米远，然后要他口头说明刚才怎样走的，再后要

① 皮亚杰：《意识的把握——幼儿的动作与观念》。

② 同上，第1~11页。

求他用一个玩具熊作演示(四肢联合行动)。倘若必要的话，实验者也趴在地上，要求儿童告诉主试哪个肢体先动。四岁的阶段 1A 的儿童，还不能意识到怎样用四肢走路。他回答用四肢同时走，或者回答先用手然后再用脚(Z 型解答)。

五岁的 1B 阶段的儿童作出 N 型解答，即先移动一边的手和脚，然后再移动另一边的手和脚。

七岁的特里西亚，她处于 1A 阶段，作出 Z 型解答，她告诉实验者她是先用手后用脚爬行的。

在阶段 2，半数七至八岁和三分之二九至十岁的儿童能作出正确的 X 型解答，即两边手脚交替进行，如左脚，右手，右脚，左手。

直到阶段 2 或八岁左右的年龄，儿童对个体运动才有清晰的把握和认识。这种把握与认识又是怎样发生的呢？为什么它们产生得这样迟？必要的感知运动的调节和动作，婴儿就能够进行了，婴儿"会"用四肢爬行，但并不"认识"或意识到这一过程所必然包含的步骤。

相反，阶段 2 的儿童能够思考自己做过的动作——根据其正确的顺序把一个自动的运动系列再分解开来。皮亚杰把它称为运动可逆性的开端。它含有某种程度的概念化，这种概念化使以前

纯粹是自动的动作达到平衡。阶段 2A 的儿童通过实际的爬行能作出正确的回答，但必须"停下来想一想"，而 2B 阶段的儿童能立刻作出正确的回答。即使如此，这种认识能力也是在会用四肢爬行以后才获得的。

"会做"与"理解"

"会做"跟"理解"不是一回事。我们可能"会做"乘法题而并不理解其中的过程，就是说，会把正确的数字根据某种规则写在适当的位置上。而"理解"则与此不同，它包含着一种概念化、抽象或对情境的认识。根据心理学的观点，"会做"包含的是感知运动水平的动作。比如会做象 $\begin{array}{r} 24 \\ \times 13 \\ \hline \end{array}$ 这样的题目，就是凭对乘法口诀，如何相加，以及把数字放在什么位置的回忆或记忆，而得到正确的答案的。

以斯金纳(Skinner)或加涅(Gagne)的联想或刺激-反应(S→R)模式为基础，为学习者制定某种学习任务的方法，所体现的是一种"会做"而不是"理解"的教育哲学。

"理解"含有对正在进行的过程的意识(相当于皮亚杰的认知概念)①。它包含着概念化，而概念化则含有某种必然的心理上的组织或协调，这种组织和协调是以一种表象或对以前在物质或动作水平上进行的内容在抽象水平上加以重建为基础的。

许多逻辑-数学推论所必需的运算结构，在十一、二岁达到反省抽象或形式思维之前，实际上仍处于非自觉状态。要求十一、二岁的儿童就能在逻辑-数学领域进行理论的说明，对此皮亚杰提醒教师说，这是"那些制定教育大纲者对之要求过高的一种能力。"②

---

① 同上，第 v 页。

② 同上，第 352 页。

达到了形式运算水平的十一、二岁儿童，能够进行运算之上的运算。他们能考虑含有组合思想和 *INRC* 四元群这样的问题。(见第 26～27 页)

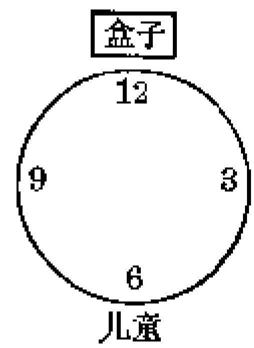
下面我们讨论儿童的几种活动，这些活动正说明了儿童对某些逻辑-数学活动尽管早在六年前就会做了，但那时他们是不自觉的。

用绳子抛掷物体

对于前面讲到的“用四肢走路”的活动，儿童要到七至八岁才能意识到自己动作的顺序。在下面的活动中，我们可以发现，意识的产生更晚，一直要到十一、二岁才产生。这是因为儿童不仅必须考虑自己的运动和动作，而且要考虑到它们对各种物体的作用。

向儿童呈示一只直径 5cm 的球，球用一根绳系着。实验者抓住绳的一端，让球在正好离开地板的一个平面上作圆周运动。要求儿童回答：如果绳子松掉，球会滚到什么地方。先让球作顺时针方向转动，然后让球作逆时针方向转动，在把绳松开后，看儿童能否说出球滚动的方向。

随后再要求儿童自己试一试。先把一个矩形盒子放在球转动的圆周外边，要求儿童松开绳子以使球滚入盒内。



为使读者明了起见，我们用标上数字的钟面图来表示松开绳子的位置。如右图。

当儿童站在圆周上 6 点这一位置的外面时，球必须大约在 9 点的位置松开才能落入放在 12 点位置的盒内（这时球作顺时针方向运动；如果作反时针方向运动，则应在 3 点的位置松开）。

下面的情况是令人感兴趣的：巴里亚利斯(Balearic)群岛上的

很小的儿童，在告知他们怎样做之前就可期望他们能成功地完成这类活动①。

同样有趣的是，儿童在意识到球的运行情况之前，很早就能成功地进行完成这一任务所必需的感知运动的动作了。②

五岁的儿童就能使球落入盒中，但不能加以解释。

“你如果让球滚动的话，它会滚到哪儿去呢？”

“什么地方都滚得到。”

“象这样转呢(反时针转动)？”

“也一样。”

“要让球滚到盒子里，你什么时候松开球？”

“看到盒子的时候。”

经过一段尝试错误的过程，五岁儿童知道了在什么时候松开才能让球落入盒中，但儿童对自己动作的认知重点是他所站的位置和使用的力量，而不是观察球的运动。如阶段 1A 的儿童深信，他必须站在 6 点的位置才能让球落入放在 12 点位置的盒内。

当绳子松开时，儿童知道球离开了运行的圆周轨道，但不能描述出它的路线。他这样想，沿逆时针方向转动时松开球，球总向左，沿顺时针方向转动时松开球，则球就向右。

直到阶段 3 即到十一、二岁时，儿童才意识到球滚动到什么地方依赖于松开它的位置和转动的方向。

阶段 1B 的儿童不认为他必须站在盒子的对面(在 6 点的位置使球落入放在 12 点位置的盒子内)，但他对松开的位置仍意识不到。例如，他会说：“你在 12 点那儿松开，这样好让球落到放在 12 点位置的盒子里去。”

在八至九岁的 2A 阶段，儿童在感知运动水平上获得了成功，或者说，他们已“学会如何去做”而不管自己站在何处或盒子放在

① 同上，第 12 页。

② 同上，第 14 页。

何处了。他们不再要求非得站在盒子的对面(盒子在12点处，人在6点处)。然而，他们仍然认识不到什么地方是正确的松开球的位置，并坚持认为如果盒子在12点的位置上，那么球就在12点处松开。

到了大约九岁左右的2B阶段，皮亚杰认为这时儿童已开始认识到或意识到球的运行过程。

起先，儿童象较低阶段时一样回答——让球落入12点处的盒内，就必须在12点处松开(虽然当逆时针转动时，他实际上能正确地在3点处松开)，但他们很快地纠正了自己的错误。

然后，在球转动时，要儿童说出盒子在12点的位置，球须在什么时候松开。九岁的培德先回答说12点，然后说9点，后来又再次说是12点。

当球在12点处松开时，培德说："你应该让它在这儿(10点)松开。"

随后他亲自试了试，当球作逆时针方向转动时，他在2点处松开。

"你刚才在什么地方松开球的？"

"这儿。"(指7点位置。)

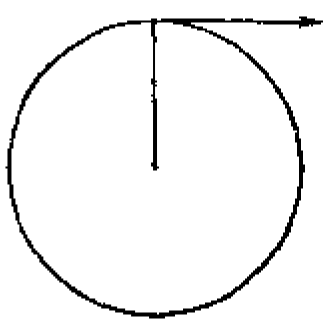
但当实验者在7点处开始松开球时，培德立刻说："我敢打赌，它一定滚到这里。"(正确地指出了运行轨道。)然后，他又正确指出了他自己的松开球的位置。也就是当盒子在12点、球作顺时针方向转动时，他在9点的位置松开；逆时针转动，则在3点的位置松开。①

皮亚杰问道，这种松开点的正确选定是怎样实现的？不是通过观察，因为幼儿早就能观察了。他得出结论：儿童似乎有了某种推理能力或认识能力，它能消除那些以前妨碍幼儿相信亲眼所见证据的矛盾。"因此这个推理只能具有一种运算的本质(心理的运算)，它很容易用一般发生在这个年龄的进步来说明。这个年龄的

① 同上，第28～29页。

儿童在构造自然的坐标系统时首次把握到方向和矢量的意义。”①

在阶段3，大多数十一、二岁的儿童，对能获得成功的必要条件的认识是立刻产生的。他们不需要通过试误就可获得成功。当然，在阶段3A和3B之间，仍存在着差别。在3A阶段，当绳子松开后，儿童仍不能正确描述出球的轨迹。有的说球的轨迹是曲线，有的说是Z形线。然而在3B阶段，儿童能正确说出球的轨迹是一条切线，即使他并不知道这个词。



“球滚到什么地方?”十二岁的艾里说:“我知道球滚到哪儿了，它有点象绕着圆滚动。”但是，他从球松开的地方却画出了一条切线。

“这个角好象是什么角呢?”

“在你松开球的地方，它是垂直的，有一个直角。”②(意指圆在松开点的半径与过这一点的切线形成一个直角。)

教育含义

上述问题的讨论，对“会做”某件事情(如借助感知运动的过程作出正确的回答)与“理解”、“意识到”或“认识到”其中蕴含的过程的区别，提供了清楚的证据。尤其重要的是，它们之间的时间间隔是数年而不是数月或数天。

因此，如果我们的教育过程能考虑到儿童是否懂得或意识到他正在做的事情，或儿童是否仅在感知运动水平上进行操作、得到结果，而并未意识到其中包含的过程，这该是多么重要啊!

上面讲到的活动是一种要求进行推理的活动，它在达到形式运算的思维水平之前不可能进行。这些活动是，要求儿童列出让球进入盒子的可能的因素，排除那些无关的因素，如站立的位置或甩球时用力的大小，找到必要的因素，如松开球的位置和它落入盒

① 同上，第30页。

② 同上，第34页。

中的滚动轨迹。

乒乓球和滚圈

〔诊断活动1.2〕

前面所讲的使用绳子的活动，儿童认为其中包括两个动作：(1) 让球在绳子的一端作圆周运动，(2) 然后根据球无论在转动轨道的那个地方松开总沿着切线方向继续运行，而使球落入盒内。

下面要讲的另一种活动，儿童要同时进行这样两个动作：在向前推球或滚圈的同时，再给它施以一个相反的旋转，让球再返回来。我们许多成人做这种活动跟儿童差不多，但是，会做跟意识到实际进行的动作，这是完全不同的两回事。两者相隔的时间之差达四、五年之久。

这个实验的程序是这样的：先问儿童是否会把球向前滚动并且不碰它再让它回来，或者不让它碰到墙就回来，然后让他试做一下。如果儿童做不好，实验者就把手放在屏幕后做示范，让儿童看着球。如果儿童仍不能照这样做，实验者就把整个过程做给他看，再要求儿童试做。五、六岁的儿童，在几次尝试中，通常至少获得一次成功，而到六、七岁时则能经常获得成功了。

随后要求儿童描述球的运动，可以这样问儿童："球怎样动的？""你怎么做的？""就这些吗？"

阶段 1A 的儿童，虽然有时能成功，但当问他为什么球能回来时，他回答说："因为你推得这么重"或"它一直向前走，然后就回来了"。阶段 1B 的儿童知道球向前滚时是转动着的，但并未认识到这是一个反向的而不是向前的转动。他已明白手指动作是其中的原因，说："你的手指在球上滑了一下"，但未能指出手指是向后或相反运动的。

阶段 2 的七至十岁之间处于具体运算开始水平的儿童，已有

了对可逆性的理解。七至八岁的2A阶段的儿童仅有部分的理解，他们仍认为球是向前转动而未认识到他做了两个动作，这两个动作都是作用在球的背后从而使球能同时向后转动。他仍然认为球是向前旋转的。

"是什么原因使球回来的呢？"

"推的力量够大就行"或"我把手按在球上，向后拉了一下"。

实验员重复问道："是什么原因使球回来的呢？"

"弹回来的。"①

在九至十岁的2B阶段，儿童经过多次试误和自相矛盾的解释之后，最终意识到了球的反向旋转。

六岁的斯图亚特能使铁圈作反向的旋转，但不能描述自己的动作。

十一到十二岁的阶段3的儿童（少部分早熟的八至九岁儿童），能立刻认识到自己是在同时进行两个动作，一是把球向前推，与此同时，又使它向后旋转。起先他可能得观察实验者的动作，但他能成功地分析这些动作。

结论及其教育含义

那些处于形式运算的阶段3的儿童，能够从球怎样"动"推断

① 同上，第59页。

出他们自己动作的结果。他们把两个方面的观察协调起来——球怎么运动的和他们是怎样做的，推论就可由此引出。

用一个铁圈来做实验，也可得到与上同样的结果。虽然要使它滚得直，可能需要较大的力气和更高的技术。但铁圈的反向旋转比较容易看到。

跟前述有关绳子的活动一样，在完成“会做”这样的感知运动的必要调节与通过推理“理解”或意识到实际所发生的情况的形式运算之间，也有一个从六岁到十二岁近六年的时间延缓。

因此，这就再次要求我们，一定要认真考虑教师真正要教的应该是什么——怎样做某些事与理解所必需的运算是不一样的。

斜坡或角度（建造一条道路）

〔诊断活动1.3〕

前面所讲的两种活动与儿童分析和解释物体运动时所发生的情况的能力有关（松开绕圆周转动的球及让乒乓球或铁圈往回滚动）。

下面要讲的活动是向儿童提供静止或不动的材料让他们选择，并把材料适当地组合起来以“建造一条通向山顶的道路”。“山顶”用一个纸盒代替。材料有小木条和木块①，还有一个布娃娃或小汽车可放在路上行走或开动。

为解决这一问题，儿童必须把布娃娃到“山”的距离与“山”的高度联系起来加以考虑。当然，山是倾斜的。他在这条路造好之前，必须想象出这个斜坡。

阶段1的儿童不能做到这一点。他忘记或忽略了布娃娃的出

① 九块积木——一块薄的、一块较高的、一块有凹槽的圆柱形，另外六块是小立方块；木条的长度从15cm到25cm，有一块木条为50cm。布娃娃放在离盒子50cm远处。

发点离开盒子有一定的距离，而在盒子边上把路造成一个塔形。如果我们提醒儿童注意布娃娃的出发点，那么他就造一条通向盒底的水平的路。1B 阶段的儿童认识到建造一条坡路的可能性，但他不能正确地使用长木条。他把它几乎垂直地放在盒子旁边以使它能达到盒顶。

七至十岁的阶段 2 的儿童，能立刻着手去搭一条斜坡路(但仍可能造出来的路是一个个不相连贯的孤立的塔形，具有某种阶段 1 的特征)。

杜维纳，九岁，阶段 1A。他在企图建一条通向箱顶的道路时，还想不到必须把路造成斜坡形。他所造的路到箱底是水平的，然后是垂直的。

这些儿童不把注意只是集中在登上山顶的目标上，他们考虑到了出发点，并企图把两者连接起来。但是在 2A 阶段，儿童还不能作出适当的连接。他们用的小木条太短，彼此连接不起来，斜坡太陡，等等。在阶段 2B，儿童已有了一种预期的格式，虽然也有错误，但为数很少且很快就能纠正。

阶段 3 的儿童几乎重复阶段 2B 儿童的情况。他们更注意解决手段的精确程度——柱子的位置、楔牢积木、路的重量与柱子强

丽莎，九岁，阶段 1B，她意识到必须要造一个斜坡，但不会运用积木块作支撑物。

度的关系等等。但皮亚杰指出，这跟导致对问题解答的意识与认识的过程，即那种必要的反馈的和预期的心理调节没有关系，后者 2B 阶段的儿童就已具有了①。

阶段 2 的儿童在选择材料前就运用预期的调节对问题加以审视。因此在实际建造之前，已能多少进行一些提前的校正。他甚至能先画出草图来。他们跟那些马上就进行实际操作的较差儿童不一样。他们拿起一个木块后，首先注意它是否适用或部分适用，然后把它放到与其它木块不同的位置上以建立新的木块间的联系。

为了考察问题的三个方面，儿童必须做到：

1．把水平面的出发点（布娃娃）跟垂直的山（盒子）联系起来，即找出斜坡这种解决方式。

2．在斜坡与作为中介物的物体（木块、木条等）之间，发现可能存在的关系。

3．确定物体之间可能的关系，并决定它们是否与前两种关系存在直接的联系。

① 同上，第 118 页。

本章内容的教育含义

这一章指出，“会做”某些事或用现今的俗话说“操作”某种活动，与“理解”、“意识到”、“认识到”是多么不同。

那么，教师所教的又是什么呢？当今教育上的“回到基础”的趋势不正是教儿童“会运用”某些规则去获得答案吗？

当教师问六岁的孩子 4+2 等于多少时，他们已有了必要的感知运动调节而“会作出”反应或会写出 6 来，但他们并不“理解”其中所涉及的包含和可逆的关系。这部分内容我们将在第 9 章讨论。类似的情况也发生在十至十一岁的儿童身上。他们可能知道什么是比例，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，但并不“理解”或意识到其中的基本结构。因此，他们在解决比例问题时，常有很大的困难(除非问题以一种标准的方式向他们呈现)。

值得指出的是，本章涉及的问题基本是几何性质的问题——球或圆、圆周运动、切线路径、角和斜坡，乃至用四肢在地板上爬行。在物理世界或空间中的所有动作均可被认为包含着几何的概念。

作　　业

访问一名儿童，用本章所描述的一个活动去确定他的发展阶段(更详细的分析可参阅皮亚杰所著的《意识的把握——幼儿的动作和概念》一书，麻省哈佛大学出版社，1976)。

5 逻辑分类

我们的假设是，数的构造与逻辑的发展是携手并进的，数概念形成之前的时期与前逻辑水平相对应……因此逻辑的运算和算术的运算构成了一个单一的系统……在“类包含”的补充标题下，后者产生于前者的概括和融合。①

许多儿童的前逻辑和前数概念阶段一直持续到将近七岁。这种情况可由这些儿童缺乏分类能力和没有守恒性或不变性的理解显示出来。本章将谈到包含关系。关于数的守恒将在第七章讨论。

计数常是教给儿童的第一种数学思想，但如此所教的经常是一种机械的记忆。数的思想应产生于上面引文中概述的对包含关系的理解。从心理学来说，分类既为逻辑概念也为数学概念的发展提供了基础。

皮亚杰根据最近发生研究的资料，得出如下的结论：

数概念的发展不会早于类（分类结构）的发展或……传递关系的发展（平均在七到八岁）。②

这样，在数、类和序列（次序化的能力）的发展之间的平行性质，就为支持它们之间存在着相互依存关系，以及反对那种认为存在一种数的最初自发性的观点，提供了第一条证据。③

以下两章我们将讨论序数和基数。

① 皮亚杰：《儿童的数概念》，第 viii 页。

② 贝思和皮亚杰：《数学认识论与心理学》，第 259 页。

③ 同上，第 261 页。

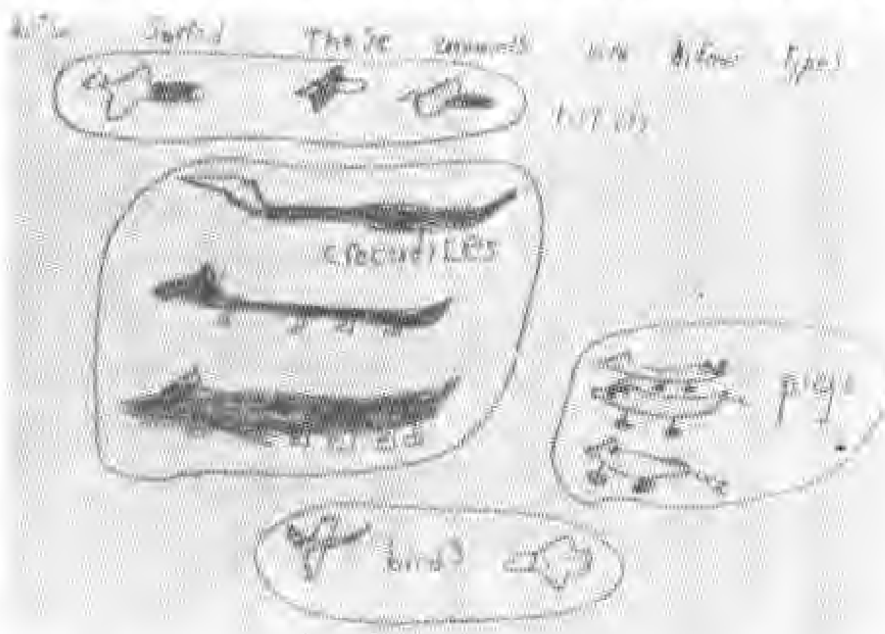
逻辑分类中的首批经验

当儿童在他生活的世界中开始探索时，他们就在学习识别所见的各种物体，并给它们命名。比方说，在儿童第一批认识的对象中，有母亲及奶瓶。后来，大人又把其它物体指给他看，并告诉他名称，如汽车、马、狗等。这些物体是由某种物理性质，如颜色、体积、形状或某种行为模式而被儿童认识的。

儿童能够认识某一物体，这就说明他已能根据某种特有的特征或性质把它归到区别于其它物体的某个范畴之中。对物质世界的研究（科学）就是一种分类——植物和动物是两个最基本的类。当新的物体被发现时，必然要按其与已经发现的物体的关系而把它们加以分类。

简 单 分 类

在学龄儿童首先获得的分类经验中，有些是属于归类的经验。



一名六岁儿童把一些动物加以归类，为什么分成两组鸟，原因不明。

儿童在玩耍结束后，会把所玩的东西放到原来的地方。教室里有许多东西，每样东西都有一个它所"属于"的地方。

归类或分类的思想是以关系的思想为基础的。一个儿童她正在玩一只"属于"苏珊的布娃娃。"属于"就是一种布娃娃跟苏珊的关系。因为这种关系，布娃娃应该还给苏珊。同样，大衣"从属于"衣架，拍纸簿"附属于"书桌等等。

〔诊断活动 2.1〕

当儿童审视物体时，物体可以按许多方式分类或把它们相互联系起来。有的比其它东西"重"，这种"比较重"的关系，可用天平显示出来。有的比其它东西"大"。有些具有"同样颜色"。有的"能浮在水中"，有的则不能。儿童甚至依据"我喜欢玩的东西"和"我不喜欢玩的东西"来进行分类。对几何图形，他们会把"有三条边的"归到三角形一类去。

在分类的过程中，儿童同时了解着他所生活的世界。后来，从这样的分类中就产生了象"角就是……"、"家就是……"、"母亲就是……"、"河就是……"之类的定义。

有一种心理学观点认为：要解决简单的分类问题，知觉的结构就能胜任了。比方说，如果向儿童呈示剪成方形和圆形的硬纸板，它们各有两种颜色和两种尺寸，只要运用感觉的提示(线索)，儿童就能把同样形状的放在一起，或把同样颜色的放在一起。

值得指出的是，儿童的归类常常是先以形状后以颜色最后以体积来进行的。让儿童进行归类活动，给他两只盒子，限定他必须把全部物体放入这两个盒中，而且放在同一个盒子里的东西必须在某些方面是一样的。

四岁左右的儿童任意地进行分类，比如先是按颜色，后来又按形状。所分的范畴和类别不严格符合定义。也没有一个全面的计划。如果给定一个计划，比方说让他分出"小而圆的物体"，他们会把根本不该分出的物体归入其中。

五岁或六岁左右的儿童能根据形状或颜色，或这两者来进行分类。根据体积来分类多少还比较困难。

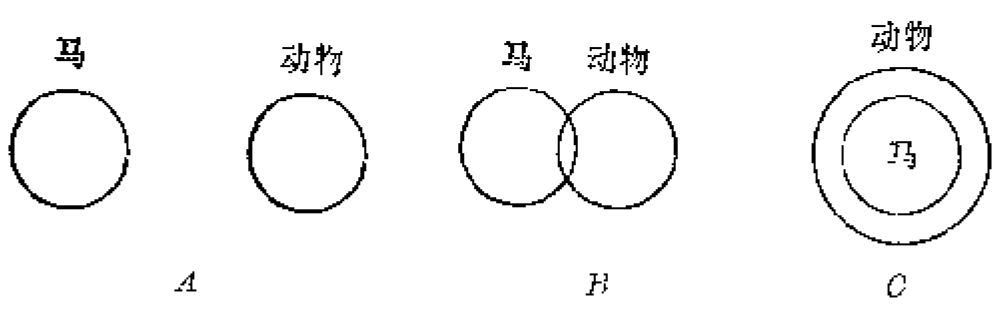
集或类之间的关系

上述简单分类的任务可由知觉结构解决，而类包含的逻辑和层级分类将需要智慧的或逻辑的结构。正如皮亚杰所说："一个类不能由知觉构造而只能由逻辑构造，因为它必须以一系列抽象和概括为前提，类的意义从这些抽象和概括中得到。"(原书未注明引文出处。——中译者注)

从教学的观点来看，必要的逻辑结构是不能通过言语的解释、良好的视觉辅助手段、重复以及其它类似的手段来传递给儿童的。前逻辑的儿童坚持认为，一只鸭子就是一只鸭子，不是一只家禽，他们不能理解包含的逻辑。

儿童应该获得多种关于确定集合的性质及集合之间的关系的经验。这样的研究就包含有数学问题。例如数目就是物体的一个集合的性质，这方面的内容我们将在第七章加以讨论。

要对物体加以适当的分类，就必须知道这些物体与已知的其它物体的关系。例如，一群马，它们是动物吗？为了说明这种关系是分类的基础，我们可以画两个圆，一个代表马，另一个代表动物。两个圆的相对位置表示马与动物之间存在的关系。从逻辑上说，有下述几种可能性。



如果所有的马都不是动物，那么图解应是上图中的 A；如果

有些马是动物,有些不是,则图解是 B;如果所有的马都是动物,则图解是 C。

第三种图解正确地表示了两者的关系。动物的类或集合包含马的集合。包含关系在逻辑和数学上都是重要的。这是一种被皮亚杰经常运用的称作“类包含”的思想。

我们常把上面所示的图解称作文氏(Venn)图。它们为表述两个或更多个集合之间的关系提供了一种方便有效的形式。我们可以把整个物理世界构造成为一个类的层级系统。

在比较任何两个物体的集合时,它们之间的关系总是下列三种类型中的一种:

1. 不相交集(分离集):它们没有共同的元素(男孩和女孩,鸭子和鱼)。

2. 交集:它们有一些共同的元素(蓝眼女孩和棕发女孩)。

3. 一个集合是另一个集合子集或被包含在另一个集合中(花包括玫瑰花)①。

六岁的宋达处于包含关系概念的前运算时期,她认为菊花比花多。

① 英海尔德和皮亚杰:《儿童早期逻辑的发展》(The Early Growth of Logic in the Child),纽约:W. W. Norton 公司,1969,第 55 页。

上面最后一种包含关系，皮亚杰和英海尔德在《儿童早期逻辑的发展》一书中曾加以详细研究，它是建立一个类的系统的基础。

儿童对量词"全部"、"一些"、"无"的理解也应加以研究，因为它们是正确地描述和理解包含关系的基础。如问儿童，所有的马都是动物吗？所有的动物都是马吗？

包 含 关 系

〔诊断活动 2.2〕

根据某种共同的性质，物体被包含在一个集合之中，例如：

"我喜欢的物体"的集合包括……

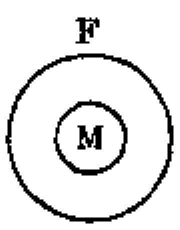
"重的物体"的集合包括……

"红色积木"的集合包括……

"为苏珊所有的物体"的集合包括……

"动物"的集合包括……

在数学中，数的一个集合可能包括另一个集合，比方说：全部自然数包括奇数，整数包括全部自然数。在几何学中，四边形的集合包括正方形、矩形、菱形和平行四边形。居住在佛罗里达州的居民的集合(圆F)包括居住在迈阿密的居民(圆M)，可用左图表示。



当儿童考虑那些不只属于一个类的对象，或那些部分重叠的类的时候，"一些"、"全部"这些词就显得重要了。使用这些词语，儿童开始描述类的部分重叠或包含。于是，"全部"迈阿密人是佛罗里达人，而只有"一些"佛罗里达人是迈阿密人。儿童掌握这样的关系不是很容易的。下面的讨论为此提供了证据。

家庭与包含关系

1．问一名七岁的儿童："家庭是什么？"回答是："它就是人住在一起的意思。"

2. 问另一名九岁的儿童:"家庭是什么?"回答是:"爸爸、妈妈和孩子们。""你爸爸有一个家庭吗?""没有,他小时候有。"

具有自我中心思维的儿童,把家庭仅看作属于他的。他不把家庭中的全部成员"包括在"家庭中。家庭仅只跟他有关。

国家和包含关系

"你是瑞士人吗?""不,我是日内瓦人。"

根据皮亚杰的研究,到九岁仍有 75% 的儿童否认自己既是瑞士人又是日内瓦人。用文氏图示意,儿童看到日内瓦是在瑞士之内,但他并不理解"部分-整体"的关系。瑞士只是包围着日内瓦。它只是图上的阴影部分。儿童思想中把日内瓦与瑞士并列着或只是把瑞士放在日内瓦的旁边。儿童只是把部分局限在部分本身,而没有把它与整体联系起来。当他考虑他所居住的部分——日内瓦时,他不能看到它与整体——瑞士的关系。

包含关系既包括逻辑的运算,也包括算术的运算,它们在这些儿童身上还没有形成。

量词"全部"、"一些"、"无"和"一"

为了解决分类的问题,就必须认识到一个类包括两种性质或关系:

1. 一种性质是这个类和它所属于的类共同具有的性质(鸭子不但是鸭,而且也是家禽,因为它们"有羽毛"、"会飞"等等)。

2. 另一种性质是这个类所特有的性质,如蹼足、颜色、体形等与众不同的地方。

部分与整体的关系用量词"全部"、"一些"、"无"和"一个"等来表述。儿童掌握这些概念的困难,使许多教师感到惊讶。而要有效地进行教学,就必须正视这一困难。

〔诊断活动 2.5〕

全部和一些

"全部"和"一些"两词在逻辑思维中起着举足轻重的作用。儿童直到九、十岁，才能经常正确地使用这些词。

为了考察儿童对"全部"和"一些"两词的理解，皮亚杰运用一组包括红色方形、蓝色方形和蓝色圆形而没有红色圆形的物体来做实验。让儿童按颜色和形状分组，然后问儿童：

"所有的圆都是蓝的吗？"

"所有蓝的都是圆吗？"

问一名四岁儿童"所有的圆都是蓝的吗？"他回答说不是，因为"有一个蓝色的方块"。他不能区分"所有的圆都是蓝的吗？"与"所有蓝的都是圆吗？"这两句话的意思。他不能建立逻辑的类，直到九岁或十岁，他才能这样做。

只有一个元素的类

只有一个元素的类的概念在八岁或九岁以前，还不具有运算

九岁的约翰能把唯一的不同形状或与众不同的物体选出来。

的性质①。空集或虚集在十到十一岁之前还不具有运算的性质②。为了研究象"太阳"、"月亮"或某个与众不同的物体这样只有一个元素的类，皮亚杰运用有三到六个三角形的集合来做实验，这些三角形除一个外都涂着同样的颜色。实验者在未涂颜色的三角形背后标上"×"号。要求儿童把它鉴别出来。小于八、九岁的大多数儿童不能完成这一任务。

空集或虚集

空集或虚集是其元素个数为零的集合。如 14 英尺高的人的集合就是一个空集(虚集、虚类)。对成人来说，空集的观念并不难接受，但对儿童又将如何呢？这里有一个在儿童还没有具备理解这种观念所必需的逻辑结构之前，常用来向儿童介绍这种观念的例子。

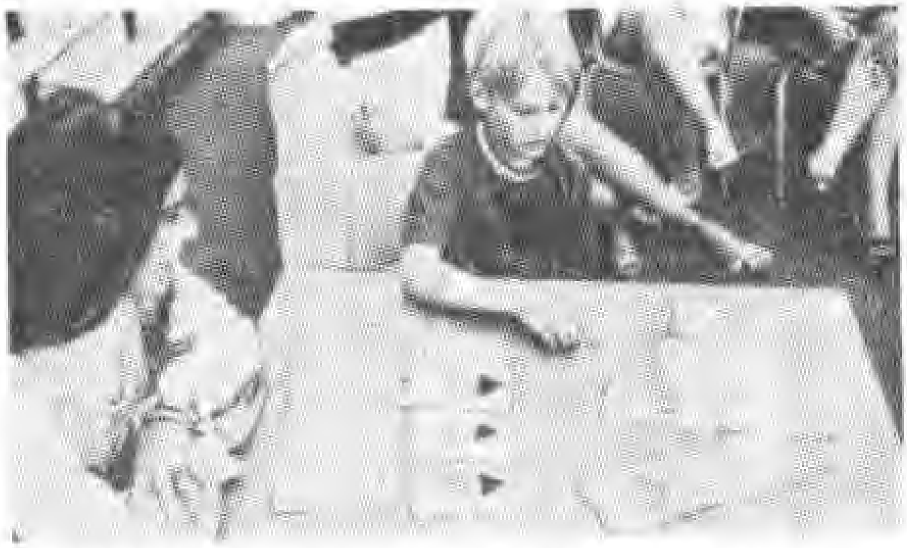
皮亚杰和英海尔德用一套卡片来做实验。有的卡片画着房子，有的画着树，有的画着苹果，有的画着其它东西，还有的是空白的。问儿童，这些卡片是否能分成两个集合。

> 儿童的反应十分清楚，只有到了十一、二岁，他们才采取那种对我们来说似乎是最自然的分类——分成空白卡片和有图的画片。在这一年龄之前，我们发现有三种互不相同的反应类型，尽管它们并不标志成熟的不同水平。(1) 儿童可能按另一种标准，即根据形状而不是根据内容来对空白卡片加以分类；(2) 在收集有图的卡片时，空白卡片也可能混在其中；(3) 只对画着图的卡片进行分类，对空白卡片置之不理，并把它们随便乱放。在所有这三种情况下，儿童都拒绝构造一个空集。③

结论是：

> 具体运算与它们所运用的物体有密切联系。这意味着，正是由于这些物体的存在，因而排除了空集的概念。另一方面，形式思维所涉及的是脱离其内容的结构，甚至在分类的范围里也是如此。因此，对十到十一岁的儿童，或者对我们成人来说似乎是自然的东西，

① 同上，第 120 页。
② 同上，第 146 页。
③ 同上，第 147 页。



九岁的约翰不能进行虚集的分类，他用空白书片作为房子的前际。

对五到七岁，甚至是七到九岁的儿童，就可能是不自然的了。这就是为什么一直到十、十一岁儿童的包含关系的结构开始脱离其具体内容之前，他们拒绝虚类的原因。①

层级的(系统的)分类

〔诊断活动 2.6〕

为了检验儿童对分类系统的理解，皮亚杰用一个包含 16 朵花的集合来做实验。这个花的集合中有 8 朵报春花，其中 4 朵是黄的。从逻辑上说，花包括报春花，报春花包括黄报春花，但是许多已到九岁或十岁的儿童还不能正确地理解 A 到 B 到 C 的传递关系。问他们报春花多还是花多？他们说是报春花多。

半数不到的七岁儿童、三分之二的八岁儿童及几乎全部的九至十岁的儿童，能正确地回答出 A 包含 B 或花比报春花多。

对下面两个问题——(1) 报春花多还是黄报春花多？(2) 花多还是报春花多？都回答正确的，在七岁儿童中占 26%，在八岁儿童中占 61%，在九至十岁儿童中占 73%②。

① 同上，第 149 页。

② 同上，第 109 页。

正如我们将要在第131～132页作进一步说明的，一旦象“花”这样的集合能用它的子集来考虑，例如用报春花和黄报春花来考虑，那么就可以成功地对报春花和黄报春花加以比较，但儿童还不能从报春花回到花进行逆反的思维，从而理解报春花与花的关系。

儿童也不能成功地思考包含的传递关系——如果 A 包含 B、B 包含 C，那么从逻辑上说，A 必然包含 C。

乘法分类

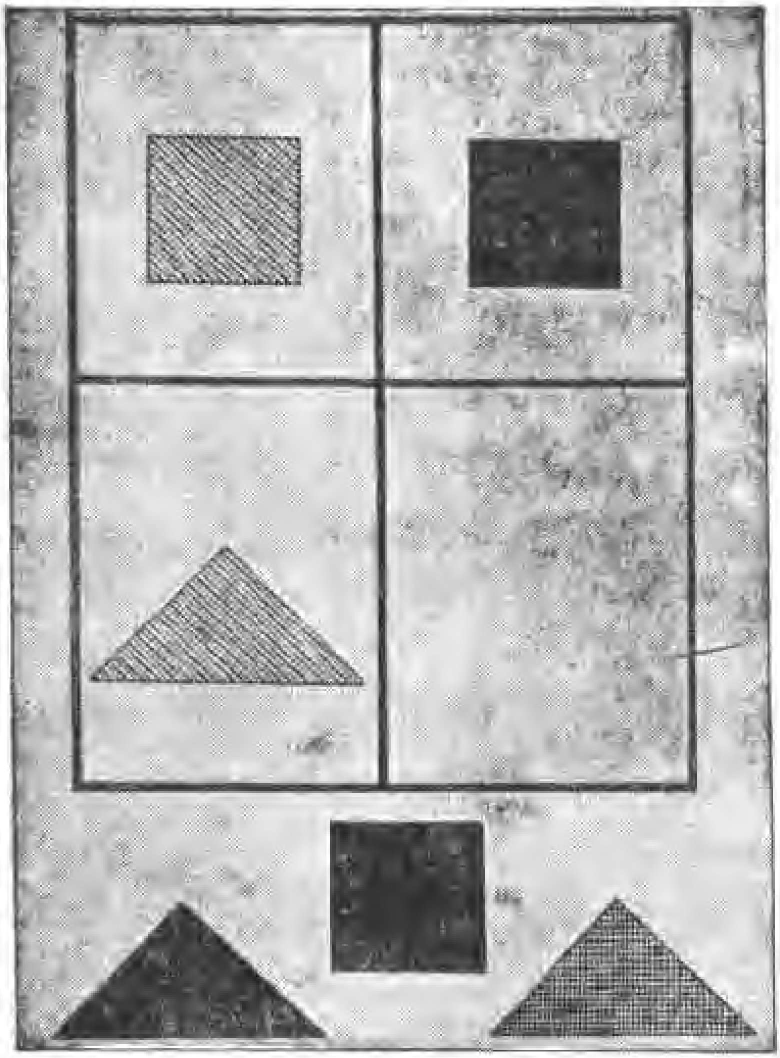
〔诊断活动2.3〕

对两个或两个以上的集合中的一个或多个物体同时按几个标准进行分类的思想，常被称为乘法(多变元)分类。这一观念(数学上称为“交”，逻辑上称为“合取”)将放在“逻辑的连接词”一节和第14章中加以讨论。也可参阅下页照片的说明文字。

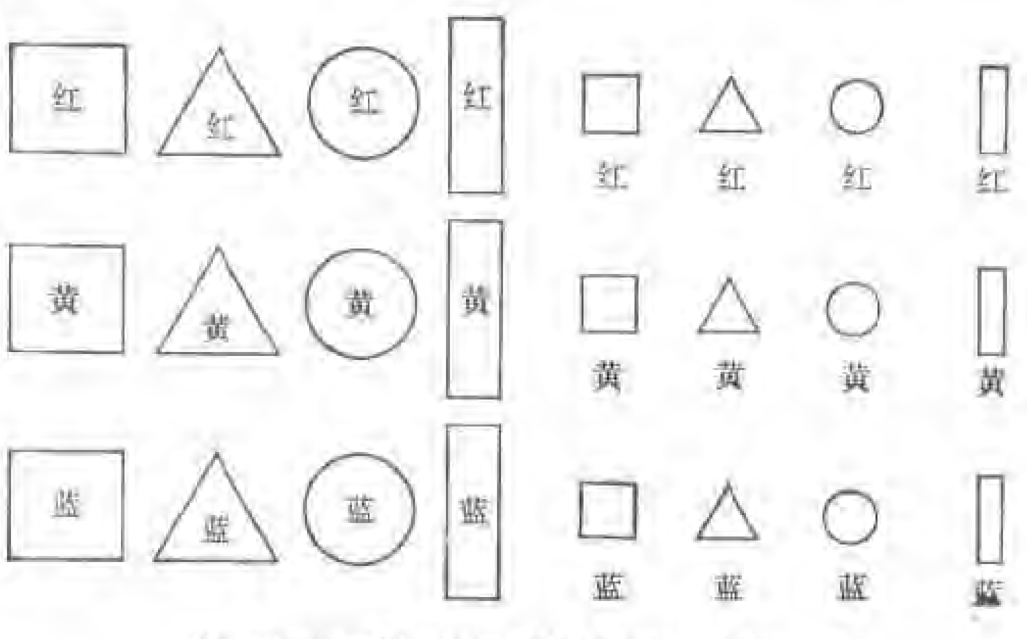
逻辑分类的游戏

可以用不同形状并涂上三种颜色的积木或纸板作为这一游戏的材料。市场上也有专门用来进行分类和逻辑关系游戏的材料出售，如属性积木或逻辑积木。它们是包括四种性质(体积、颜色、厚度和形状)的塑料几何模型。儿童很喜欢玩这样的积木，根据积木的一些特性或属性(如颜色或形状)来进行归组或分类。

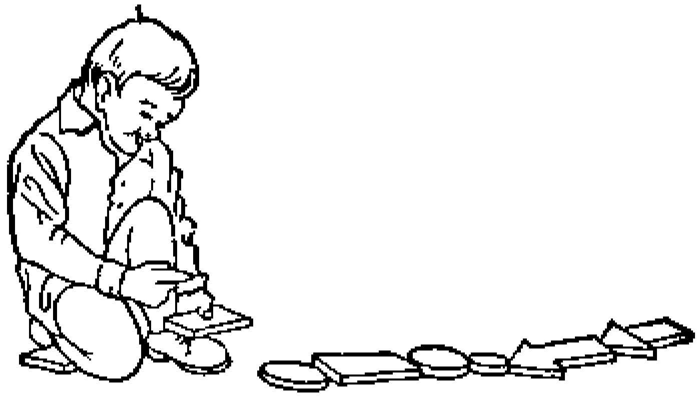
有一种叫做“仅有一个特点不同”的游戏，它是先让一名儿童从一堆形状、颜色和大小不一的积木中取出一块来，然后再让第二名儿童取出与第一块只有一种特性或属性不同的另一块积木来。例如，第一名儿童拿出一块大而厚的红色的方积木，那么下一名儿童就应拿出一块大而厚的红色的圆积木来。如果第二名儿童拿错了，第三名儿童就必须纠正他的错误。如果没有拿错，那么第三名



乘法分类问题(色和形)。从底下三张卡片中取出最合适的一张放在空格处(黑三角形)。



这些积木也可用来进行集合的并和交的逻辑运算。



“两个特性不同”的游戏。

儿童再拿出另一块积木。游戏可以有很多变式，比如拿出有两种特征不同的积木。

逻辑的连接词

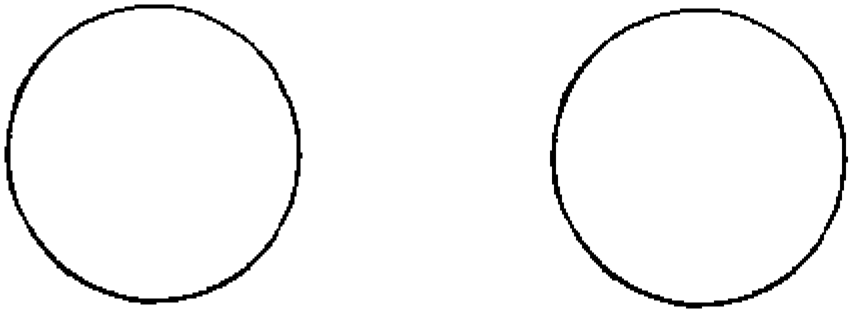
要扩展逻辑活动，就得涉及合取、分取、否定和蕴涵等逻辑工具。我们可以再用逻辑积木对此加以说明。

〔诊断活动 2.4〕

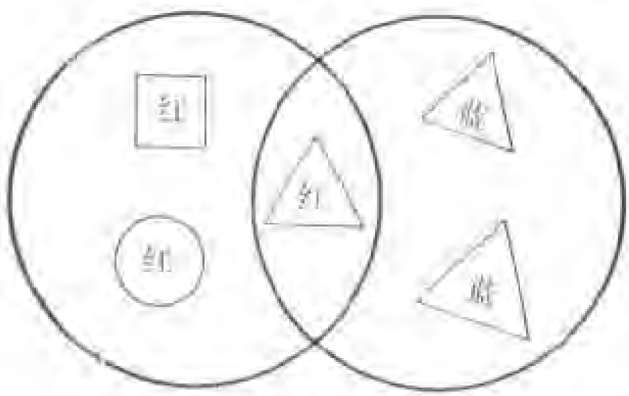
合取(交)

两个表述以“又”、“且”等词连接起来就表示合取的意思。一块积木可以是某些特性或属性的合取。比方说，拿出一块又红又方的积木或一块大且黄的积木。一种与此相关的观念，集的相交，可以用两个画在地板上表示集的大圆圈，或者最好是两个呼拉(hula)圈来加以研究。把圈放在地板上以代表文氏图中的两个圆。

如果一个圆圈或集被指定放置全部“红”积木，那么，所有的红



积木就都应放进这个圆圈里。如果另一个集放置全部"三角形"，那么所有的三角形就都应放到它里面。问题在于对那些"红三角形"该如何分类，因为这些积木属于两个集。为解决这个问题就要把一个圈部分地与另一个圈叠合，红三角形就放在这个叠合的部分。

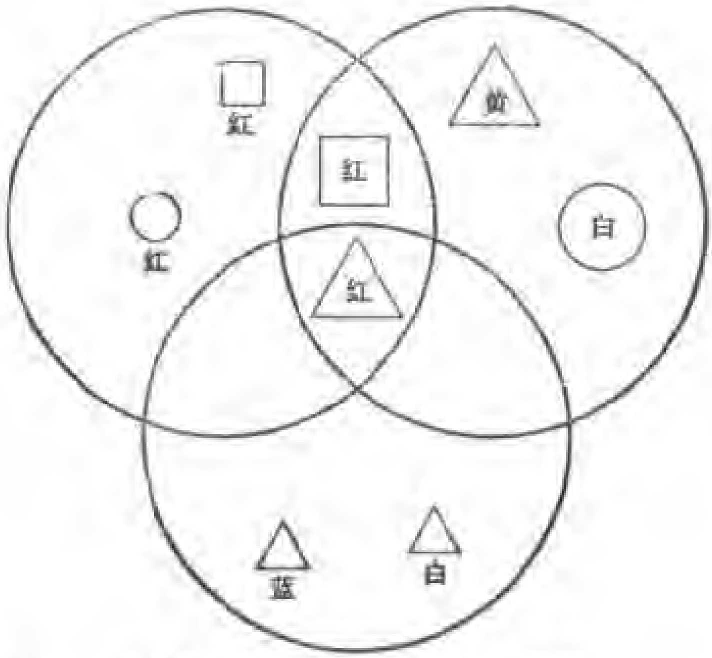


在数学上，这两个集的交就是"红三角形"的集合。这个叠合区域可以说成是两个集的合取，通常以连接词"且"为其标志，即那些红色的且是三角形的积木。

八岁儿童对解决"交"的问题仍感到困难。

合取或交的游戏从简单到复杂有很多变式。较为聪明的儿童能够考虑下页图所示的三个集合的交。

例如，让儿童看一张画着一行不同颜色的树叶和一列绿色物体的图片，图片上行和列的尾部相接。请儿童从另一个物体的集合中取出一个与列和行都"适合"的物体来。皮亚杰发觉 50% 的九



三个集的交——大的、红色、三角形。

绿色物体和树叶的交。

岁儿童仍不能同时完成双重分类或求交集的任务①。

分取

儿童掌握分取观念比掌握合取观念更觉困难。通常用连接词"或"来表示分取。分取的游戏可这样进行：把全部"红色的或三角形的"积木放到圈内或集合内，结果所产生的并合的集就由全部或是红色的或是三角形的积木组成。在数学上，这一观念常被称为集的并(红的和/或三角形的集合)。

---

① 同上，第184页。

蕴涵

在考虑只涉及两种特性"红的"和"三角形"的情况时，如果取出的一块积木不是红的，那么就必然是一个三角形。

如果不是红的，那么（则）它是一个三角形。

这就是蕴涵的逻辑。如果有两种可能性，那么当它不是某一种可能性（红的）时，（逻辑上）就必定是另一种可能性（三角形）。

蕴涵逻辑用连接词"如果……，那么（则）……"表示。

否定

"不是红的"这一思想也可以叫作否定①。可以让儿童取出"不是红的"的积木或"不是玫瑰花"的花来。

九岁的约翰能成功地运用否定逻辑，他能把不是三角形，不是蓝色的，不是小的物体取出来。

否定游戏可以和合取或分取结合起来进行。比方说，把下列积木全都取出来：

黄色或非方形（分取和否定的结合）。

黄色和非方形（合取和否定的结合）。

逻辑符号

那些在具体运算水平用积木表示的观念，也可用符号来进行

① 关于儿童对否定的理解，可参阅皮亚杰和英海尔德的《儿童早期逻辑的发展》一书中的另一补充研究，第137～142页。

研究。下面，我们用字母来表示集，如：

红色的集→R　　方形的集→Sq

厚的集→Th　　薄的集→Tn

逻辑上表示合取“且”的符号是 $\wedge$，表示分取“或”的符号是 $\vee$。因此

$R\wedge Sq$　意即　“红的和(且)方的”集合

$R\vee Sq$　意即　“红的或方的”集合

$NR\wedge Sq$　意即　“非红和(且)方的”集合

这些游戏要求儿童按照一定的符号取出一个适当的集，或向他们呈示一套积木，要求他们用逻辑符号描述其关系。

这样的逻辑游戏儿童之所以能进行，是因为其中的变量并不难以认识，颜色、形状、体积、厚度都限于积木。但当变量和关系变得较为抽象时，儿童就会有很大的困难。

“……的兄弟”以及“……的左边和右边”等逻辑关系

数学和逻辑学包含着对关系的研究，它是分类的基础。正如前面所述，它对儿童来说是非常困难的。在前一节中，我们考察了建立在逻辑关系上的逻辑分类观念，这种逻辑关系存在于物体或物体的集合之间。对那些共同属于某种情况(如颜色、形状、大小等)的物体进行分类，就是一个例子。“属于”就是一种关系。另一种关系是“具有同样的颜色”。这种活动是逻辑分类的开端。

但是直到十一、二岁，儿童才能在完全抽象的逻辑水平上进行这样的运算。现在我们就来讨论儿童感到困难而对成人却似乎很容易的那些关系。

我们讨论两种逻辑的关系：“……的兄弟”和“……的左和右”。掌握这些观念的关系或联系的能力是推理的基础。儿童不能掌握这种概念或观念的关系，是其推理发展的主要障碍。

一种对称关系"……的兄弟"

儿童是把"……的兄弟"关系理解为一种分类的类型吗？皮亚杰①研究了这一问题。他问男孩子下面这句话是否有错误："我有三个兄弟，保尔、琼和我自己。"(如问女孩，则说女孩名字，并用"姐妹"替换"兄弟"一词。)

以下是儿童的一些典型回答：

1．十岁："我有三个兄弟，保尔、琼和我"。这意味他是他自己的兄弟。

2．九岁："这句话没有什么不对的"。儿童把"我有"解释为"我是三个兄弟"，这是以家庭中的包含关系或成员间的较为简单的逻辑取代了"……的兄弟"关系的逻辑。

3．九岁："他有两个兄弟；他不是一个兄弟。其他两个兄弟每人只有一个兄弟。"如果他是我的兄弟，那么我就是他的兄弟，这种对称的关系还未被儿童承认和理解。儿童只从一个角度即他自己的角度来考虑问题。

4．九岁：儿童努力找出每个兄弟各有多少兄弟，"保尔有两个兄弟，琼有两个，我自己有两个，我不知道还有一个是谁，家里共有四个兄弟"。

5．九岁：回答正确。"如果他把自己也作为一个兄弟数进去，那他就只有两个兄弟"。

如果在一个家庭中，有弟兄两人(年龄在五到九岁之间)，问其中一个他是否有一个兄弟，回答可能是"是"，但然后如果问他，他的兄(弟)是否有一个兄弟，回答则可能是"否"。

兄弟之间的对称关系常未被儿童理解，尽管他们已经知道包含的思想或每个兄弟在家庭中的成员资格。(第 17 章将对这一关系作进一步的研究。)

① 皮亚杰：《儿童的判断和推理》(Judgment and Reasoning in the Child)，纽约：Humanities 出版公司，1928，第 74 页。

A 和 B 两种观念之间的对称关系，是指 B 对 A 的关系与 A 对 B 的关系是同样的。如果 A 和 B 是兄弟，"……的兄弟"关系就是对称的，这时 B 是 A 的兄弟，A 也是 B 的兄弟。并不是所有关系都是对称的。比如"高于"这种关系，如果 A 高于 B，则 B 不高于 A。"……的兄弟"关系对一个姐妹和一个兄弟来说也不是对称的。汤姆可以是苏珊的兄弟，但苏珊不是汤姆的兄弟。

儿童常从自己的角度去看待兄弟关系，而看不到自己对于他兄弟的关系。心理学上，把儿童的这种不能免从一种观点出发进行的思维叫做自我中心思维。而且，只有等到儿童达到了形式运算思维的水平，才能逆转思维的顺序。儿童能这样想："保尔是我的兄弟"，但不能逆转过来，从逻辑上得出"我是保尔的兄弟"。

在数概念中，对称性也是一个重要的观念。比方说"等于"关系。我们说 3+2 等于 5，说的是 3+2 对于 5 的关系。"等于"关系具有对称的性质。如果 3+2 等于 5，那么 5 也等于 3+2。儿童在逆转这一顺序时再次会遇到困难。他还没有思维的可逆性。一年级教师只要不是用死记硬背的方式去教授概念，他就会碰到很大的困难，这是毫不为奇的。

左右关系

幼儿把左右看成是绝对的，而不是看成一种相互关系。如果把一支铅笔放在一支钢笔的左边，儿童就可能说铅笔在左边，但这里的左具有绝对的性质，而不是物体之间的相对关系。这很容易用下面的实验来证实：先让儿童看两个物体，如

$A \qquad B$

儿童把 A 作为左，但如果再加上第三个物体 C，

$A \qquad B \qquad C$

那么大部分十岁或小于十一岁的儿童不承认 B 能在 C 的左边。这就是说，左或右的观念还不是一种相对的观念而是绝对的。到十一岁时，有 75% 的儿童能通过这一测验。左是相对右而言的，我

们必须注意儿童是否确实把左作为对于右的关系来理解。我们发觉有些儿童把左解释为"余下、继续存在、仍是"的意思①，于是，如果把 A 和 C 移走，B 就是左。

皮亚杰总结了对左右关系的研究：

> 在最初阶段，儿童认为这些物体中的第一个是"在当中"的 B，他们对同一个物体由于参照物体的不同有可能既为左又为右表示怀疑。但后来（我们的实验清楚地表明，大约在十一到十二岁时），儿童将获得一种完全相对的左右关系的观念，它已跟直接的观察角度无关，就是说，不管观察点如何，其相对关系不变。自此，儿童有了对观察点的互反性的认识，于是随之产生了思维的可逆性（演绎逻辑的一种基本特点）。②

皮亚杰总结道："儿童未能掌握相对性的观念或思想，是其推理发展的主要障碍之一"③。他设计了一个实验，包括12个有关"……的兄弟"和"……的左右"关系的问题。皮亚杰认为：根据正确回答测验题的百分率，可测算儿童的年龄。

年龄	4～5	6～7	8～9	10～11	12
正确回答的百分率	19%	24%	55%	87%	100%

本章内容的教育含义

本章所叙述的活动以及有些将在以后要介绍的内容，对它们在儿童早期教育中的地位，布鲁纳作了如下的概括：

> 人们感到奇怪……让小学一、二年级儿童采用突出逻辑的加法、乘法、包含、序列等基本运算的方式，对实物进行操作、分组和顺次排列等一系列的练习，会是一件有兴味的事……这样一种早期的

① 英文中名词"左"，形容词"左的"与动词"遗留"、"留下"的过去式写法一样，都是 left。——中译者注

② 皮亚杰：《儿童的判断和推理》，第193页。

③ 同上，第96页。

> 自然科学和数学的准备课程，也许会大大有助于产生直觉的和归纳的理解。这种理解在以后正式的数学和自然科学的课程上会体现出来。①

这种以具体材料和教师适当提问为特点的操作型的活动，为儿童达到对于真正理解所必需的运算思维水平提供着坚实的基础。与此相反的做法是在一年级就训练儿童掌握空集或加、减运算的符号系统。正如第9章证明的，儿童对这样的训练几乎谈不上有什么理解。

包含关系与数学教育的心理学

包含关系既涉及逻辑的也涉及算术的运算。然而许多六至九岁的儿童还没有获得必要的心理运算，把部分与整体在量或质的方面联系起来。数学大纲应重新制定，并须对之进行严肃的研究，特别是从幼儿园到小学三年级。

把本章安排在下两章"次序化和序列化"及"基数"之前，是因为儿童对数的充分理解是一个逐渐的过程，它必定涉及对分类和包含关系的理解。这并不是说，对数概念的部分理解不能在理解分类之前获得。举例来说，一名六岁儿童可能成功地比较两组物体的数目，确定哪一组"多些"，即使两组物体的排列有所变化。但可能就是这个儿童，直到一年后掌握了必要的包含关系时，他才能成功地进行分类活动或把报春花与花加以比较。②

如果儿童没有包含关系的概念，那么他在面对一个有四个物体和一个物体组成的五个物体的集合时，就只能把4与1相比较，而不能与5相比较，这时加法对他又有什么意义呢？

正如前面所引述的，皮亚杰根据发生的材料总结道：

> 数概念的发展不会早于类（分类的结构）的发展或……传递关

① 布鲁纳（J. Bruner）：《教育过程》（Process of Education），哈佛大学出版社，1963，第46页。

② 英海尔德和皮亚杰：《儿童早期逻辑的发展》，第xvii页。

系的发展(平均在七到八岁)。①

这样,在数、类和序列(次序化的能力)发展之间的平行性质,就为支持在它们之间存在着相互依存关系,以及反对那种认为存在一种数的最初自发性的观点,提供了第一条证据。②

序列化(次序化)与分类

在第6章,我们把序列化看作是首先获得的有关数的经验的一部分。作为一种心理学的发展结果,应把它与分类的能力相比较。序列化或次序化的能力(如把物体从小到大排列起来),或在运算水平上计数的能力(就是说,对其中的包含关系具有真正的理解),通常都在七至八岁时发展起来。虽然儿童在感知运动水平上已能根据物体的大小来把它们"次序化",但那是一种试误的过程而不是运算思维的结果③。序列化略早于分类,部分原因在于象大小这样的关系可以被知觉到而一个类却不能这样。然而用知觉去解决序列化问题仍是不够的,这种情况我们在第6章中将会看到。

作　　业

带一组五到八岁的儿童到班里来或去访问一所小学。在儿童游戏时,使用上面所说的一些测验去检查他们的理解水平。这一建议也适用于其它各章。

第14章是关于儿童逻辑发展的进一步研究,读者若在学习本章的同时打算继续就此问题深入学习下去,可参阅该章内容。

① 贝思和皮亚杰:《数学认识论与心理学》,第259页。

② 同上,第261页。

③ 同上,第247页。

6 次序化和序列化

在儿童思维中有一种非常原始的关于次序的结构……序列化的结构，它象分类结构一样原始。①

〔诊断活动 3.2〕

在儿童思维中有一种为理解次序这一重要的数学结构所必需的心理学结构，皮亚杰称之为序列化结构。早在一岁时或当儿童正进入感知运动的水平之际，如果大小的差别很明显，儿童就已能将三个物体按大小排列，从而在知觉水平上解决这类问题。但是，当物体的数目增多，或者大小的差别甚微时，儿童就不能把它们排成序列。

我们可用一套小棒（共 10 根，最短的 5 cm，其它每根比前一根长 0.5 cm）来研究儿童对次序概念的理解。

一名四岁儿童对实验者的要求作出如下的反应：

"请给我一根最短的木棒。"他指着右边的一根。"再给我一根稍长一点的。"他取出了一根长的。"给我一根最长的。"他随便拿出了一根长的。"现在请找出最短的一根，接着找出一根比它长一点的，然后再找出更长一点的。"他随便地拿出木棒。

实验者接着把三根短的木棒排成一个阶梯形，要求儿童照此继续进行下去。于是儿童随便取出木棒排列起来，只使棒的上部大致形成一个阶梯样子。（四岁半以下的儿童还不能理解"多于"、"高于"这样的说明数学关系的话。）

① 皮亚杰：《发生认识论》，第 28 页。

马克，一名聪明的四岁半男孩，他能成功地把木棒排成简单的序列。

阶段1或前运算水平的儿童不能对序列加以协调。他们先取出一根短木棒，然后又取出一根长的，再取一根短的，接着又取一根长的；或者他们一次取出三根——一根短的，一根中等的和一根长的。还没有全面的协调。

五岁左右的阶段2的儿童，他们处于前运算阶段的末期。这时儿童能够顺次排列整个序列，但仍是一种试误的过程。他们先试其中一根，然后再换另一根，直到成功。

处于阶段3具体运算水平的六至七岁儿童，掌握了解决这个问题的一种完全不同的系统化的方法。他们首先找出最短的一根，然后再审视剩下的全部木棒寻找下一根最短的木棒，如此进行下去，直到构成整个序列。

这些阶段3的儿童运用的是可逆性（互反性）的结构或逻辑。他们认识到每根木棒既比前一根长，也比后一根短，他们能把“较长”和“较短”的关系协调起来。

这些儿童也在运用传递性的逻辑或结构。他们认识到，如果第三根比第二根长，第二根又比第一根长，那么第三根必定比第一根长。这样，整个序列就构造出来了。可以这样考察儿童对传递

性概念的理解：移开第一根后，再问儿童第三根与它相比长度关系如何。前运算期的儿童说不知道，因为没有“看到”它们在一起。他们的回答只是建立在“看见”某一根比较长这种知觉的中介上。

要在序列化或次序化问题上获得成功，重要的是须在头脑中保持下列必不可少的心理结构：

1．思维的可逆性，或从两个方向排次序的能力，即向前或向后排次序。

2．传递性——如果B比A大，C比B大，那么C也比A大，如此就可以协调一个关系的序列(七岁左右)。

3．确定任何一个具体元素的位置时，知道它的双重关系：比前一个大，比下一个小。

对序列化的研究

学员们常这样认为：儿童回答错误的根源在于实验者问题的提法，或认为儿童错误的性质是知觉的而不是认知的。虽然这两种因素都会引起错误的回答，但它们哪一个也不是问题的根本所在。

有一位进行儿童序列问题研究的学员在报告中说：

> 排列木棒的实验可能因如下原因而遭致批评，即儿童的失败可能由视知觉的原因引起。我起先也这么想，因为木棒之间高度上的差异是很小的。
>
> 但是，在实验过程中，很明显，那些获得成功的儿童使用了如皮亚杰所说的运算。他们在对木棒进行排列时既注意前面的木棒，也注意后面的木棒。那些失败的情况都是在只能确定该木棒比前一根长或比后一根短的时候发生的。显然他们这时仅考虑运算的一个方面。原因不是视觉的——他们能够看出木棒之间高度上的差别。他们不能做到的是：在确定该木棒比前一根长的同时，确定它比下一根短些。

阶段3的五岁儿童。

我们没有在这篇论文中谈到这些内容，我想对此读者可能是有兴趣的。

以上引自巴纳特(Barnette)和亚当(Adams)对40名佛罗里达湖园小学校一年级学生进行的一项未发表的研究。这些学生的数学能力由校方分成四个水平。

实验者感兴趣的是，这四个能力水平组是否与儿童理解某种皮亚杰式任务①的三种水平有关，后者标志着理解数学的准备状态。他们的研究获得了许多有趣的结果，其中之一，是所谓高能力组中仍有为数不少的儿童并未处于阶段3的水平，即对理解数学未达到运算或逻辑的水平。

序列化能力发展概述

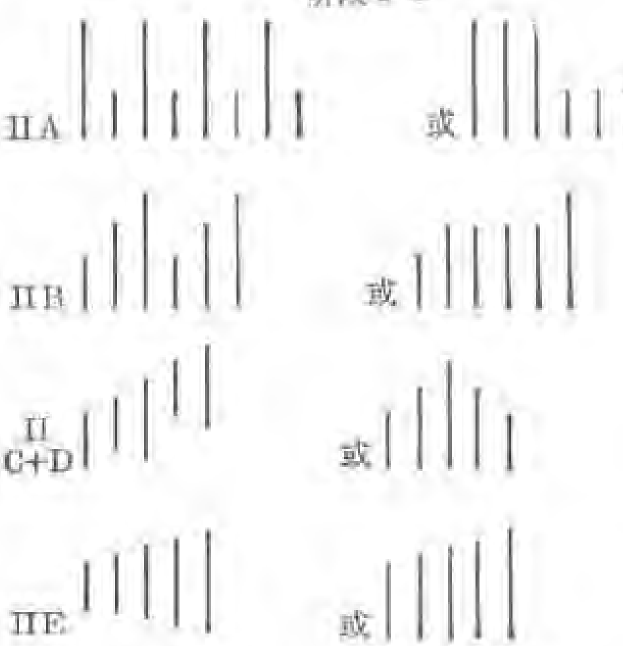
四至五岁阶段1的儿童对按长度排列的一组木棒只有一种"笼统的"印象。如果阶梯形受到破坏，就不能重建它。他们不能把每根木棒与其前后木棒的关系协调起来。

① 数的守恒，序列化和类包含。

处于阶段2C的六岁的米谢拉，让她按长度排列麦秆时，她只看麦秆的顶部而不管底部。

五至六岁阶段2的儿童有了一种"直觉的"序列观念。他能够建立部分的序列，或通过试误的方式正确地建立整个序列——先试一根，再试另一根。但他仍不能对必要的运算进行完全的协调，这可以通过给他几根"忘了"的木棒让他把它们放到已经排列好的木棒中去的方式检查出来。(实验者可向儿童做一次示范)。阶段2的儿童认为序列已经建好了，不需要再把多余的木棒插入其中。

阶段2①



六至七岁的阶段3的儿童，能用系统的方式很快地把木棒顺次排列起来，而只有很少的错误，而且错误很快就被改正。把附加

① 皮亚杰和英海尔德:《记忆与智慧》，第29页。

的或"忘记的"木棒插进去是不成问题的。儿童能看出任何一根木棒，比如 D，它比 C 长而比 E 短。也只有在阶段 3，通过必要的协调或心理的推敲，儿童才能从两个方向，即从小到大或从大到小来构造序列。他是在一种逻辑的或运算的水平上，而不是象阶段 2 儿童那样，在知觉水平上进行这项工作的。在知觉水平上，序列是通过尝试和观察缓慢地建立起来的。

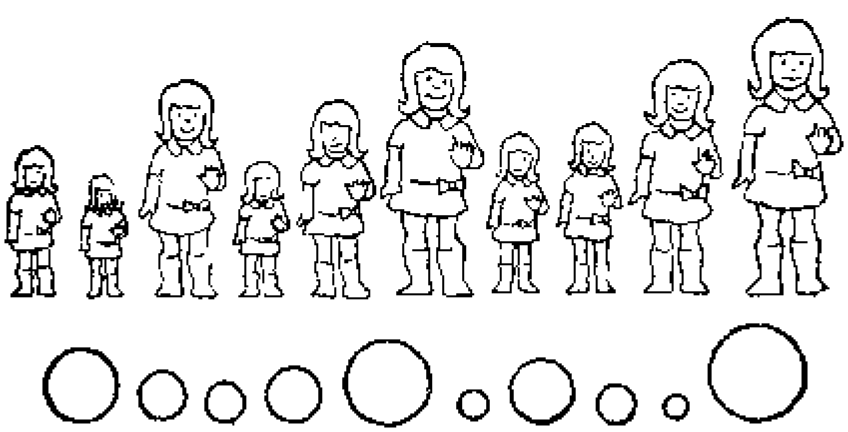
序列的对应和次序的对应

〔诊断活动 3.4 和 3.5〕

如果儿童能够成功地把一组木棒按照从最短到最长的顺序加以序列化或排列起来，那么他也能建立一个双重的序列——就是说，把两组物体从最短到最长排列起来，并在两个集合之间建立一一对应的关系吗？皮亚杰发现，对儿童来说，这并不比建立一个单独的序列困难更大。

建立双重序列并不需要使用数目，只要从一排物体中取出一个，并决定另一排物体中哪一个"属于"它，建立一种次序的对应。

例如，有 10 个布娃娃排成一排，每个大小不一，还有一排皮球，每个球的大小也不一样，当儿童为每个布娃娃去找适当的球时，他会遇到什么困难呢？



四岁半到六岁的儿童(阶段 1) 按任意的次序排列布娃娃。当要他先排最大的再接着排较小一点的时候，他就把次序改变了一下，但仍不能按大小正确地排列。问一名五岁儿童该把哪个球给最大的布娃娃，他正确地指出了最大的球。再问他该把哪个球给最小的布娃娃，他也指对了。但随后要求他把布娃娃和球都排好，使每个布娃娃都有应该属于她的球时，他却不会做。

从五岁半到七岁半的阶段 2 的儿童，能够解决序列对应的问题。但他们使用的是知觉的试误方法。他们先试一个，然后再试另一个，直到最后建立起布娃娃和球之间的序列对应。

问一名阶段 2 的六岁半儿童，哪个球该给最大的或最小的布娃娃，他能正确回答出来。但当实验者指着第五个大的布娃娃，问他应把哪个球给这个布娃娃时，他却指着第七个大的球。问他是否有一种确证的方法，他说："象这样做。"于是他把布娃娃按大小排列：先是 10, 8, 9, 然后是 10, 9, 7, 8, 再后是 8, 7, 5, 6, 最后是 6, 5, 4, 3, 2, 1。当他看着排好的布娃娃时，他"看出"了第七个布娃娃不应该在 8 和 9 之间，于是纠正了错误。

随后，他把球放在布娃娃的对面，但错移了一个位置，以致在他认为完成任务的时候，有一个布娃娃没有得到球，一个球没有布娃娃。问他布娃娃和球的数目是否一样，他说球要多些。叫他数数看，他发觉每组都是 10 个，于是他认识到，布娃娃和球的数目一样。随后他纠正了自己的错误，正确地排成两个序列并作出了正确的一一对应，使每个布娃娃都有了"自己的球"。

总之，在阶段 1，儿童不能作出序列对应。在阶段 2，儿童能这样做，但用的是建立在试误基础上的知觉方法。

在阶段 3，儿童运用运算或智慧的方法来解决这类问题。但阶段 2 和阶段 3 在方法上的差异并不是很容易觉察出来的。在阶段 3，布娃娃和球之间所建立的对应真正是次序的或以数标示的，它与阶段 2 那种仅是知觉的对应大不一样。阶段 2 的儿童必须使

七岁时开始能够进行双重序列化。

所涉及的数的观念引起他的注意，他们在把布娃娃排成序列之前，一对一对地并排测定它们的大小。

大约七岁的阶段3儿童能同时考虑全部布娃娃和球，而不是一组组地或一对对地考虑。阶段3的儿童甚至可能觉得没有必要把球排成序列。他们之中有的人能直接作出对应——取出最大的

六岁时文娣处于阶段3水平，她能作出序列的对应——为每个布娃娃找到"正合适"的木棒。

球给最大的布娃娃，再把次大的球给次大的布娃娃，如此等等。

其它阶段3的儿童也能直接按照大小正确地把布娃娃和球排成两个序列，并使每个球放到该得到它的布娃娃面前。如果把一排布娃娃或球散开来，那就不仅涉及数的守恒问题，而且儿童还必须找出某些不同于知觉手段的方法，以确定哪个布娃娃该得到哪个球。要求阶段3的儿童找出该给某个布娃娃(如第6个布娃娃)的球，他们能运用次序对应的观念——即数出布娃娃在第6个位置，然后推断出她必须在一排球中数到第6个位置，找出该属于这个布娃娃的球来。

序数与基数的关系(次序的和基数的对应)

〔诊断活动3.3〕

儿童必须学会将序数观念与基数观念联系起来。为了确定一个集合中有多少物体，必须把物体以某种方式次序化，以便每个物体能被数到一次并且只被数到一次。

我们不用10根木棒而用十张卡片作为实验材料。每张卡片都比前一张长一个计算单位，如果A为1，则B为A的2倍或1+1。同样，C为A的3倍，D为A的4倍，如此等等。

在让儿童把这些卡片从最短到最长顺次排列之后，问他在B中有几个A，在C中有几个A等问题。也可不用字母，指着A问儿童，多少张“这样的卡片”能合成一张“这样的卡片”(指B)或“这样的卡片”(指C)，等等。

儿童能理解上述问题吗？当问到儿童要用多少张A才能合成一张象“这样的卡片”(如指着第六张卡片)时，如果他为了求得答案，需要把卡片A放在第六张卡片上比一比、量一量，那就说明他还不懂得序数与基数的关系。然而，如果他从A开始数，发觉指定的那张卡片是第六张，于是就能推断出，它肯定含有6张A

来，那就说明他已认识到了序数与基数的关系。如果卡片在第六个位置(序数)，那么它的基数值用 A 或 1 作单位就必定是 6。

小于五岁的阶段 1 的儿童，不能根据长度将三或四张以上的卡片次序化。问他需用多少张 A 来组成 B，他回答是"2"；对于组成 C，他说是要"4 张 A"，后来自己纠正为"3"；对于组成 D，又说是"5"而不是"4"。

实验者为他把卡片从最短 (A) 到最长 (K) 排列好，然后问他：

"我们是怎样看出这张(指着 D)比这张(指 C)大一点的？"

"看这个。"他指着 C 与 D 高度上的差异。

"每数一张要多多少呢？"

"多 1"。

"我们要用多少张这样的卡片(A)才能组成这一张(D)呢？"

"五张，不！三张。"

"倒底多少？"

然后他从 A 到 K 数着"1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10"，数出了整个序列，但再问他用多少张象 A 这样的卡片能组成象 D 这样的卡片，他的回答仍是"5"①。

阶段 1 的儿童会数卡片，知道两张连续的卡片之间相差 1 或 A 是 1。但他们不能运用某张卡片(如 D)位置的序数来推断：由于它在第四个位置，所以必然含有 4 张象 A 这样的卡片。

在阶段 2，大约五岁左右，儿童能运用试误法把卡片从最短到最长进行排列。但是当卡片是任意取出或排列的顺序反过来，不是从左向右而是最长的卡片从右边开始时，儿童就感到困惑。

一名五岁的儿童先构造了一个 A, B, C, D, F, G 的序列，然后插进去一张 E，他通过试误方法，正确地排出了整个序列。

"如果我把这张(指着 B)拿出来，我们可以做成几张象 A 这样的卡片？"

① 皮亚杰：《儿童的数概念》，第 136 页。

"三张。"

实验者把 A、B 并排放在一起，儿童自己纠正道：

"不！两张。"

"拿出 D 呢？"

"四张。"

儿童正确地排好了序列，然后实验者问："这一张呢？"（指着J。）

"九张。"

"这一张呢？"（指着H。）

"十张。"

"这一张呢？"（G）

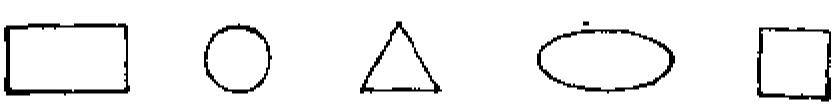
"十一张。"

在阶段3，从六岁到十一岁，儿童对问题有了完全的理解，即实现了序数和基数的运算的协调。实验者可以在序列中随意选取卡片来问儿童，儿童都能迅速、正确地回答出来。如果指出的卡片在第七个位置，那么儿童知道这张卡片含有七张象 A 一样大的卡片。他可能往下数——10，9，8，7，而不是从 A 或1开始进行较长的计数。如果卡片是乱放的，而实验者指的是卡片 G，儿童则把卡片从 A 到 G 排好，然后数一数，得出"7"的答案来。

这样，序列就不再是刻板的而是灵活的或具有运算的性质了，每张卡片都可以与其它所有卡片联系起来加以考虑。

不具有长度关系的集合

对于不一定具有象长度这种关系的物体的集合，也应加以研

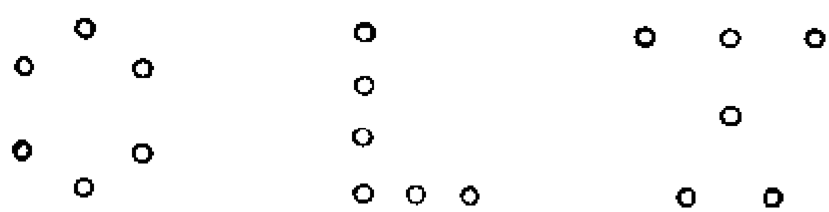


究。例如，儿童能按照上图的样式，复制一个跟它一样的集合吗？

儿童能把这排模型的次序倒转过来，从最后一个(正方形)开始重新构造一排模型吗？为使这一任务获得成功，儿童再次需要皮亚杰称之为思维可逆性的智慧结构。

许多有关次序的游戏都可以让儿童玩。给出一套如上图所示的剪纸或一套形状相同但每张颜色不同的剪纸，可以让儿童把这些剪纸排成一排，然后把它与别的儿童排出的进行比较，看看它们有什么异同之处。

虽然我们不告诉儿童五个物体的排列次序有多少种可能性，但有趣的是，它的数目有5的阶乘之多。排列五个物体有$5\times4\times3\times2\times1$即120种不同的方式。安排六个人就座有$6\times5\times4\times3\times2\times1$即720种方式。



由于物体的位置不只是形成一横列，因此象上图这样的其它形状也应予以考虑。儿童能再造这样的次序，并讨论上、下、边、当中等特征吗？当然，这是几何问题。基数与物体的正确的数目有关，而序数则描述某个特定物体的位置。

学习书写数字

通常用来表示数的抽象意义或概念的符号，我们称之为数字。

罗马数字过去是表示多少的标志，例如“两”表示成II。但在印度-阿拉伯记数系统中，我们现在所使用的象“2”这样的符号已不具“多少的”外观标志了。它们与2000年前的原始形式相比，已发生了很大的变化，不过仍可能存在着某种联系。比方说，数字“3”

过去可能是三道横“≡”，后来用两条弧把它们连接起来成为“∋”。同样，“2”可能是两道横“=”再用一条斜线连接起来的。

儿童入学时，口头上已经会“按顺序”数“1，2，3，……”了。就是说，他们知道了数的言语名称，也知道它们产生的次序。因此，序数的序列在基数序列之前就被儿童正确使用了。儿童在知道“7”这个数字表示多少之前，就已知道它在“6”的后面。

儿童知道了数字的名称，这就为他们学习如何书写以及为在教师与儿童之间进行有意义的交流提供了可能。用来临摹和复写的数字的范型，常按顺序展示，这样就可使儿童看清什么数接在什么数后了。数字也应与它所代表的基数相联系，如在画着两个物体的画片上标上数字“2”和“两”这个词。

可以记录各种类型的数字材料，例如每天有多少学生缺席。画一张标着日期的表格，这对儿童完成记录任务有所帮助。对那些愿意学会怎样记录或愿意写出他所“听到的”数字的儿童来说，这是一项具有“社会”意义的工作。

要写好一个数字，儿童须知道从何处下笔及顺着什么方向运笔。下图中的圆点表示书写的开始点，箭头表示书写的方向。

手写体

草写体

虽然数字书写的方式有好多种，但使用较为普遍的是直线和圆形线构成的手写体。大部分学校在低年级教手写体而不教草写体，因为许多儿童还不具有书写草写体所需要的肌肉的协调。

书写数字的一般规则是从顶部开始往下写。5、8是例外。它们是在顶部终笔。教师可以利用黑板，向儿童指示正确的书写起点、字的比例、如何运笔以及在何处停顿。一种很好的演示教具是一套大卡片，每张卡片上写一个数字，用圆点标出开始点，用箭头标出书写的方向。

也可先用白粉笔在黑板上写上数目，然后叫儿童用彩色粉笔照着样子写。以基线或方格作为参考框架也许有助于书写。上端的基线对有些数字也是很有帮助的。

书写数字的困难

有的儿童甚至在他面前放着范字也不会正确地书写数字。这可能有知觉的、认知的或肌肉协调方面的原因。有些儿童区分不了6和9，以及2、3和5。这就要求儿童在写好字后，指出他所写的是范型上的哪一个字，这样才能确定他写得是否正确。

有的儿童可先让他们用手指在范字上描划，由此产生的动觉对他们的书写会有所助益；然后再让他们在自己的纸上写。

有的儿童把某些字写反了。教师应不断观察并提醒儿童注意书写的起点和笔划方向，及早纠正他们的书写错误。“3”经常被反写，看上去象个E。若儿童总是产生同一类型的错误，这就应引起临床的注意。诊断和治疗常常是在发觉倒读后进行的。

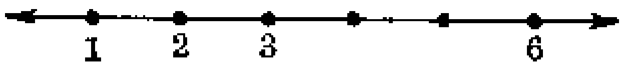
在沙盘上写数字可能也有帮助。根据皮亚杰的观点，要“认识”一个物体就得对之施加“动作”，例如沿着一个图形的轮廓描划——不管它是象正方形那样的几何图形，还是象“2”这样的几何图形。对数字来说，仅用眼去看是不够的。

另一类颠倒问题发生在用两个数字表示数的时候，如错误地用61来表示16。对儿童来说，这是符合逻辑的，因为在“16”(sixteen)一词中，首先发出的音是6(six)，而书写顺序正是从左至右。在强调十位应写在个位左边的“位值”观念后，这类颠倒将会消失。

在一年级，还可以做下列练习来强化对序数的经验：

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{6}$

也可用一根数轴进行同样的练习：



在上述两种练习中，重要的是数字在序列中的位置。

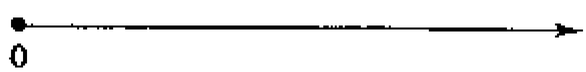
数　线

如前所述，数线是一个非常有用的发明，它能帮助所有年级的儿童把算术的概念具体化。正如我们在讨论中所说明的，数线是用来帮助儿童理解序数概念的。但也能用它来教加法、减法、乘法和除法运算。教分数也很有用。我们在以后几章研究这些概念时，都要用到数线。

数线是一个几何观念，它包含着空间位置的数学。它用一根一端带有箭头的线表示整数，箭头表示这根线可以沿这个方向无限伸展下去。

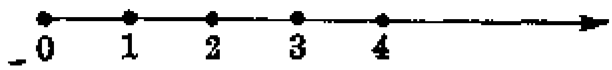
现在，假定我们在线上标出一点：

这一点可以随便标志任何数。在考虑整数(算术数)时，可以把这点定为 0。



我们可以在离开 0 的任何距离处选定另一点，把它标为 1：

于是就有了一个单位线段，由它就能用整数来命名其它的一些点，每个数字离开前面一个数的距离都如0到1那样长：



在线上加上这些点后，就可用它来说明我们要研究的问题了。

在这样的数线上，“1”的意思是指从0到1的一段线段。不要用线上“1”点的位置来表示1，而要用手指从0到1划一个弧形说这是“1”。学员们有时说到“3”时，从1跳到3，其实这不是“3”而是“2”。

作　业

1．培养儿童运用具体材料去复制一个集合的能力，如用不同形状的剪纸品或用纸剪成的“裤子”、“上衣”等做材料。用纸夹把“衣服”串在“晒衣绳”上。测验五至七岁儿童“顺次排列”的能力：先给他们看你的挂着“衣服”的“晒衣绳”，然后要他们也挂出一排“衣服”，并使两者一样。再检查他们是否有“反向排列”的能力，要他们从相反的一端开始，使他们的“晒衣绳”看上去与你的“正相反”。可逆性的概念是理解数概念所必需的。

2．给每个儿童五张形状相同但颜色不同的一套剪纸（如正方形），要求他们把这些剪纸排成一行，并比较各自排出的是否相同或相异，并说出差异在什么地方。

3．用83页上所介绍的10根木棒去测量五至七岁儿童顺次排列的能力。看儿童是否有传递性的概念。

4．测验五至七岁儿童在两排物体之间作出次序对应的能力。

5．测验五至七岁儿童把基数和序数相联系的能力。

6．观察六岁儿童书写数字，注意他们书写过程中的困难所

在，讨论对那些可能需要帮助的儿童怎样给予补救。

7. 如果有五岁儿童可作为研究对象，试教他们如何书写数字——如他的岁数或兄弟姐妹的岁数。

8. 阅读皮亚杰和英海尔德所著的《记忆与智慧》一书的第一章“简单序列的构造”，写出读书报告。

7 基　数

假定儿童只是从教学中获得数的观念和其它数学概念，那是一种极大的误解。相反，在相当程度上，儿童是自己独立地、自发地发展这些观念和概念的……儿童在能够发展数的概念之前，必须先掌握量的守恒原则。①

许多儿童，特别是从幼儿园到小学二年级的儿童，在他们还没有理解集合的"多少"或基数的意义之前，就被教这些内容了。关于数的系统的学习，包括基本的加法和位值概念，应尽可能推迟到儿童能够掌握那些诊断性质的活动之后再开始。对一般儿童来说，这大约在六岁半至七岁之际。在这之后，教师的教也不能如上面引文中皮亚杰所指出的那样，仅是"告诉"而已。教师应该向儿童提供学习的环境，在儿童达到一种良好的准备状态时，激发他们自己进行所需求的学习。这涉及具体的材料和适当的提问技巧②，目的是让儿童在操作或把握物体时自己从中抽象出所包含的数学结构。

类　与　数

计数是首先教给幼儿的数观念之一，但对他们来说，背出来的

① 皮亚杰："儿童是怎样发展数学概念的"(How Children Develop Mathematical Concepts)，《科学美国人》(Scientific American)，1953 年 11 月，第 74 页。

② 见书后的附录一：诊断活动目录。

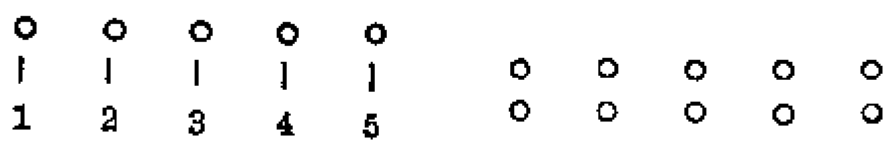
数几乎没有什么意义。儿童在他们抽象出数的观念之前，已从周围的物质世界中学到了很多东西。数的学习将产生于他们对物质世界的分类经验。

当一名儿童四下环顾，看到周围的许多事物——它们具有各种不同的形状、大小和颜色，他开始根据物体的某种性质或特征来认识物体或把它们加以分类。当他能指出物体并说出它的名字，如“卡车”、“房子”、“妈妈”时，父母就称赞他。他可能把汽车看做是一种“他乘坐在里面的东西”，“大街上的东西”，“会移动的东西”或具有某种“形状”、“大小”和“颜色”的东西。他开始把他周围的世界整理或分成“人”、“房子”、“动物”等类别。许多科学活动都与对物质世界中的物体的分类有关，在生物学中首先是动、植物两大类。这里所说的类与集合是同义的。

分类根据的是某一集合的物体所共有的性质，如大小、形状、颜色或体温。数也是任何一个物体的类或集的一种性质，但它不是一种象上面所列的物理性质。数向儿童提出了一种特殊的挑战，因为它们不是象一匹马或一辆车那样的客观的物体。

数的守恒

可通过计数教儿童确定一个集合的数目，计数就是教儿童学习次序为1, 2, 3, 4,…的一组数的名称，再把这些数与被计数的一组物体对应起来。



那些不能把数的名称与被计数的物体对应起来的儿童，他们懂得数的实际意义吗？

有一名儿童在观察上右图所示的两个集合的念珠时，他承认

它们的数目是一样的。但是，如果把一个集合的念珠散开来，他仍认为两个集合的念珠一样多吗？大多数五至六岁的儿童回答散开的那个集合多一些。对他们来说，数概念就是空间形状或所占空间的大小。散开的念珠占了较多的空间，所以念珠较多。这些儿童还未达到数的不变性或数的守恒性阶段。

六岁的约翰已处于具体运算阶段，他获得了数的守恒性。

儿童对数的守恒性理解的缺乏程度也可以通过下面的活动揭示出来：让一名五至六岁的儿童从一堆念珠中分别用两只手一个一个地取出念珠，放在两只瓶内。

即使儿童是同时把一个念珠放到 A 瓶，另一个念珠放到 B 瓶，他还是认为 B 瓶中的念珠多。尽管儿童能数出和说出每只容器中的数目(如 30 个或 100 个)，但他仍说 B 瓶多，因为 B 瓶中的念珠堆得较为高些。

发展的阶段

用 1, 2, 3 标志的阶段一词，在以后叙述时，指的是对某一概念的理解水平。阶段 1 表示毫无理解，阶段 2 表示部分理解，阶段 3 表示完全理解。这些阶段不应与第三章所介绍的儿童发展过程中的感知运动、前运算、具体运算和形式运算的阶段或时期相混淆。

但这两种阶段也有联系。阶段 1 或无理解阶段是前运算的特点，阶段 2 或部分理解阶段是前运算与具体运算之间的过渡，阶段 3 或完全理解阶段，处于具体运算水平。有些概念还有阶段 4，这是指在纯抽象或形式运算水平上的完全理解。

学习等价概念的阶段

两个集合真正的或持久的等价意指这两个集合有同样数目的物体而不管它们如何排列。皮亚杰主张："尽管一一对应显然是我们头脑比较两个集合的工具，但以它的(在前两个阶段儿童中的)原始形式来证实两个集合等价，还是不够的。"①

〔诊断活动 3.6〕

因为对两个互补的集合，比如布娃娃的集合与衣服的集合或餐巾的集合与儿童的集合，把它们的元素一一对应或配对的困难较小，所以应先研究这样的集合，以后再进行同质元素集合间的配对，比如一个布娃娃的集合对另一个布娃娃的集合或一个弹子的集合对另一个弹子的集合。

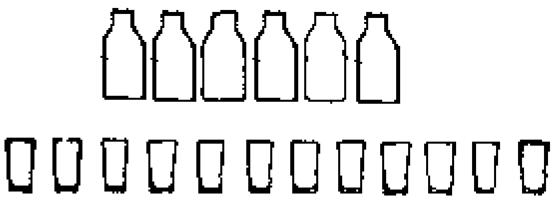
先进行互补集合的配对。皮亚杰用一个 6 只瓶子的集合和另一个 12 只玻璃杯的集合来进行实验：

儿童学习一一对应和等价的过程可分为三个阶段。在阶段 1，

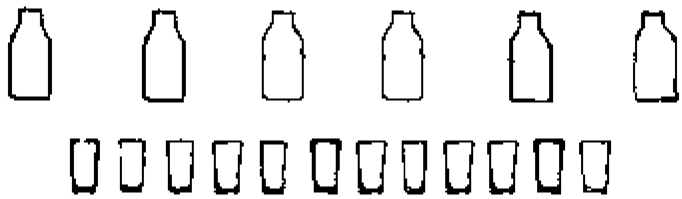
---

① 皮亚杰：《儿童的数概念》，第 80 页。

儿童不能把一个集合中的物体与另一个集合中的物体配对(确定严格的对应)。这通常在四至五岁的年龄。



叫一名四岁的幼儿取出象瓶子一样多的玻璃杯或给每个瓶子取出一个玻璃杯来，他就把全部12只杯子都取出来，放在瓶子的旁边，只不过排得挤一些而已。



问他玻璃杯多还是瓶子多，他说瓶子多。要求他给每只瓶子放一只杯子，于是他把两排摆得一样长。

这时他认为玻璃杯与瓶子一样多了。如果随后把瓶子放得比杯子再散开些，他又认为瓶子多了①。

这一阶段的幼儿不能建立一一对应(给每个瓶子配一个杯子)。儿童评价的根据是对物体集合的长度或全部集合所占空间的“笼统的”感觉，而不是其数目。当6个瓶子比12个杯子放得更散开时，它就比杯子“多”了。

阶段2是一个过渡阶段，幼儿这时能把一个集合中的物体与另一个集合中的物体配对。但当一个集合中的物体散开一些时，他仍然没有“持久等价”或守恒思想。儿童这时用的是试误的方法。

① 同上，第43页。

让一名处于阶段2的儿童为每只瓶子拿出一只杯子。他估计需要9只杯子与6只瓶子相配，但在配对时，他认为多了3只杯子，于是把它们拿开。但如果把杯子放得靠近一些，瓶子放得散开一些，这时他就以为瓶子比较多了。他还不能充分理解数的不变性。

阶段2的儿童是在我们称之为“直觉的”水平上解决问题的，即他的判断是建立在全部物体“看”上去如何或建立在感知觉的基础上的。因此，他与阶段1的幼儿犯了同样的错误，认为散开的集合有更多的物体。但是，当他把两个集合中的物体配对时，他明白这是错误的，并为这一矛盾而感到困惑。这样，他就可能通过试误而获得正确的答案。他运用“触觉”去操作物体以证实自己的想法，然后又用视觉去判断其结果。他还不能象第三阶段的情况那样在抽象的或纯智慧的水平上解决问题。

在第三阶段，儿童不仅掌握了配对或一一对应的观念，而且也掌握了持久等价的观念。他把6个瓶子与6个杯子配对，即使集合重新排列之后，他也坚持认为它们的数目是一样的。在这一阶段，作为等价基础的一一对应的运算或观念得到了发展，并且与纯直觉或视觉相比已占压倒优势。集合的数目不再是不确定的或取决于集合的形状或完形了。他不再需要运用试误方法去确定自己的答案是否正确，而是以不变性的逻辑为基础作出解答。

四至六岁儿童在解答简单的数的问题时所犯的概念错误的程度或范围及其不可捉摸的情况，从成人角度来看几乎是难以置信的。只有通过仔细的提问，才能明白许多儿童可能作出的解释。比如，有一名五岁的儿童，给他3分钱和3朵花，并告诉他一分钱能买一朵花。现在问他这三分钱可买几朵花。他不相信两个集是等价的。这时笼统的或占据空间的观念占了优势。一名六岁的儿童，面对7分钱和7朵花的同样问题，即使他数了每个集合，发觉数目都是“7”，他仍说“钱多，因为有一分钱超过(花的)那一端了。”很明显，

在这一阶段,数是无意义的,尽管儿童掌握了一一对应的关系。

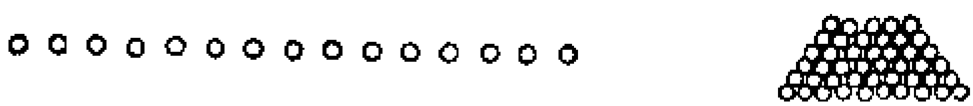
皮亚杰总结道:使人感到惊奇的是,这些儿童尽管用一分钱与一朵花进行交换,他们也不能设想两个集合是等价的。对物体占有空间的知觉(总括的比较)比言语计数起的作用更大①。

同质集合的对应

〔诊断活动 3.7〕

前面的讨论和实验是在较低水平上对一一对应和集合的等价进行研究,在这个水平上,配对的物体是互补的,并且给儿童以明确的指示,要求他把一个集合中的物体放在另一个集合中的物体的对面,几乎不考虑数目而只提些象"哪个多些?"这样的问题。

在下面的研究中,集合的元素不是互补的,而是同质的物体。比方说全部是纽扣或全部是念珠。更重要的是,不是给儿童两个专门的集合让他去配对,而是向他呈示 15 个纽扣的一个集合,要求他从一个较大的集合中取出"同样的数"来。



虽然这与互补集合间的配对相比多少要困难些,但同样能观察到三个阶段的发展层次。阶段 1 的儿童随便取出任意数目的纽扣,把它们按模式排列。

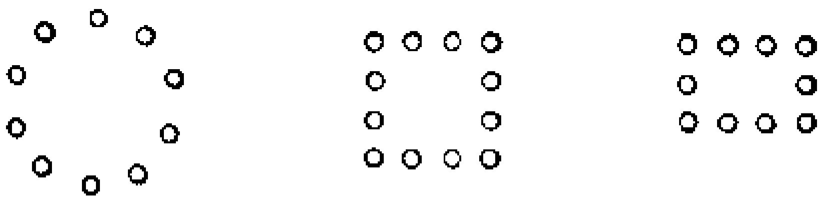
问他这模式中有几个纽扣(15 个),他说不知道。再问他为什么两个集合是一样的,儿意答道因为他已看过(检查过)两次了。

显然,大声计数和物体对物体的实际配对还不能使这一阶段的儿童懂得两个集合的等价关系。他仍以为数目多少是依赖于物体的各个集合所占据的空间的。尽管儿童会计数,但他完全可能是在不理解的情况下这样做的。因此,如果 12 个物体跟 15 个物体占有同样的空间,那么它们就有"一样的数目"。通过仔细的询

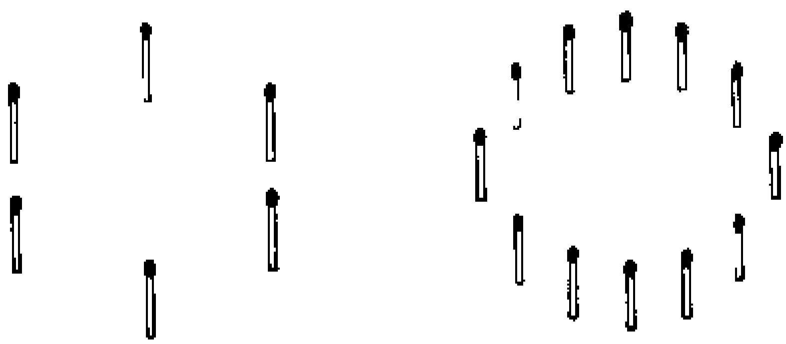
① 同上,第 59 页。

问可以揭示，当儿童说"一样"的时候，他实际上是否是指物体的数目，而不是指占有的空间。

还有一种可供选择的方法，是让儿童用算珠组成如圆、正方形和矩形那样的封闭图形。



一名阶段1的儿童在再造一个由10个算珠组成的圆时，排成了由14个算珠组成的圆。同样，对一个6根火柴的圆，他用了12根火柴去排列。问他每个集合中的火柴数目是否一样，他回答"是"。



还有一名儿童，他在试图再造那些形状取决于元素数目的图形(如∴或∷)时，获得了成功，但在试图再造一个包含9个算珠的正方形(下左图)时，他摆出了一个包含15个算珠的正方形。

在试图再造一个直角排列的图形(如上右图)时，他用了比原图形更多的算珠。

这一水平的儿童所具有的量或数的观念只是"多"或"少"，根据可能是算珠所占空间的大小，因而导致一种错误的结论。

在阶段2，儿童能够取出适当数目的算珠与某一已知集合的元素一一对应，但如果一个集合被散开或聚拢，他就不敢断定它们的数目是一样的了。他的方法是试误法。在一种情形下做对了，在另一种情形下也可能做错。当知觉的歪曲程度增大，如当算珠更多或一排物体更长时，他就求助于感性的判断了。

在阶段3，儿童认识到了当物体的间隔距离改变时，它的数目并无变化。因而他获得了持久等价的观念。他能复制一个任何形状的集合，如圆、正方形、直角或十字形——数目上正确无误。他运用数的逻辑或可逆性作为回答的基础。

思维的可逆性

在阶段3，对知觉束缚的摆脱，标志着一种建立在智慧水平而不是知觉水平上的运算的开始。儿童已达到了这样的守恒性，即当两个等价集合中的一个以至两个重新排列时，例如一个集合的物体从一列变成一堆或一团，另一个集合从一堆变成一列，他认识到每个集合的数目并未改变，即从堆到列与从列到堆的两个集合，就其数目而言仍是一样的。

阶段1、阶段2的特点正是缺乏这种可逆性。可逆性对加法概念来说也是必需的。如果儿童知道3+2=5，他也能解答5=□+□或3+□=5的问题吗？一年级的教师在教这些概念时会感到困难，这是不足为奇的。

皮亚杰由此总结道：

> 根据我们的观点，这种发展的基本要素是动作的完全可逆性，它包含于儿童的行动程序之中。儿童这时进行的运算不再直接专注于直觉所得到的结果。可以说，它本身是自由的，能够进行反向的运动。（这样）每一转换就能被相反的转换所补偿，以致任何一

种排列都可变成其它的任何排列，反过来亦是如此。①

如此一来，儿童就不再依赖图形的形状而完全是参照存在于两个集合元素之间的一对一的关系进行工作了。他在分解整体和协调两个集合之间的数的关系方面第一次获得了成功。他的动作组成了一个思维的可逆系统。他能将一个集合向不同的形式转换，并知道它的数目仍保持不变。

确定数关系的三种计数水平

关系这一概念不但在物理学领域而且在数学领域也同样是重要的。它既为逻辑中的概念也为数学中的概念奠定了比较的基础。儿童首先获得的一些数学经验包括对两个量的关系的认识或比较。它们是"一样"或"相等"还是一个比另一个"大些"或"小些"呢？这些"较大"、"较小"和"一样"或"相等"的关系，为儿童考虑关于量和数的一些最初的问题提供了基础。在教室或游戏室内的各种活动中，儿童常接触到"够了"、"一样多"之类的问题。例如：纸（或蜡笔、餐巾等）够了吗？

为确切回答这些问题，就必须"计数"。教师应该知道儿童的计数能力有三种水平。

死记硬背式的计数

儿童最先学会的计数常为一种死记硬背的活动。在入学之前，父母就可能认为他们已教会孩子计数了。儿童已记住了一连串的声音"1, 2, 3, 4, ……"，因此说他能"数数"了。然而，当问儿童手里拿着几个东西时，他的答案可能是猜出来的。他的计数纯粹是死记型的或记忆的学习。他还未懂得通过把数与被数物体配对而建立一种一一对应的关系。

① 同上，第89页。

理性的计数

一一对应关系或配对是确定一个集合的数目的基础。儿童需要许多配对性质的准备活动，例如衣服对布娃娃，牛奶纸杯对吸奶麦管，儿童对纸张，铅笔对纸张等。

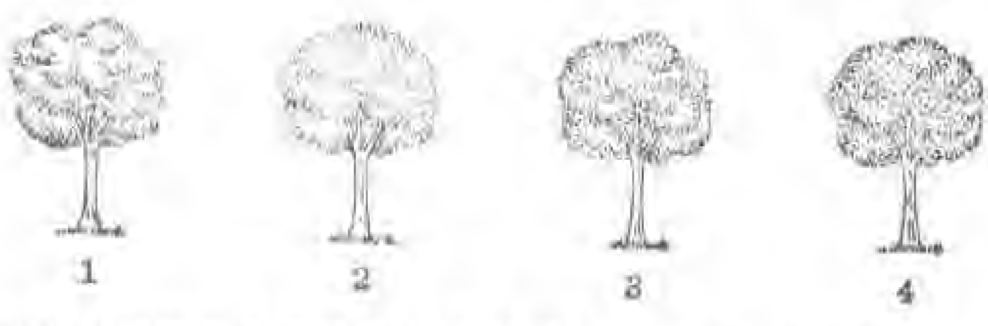
让几名四～五岁的儿童看一列物体，要求他们再排出另一列跟它一样多的物体来。他们排出了下面的样子：

(原列)

(儿童排出的一列物体)

这种活动适合在具体运算以前进行。应该让儿童看见并能拿到物体。在进行这些三维空间的活动之后，应该继之向儿童提供绘有集合图的印刷品或书籍等材料，让他们在两个集合的一对物体之间画上联线。当然，这是在向抽象水平过渡，因为图是三维物体的二维表示。

在把图片上的物体进行配对后，儿童学会把数字或数的名称与物体配对。



随后再给他们看几个包含不同数目物体的集合，让他写出每个集合中的物体数目。

当他们能把数的名称与集合中的物体一一对应起来时，比如说，他说上面右边的集合中有“4”个物体，这就说明他开始理性地计数了。教师也许认为儿童这时已理解了“4”这个数的意思。但实际上这时儿童的数概念是非常脆弱的，以致如果让他再看另一个以不同式样排列的4个物体的集合，比方说排列得更散一些，那么他就可能说这个散开的集合中物体要“多”些。这些儿童还未达到守恒和持久等价的阶段，即使他们能正确地“计数”。

持久等价的计数(数的守恒)

对那些确定儿童是否能在真正理解的水平上进行计数的活动，我们已作了详细的描述。问题在于当儿童确定两个集合的等价时，他们运用的是数的不变性的逻辑，还是知觉的提示(线索)——如一个集合因为它“大一点”、“长一些”等等而看上去多些。不管怎样，需要让儿童不止进行一个活动。儿童在比较4个物体的集合时可能是守恒者，但在比较9个物体的集合时就有可能被知觉因素所左右了。

数的守恒和等价的守恒

数的守恒：向儿童呈示排成一列的一个物体的集合，然后改变物体的排列，使其成为另一种模式(如圆形)，看儿童是否认识到集合的数目仍是一样的。

等价的守恒：比较两个集合，每个集合有同样数目的物体，然后改变其中一个集合的排列，看儿童是否认识到两排物体的数目仍是一样的。

安德沃德(Underwood)①发觉儿童首先掌握数的守恒，然后掌握等价的守恒，再后掌握归组数(grouped number)的守恒(见

① 在美国全国数学教师委员会(National Council of Teachers of Mathematics)会议上的报告(1977. 4. Cincinnati)。

第117页)。皮亚杰仅从两个集合等价的角度来考虑数的守恒。

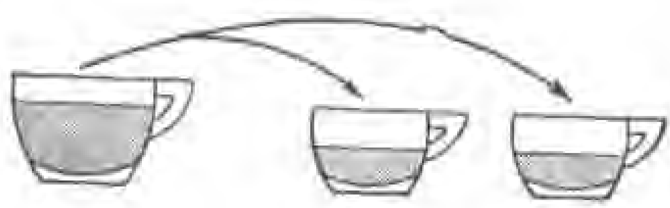
守恒的其它类型及达到的年龄

把数的守恒观念与讨论测量或度量几何的各章所涉及的其它类型的守恒联系起来看，值得注意的是各种类型的守恒在儿童思维中不是同时发生的。它们通常在每个儿童身上按同样的顺序发生：首先是数的守恒，然后是质量的守恒，再后是重量守恒，最后在大约十到十一岁时，获得了体积的守恒。这是发生次序的模式，但较聪明的儿童将比一般儿童约早两年通过这一顺序。比如数的守恒，聪明的五岁儿童就能象普通的七岁儿童那样达到这一水平。

[诊断活动 3.8]

有人可能猜想，下面关于量的守恒的活动对儿童来说可能比数的守恒容易些，但实际情况正相反，测量需要的"运算"比计数更困难。确定一个连续性集合的数量(如水)，所必需的是测量而不是计数。

"如果我给你一杯牛奶，或者把它倒入两个杯中再给你，这两者一样吗?"



"多一点了。"

"哪个多?"

"两个杯子中的多。"

"现在如果妈妈把这两杯牛奶给你，我们再把牛奶倒到这个高杯子里，你愿意要哪一个?"

"高杯子。"

"为什么呢?"

"因为它高一点。"

这是五岁儿童的典型答话。他还不相信所给的液体当其形状改变时，数量仍是不变的。他还不懂得皮亚杰所说的量的不变性或守恒性。知觉或儿童视觉所见，压倒了数量仍旧不变的同一性逻辑。

[诊断活动 9.1]

用两个份量相同的泥球做实验，也可观察到同样的现象。如果把一个球的形状捏得扁一些，或长一些，或把它分成小球，儿童就不再认为它们的份量是一样的。

1. 哪一个球泥多些?或问:它们一样大吗?——"它们是一样的。"

2. 那么现在呢?——"多了一点。"——哪个多?

如果儿童认为原来的球是不一样的，那么让他从多的球中取出一些泥放到少的球上，直到他认为两个球的份量一样了，再开始实验。

引进十进制的位值概念

皮亚杰不研究(至少在其已出版的著作中)儿童的十进制命数法的位值概念。但在历史上，位值概念的发展乃是一个伟大的发明。正如法国数学家拉普拉斯(Laplace)指出的:

> 从印度人那里，我们学到了用十个数字来表示全部数的简单方法，它使十个数同时具有一个绝对值和一个位值。这是杰出而重要的思想。它是如此简明，以致我们甚至不能充分认识到它的价值。由于这一方法给予所有计算的简化和便利，因此足以把我们的算术系统放在人类最有用的发明之列。发现这样一种方法的困难之大可从如下事实推断出来，即甚至象阿基米德和阿波罗尼(Apollonius de Perga)这两个古代最伟大的天才人物竟也未能注意到它。①

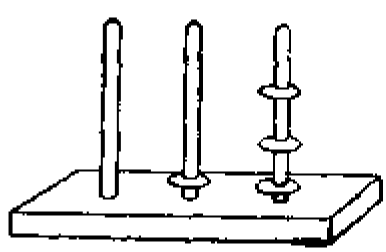
拉普拉斯把这一发明归功于印度和我们信德(Hindu)-阿拉伯系统的印度人，然而事实上中美洲的俄曼克(Olmec)和玛雅(Mayan)印第安人在公元前就已有了一种位值系统。②

位值系统的发展以及代表零这个观念的数的发展，是经历了漫长的历史时期的。这一事实对于那些企图教儿童学习位值的教师，可能并不感到惊奇吧！

向儿童引入位值概念

在具体水平刚开始时，要求儿童十根一组地数出物体（如麦秆），再用橡皮筋把它们扎起来，然后要求儿童在线的左边写下10根一组的组数，在右边写下剩下的不够一组的根数。

这样，我们就建立了一种想象性的观念，即把一个数目写在特定的地方，从而决定它是表示“十”的数目还是表示“一”的数目。以后再运用计数器，在它上面可用一个算珠来表示“十”。



再后，在符号水平上，使用一种扩展的记数法来表示数，如“34”可写成：

---

① 卡亚里(F. Cajori)：数学记号的历史演变(A History of Mathematical Notations)，1928，Open Court 出版公司，Lasalle，III.

② 科普兰(R. W. Copeland)：数学与小学教师(Mathematics and the Elementary Teacher)，Philadelphia：W. B. Saunders 公司，1976，第91～94页。

3 个“十”+4 个“一”

或　　3 (10)+4 (1)

或　　30 +4

最后用方便的记号表示：34。

对三位数和四位数也可运用同样的程序。如

3241=3 个“千”+2 个“百”+4 个“十”+1 个“一”

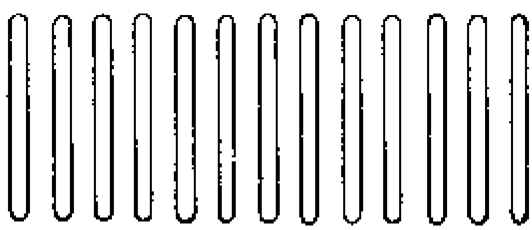
或　　3241=3(1000) + 2(100) + 4(10) +1(1)

或　　3241= 3000 + 200 + 40 + 1

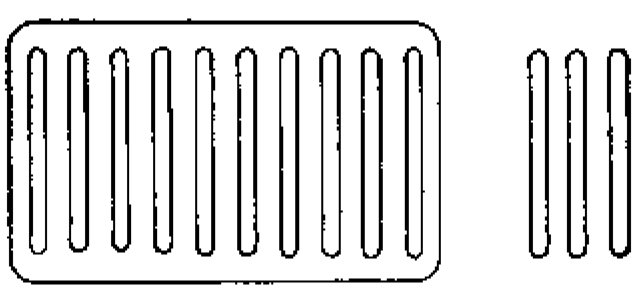
位值的概念是理解加法和乘法的基础，这是下一章我们要讲的内容。

位值和数的守恒

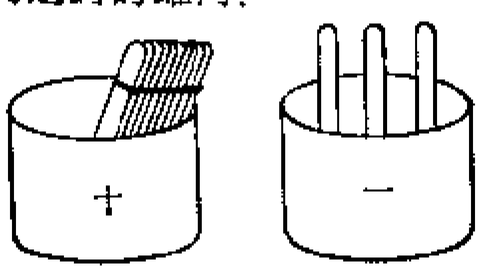
如果向儿童呈示下面的木棒：



要求他把这些木棒归成十根一组，并用橡皮筋扎起来：



然后分别把它们放到适当的罐内：



并且记录下来，把“十”写在左边，如

1个“十”　　3个“一”

然后写成　　　　　　　13

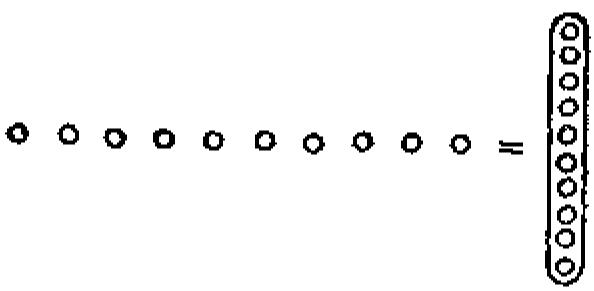
这样引入位值概念，那么儿童是否认识到：散开的十根木棒用橡皮筋扎成一组后其数目还是一样的呢？

这也许是一种具体的教法，但如果儿童没有数的等价的守恒概念，那么也是没有什么意义的(参阅第104页)。

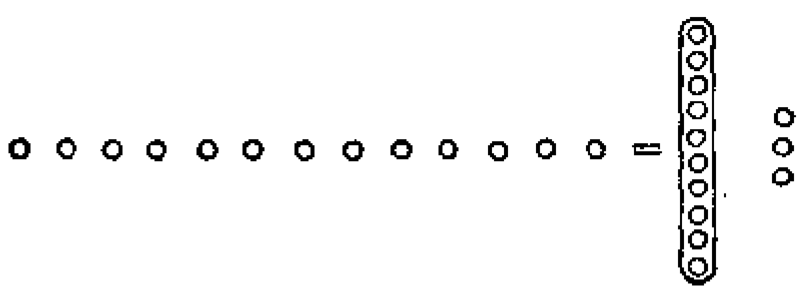
教师持有这样一种传统的看法，即假定当儿童把10根麦秆看作一组麦秆时，他认识到它们具有同样的数目，但实际上前运算时期的儿童认为1个“十”比散开的10个“一”要少。而且对罗马或希腊的儿童来说，11还可能表示2。

这就意味着，对前运算的儿童(包括大部分一年级小学生)讲授位值内容，在概念上是不会有什么意义的。

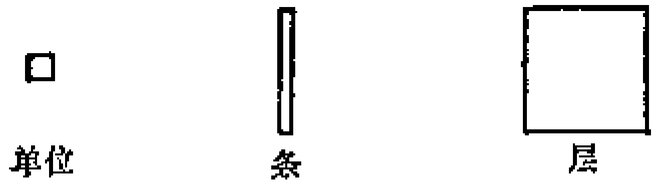
在儿童获得了数的守恒之后，向他们讲授位值概念时，把十个念珠粘在一根棒或一块压舌板上，用单个物体来表示十个物体，也许是十分有帮助的，操作起来也很方便。



问儿童：“我们怎么用较少的东西来表示13个念珠呢？”

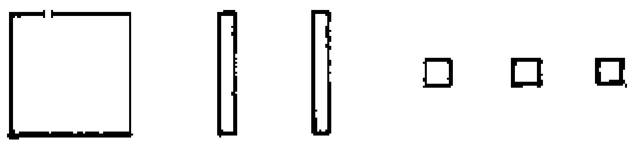


较为抽象但仍是具体性质的过渡性材料是商店出售的塑料制品或木制品：



这些材料的关系是10“小块”连在一起与1“条”一样长，10“条”并排在一起与1“层”一样大。1“层”有100个单位。

123可表示为：



以上图示不读成123，而是读作1个“百”，2个“十”，3个“一”。

这些材料在教加、减、乘、除等基本运算时，也很有用。①

儿童掌握归组数(位值)守恒的困难

347与30047相等吗？位值的守恒是困难的。

位值是建立在这样的观念上的，即一个数字不但能表示几个“一”，而且也可以表示几个“十”(或几个“百”)。

这一观念在多数情况下是以“看”和“说”的方式教给儿童的。这种教法的前提是，如果我把10个象棒这样的物体用一根橡皮筋扎在一起，称其为1个“十”，那么儿童就懂得这1个“十”跟刚才扎起来的10个“一”是一样的。遗憾的是，儿童通过“观察”并不能获得这样的理解。

---

① 同上，第129，133，181～184页。

安德沃德①调查了儿童对归组过程的理解。他让儿童从总数为34根的棒中扎出3个10根，然后问儿童，他把扎起来的10根棒散开后，数目是一样的呢，还是多了或少了？近50%的二年级学生回答得不正确，尽管已经教过他们位值了。他把这一概念叫做归组数(grouped number)的守恒。

另有一个实验，让儿童以某种方式排列43个算珠，使得不用去一个个地数就能说出其数目来。有的儿童把算珠随意地排成数目为2, 3, 4或5的小堆。有的则运用一种乘法的归组法，都排成含有2个(或3个或5个)元素的小堆。甚至到三年级，还有许多儿童不会以十来分组。

调查的结论是，在向儿童讲授十进制位值概念之前，儿童需有许多关于归组的经验。

对教学的含义

本章所述的活动均是儿童在四至七岁期间应该获得的学习数的经验。它们可以作为准备性活动也可作为诊断测验。由于每个儿童所处发展阶段的不同，测验均应分别进行。

如果采用集体方式进行教学，那么可按皮亚杰阐述得很清楚的三个阶段将儿童分组。阶段1的儿童还不能开始正式的学习，他们需要进行许多预备性的活动，把物体加以归组，比较它们，得出"一样"、"多"、"少"这样的关系。这必须以配对或一一对应的活动为基础，应该鼓励儿童把一个集合中的物体与另一个集合中的物体配对，但他们这时只能用十分有限的形式这样做，如果不是完全不可能的话。

阶段2的儿童更有能力把一个集合中的物体与另一个集合中

① 在美国全国数学教师委员会上的报告。

的物体配对，但如果某个集合的形状改变了，那么他就会对两个集合中物体的数目是否仍旧一样感到迷惑，即使数出的数目是一样的。他们还处在数的守恒的过渡阶段。他们需要许多比较等价集合的经验，当其中一个集合的形状改变时，看这两个集合是否还保持原有的数目。应该把一个物体的集合用各种不同的形状呈现给他们看，并要求他们从一个大的集合中取出同样的数目。本章及附录为这一阶段的儿童提供了许多合适的活动。

阶段3的儿童已掌握了数的不变性或守恒性，他们已具有进行更高级的构造类型数学活动的准备性，这些活动通常是在一、二年级向儿童提供的。但因为一般近六岁半到七岁的儿童还没有达到数的守恒，所以这就意味着，许多经常在一年级进行的活动，如数的意义、位值和加法、乘法等，应该推迟到二年级后再进行。在一年级时，那些使用具体物体的许多预备性活动将为形成数的概念，而不是为代数和符号体系提供坚实的基础。后者现在在许多一年级的班级中已开始讲授，如3+□=7。但这种符号体系对许多一年级学生来说，不管教师如何卖力，它们是没有什么意义的。

许多一年级和二年级的教师如果以本章概述的活动为线索去测验儿童，他们可能会感到惊奇。他们将会认识到，他们自认为正在教儿童的东西，但实际上却并未在教，原因在于：(1) 儿童并未达到必要的发展阶段，(2) 儿童需要更多的关于客观物体的经验，以便能从中抽象出数的概念，即使这些概念的产生已具有准备性。

数的概念必须由儿童自己抽象出来，而教师应向他们提供具体的材料，在他们已处于良好的准备状态时，向他们作出合适的发问。有些儿童到三、四年级时，仍没有数的守恒观念。智力落后的儿童尤其如此。我们可以猜想得到，对这样的儿童及其教师来说，在入学的头几年，把时间花在数的符号水平的操作上，乃是一种浪费。

总的说来，类似于本章所描述的活动及测验，应该于儿童在抽象的算术符号领域内进行更集中的学习之前，先让他们对之加以探索并掌握。这也许意味着要把一些符号或数字水平的书面学习向后推迟。

8 记忆和数学

记忆常被看作为信息的贮存，但这一说法将它的真正意义过于简单化了。

由这种观点产生的教学方法就是“显示法”，让学生“贮存”要他学习的东西。但是，儿童记得住他们所“看到的”或向他们呈示的诸如一个三角形或“3+2=5”之类的内容吗？记忆是象普通人设想的那样，属于知觉范畴吗？

皮亚杰反对把记忆视作现实“摹本”的普通的观点。初级水平的记忆甚至不必是一种内部的表象，而只是一种再认。再认是每种感知运动习惯的一个部分。婴儿“认出”他的母亲或奶瓶，但开始吮奶时并不能构造出母亲的心理表象。

第二和第三级水平的记忆一般被认为是“回忆”的能力。但“回忆”什么呢？第二级水平的记忆是建立在感觉印象或知觉材料基础上的“模仿”。

这种第二级水平的记忆，皮亚杰称之为“形象的”认知。它包括回忆，但这种回忆常因儿童仍处于前运算阶段而受到歪曲。它跟第三级水平的包含运算思维的记忆不同。在这一水平，儿童对现实进行“运算”，把现实改变成为他所“知道”或“记得”的物体。运算的记忆能产生一个正确的模式。这种第三级水平的记忆或认识（真正的理解），正是教师最应关注的。

“学习理论”的辩护者们争辩道，心理的发展，包括思维过程的发展，是学习的结果，它们主要受外部的指导和影响，记忆除了是这些结果的保持之外别的什么也不是。

皮亚杰的观点与之不同。他发现外部指导的学习过程不可能说明心理的发展和记忆，因为儿童的心理活动，不仅以其“所学习”的东西，而且以其可能达到的发展过程为基础的。①

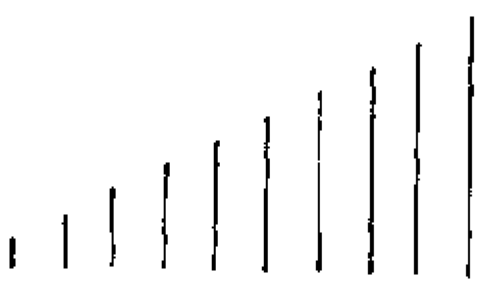
记忆与智慧

时间久的记忆一般要淡漠，或至多保持不变，而智慧的思维过程却随儿童的年龄增长而改进，这点我们已在儿童的发展阶段中讲到了。记忆是与智慧互不相干而沿着自身的道路发展，还是实际上随着儿童智慧的发展而变得越来越好呢？

皮亚杰在发觉一个儿童能够“回忆”他六个月前所进行的一项测验后，产生了记忆随着智慧的发展而获得改进这一基本思想。儿童在六个月后所“回忆出”的内容是一种好得多的再现，尽管他在这期间并未再做过这个测验。在这段时间中，儿童运用他早些时候还未具备的智慧过程，进一步把概念图式化了。

记忆的发展水平

记忆有三种水平。再认或第一型记忆在一到三岁时出现。婴儿很容易认出自己的“母亲”。他也能认出一个物体，比如一个球消失（被藏起来）后，隔一会儿再出现，他能认出这个球来。但他这时还不能形成这些东西的表象。



第二型记忆是重建型记忆，年龄为四至七岁。它包含再现、表象或图式化的能力，但此时的智慧水平仍是前逻辑的。这时的记忆可能产生非常荒谬的内容。

向儿童呈示排列成梯形的一组木棒，问儿童能否画出它所看见的东西。

① 皮亚杰和英海尔德：《记忆与智慧》，第 xi 页。

阶段1的儿童画出了木棒，但对木棒未作区分，都是一样长。

在阶段2，记忆产生了歪曲，或只能部分地回忆出来。所画的木棒图如第125页所示。

在阶段3，儿童有了一种运算性的记忆（这时记忆能够再造一个运算的模式），能把十根木棒按长度正确地排列出来。

与次序有关的记忆

〔诊断活动4.1〕

要记住10根从最短到最长按长度排列的木棒的序列 a, b, c, ……，儿童必须不仅认识到 b 跟 a 和 c 跟 b 的关系，而且还要认识到 c 跟 a 的关系。如果 b 比 a 长，c 比 b 长，那么 c 就比 a 长（传递性的构造）。对每个元素的双重关系的理解，即每个元素都比前一个长，比后一个短，这也是排出正确的序列所必需的。

如果向儿童呈示一组整理有序的木棒，那么在儿童还没有对此形成逻辑结构之前，儿童对这些木棒的记忆能有助于他在以后正确地重建这个序列吗？为了更充分地研究这一问题，我们让儿童看10根从最短到最长排列好的木棒（长度从9cm到16cm）①，叫儿童描述这个序列，要求他看仔细，并记住所看的东西。

一周后，让他做下列事情：

1．用手指在桌上描出他所看到的东西。

2．画出图形来（大约到五岁时，才能成功地直接复制出正确的图形）。

3．自己用木棒重建一个同样的集合（确定他运算或智力的水平）。

4．再次画出木棒的图形，以测定他进行直接再造的能力（如果按第2条要求画出的图不正确的话）。

① 同上，第1章。

5. 口头描述木棒的放置情况。(可以这样提问:"这是什么?""它们都是同样的吗?""它们有什么不同?")

6. 要求儿童从某一指定的木棒开始，重新进行言语描述(第5条)。

皮亚杰测验了62名四至六岁的儿童。他发觉,在前期实验一个星期后所进行的后期实验中,五岁半以内的儿童,他们以姿势和绘画来再造有序的集合(第1、2条)。这显然与儿童的运算水平密切相符的。

一般说来,智慧或运算的水平与一周后的记忆的组织之间,存在着一种相当明显的一致。

在前期实验后大约6到8个月,皮亚杰又找来其中30名儿童再进行测验。这不是原来测验计划的一部分,因为30名儿童中有24名只有四至五岁。皮亚杰指出:"我们很幸运，其中有一名儿童是我们偶然遇到的,他提到做过的实验,并且他还记得让他做过的事。"①

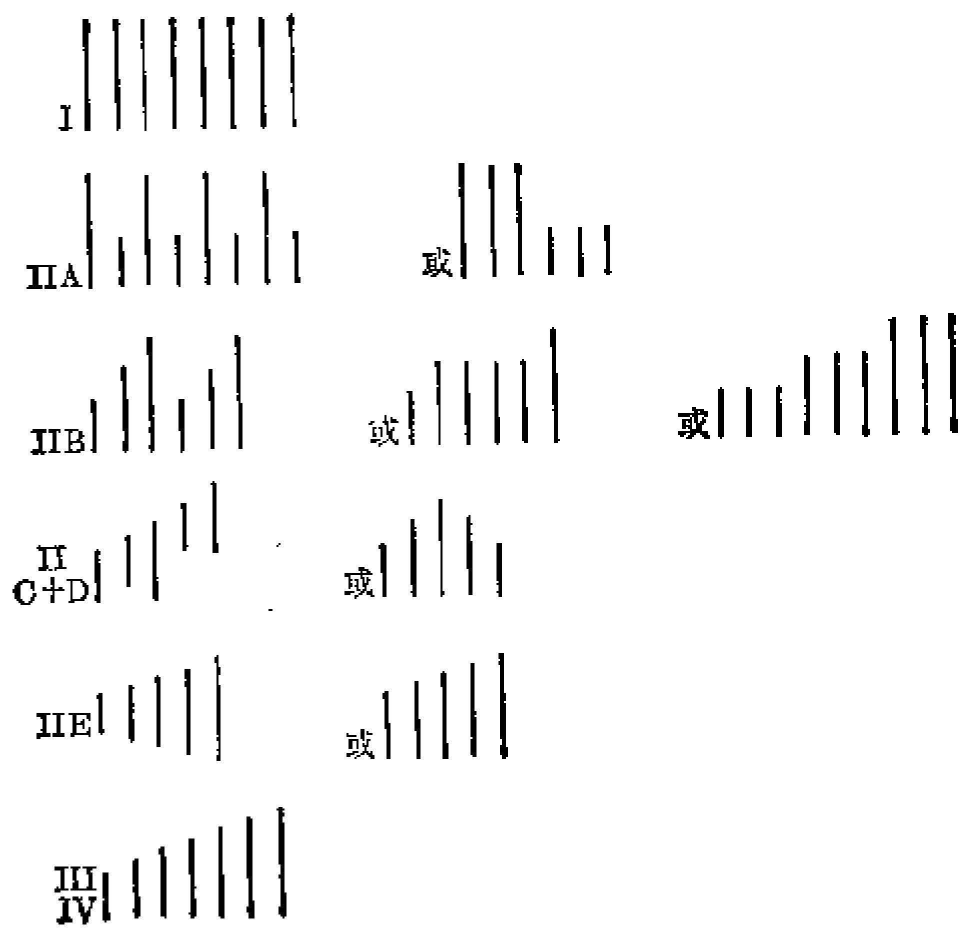
测验以后的八个月内,未再进行"复习"。仅是简单地问儿童,他们是否能再次画出让他们看过的东西。随后，让儿童再看一次序列,要求他作出口头的描述,以评价他在这方面的进步。

再测验的30名儿童中有6名必须排除,因为他们参加过一次含有序列化内容的语言测验。其它24名儿童中,只有两人没有进步,22名儿童画出的记忆图形比过去的描述有了明显的进步。"这给认为儿童的记忆在这八个月中有了发展的观点以有力的佐证。"②

两名四至五岁的儿童，在一周后的测验中，他们的记忆处于阶段1,到八个月后测验时，发展到了2A阶段。他们的口头说明是"这里有一些长的,这里又有一些更长的，还有一些短的",并未表现出序列化的企图。

① 同上,第40页。

② 同上,第41页。



各个记忆阶段的按高度排列的木棒。①

两名四岁多和一名六岁的儿童，在八个月的间隔之后，他们的记忆从2B发展到2E。在一周后的第一次测验时，他们把木棒分为两类——4根长的，4根短的。在八个月后的测验中，他们画出了一个扇形（两头的木棒较长）或画出三组木棒，每组三根，其中后继的两根木棒都比前一根长。

有一名聪明的四岁儿童，她在八个月后的测验中，能把10根木棒按长度排成完全正确的序列。经过这八个月的间隔，她已从2B阶段发展到阶段3的形式运算水平了。

---

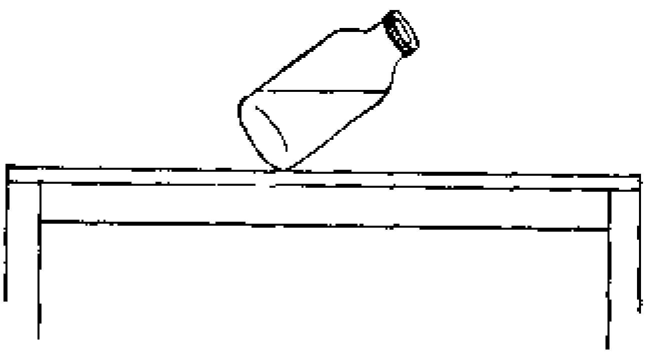
① 同上，第31页。

记忆与水平面的概念

〔诊断活动 4.2〕

为了根据距离和方向确定物体的空间关系，就需要有水平和垂直或南北和东西这样的空间概念。这些概念大约到九岁时儿童才能自己抽象出来(见第 18 章)。

儿童的水平概念可以这样来研究：把一只广口瓶倾斜 45°，待水面在桌上平稳后，要儿童指出水面看上去是什么样子的，这时桌面提供了一条水平基线。



为了确定记忆在这一问题中发挥多大程度的作用，我们把 66 名五至九岁儿童分成两组，先向他们呈示倾斜的瓶子，然后要求第一组儿童在一小时和一周后，第二组儿童仅在一周后画出所记住的瓶子和液体的情况。

在这两组被试中，只有 1/4 的五至七岁和 1/3 的八岁儿童能产生正确的记忆。在初次测验的一小时和一周后进行的两次再测的结果，并没有显著的差异。

然后相隔六个月再对原来 66 名被试中的 55 名进行测验，他们却全都记得原来的瓶子只盛有部分的液体。

七至九岁的儿童在相隔这么长时间后，正确反应的百分比从 27% 增加到 50%。这一结果说明，记忆的部分的进步和改善，是以两次测验间的六个月中所发展的新的认识过程为基础的①。

儿童的反应②可能符合下列几种记忆类型：

① 同上，第 302 页。

② 同上，第 300 页。

类型 1: 把瓶子画成直立的或倾斜的，瓶内的液体覆盖住一面瓶壁。

类型 2: 把瓶子画成倾斜的，但液体的表面画得与瓶底平行，即与瓶轴成 90° 的角。

类型 3: 瓶子倾斜，液体表面也倾斜。

类型 4: 瓶子是直立的，但液体表面倾斜成 30° 或 40° 的角。

类型 5: 问题被掩盖了，或是因为瓶子本身被画成水平位置，或是因为瓶子虽然是倾斜的或直立的，但里面装满了水。

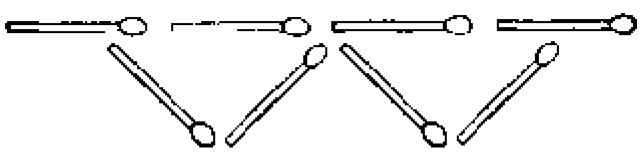
类型 6: 正确的记忆。

记忆、数的守恒和长度守恒

〔诊断活动 4.3〕

儿童在长度守恒之前先获得数的守恒概念，那么，在企图记住有关这两个概念的图解时，结果又怎样呢？

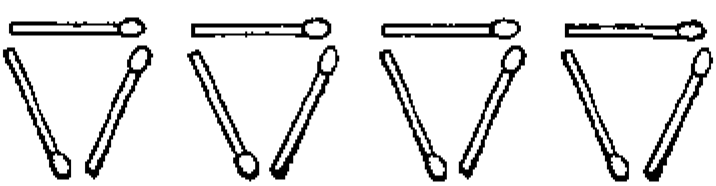
皮亚杰用以下实验加以说明：



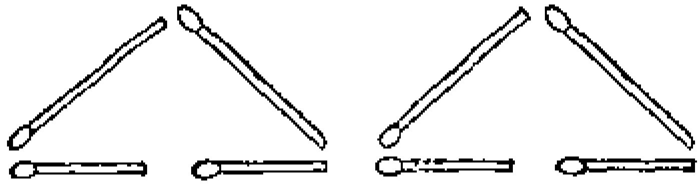
懂得数的守恒的儿童认识到两排火柴一样多（4 根），但如果他们不理解长度守恒，他们会认为上面一排长些，因为它的两端分开得更远一些。

那么，记忆对稍后重建这一图形有何影响呢？对那些数概念的守恒是运算性的，长度概念的守恒是前运算性的儿童来说，他的智慧过程是在企图解决这一矛盾吗？实际情况正是如此。

那些不理解长度守恒的儿童是这样解决这一矛盾的：他们在底下一排画了更多的火柴，从而使得两排一样长：



或者较为聪明的儿童把第二排中的火柴引长：



因此，这些儿童在试图解决认知矛盾时，运用所能利用的智慧过程，画出了不同于给他们看的图解。

这样，儿童就不一定是"看见"或"记住"或"复写"所呈示的东西，而宁可说是去重建它们，特别是对那些包含着逻辑结构的问题。通常数学中的问题都属于这种情况。

本章内容的教育含义

为了让儿童记住数学概念，教师必须寻找另一种不同于"呈示或讲述"的教学方法。

这里也有一个价值的问题。有证据表明，我们可以用条件反射的方法训练儿童（比如我们说 5+3，儿童说 8）。我们可以把注意集中在所谓"基本"方面（不管叫它什么），例如象用条件反射方法训练儿童作出某种反应而获得的"技能"，实际上这并没有获得有价值的结果。如果要达到"行为"或"操作"的目的，那么就应包括类似于本章所描述的那些活动，这些活动达到的是对数学概念的理解而不仅仅是知道答案而已。

必须把学生看作是一名正在"构造"他自己的现实的积极的学习者。所谓构造，实际上就是他的所作所为，正如我们在用火柴棒进行的活动中所见到的。他的成功依赖他能利用的认知过程而不是他所见到的或是告诉他的什么东西。

记忆和智慧相互影响。有时，几个月后的回忆常表现出惊人的进步①。这是许多学生在数学上似乎是突然开窍的原因吗？

应该把用对记忆表象的知觉的再认来描述的图形性质的记

① 同上，第 xi 页。

忆，与智慧或运算类型的记忆区别开来。活动中所包含的逻辑运算或格式也能被回忆吗？如果是这样的话，那就会象本章所描述的各种试验那样，记忆的智慧方面可能修改图形的记忆或与之产生冲突。

从定义出发，严格意义上的记忆与再认（当物体在场）和回忆（当物体不在场）有关。

广义上的记忆是过去已获得的所有事物的保持，包括各种系统的格式（从习惯到智慧运算）。广义的记忆是一种知识模式，就是知道怎么样，它跟知觉不一样，它不局限于当前的事物。它的特点是对过去事物的重建。这种重建提出了一个儿童不进行反省就不能解决的特殊问题，这就是为什么记忆不能与智慧分离的原因①。

这些活动证明，在儿童具有必要的认知过程去正确地解释他所“见到”的东西之前，“为保持”而教是没有意义的。在发展到能正确地解释过程或概念之前，他只会歪曲他的“所见”。而当他能正确地解释时，他不需要人家“教”他，就能自己解决问题，甚至对待六个月前原先不理解或不能正确解释的记忆中的问题，也是这样。

读者的兴趣所在，可能是与“序列”、“水平面”不同的其它数学概念。这些内容与记忆的关系，皮亚杰在《记忆与智慧》一书中也曾加以研究。它们包括集合的等价、传递关系、结合关系、序列对应、二元分类和交集等。

作　业

1．分别在现在和本学期结束时，按本章所述的内容测验一些五至七岁儿童的记忆（进一步可参阅皮亚杰的《记忆与智慧》一书）。

2．写出关于《记忆与智慧》一书中其它与记忆有关的数学概念的读书报告。

① 同上，第378页。

9 加法和减法

> 我们在此并不是去研究儿童如何在学校学会加法和减法表的，也不涉及那种经常只是口头的学习①。不管表面看来如何，实际上，加法的构造很晚才得以实现②。

正如上面的引文所指出的，计算或理解加法的能力，发展得比许多父母和教师想象的要晚。许多一年级学生或六岁儿童，在他们能理解加法之前，就开始教他们这一内容了。其结果就仅是一种口头的学习。如果要想使儿童达到真正的理解，就必须既要注意教学方法，又要注意儿童的发展阶段。

"约翰，你今天在学校学了什么？"

"我学了 3+5 等于 8，可是，8 是什么呢？"

群集(归组)和包含关系

皮亚杰把"加法"一词既作为数的运算，也作为类的运算来使用。类的群集(归组)是一种定性的群集，如关于儿童、念珠或花朵这样的群集。它跟数的群集不同，后者的特点是定量的。群集为把客观世界中的物体进行分类提供了一个基础。它也是逻辑学中研究概念的基础。

数跟逻辑有关。实际上，逻辑中的概念和数具有重要的共同

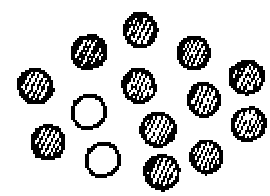
① 皮亚杰：《儿童的数概念》，第 161 页。

② 同上，第 198 页。

的基础，即群集运算。在逻辑中，一个类可以用它的部分或子类来表述。比如，“儿童”这个类，就可以看作是包括男孩和女孩这两个子类。儿童可能根据马、牛、狗这些动物的子类，来考虑动物这个类。这就是一种逻辑关系——包含关系。但是，这种部分与整体的逻辑关系究竟在多大程度上被儿童理解了呢？在不理解数的加法的情况下，逻辑上类的研究中所遇到的“包含”关系能被理解吗？皮亚杰主张，(逻辑中的)类和数都产生于同一个群集的运算机制，无论哪一个，离开另一个都不能被充分地理解。

〔诊断活动 5.1〕

为了探悉儿童对这种逻辑群集的理解，皮亚杰以四到七岁的儿童作为研究对象。他在一个盒子里放上木制的念珠，两个是白色的，其它都是棕色的。用这套材料确定儿童理解包含关系的程度。



儿童能够运用逻辑的心理过程得出如下结论吗？即如果念珠的集合或类包括棕色的和白色的，那么念珠的集合一定要比棕色念珠的集合或白色念珠的集合大一些。

注意：我们在这里讨论的包含关系的逻辑，只涉及“较大”这种数学关系。(至于各个类的计数和数的加法则是下节要讲的内容。)

令人惊奇的是，四至七岁的儿童竟难以掌握这一观念。一年级的小学生不能设想整体比部分大。给儿童看装在盒子里的一组念珠，其中 9 棕 1 白。问他：“木念珠多还是棕色念珠多？”他答道：“棕色的多。”问他：“棕色念珠是否木头的？”他回答：“是的。”再重复问题：“好，那么木念珠多还是棕色念珠多呢？”他再次回答：“棕色的多。”他只能把部分与部分加以比较，即把棕色念珠与白色念珠相比较。这可由他认为棕色念珠多的回答得到证明，因为只有两种木念珠(另一种是白色的)①。再问他，用念珠或棕色念珠做一串项圈，哪一个长些。他还是回答棕色念珠的长些。

① 同上，第 164 页。

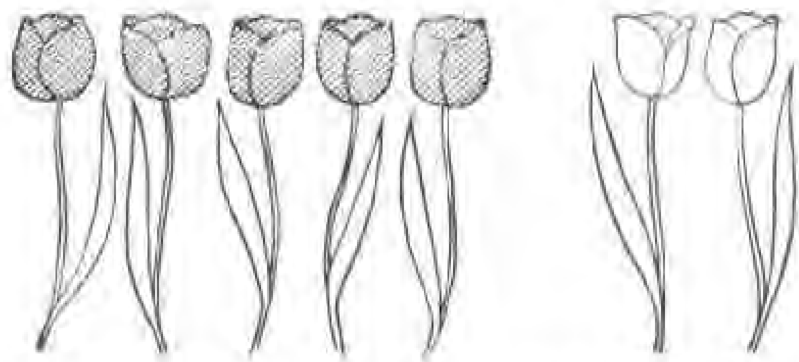
阶段1的儿童不能考虑木念珠的数量，因为当考虑部分(棕色的念珠和白色的念珠）的时候，关于木制的或整体的观念就消失了。小于七、八岁的儿童理解数学或逻辑中的包含关系有系统的困难，他们不能同时考虑三个类，即木念珠、棕色念珠和白色念珠。

儿童对问题是理解的，但显然不能正确地解答，这也可以通过其它实验来证实。例如，给儿童看两种颜色的花。皮亚杰用的是20朵罂粟花和3朵吊钟兰。

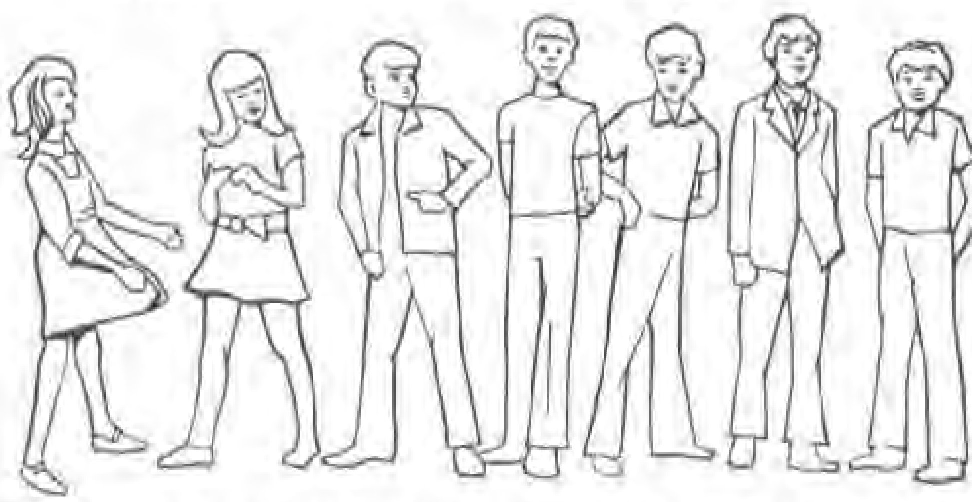
它们是什么颜色的？——它们是红的和蓝的。——红的是罂粟花，蓝的是吊钟兰。——是的。——我想扎一个很大的花束，必须用花还是用罂粟花？——罂粟花。——把罂粟花指给我看。(她正确地指出来了。)——再把花指给我看。(她用手画了一个圆圈指出了所有的花。)——我用花或罂粟花做成花束，哪一个大呢？——用罂粟花做的大。——如果我把罂粟花拿走，剩下的是什么呢？——吊钟兰。——如果把吊钟兰拿走，剩下的又是什么呢？——罂粟花。——那我把花拿走，剩下什么呢？——(思索一会)什么也没有。——那么哪一个大呢？是一束花大还是一束罂粟花大？——我已跟你说了。——你再想想看(重复问题)。——罂粟花的花束大。——那么一束花呢？——它可能不一样。——它大一点还是小一点呢？——小一点。——为什么？——因为你已扎了一束大的罂粟花了。①

这一实验也可用很小的数目进行，如2朵白花和5朵红花，实验结果也是一样的。(见第65页照片。)

① 同上，第167页。



用一组男孩和一组女孩(以布娃娃或图片上画的儿童代表)来做实验，也可得到同样的结果。给这一阶段的儿童看一张画，上面有2个女孩5个男孩，问他男孩多还是孩子多，他回答说男孩多，因为只有2个女孩。"女孩是孩子吗?""是的。""那么男孩多还是孩子多呢?""男孩多。"如果男孩和女孩都是孩子，那么孩子肯定多于男孩或女孩，这一阶段的儿童还未掌握这一观念。他知道孩子的集合包括男孩和女孩，但他甚至在说得出男孩与女孩哪个多的情况下，也不能把男孩数与孩子的总数加以比较。



皮亚杰据此得出结论：对于儿童，包含关系看来是一个障碍，整体还不是逻辑上的类。在定性意义上，儿童理解一个念珠可以既是棕色的又是木头的，但在定量意义上，他不能把念珠置于两个集合中，如同时是棕色的又是木制的。儿童一注意部分，就忘了整体。当念珠被分为棕色的和白色的两个集合时，全部念珠的集合就消失了。同样，当孩子这个集合或类在思想上被分成男孩和女

孩时，孩子整体的观念也就消失了。

在发展的第二阶段，儿童在直觉水平上或通过试误掌握了这一观念。起初，儿童的回答似乎仍属阶段1的水平。如回答：男孩比女孩多。但在向他提出"女孩是孩子吗？"这样的问题后，他就发觉了自己的错误并能加以纠正。

在阶段3，儿童是立刻就自动地发现了错误。儿童理解了包含关系的逻辑。如果孩子的集合包括男孩这个集合和女孩这个集合，那么肯定孩子比男孩或女孩多。问题是在逻辑或智慧的水平上而不是象阶段2那样通过试误而获得解决的。

一个逻辑的类是具有共同性质的元素的集合。共同的性质或特性在念珠一例中即指它们都是木制品。把棕色念珠和白色念珠分别合在一起就产生了棕色念珠类和白色念珠类。这一观念在数学上称为集合的并。

皮亚杰由此得出结论，真正的问题是儿童在第一阶段仍处于直觉的知觉水平上，这种直觉是直接的、不可逆的。思维从整体向部分进行时，整体被忘记——从念珠到棕色念珠和白色念珠时，只能将棕色念珠与白色念珠进行比较。儿童不能再次把他们的思维指向整体，也就是说，指向念珠这个类，它包括棕色和白色两种念珠。

正是由于思维可逆性的实现（从整体到部分，再到整体），才构成了一种逻辑的或智慧的动作，它不同于建立在感觉经验基础上的知觉的或前逻辑的动作。在知觉水平的年龄，儿童把他的判断置于他直接"看见"的东西之上，如念珠被排列成一组白色的念珠和一组棕色的念珠。

结论

在达到思维的可逆性之后，儿童才能学习作为运算的包含逻辑和类的加法。从前逻辑水平向这一水平过渡，大约发生在七岁左右。这时儿童一般上小学二年级，这就意味着，许多儿童在获得学习类的加法所必需的思维可逆性之前，就已被教授类的加法了。

下一节我们要讨论，作为一种逻辑运算的数的"加法"运算，(大约与类的加法同时)在儿童身上是如何发展的。

皮亚杰问道：

> 类的加法结合(棕、白、男孩等等)不是数的加法结合的心理学上的对应物吗？或者说得更简单点，数对于类概念的实现不是必要的吗？实际情况可能是这样，在数的整体守恒性和不变性概念获得之前，儿童就能在类的领域把部分对整体的关系看作是持久的了……类和数都是起源于同一个群集运算机制。①

皮亚杰得出结论：

> 总而言之，在这个阶段(阶段1和2)似乎很清楚，儿童还不能进行类的加法的结合，即不能掌握逻辑的加法或减法……他不能成功地掌握包含关系……这些关系是直觉的，是依赖于实际知觉的，他们不能形成任何稳定的结合，因此我们在逻辑方面也发现同样的基本现象……整体的非守恒性。②

数的加法

从类到数

类的观念如何能向数转换？回答可能不象我们所预期的那样简单。恩根和斯特夫③用糖果的集合或类对儿童关于2+3与5是一样的理解进行了实验。他们向100名小学一年级学生呈示2块糖的一个集合和3块糖的另一个集合。

把两个集合的糖并起来，然后问儿童，他喜欢要两堆糖呢还是喜欢要合起来的这堆糖？有46名儿童回答得不正确，他们不知道

---

① 同上，第162页。

② 同上，第174页。

③ 恩根(H. Van Engen)和斯特夫(L. P. Steffe)：《一年级学生的自然数加法概念》(First Grade Children's Concept of Addition of Natural Numbers), Madison, Wisc.：学习与再教育研究与发展中心 (Research and Development Center for Learning and Re-Education), Wisconsin 大学，1966.

2+3与5是相等的。当把糖块增加到4+5，然后再合起来时，有55名儿童不能正确回答。

加法的意义

数的相加不是增加的意思，而是指群集、并合或把一对数重新命名为一个数。不管表示为3+2还是5，数的概念是一样的。3+2这个数与5是相同的，通常写成3+2=5。符号"="，叫做*相等关系*，意指3+2和5是同一个数的名称，因此，它们之间的关系是相等的关系。

本章所谈到的大多数活动都包含了两个集合：男孩和女孩，棕色和白色等等。加法是一种二元运算——对两个元素或两个数的运算。三个数相加，如3+4+5，则要做两次加法，先把一对数相加，再把得到的总数与剩下的数相加。如3+4=7，然后7+5=12。

加法是一种把部分归成整体或对用部分来表示的整体重新命名的运算。

$3+2=5$	$5=3+2$
$1+4=5$	$5=1+4$
$2+3=5$	$5=2+3$
$4+1=5$	$5=4+1$

在心理学上，加法及其逆——减法，是一个运算，是一个可逆的运算。

根据皮亚杰的观点：

> 加法是一种可逆的运算。因此，我们不能不作这样的假设，即在第一阶段，儿童还不懂得整体B在它被分为两部分A和A'后，它还是同样的整体（$B=A'+A$，$5=3+2$）。加法的运算一方面表现为加数被合并为一个整体（$3+2=5$），另一方面，这个整体又被视作与其组成部分的情况无关的不变量（$5=3+2=1+4=2+3=4+1$）。①

〔诊断活动5.2〕

① 皮亚杰：《儿童的数概念》，第189页。

数的加法中部分与整体的关系

对儿童来说，在数的领域内，部分与整体的关系(或包含关系)与定性的类的群集是同一个问题吗？

为了探悉儿童在何时认识到，不管整体的各个部分如何重新分配，整体仍保持不变，皮亚杰把 8 这个数表示成 4+4 和 1+7 两种形式。他对儿童说，可以在 11 点钟吃 4 块糖，在下午喝茶时再吃 4 块。第二天，他拿出了同样块数的糖，但他说因为上午不太饿，所以 11 点吃 1 块，喝茶时吃 7 块。

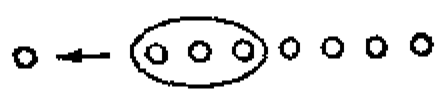
○○○○　○○○○　　　　　○　○○○○○○○

I　　　　　　　　　　　　II

然后问儿童这两天是否吃了同样数量的糖。直至六岁半到七岁的阶段 1 的儿童，还说第二天吃得多，因为“这天有一个大的数量”(7 块)。为了保证儿童能理解题意，要指着 II 中的两个集合去问儿童，它们合起来是否与 I 合起来一样。回答说是一样的①。

这一阶段的儿童不能同时考虑 I 和 II 中的两个集合，他们仅仅看到最大的集合(II 中的 7)。

在发展的第二阶段，儿童能把两个集合联系起来，但只是通过试误或一一对应或计数等方法在直觉上相联系。他可能先象阶段 1 那样回答，表现得没有把握。如果问其原因，



他可能去数一数或试着从“7 块”中移一些到另一边的“1 块”中。当他从“7 块”中移动 3 块到“1 块”那边后，他看到自己得到了一种与“I”同样的排列形式。

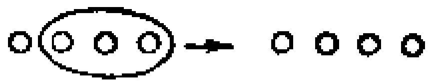
于是，他得出了 I 和 II 一样多的结论。

在第三阶段，反应是直接的，用不着试验也没有犹豫。

特尔(七岁)：你两天吃的糖块一样多吗？——是的。——为什

① 同上，第 187 页。

么？——因为它们是一样的。——每天吃多少？——8 块。——但这里(4+4)是 4，那里(1+7)只是 1 啊！——是的，但我已把 3 块放在这儿了。①



在这一阶段，儿童理解了在把 4+4 说成 1+7 时所包含的数的概念，不再需要进行定性的推理(对算珠进行操作)。每个子集均被看做是与其它子集有关的，就加法而论，整体及其部分，代表一个整体保持不变的运算系统。

要能真正把加法理解为运算，儿童必须在面对 1+7 这样的加式时，认识到它也可以表示为 8。他也必须能反演这个过程，认识到 8 也可表示为 1+7，3+5 等等。在阶段 3，大约七岁左右，儿童能够在运算或智慧的水平上这样做，而不需要具体算珠了。

皮亚杰继续写道：

> 不管表面看来如何，实际上，加法的结合很晚才实现。通常在与计数有关的活动中所观察到的那些事实，初看起来，可能使人认为，只要儿童能用数字来表示二、三或四个物体的集合，那么，他就能理解加法了。我们已经证实，情况并非如此。②

通过加和减使两个数量相等

另一种研究儿童对加及其逆(减)的理解的重要方法，不是从同样的数目开始(如每天给 8 块糖)，而是看儿童能否通过加及其逆(减)使两个集合的数量(如 8 和 14)相等。

在阶段 1，儿童不知道加法和减法能被用来互相补偿，即可以把从一个集合中减下来的物体加到另一个集合中去。

让阶段 1 的儿童看有 10 个算珠的 A 集和有 16 个算珠的 A' 集。

一名五岁半的儿童随便地从 A' 中移一些算珠到 A 中。问它

① 同上，第 190 页。

② 同上，第 198 页。

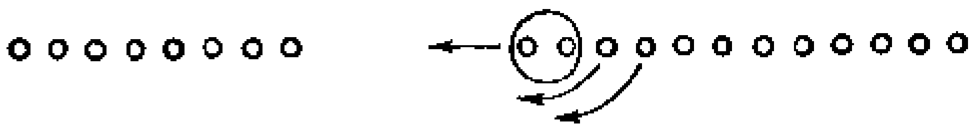
吉姆，七岁，她知道 4 + 4 与 1 + 7 相等，六岁的斯图亚特则不知道。

们是否相等，他说是相等的。再问为什么相等，他说因为它们看上去一样多（占一样的空间）。

阶段 2 的儿童仍没有数的守恒概念和整体不变的概念。他们是通过试误，对算珠进行实际的操作而解决问题的。

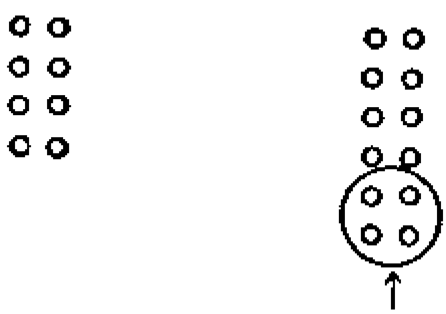
让一名六岁儿童看 8 个算珠和 12 个算珠的集合，他从 12 个

算珠的集合中取出 2 个来，然后再取出一个，接着又取出一个，后来他把取出的算珠加到了 8 个算珠的集合中。这样，8 个算珠的集合变成了 12 个算珠，12 个算珠的集合变成了 8 个算珠。



然后，他把 12 个算珠的集合排成矩形，把 8 个算珠的集合排成正方形，但这对他并无什么帮助。

接着，他把这两个集合分别排成两列纵行，对较长的纵行中多出的 4 个算珠再加以平分，使得两个集合的长度相等。



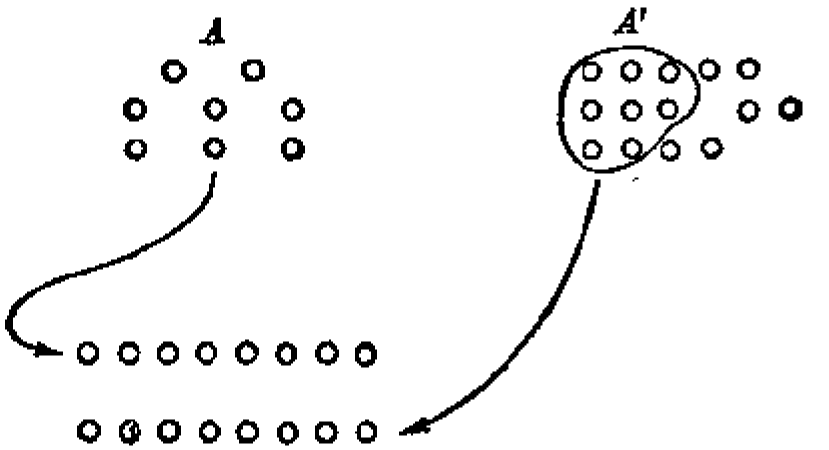
再把这些算珠分到两个集合中

这是一种试误的方法，它用几何模型和所占空间来进行试误，以确定多或少。最后，借助于所占的空间，运用计数的能力解决了这一问题。这里没有数的水平上的加法的结合，他认识不到如果从较大的集合中减去一个数，把它加到较小的集合上去，这对两个集合的和没有影响。儿童这时还没有整体的守恒。

在阶段 3，儿童不受算珠排列的干扰，能够运用一一对应关系来使它们相等。这一阶段的儿童才知道，如果一个集合大一些，那么必须找出它们的相差部分，然后把它平分。他不再只是使用毫无计划的试误方法了。他在数的水平上作出行动的计划。根据计划，他立刻知道该对算珠作如何处理。他把较小的集合中的元素与较

大的集合中的元素配对，把大的集合中多出来的部分均分到两个集合之中。

面对 8 个算珠的集合 A 和 14 个算珠的集合 A'，一名聪明的六岁儿童把 A 中的 8 个算珠排成一行，用从 A' 中取出的 8 个算珠与它们配对。然后，他把剩下的 6 个算珠在 A 和 A' 之间平分。



七岁的莎红运用了更老练的方法，她从每个集合中数出 8 个算珠，并不去把它们排成一直线或进行配对，而是径直把剩下的 6 个算珠均分到 A 和 A' 之中。

加法的交换性

儿童将会发现，把诸如 2 个物体和 3 个物体的集合并起来所产生的数，与把诸如 3 个物体和 2 个物体的集合并起来所产生的数是一样的。

○○ ○○○=○○○○○

$2+3=5$

○○○ ○○=○○○○○

$3+2=5$

使用归纳的方法，即用相反的次序来试验其它的数对，可以概括出两整数相加的次序并不改变总数。整数加法的这一性质，被

称为交换性。在代数中，常用任意的整数 a 和 b 来表示这一性质：

$$a+b=b+a$$

这一性质对解答加法问题是很有用的。比方说，解 5+9+5 这道题，如果把 9 与第二个 5 相交换，就成为 5+5+9 了。这样就可以解得 10+9，或 19。这一性质也使我们对于加法，能从反方向相加来进行"验算"。

儿童对理解加法交换性的准备性

许多研究者开始是用具体材料对儿童理解交换性进行研究的。如："我想给我的布娃娃 4 个苹果和 2 个桔子，但你的布娃娃更喜欢桔子，所以给了她 4 个桔子和 2 个苹果，这两个布娃娃得到的水果个数一样吗？"

另一研究是用两种颜色的玩具汽车进行的，如 7 辆红汽车，4 辆白汽车，这些汽车停成一列，前面是红的，后面是白的。停车标志在这列汽车的末端。然后把队列弄乱，要求儿童再次把汽车停成一列，但要使白的汽车在前。在儿童放好白车和一辆红车之后，让他停下，要求他说出把其它红车放好后车队是否能达到或超过停车标志。

布朗①报告说：儿童到八至九岁时，交换性和结合性才被抽象出来；然而这类问题却在许多一年级的数学教材中时有出现。由于思维的可逆性大约在七岁时才形成，所以对一般儿童来说，可能在七至八岁之际才"构造出"交换性。

加法的结合性

把任何三个整数相加，如3+2+4，如果先把 3 和 2 相加，然后

① 布朗(P. G. Brown)：《对于儿童对自然数规律理解的发展的测验》(Tests of Development in Children's Understanding of the Law of Natural Numbers), M. E. Thesis，麦克米伦大学，1969。

再加4，其总数是否与把3加在2和4的和上一样呢？

这些结合可用圆括号表示：

$$(3+2)+4 \stackrel{?}{=} 3+(2+4)$$

$$5 \quad +4=3+ \quad 6$$

$$9=9$$

注意：加数的次序是一样的，两个式子都是3、2、4，所以并不涉及交换性。通过类似的例子可归纳出这样的结论：不同的结合不改变总数。这被称为加法的结合性。在代数上，它可用任意三个整数 a、b、c 来表示：

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

三个数相加，总要用到结合性，因为存在着一种结合的选择（前两个数先加或后两个数先加）。

儿童对理解加法结合性的准备性

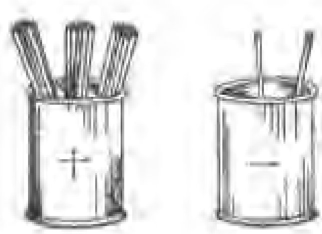
可给儿童三个集合的物体，要他说出，如果用不同的方式把它们结合起来，数量是否相同。上节所引的布朗关于交换性的研究提示我们，儿童到八岁时，才具有掌握结合性的准备性。

位值与加法

在儿童学会了基本的一位数加法之后（0+0到9+9），要做两位数或三位数的加法，他们还必须学会简便的十进位制的计算方法。

例如：

$$\begin{array}{r} 3\ 2 \\ +\ 4\ 6 \\ \hline \end{array}$$



儿童可以用木棒和锡罐这样的具体材料（两个锡罐上分别标明“十”的集合和“一”的集合），把32表示为3个“十”的集合和2个“一”的集合。

同样，46也可用锡罐和木棒来表示。于是可得到它们的和为7个“十”与8个“一”。

然后，这道题也可不用具体材料而用一种扩展的记数法来解答，如

$$\begin{array}{r} 3\text{个“十”}2\text{个“一”} \\ +4\text{个“十”}6\text{个“一”} \\ \hline 7\text{个“十”}8\text{个“一”} \end{array}$$

最后，用简便的记数方法来算：

$$\begin{array}{r} 3\ 2 \\ +4\ 6 \\ \hline 7\ 8 \end{array}$$

对涉及“进位”的加法问题，如：

$$\begin{array}{r} 3\ 6 \\ +2\ 7 \\ \hline \end{array}$$

应让儿童仍从具体水平开始。在将6根木棒和7根木棒分别放入“一”的锡罐中后，问题就成为：能把13个“一”换成另外一种说法吗？当然，我们期望的回答是：1个“十”和3个“一”。把13个“一”中的10用橡皮筋扎起来，代表一个“十”，把它放入“十”的锡罐中。于是得到和为6个“十”与3个“一”。

在具体水平上解出了这一题目之后，可以脱离具体材料用扩展的记数法来表示。如：

$$\begin{array}{l} \quad 3\text{个“十”}+\ 6\text{个“一”} \\ \underline{+2\text{个“十”}+\ 7\text{个“一”}\qquad\qquad} \\ \quad 5\text{个“十”}+13\text{个“一”} \\ \text{或}\ 5\text{个“十”}+(1\text{个“十”}+3\text{个“一”}) \\ \text{或}\ (5\text{个“十”}+1\text{个“十”})+3\text{个“一”}) \\ \text{或}\ 6\text{个“十”}+3\text{个“一”} \\ \text{或}\quad 63 \end{array}$$

由上可见，结合性是进位的基础。

同样，10个“十”也可把它称作1个“百”。儿童对把以“十”作单位改为以“百”作单位常感到困难，即使他们似乎懂得了如何把以“一”作单位改为以“十”作单位。正因为如此，有必要用多栏图表这样的具体材料来计算三位数的加法。

例如

$$\begin{array}{r} 2\,3\,4 \\ +\,1\,2\,4 \\ \hline \end{array}$$

可表示成

百	十	一
//	///	////
/	//	////
///	/////	////////

儿童在加法中掌握位值概念的困难

上述的研究表明，儿童掌握位值概念要比人们想象的困难得多。教师在讲授加法和减法时，会被同样的问题所困扰。

在计算象下面这样的加法时，如果儿童已教过有关进位的内容，那么许多儿童在没有必要进位时也进位了。

$$\begin{array}{r} {}^{1}3\,1 \\ +\,2\,5 \\ \hline 6\,6 \end{array}$$

而当必须进位时，如 $\begin{array}{r} 3\,8 \\ +\,2\,5 \\ \hline \end{array}$ 一题，儿童又常常这样做：

$$\begin{array}{r} 3\,8 \\ +\,2\,5 \\ \hline 5\,13 \end{array}$$

在学过减法的“法则”后，儿童可能把这些法则用到加法中去，或者把加法法则应用到减法中。

在以后计算乘法和除法时，儿童更难以把数字写在正确的位置上。原因可能是儿童在书面计算之前，用数字积木等在具体水平上进行计算的经验不足。

二位数和三位数的减法

二位数或三位数的减法与加法一样，应先从具体水平开始，如用上述的锡罐或多栏图。开始时，先做不用“退位”的题目。然后，再做下面这样的题目：

$$\begin{array}{r} 4\ 2 \\ -\ 1\ 8 \\ \hline \end{array}$$

4个“十”中的1个“十”换成10个“一”，把它放入“一”的锡罐中。这样，就可以从12个“一”中减去8个“一”，从3个“十”中减去1个“十”，剩下的差是2个“十”和4个“一”。

然后，不用具体材料而用扩展的记数法表示：

$$\begin{array}{r} 4^{3}\text{个“十”}+2\text{个“一”} \\ -(1\text{个“十”}+8\text{个“一”}) \\ \hline 2\text{个“十”}+4\text{个“一”} \end{array}$$

最后，用简便的记数方法表示：

$$\begin{array}{r} 4\ 2 \\ -\ 1\ 8 \\ \hline 2\ 4 \end{array}$$

在具体水平上要求儿童用多栏图来表示减数和被减数，这要比加法困难得多。若用加法的形式来做减法，则较为容易明了。如

$$\begin{array}{r} 4\ 2 \\ -\ 1\ 8 \\ \hline \end{array}$$

首先把4个“十”中的1个“十”转换成10个“一”，再加上2个“一”，这样，就可用加法的形式来口算减法。

8个“一”和多少个“一”相加得12个“一”

1个“十”和多少个“十”相加得3个“十”

本章内容对加、减法教学的教育含义

对那些思维的可逆性还没有发展起来的一年级小学生来说，学会加法只是一种死记硬背式的或口头的活动。大多数未满六岁半到七岁的儿童均属这种情况。前面引述的恩根-斯特夫的研究报告道：被测验的100名一年级的儿童中，甚至有将近一半的人不知道3+2与5是相等的。

儿童开始学习相等关系的可逆性可用试误的方法，这种试误是建立在操作材料的经验基础上的。如果3+2=5，那么5=3+2。（如果$A=B$，那么$B=A$，这在数学上称作相等关系的对称性）。

例如，给儿童一个五块积木的集合，让他把这些积木分为两个集合。在他把五块积木排成□□　□□□后，问他每个集合中有几块积木，然后再问他若把它们合起来共有几块积木。于是他把两个集合并起来验证自己的答数。两个集合的这种合并是强调从5=3+2到3+2=5的运算可逆性的手段。只有在儿童的可逆性概念发展之后，才能用对称的方式对他教授加法。

同一问题的另一方面是包含关系。阶段1和2的儿童在整体被分成部分之后，他们很难同时想到整体。儿童准备学习加法时，应该让他们获得许多关于定性的集合或类的逻辑加法的经验（例如：分为棕色和白色的念珠，分为男孩和女孩的儿童，分为蓝色和白色的花等）。

如果儿童不能解决实际物体的群集这样的问题，那么可以想象，他在抽象的数的领域企图解决类似问题时，也会发生同样的困难，用糖果所做的实验证实了这一预言。阶段1和2的儿童不懂得1+7与4+4是一样的。

儿童应有许多定性的群集或用同样的物体（例如同样颜色或形状的积木）来进行的数的加法的经验，以免性质上的差异（色或

形）干扰数量关系这一基本目标。被比较或者相加的是积木集合里的数目，而不是积木。数目是每个积木集合的性质。

每个加法族(addition family)可以使用象积木这样能够操作的材料来进行探索。"5"这个加法族，可以让儿童通过用尽可能多的方式把五块积木的集合分成两个子集来加以考察。他会作出如下的排列，然后让他给每种排列标上数，如 4+1：

用积木表示	用符号表示
□□□□　□	4＋1
□　□□□□	1＋4
□□　□□□	2＋3
□□□　□□	3＋2

在以后引入使用符号或数字的加法练习时，可采用 5=□+□ 或□+□=5 这样的形式。这是为了强调数量关系的可逆性和不变性。这种符号的熟练使用只有在获得了守恒性（有如本章介绍的那些测验所显示的）之后，才能系统地进行。

这就可能意味着，对许多儿童来说，使用符号的加法迟至小学二年级或七岁以后才能进行。

交换性

跟刚才讨论的观念密切有关的加法交换性，虽然对成人来说似乎很容易，但我们所引述的研究表明，它对不足八岁或九岁的儿童来说是很困难的。皮亚杰赞成这样的观点："对交换性（甚至对象 2+3=3+2 这样的相等性质）发生学的考查……清楚地指出直觉加工延迟的特征。"①

减法与加法的关系

减法有时被看作是一种与加法性质不同的运算，然而更经常的是，它被看成是加法的逆运算。为了教学的方便，加法一直被作为一种并合的运算来讲授，比如 3+2 或 3 并 2 得到5。作为它的逆运算的减法是一种分割的动作，5＝3＋?，用具体材料来表示，即

① 贝恩和皮亚杰：数学认识论与心理学，第 262～263 页。

○○○○○=○○○+?。

减法也可看作是在已知和以及一个加数的情况下求未知加数的过程，如：

$$5=2+\square \quad 或 \quad 2+\square=5$$

这些仍属于减法问题。在这类题目中，和及一个加数是已知的。若是加法的话，加数 2 和 3 将是已知的，而要儿童说出和来。

正如我们在本章及全书所强调的，儿童在前两个发展阶段很难同时考虑三个数，如整体 5 和它的两个部分 3 与 2。可以这样问儿童：3 块积木再放上几块积木就跟 5 块积木一样了？但要到阶段 3、即达到形式运算水平之后，这样的活动对儿童才有意义。一年级的教师在教 3+□=5 这样的符号系统时，困难很大。许多儿童对此毫无思想准备。

鉴于○○○○○=○○○+?可以被认为是一个减法问题，所以皮亚杰很少把减法当作一种运算，它存在于皮亚杰所述的加法运算机制的可逆性中。如果把减法强调成一种分离的运算，那就更应该在教授加法的同时教授减法，以便从中看出概念的可逆性来。

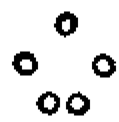
关于在阶段 2 使用具体材料进行操作的必要性，皮亚杰认为，经验对智慧的发展总是必要的。他担心那种看演示或听解释的“经验”，对于主体能从中分离出结构或概念来，是很不够的。需要的比这更多。儿童必须活动，必须改变物体，必须从自己对物体的动作中发现结构①。

阶段 3 的儿童知道，一个集合当它的元素按某种方式重新排列时，它的数目并不改变。他知道 ○○○○○ 与 ○○○ ○○ 的数目是一样的，或者说，5 与 3+2 是同样的。在阶段 3，儿童用不着思考，就能掌握数 5 以及它的部分，如 3 和 2。他必定已达到了数的守恒。当 5 表示成 3+2 时，什么也没有失去。当儿童知道了整体可以用它的部分 3 和 2，1 和 4 等等来表示时，他就能在知

① 詹宁士：“皮亚杰谈学习”，《星期六评论》，1967 年 5 月 20 日，第 81 页。

道两个加数或知道一个加数及和的情况下，说出式中的第三个数来(减法)。他也不会被下面这样的知觉所愚弄：

 或 

 或 

他已为学习抽象形式的加法表作好了准备。

加法和减法表

基本的加法和减法可由儿童自己算出结果，并记录如下：

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

这样的表为加、减法提供了方便的参考。加数写在表的上方和左边。3+2之和可以这样求：先向下找到左边的3，儿童把左手食指由3从左向右移动，同时把右手食指从表上方的2向下移动，两指在5处相遇，5就是和。

此表也可进行减法运算，如3+□=5或5－□=3，从左边向下找到加数3，然后在3这一横排找到5，再从5往上一直到表的最上面一行，于是求出所缺的加数2。

这样的表格显示了表内的加法和减法，强化了加法和减法之

间的可逆性或互反性。它与老的加法表不同，后者脱离减法而孤立地学习加法，极少涉及两种运算之间的重要关系。

二位数或多位数的加、减法

向儿童介绍二、三位数的加减法的步骤，在前一节已作了概述。这些步骤通常在二、三年级间开始进行。

皮亚杰工作的主要含义是：儿童加法和减法的实际活动应该早于计算法则的教学，并应是它们的先决条件。这些活动包括儿童在进行相应的书面文字活动之前，用具体的模式来表示象 $\begin{array}{r} 32 \\ +25 \\ \hline \end{array}$ 和 $\begin{array}{r} 32 \\ -25 \\ \hline \end{array}$ 这样的内容。

10 乘法和除法

加法运算的构造和乘法运算的构造是联在一起的。认为加法的结构先建立起来是错误的……这两种结构是在大约七至八岁时通过相同的阶段互相紧密依存地发展起来的。它们构造了单一的运算结构。①

在第 9 章，我们用包括棕色和白色的木念珠的集合做实验，考察了儿童对加法的理解。

木念珠

我们发现，四至七岁的儿童不能对整体(木制的）和部分（棕色、白色)同时进行思考。一旦木念珠被分为两个子集，儿童就只能对部分或子集进行比较，整体的观念消失了。这一年龄阶段的儿童不能进行如下的推理去反演他的思维：因为棕色念珠和白色念珠都是木制的念珠，所以它们可以结合在一起得到既比棕色念珠多又比白色念珠多的木念珠。若对“儿童”的类用它的子类男孩和女孩来思考，那么也可观察到同样的情况。如果男孩比女孩多，回答就可能是男孩比孩子多。

儿童对于逻辑乘法或交的运算能力，几乎是与逻辑加法或并的运算能力在同一时期发展起来的，发展阶段也非常相似。

① 英海尔德和皮亚杰：《儿童早期逻辑的发展》，第 195 页。

乘法分类(矩阵)

本章内容大部分取自1952年出版的《儿童的数概念》(英文版)和1964年出版的"儿童逻辑的早期发展"(英文版)。后者是对皮亚杰关于逻辑和数概念的早期著作的最有价值的补充，其中有一章内容，数学上一般称为笛卡儿积，这与本章后面部分要展开的乘法运算的意思微有不同。两者都很重要。

例如，看一个有两种颜色(红和蓝)的图形(圆形和正方形)的集合。乘法分类就是从两个加法的角度出发同时对每个元素进行分类。我们可用一种称为矩阵的几何形式来表示所有可能的配对为蓝圆、蓝方、红圆和红方。

	蓝,b	红,r
正方形,s	s,b	s,r
圆,c	c,b	c,r

用矩阵表示笛卡儿积。

通过许多这样的测验以及让儿童把属于同一类的东西放到一起的活动，可以发现儿童同时按两种方式进行分类的能力是在七至八岁间发展起来的①。完成包括第三种属性(如大小)的更难一些的测验，必须达到具有更复杂的运算思维的水平。令人惊奇的是，在多至六、七个被测元素的情况下，四至六岁的儿童要比六至七岁的儿童完成得好些。可以这样解释：六至七岁的儿童使用的是一种较好的智慧程序，然而这种程序尚未发展完善。甚至到八至九岁时，也只有近60％的儿童能成功地解决按三种属性分类的问题②。

① 同上，第151页。

② 同上，第155页。

有一个测验使用的是一套16张的兔子画片，其中四只是坐着的黑兔，四只是坐着的白兔，四只是行走的黑兔，四只是行走的白兔。向儿童提供一只有4个格子的盒子。先让儿童把那些他认为"好归在一起的"或"属于同一类"的兔子放在一起。

对兔子进行分类。

然后，拿掉一块隔板，看儿童能否把兔子仅分成两个集合，即行走的兔子和坐着的兔子；之后，再问儿童能否用另一种方式分类(黑兔和白兔)；最后，再让他把兔子放到原来的四格之中，使每个集合的兔子在某一方面相同。

儿童起先不能同时根据两种属性进行分类，如把黑色行走的兔子放在一格中，或他们不能完成这一任务——把白色行走的、黑色坐着的、白色坐着的兔子放在其它的格子中。有些儿童在拿走一块隔板后，不能把所有兔子分成两个集合。最后，在阶段3，约八岁左右，他们达到了必要的运算思维水平，而能直接完成这些任务了。

简单乘法(或交)

上面讨论的完全交叉分类或乘法分类，涉及根据共同属性或性质对两个或多个集合同时进行分类的能力。简单分类(皮亚杰早期所写的《儿童的判断和推理》一书中把它定义为逻辑乘法)只牵涉两个类，它产生或形成具有这两个类性质的一个类(交集)和

两个其它的类。例如，一个红色物体的类和一个圆形物体的类，其交集就是红色圆形，另外两个集合就是红色非圆形和非红的圆形。皮亚杰发现简单交集或简单乘法对儿童来说比完全交叉分类或乘法更难，因为它只是一种部分的运算。

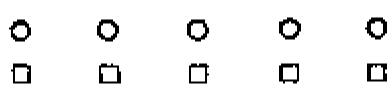
有一个实验是：向儿童呈现一列物体（如不同颜色的树叶）和一行绿色的东西，行列相交之处空着，要求儿童找出能与行、列物体相配的某个东西（例如一片绿色的树叶）。

与读者和教师的期望可能相反，九岁儿童中有 50% 的人还不能同时把一个物体分属于两个类①。这就提出了目前许多小学在低年级"教"交集是否适当的问题。

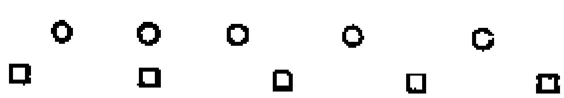
等价关系的发展

本节讨论传统意义上的乘法。要会乘，儿童必须理解一一对应关系或两个以至更多个集合的等价关系。乘法是集合之间的多重等价或对应。

一一对应或集合的等价作为学习计数的基础，其必要性我们已在第 5 章进行了讨论。儿童是否具有数的守恒性，这可以用下列图示予以检验。

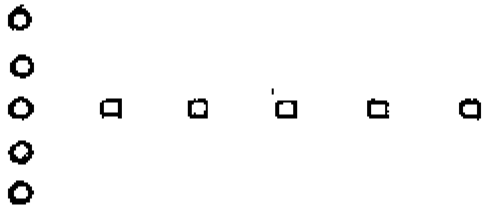


儿童可能同意上图中存在一一对应关系，但当把其中的一个集合散开些



或重新排列成

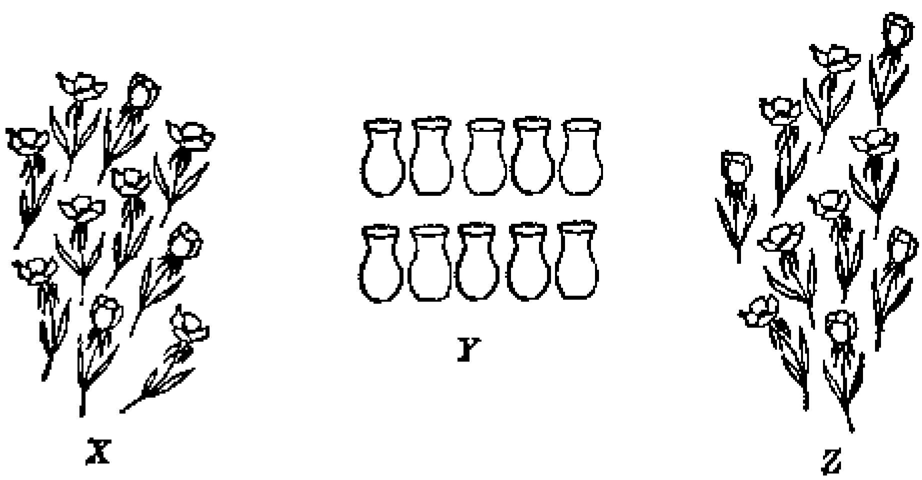
① 同上，第 184 页。



时，他们的一一对应的观念就不见了，两个集合的数量就不再被看作是相等的了。

因为乘法可以牵涉两个以上的集合，所以马上会想到，它们的一一对应是否比只涉及两个集合的一一对应更困难些。有趣的是，儿童掌握三个集合的等价并不比掌握两个集合的等价更困难。儿童把问题分开来一对对地予以考虑①，即先将 A 与 B 相比，再将 B 与 C 相比，以确定其中的等价性。

为了研究儿童理解两个以上集合间的等价关系的能力，皮亚杰用一个 10 朵花的集合 X、一个 10 只花瓶的集合 Y、另一个 10 朵花的集合 Z 来进行实验。



他要求儿童从 X 集合中取出花来放到 Y 的每只花瓶中去，一朵花对一只花瓶，所以 $X=Y$②。然后，把 X 集合的花取出来放到一只碗中，再让儿童从集合 Z 中取出花来放到 Y 的每只花瓶中。一朵花对一只花瓶，所以 $Y=Z$。然后再把这些花取出放到另

① 皮亚杰：《儿童的数概念》，第 208 页。

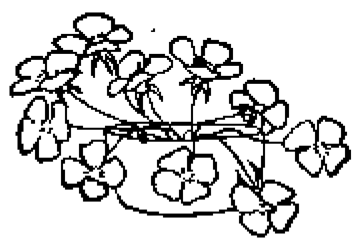
② 严格地，应记成 $X \sim Y$。——中译者注

一只碗中。

那么，儿童能否根据传递性的逻辑得出结论：因为花的两个集合是配对的或它们跟瓶子的集合是等价的，所以它们彼此也是等价的。用符号表示，即 $X=Y$, $Y=Z$, 因此 $X=Z$。

在五岁以下的第一阶段，儿童能在每个花瓶中放一朵花，建立花与花瓶的一一对应。然后把 X 集合的花和 Y 集合的花分别放在不同的碗中；但是在我们把一只碗中的花放得比另一只更散开一些后，儿童看着两碗花，想了一下说，那碗散开的花更多一些。因此，这时儿童以刚刚进行的一一对应为基础的数目相同的观念就不再是完整的了。因为“$X=Y$ 和 $Y=Z$, 所以 $X=Z$”的逻辑，还没有被儿童所认识。知觉压倒了逻辑，于是儿童认为排列得越散花就越多。他们还没有达到守恒的发展阶段。


X


Z

在第二阶段或过渡阶段（五至六岁），儿童仍随知觉而摇摆，认为放在不同碗中的花，散开的那碗要多些，即使他是把每个集合的花一朵一朵地放到各个花瓶中去的。但是，如果问他为什么散开的花多时，他可能去数一数，在发觉数目一样之后，他改变了自己的看法。或者，他可能从碗中取出花，把它们分别排成一直线，看看是否等价。如果按照下面所示的洪格（五岁十一个月）的思路对儿童进行提问的话，儿童甚至可能明白 $X=Y=Z$ 的逻辑。

你怎么知道的？——我得数一数。——那么好吧，数数看，给你一分钟时间。这些花（X）刚才是在哪儿？——在花瓶里。——那

些花(Z)呢？——也是在花瓶里。——正好和花瓶一样多吗？——是的，噢！它们两个是一样的！——为什么它们是一样的？——它们原来是在花瓶里，花瓶跟花一样多，不过我还是得数一数(他开始数X、Y、Z)。这是10个，这也是10个，这也是10个。是的，三个都是一样的。①

虽然阶段2的儿童常受知觉干扰，但他能通过试误或适当的提问找到正确的答案，并且深信不疑，不过他也可能再次受到情况略有不同的另一个问题的愚弄。

在阶段3，儿童处于运算的水平，他们不再因知觉而摇摆了。五至六岁的儿童也可能达到这一阶段。如五岁三个月的希德即为一例：

它们真是一样的，因为我看到它们刚才是在花瓶里的，我想我们可以把它们放回到花瓶里。——请看这束大的花(X)和这束小的花(Z)，它们是一样多吗？——是的，它们是一样的，我认为那些花(X)和这些花(Z)一样多，我是用花瓶数出来的。②

希德说刚才看到花是在花瓶里的，这说明他正处于获得运算思维所必需的可逆性的过程中。他运用的逻辑是：如果X集合的花和Z集合的花都来自花瓶，那么它们就可以被放回去，于是它们的数目必定是一样的。

从集合的等价到数的乘法

我们已经看到了儿童在三个集合之间确定等价关系的能力：两个10朵花的集合X和Z和一个10只花瓶的集合Y。处于第三阶段或运算水平的儿童，在先后把两个集合的花分别放到10只花瓶里再取出后，他们知道，两个集合的花的数目必定相等，用符号式表示：即如果X(花的数目)$=Y$(花瓶的数目)$=Z$(另一个集合的花的数目)，那么$X=Z$。

① 皮亚杰：《儿童的数概念》，第210～211页。

② 同上，第212页。

为了研究儿童对数的乘法的理解，皮亚杰用同样的三个等价的集合进行实验。它们是两个10朵花的集合 X 和 Y，一个10只花瓶的集合。但是，提问的思路不同。

在儿童把一个集合中的花放在花瓶里，再把它们移到一只碗里，然后对另一个集合的花也同样做后，问儿童：如果我现在把全部花都放回花瓶中，每个花瓶中将有多少朵花。因为花的数目是花瓶的两倍，所以每只花瓶应有两朵花①。

在第一阶段(五至六岁)，儿童回答不出问题。

问布卢(五岁六个月)：

> 现在我如果想把所有的花都放回这些花瓶，我必须在每个花瓶中放多少花？——必须放一朵。——你认为所有的花都放进去了吗？——(他开始动手试试，试了五、六次后)他嚷道：哦，得多放些。——(他放进2朵花，得出了正确的答案，然后自言自语地说)为什么得放2朵呢？②

布卢看不出每个花瓶与2朵花的关系，因为他不理解一一对应或等价问题，就不能更好地思考二对一的对应。一一对应或"相同数目"的观念除了在非常特殊的条件下(如当花"在"花瓶中时)，是不被理解的。当一个集合中的花散开时，知觉否定了数目守恒的观念。他也不理解等价的传递性，即如果 $X=Y$，$Y=Z$，那么 $X=Z$。

当我们运用只能插进一根花茎的玻璃管或纸筒来做实验时，就形成了另一个问题。这个问题是要看看，如果在每个玻璃管或纸筒中放进一支花，儿童是否能够发现，因为有两个集合的花，所以他需要两倍于每个集合的花的数目的玻璃管，才能使每支花有一个玻璃管。当花的数目与管子的数目一样时，如果花是从桌子上拿去插的，那么儿童能够确定每个花瓶相当于几个管子吗？

---

① 皮亚杰：《儿童的数概念》，第214页。

② 同上。

叫一名五岁儿童在每个管子中放一支花。他把10个玻璃管放在花瓶的对面。然后问他要把全部花都放进去，玻璃管是否够。他回答说够的。让他试着放放看。于是他认识到要有比花瓶更多的玻璃管，他说："要有一长排玻璃管"①。但他还认识不到"一长排"是花瓶数的两倍。

阶段1的儿童还没有能力构造乘法。他们不能把两个集合的花的数目看做是花瓶数的两倍。他们不理解，如果每个集合中的花对应于或相等于现有的花瓶数，那么每个花瓶将有2朵花。这些儿童知道花比花瓶"多"，但倍数关系并未被理解。他们的回答只是单纯的估计。

在第二阶段，儿童能较有计划地着手考虑了，但这仍是试误性质的。

乌尔德(五岁八个月)：

如果我把这些花($X+Z$)全部放到花瓶(Y)中，要在每个花瓶里放进多少花呢？——2朵、3朵或再多点。——你试试看。——(他试着放进2朵，一直到排尾)刚好。

实验者取出正好能放进一朵花的玻璃管——他先在第一只花瓶前放一个玻璃管，在第二、第三和第四只花瓶前面放两个玻璃管，在第五只花瓶前放一个玻璃管，在第六、第七只花瓶前放两个玻璃管，在第八、第九只花瓶前放三个玻璃管，在第十只花瓶前放两个玻璃管。然后，他使每只花瓶前的玻璃管数目变成相等(2个)。②

乌尔德能够作出"2、3或再多点"这样的推测，这说明他在逐步掌握乘法的运算。如果不是一一对应，那么花的数目必然是花瓶的2倍或3倍。为确定玻璃管与花瓶的等价关系，他先是用偶然的方式，然后把这种等价关系确定为2比1。

---

① 同上。

② 同上，第216页。

儿童这时仍不能把 $N+N$ 概括为 $2\times N$，$N+N+N$ 概括为 $3\times N$，如此等等。

在第三阶段（六至七岁），儿童立即懂得其中存在着 $2\times N$ 的相乘关系，并能在考虑更多的10朵花的集合时，把运算加以推广，如 $3\times N$，$4\times N$……。

格罗斯，五岁十个月，他是这一阶段中较年幼的儿童。

> 如果 $X=Y$，$Y=Z$，那么格罗斯确信 $X=Z$。"如果我把全部花（$X+Z$）放到这些花瓶中（Y），每个花瓶有多少花？——1朵蓝的和1朵粉色的。——这是多少朵呢？——2朵。——如果我加上这些（一个新的10朵花的集合），每只花瓶有多少朵花呢？——3朵。——为什么？——我放了一朵、一朵、一朵。——现在你再想想看，我想把这些花放到玻璃管中，每个玻璃管只能放一朵花，那么要多少个玻璃管呢？（他拿出了10＋10＋10个玻璃管。）"①

在各种各样的花与花瓶的多元对应中，如2比1，3比1，4比1，……，儿童在运算水平上所运用的运算应被视为乘法而不是加法。

分成相等的部分

乘法和除法被视为逆运算，如 $a\times b=c$，那么 $a=c\div b$。

然而，这种包含在乘法和除法（以及加法和减法）中的可逆性，对许多未达到运算水平的将近七岁的儿童来说，是不可能掌握的。

乘法和除法，由于它们之间存在可逆关系，所以如果其中一个已被理解，那么两者就必定都被理解了。一旦儿童达到了思维的可逆性，这两种运算应该同时讲授。这一逻辑构造是与必要的心理构造——即可逆的思维结构相一致的。如果 $a\times b=c$，那么 c 等于什么，b 等于什么呢？

---

① 同上，第218页。

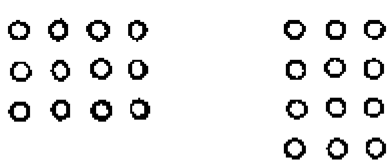
作为一种运算的加法，它含有乘法的意思。从加法向乘法过渡，皮亚杰用一种简单的、把整体分为两个相等部分的实验对之进行研究。给一名儿童18个算珠，让他分给自己和实验者相等的数目(或平均分给两个布娃娃)。

在阶段1，儿童随意地把算珠分为两部分。即使他运用你一个我一个这样逐一分配的办法，使得每个集合有同样的数目，他也不是以一一对应的逻辑为基础的，而是以算珠在桌上所占的空间或形状来估计每个集合的算珠的数目的。如果一个集合散开一些，他就认为这个集合有较多的算珠。他还没有达到量的不变性或守恒性的阶段。

在阶段2，儿童运用试误方法，有时在几次失误之后得到正确的答案。一个六岁的儿童把18个算珠分成两个正方形的样子：

再给他24个算珠，他先排成9个算珠的一个方形和12个算珠的矩形

然后把剩下的3个加到9个上面，也使正方形变成了矩形：



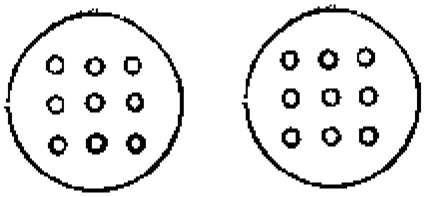
这两个图形的差异使他感到困惑。起先他不再认为这两个集合的数目是一样的。后来，他把3个算珠从图形的左边移到了下边，这时两个矩形看上去一样了，他才认为它们的数目是相同的。

在阶段3，儿童是这样把一个集合分成两个集合的：他每次拿出一个或两个算珠，然后把它们分放到两个集合中，直到分完为止。每个集合的算珠的放法，例如实验者把一个集合的算珠放得散开些，不会使他感到困扰。一一对应的逻辑压倒了对所占空间的知觉。为了测定儿童思维的可逆性，实验者问道："如果我把两堆合到一起，它的数目跟原来两堆的数目一样吗？"，儿童的回答是肯定的。

处于阶段3的六岁的斯图亚特，他在等分问题中表现得很自信。然而就是他，如前章所讲到的，还不能认识4+4与1+7是相等的。

皮亚杰把数的乘法定义为等分（equidistribution）。上例就是把18分成两个集合的等分，或者说$18\div2=9$。

用符号表示即为2×9或$m\times n$（有m个集合，每个集合有n个物体）。



$2\times9=18$

加法蕴含乘法，如下式所示：

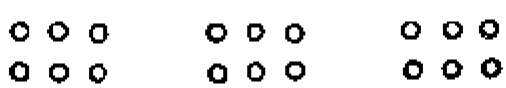
如果　　$9+9=18$

或　　$n+n=18$

那么　　$2n=18$

把18个算珠平均分为两个集合 A 和 B，使它们在数目上相等，这是通过一一对应或等价观念来实现的——就是给 A 一个，给 B 一个，如此进行下去。如果对于 A 中的每个元素，B 有相应的一个元素与之对应；对于 B 中的每个元素，A 中也有一个相应的元素与之对应，那么这两个集合就可以说是等价的。这种两个或多个集合的一一对应或等价是一种乘法的等价。

儿童懂得了两个或多个集合的元素之间的一一对应后，他就迟早会认识到显然存在着一种适当的运算，它能算出所涉及的各个集合的总数。我们把这种运算叫做乘法。试举一例说明集合的一一对应或等价是如何决定总数的：下图中每个集合的数目为6



于是，对 m 个（3个）含有 n 个元素（6个元素）的集合来说，其总数是

$3\times6=18$。

本章内容的教育含义及补充活动

从发展的角度来看，儿童大约到七岁就能在学习加法的同时学习乘法。但在许多学校中，乘法的教学放在加法之后。儿童做

较小数目的乘法，就象做加法那样容易，这可能是因为乘法和加法紧密相关的缘故。例如，3+3=6，那么很容易算出2个3是多少。如果这些前提是正确的，那么，抽象或符号水平的乘法应该几乎与加法同时(一般约七岁左右)向儿童介绍。很明显，需要一种个别指导的教学程序。有的儿童在六岁后就具有学习加和乘的准备性了，有的直到七岁半，还没有这种准备性。如果不能对儿童进行个别指导，而理解又是十分重要的，那么，运用数字符号的书面的加法和乘法，可以延迟至二年级再教。换言之，以具体材料进行的乘法活动作为纯数学的乘法的准备，应该在五至六岁时就开展起来。在普通分年级的学校中(从幼儿园到三年级)，不可能实行个别化的教学程序，但儿童应以皮亚杰所说的三个阶段为基础进行编组，这是可以做到的。

儿童是如何把一个物体的集合分为两个等价的集合的呢？把一个6个物体的集合分成两个等价的集合，每个集合有多少个物体？

○○○○○○ = (?) (?)

如果分得正确，再接着问儿童："两个3个物体的集合共有多少个物体？"

○○○　○○○ = ?

运用符号系统的书面计算，应该在理解了运用具体材料进行的乘法和除法之间的可逆关系后开始。对物体的集合加以组合和分离的许多问题应在具体材料的水平上进行。在实际操作物体的集合时，乘法事实(如$2\times3=6$)就包含着相应的除法事实(如$6\div3=2$)。

儿童是否获得了作为第三阶段或"运算"思维阶段特点的思维的可逆性呢？在他具有这种可逆性之后才能开始书面的教学。例

如，在理解了 $4\times3=12$ 后，就可以教 $4\times\square=12$ 或 $\square\times3=12$ 了，同样也可以教 $12\div3=\square$ 和 $12\div4=\square$。

用算珠排成 4×3 的阵式，如下图所示：

1 ○ ○ ○
2 ○ ○ ○
3 ○ ○ ○　　$4\times3=\square$
4 ○ ○ ○

同样，方程式 $12\div4=\square$，意即把 12 个物体的一个集合分为 4 个等价的集合，每个集合有几个元素。它可以表示为：

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

1　○ ○ ○
2　○ ○ ○　　或　　(?) (?) (?) (?)
3　○ ○ ○　　　　　 1　 2　 3　 4
4　○ ○ ○

等分除法和包含除法

开始教象 $6\div2=\square$ 这样的方程式时教师不应把它说成是"6 被 2 除"或"用 2 去除 6"。用一种儿童能够想象出什么意思的方式来表述一个问题，对启蒙教师来说，是最困难的问题之一。在除法中尤其如此，因为象 $6\div2$ 这种形式在具体水平上可以有两种含义。

(1)　○ ○ ○ ○ ○ ○ = (?) (?)

这可以表述为"6 被等分到 2 个集合中，每个集合有多少？"(3)。

这就是等分除法，除数代表集合的个数。

$6\div2=\square$ 的形式也可以表示成：

(2)　○ ○ ○ ○ ○ ○ =　○○　○○　○○

这可以表述为"6可以被分成多少个含有2个元素的集合?"(3)。

这就是包含除法,这时除数代表每个集合中元素的数目。

碰到把物体的集合加以分割这样的问题时,教师应鉴别出究竟是两种意思中的哪一种意思,并予以正确表述。下图

○○○○○○=○○○　○○○

可表示为6÷3,在这种情况下,应表述为包含除法:6可以被分成多少个含有3个元素的集?(2个集合)

同样,

○○○○○○=㊀㊀㊀

也可表示为6÷2,在这种情况下,应表述为:6被平均分到3个集合中,每个集合有多少?"(2)这是等分除法,除数是表示集合的个数而不是表示每个集合中物体的数目,后者则是包含除法①。

掌握乘法口诀

在向具体水平的儿童讲乘法问题时,如讲3×2=6,可把它展示为

○○　○○　○○　=　○○○○○○

而不是

○○○　○○○　=　○○○○○○

3×2=6表示3个含有2个物体的集合。同样,4×2=8是4个含有2个物体的集合,5×2是5个含有2个物体的集合。这些式子都是属于乘法表中"第二"栏的问题。但是,许多教师却把意思表达反了,就是说,他们先写的是集合中元素的数目。虽然5×

① 进一步的讨论可参阅科普兰的《数学与小学教师》,第175~178,321~323页。

2 与 2×5 在抽象水平上是相等的，但在开始时的具体水平上，首先说出的数应是集合的个数，其次再说出每个集合中物体的数目。根据正规的英语表示方法，我们不说：我要 5 磅一袋的糖 2 袋；而是说：我要 2 袋 5 磅一袋的糖。$2\times5=10$ 表示的也是这样一句话：2 个含有 5 个物体的集合共有 10 个物体。

让儿童操作具体材料，是为了发展他们对表内加法和乘法以及相对应的减法和除法的理解。当然，他们将来需要把这些活动符号化。例如：

○○　○○　○○ = ○○○○○○

表示成　　$2+2+2=6$

或　　$3\times2=6$

皮亚杰的研究表明，对许多儿童来说，符号的或抽象的工作最好在一年级下学期开始以系统的方式进行，因为许多儿童大约要到七岁之后，必要的运算思维才能产生。有的儿童到九岁时还不能区别 $3+2$ 和 3×2。

当儿童能够在抽象水平上相乘的时候，他就会把乘法口诀组成下面这样的表，只有在必要的时候，才使用可操作的具体材料。

例如，为了求出乘法表的“第三”栏，儿童会以含有 3 个物体的集合作为必要的基础，然后算出这样的 2 个集合是多少，3 个集合是多少，4 个集合是多少，等等。

研究表内乘法的第二种方法是考虑能表示成两个一位数相乘的数。例如，12 这个数，就可以表示为 6×2，2×6，3×4 和 4×3。这跟教加法时的数族方法类似，即 5 可写成 $4+1$，$1+4$，$3+2$ 和 $2+3$。

表内乘法全部算出后，可整理如下：

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

这些乘法应通过一些强化活动使儿童熟记。

有许多有趣的强化游戏，它们可为这些乘法口诀提供复习回忆的实践机会。

进一步，要学会用简便的方法计算较大数目的乘法和除法，儿童还需要理解位值以及交换性、结合性和分配性等重要观念。

儿童发现乘法和加法一样也有交换性，比如$3\times4=4\times3$。还可发现，结合性对于乘法也是成立的，如$3\times(4\times5)=(3\times4)\times5$。

乘法对加法的分配性

儿童在探索和理解了基本的一位数乘法（从0×0到9×9）之后，他们将继续探索两位数或多位数相乘的过程。

解决象3×23这样的乘法问题，可以在具体水平上用木棒进行，得到3个含有20根木棒的集合和3个含有3根木棒的集合，或(60+9)根木棒。用符号表示即为

$$3\times23=3(20+3)=(3\times20)+(3\times3)=60+9=69$$

这一程序中，运用了一种称为乘法对加法的分配性的特性。在如4×321的题目中，因数4可以分配给用一组加数来表示的另一个因数321：

$$4\times321=$$
$$4\times(300+20+1)=$$
$$4\times300+4\times20+4\times1=$$

然后，运用基本的一位数乘法 4×3, 4×2, 4×1 的口诀和适当的位值观念,把问题表示为

$$1200+80+4$$

然后写成 $$1284$$

不管要乘的数目有多大，都可以应用同样的方法。如果两个因数都是两位或两位以上的数,那么就至少要用两次分配性,如

$$\begin{array}{rl} 34 & \\ \times\ 12 & \\ \hline 68 & 2\times(30+4) \\ 340 & 10\times(30+4) \end{array}$$

当然,还有一条原则,即第二个部分积要"错前"一位。它不是1个含4个物体的集合而是10个含4个物体的集合，即40个"一"或4个"十",所以4写在"十"位上。

对启蒙教师来说，叙述这样的问题是困难的。如按下述方法讲的话,就易用具体的材料来展开。

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 12 \\ \hline \end{array}$$

把这道"12个每个含有34个物体的集合共有多少个物体"的题目,看作是10个含有34个物体的集合与2个含有34个物体的集合的和。把34个"一"看作是3个"十"和4个"一",那么

(1) 2个含4个"一"的集合是多少？　8个"一"。

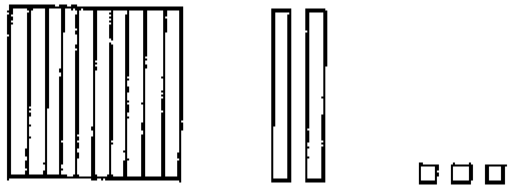
(2) 2个含3个"十"的集合是多少？　6个"十"。

(3) 10个含4个"一"的集合是多少？40个"一"或4个"十"。

(4) 10个含3个"十"的集合是多少？30个"十"或3百。

按这种叙述形式用具体材料来展开问题是不困难的。"十"的集合可以用10根被橡皮筋扎在一起的木棒来表示，也可用方便

的木制品或塑料制品来表示“百”、“十”和“一”。



百　　十　　一

1　　2　　3

用具体材料来发展儿童除法计算的类似程序以及其它的乘法例子，将在第 21 章叙述。

11 分数和比例

从知觉的或感知运动的部分-整体关系到运算性的再分(subdivision)，有一段漫长的(时间)历程。①

整体的守恒性是运算性再分的根本条件。②

分　数

一半与三分之一

虽然皮亚杰设计的大多数活动是独特的，但用来研究儿童对分数理解的方法仍是惯常所用的几何方法。给儿童一个泥土捏成的圆块及两个布娃娃，对儿童说：这个圆块是一个饼，现在把它分给这两个孩子(布娃娃)吃光，并要使他们吃的份量相等。给儿童一把用来分饼的木质小刀。

然后，再用三个布娃娃和一个饼重做这一实验。这一实验的一个变式是：先用三个布娃娃，再用两个布娃娃，这样可以看出前面把饼分成两份的过程是否影响后面把饼分成三份的方法。

对那些不会用小刀分饼的儿童，实验也可用圆形、矩形和正方形的剪纸为材料。让他们用剪刀把这些形状的纸分成二等份或三等份。也可给儿童一支铅笔，让他们在打算剪的地方画一条线，这就使分的方法更容易了。

在儿童每次划分后接着问他：如果把分开来的各部分再粘在

① 皮亚杰、英海尔德和韧敏斯卡：《儿童的几何概念》，第308页。

② 同上，第311页。

一起，是否能得到一个整饼，还是比一个饼多些，或少些。

阶段1　在阶段1，要求四岁到四岁半的儿童把饼分成两半是非常困难的。起先，他把饼分成两份后并不停下，还是继续分下去，他没有什么预先的计划或图式。稍后，他给每个娃娃同样大小的一小块，还留下大部分没有分掉。问他把剩下的饼分给谁，他说"谁也不给"。有的儿童认为，把饼分成两部分，必须要切二次。

从对不同形状的饼的分切情况来看，似乎矩形最容易，其次是圆形，最后为正方形。

在阶段1，最显著的特征是部分与整体间没有任何关系。儿童不把部分看作是一个较大整体的组成部分。当一个部分从整个饼上实际切下后，它就失去了与整个饼的关系。如果儿童得到了半个饼，那么他不能得出另一部分也是半个的结论，因为这意味着把部分与整体联系起来了。

部分与整体的关系问题，我们已在第5章进行了详细讨论。儿童面对九朵玫瑰花和二朵菊花，即使他知道它们都是花，也仍是回答玫瑰花比花多。儿童在考虑分数问题时，也表现出同样的概念的局限性。

阶段2A，四至六岁　对形状规则、面积较小的物体，四至四岁半的儿童是可能对分的。但是，如果要分的整体面积增大，那么这种对分的能力就会推迟获得①。

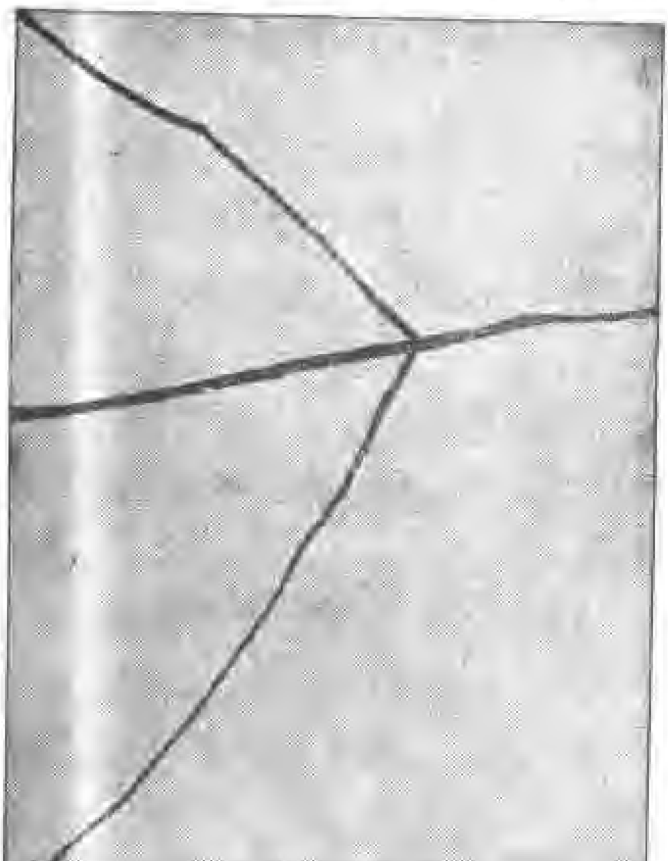
三等分的能力还未获得。在阶段2A，儿童可能把饼的一部分分成三部分而不去管剩下的另一部分。问他为什么这样做，一名儿童答道："这是给妈妈的。"他们或者这样做：把饼分成许多不相等的部分，拿出其中三块给布娃娃。如果他以前曾对分过，那么这时他就可能把饼先对分，然后再把其中的半个饼切成两块，给三个布娃娃每人一块。

矩形的饼，似乎比较容易切分，但基本问题是同样的。三等分

① 同上。

六岁的约翰在为两个布娃娃分饼。

所得的每一部分应是整体的三分之一，二等分所得的每一部分应是整体的二分之一。



一名五岁儿童为三个布娃娃分饼，他先画了两条线，但后来又觉得块数不够，于是又加了一条线。

阶段 2B 和阶段 3A，六至七岁 六至七岁的儿童通常能成功地完成三等分的工作。他们不再运用试误的方法，而有了一种运算性质的理解，即达到了具体运算水平。解决问题的水平随着阶段的发展而有所不同。阶段 2B 的解答是过渡性的，阶段 3 的解答则是迅速而直接的。虽然一般地说，这一时期是在六至七岁，但较聪明的儿童可能四、五岁就达到了①。

① 同上，第 320 页。

关于整体守恒的问题，阶段3的儿童也能在具体运算水平上成功地予以解答。这时儿童认识到每块饼合在一起与整个饼的份量是一样的，而在此之前，他们认为部分合起来比原来的整体要多些或少些。

五等分或六等分

虽然六等分可以通过把二等分和三等分结合起来的方法来完成，但在儿童达到3B阶段之前，存在着一个值得注意的时间延宕。五至六岁的阶段2A的儿童，他们起初只是切下一块块饼来，分给5个或6个布娃娃。他们不理会由于这种任意的切分而剩下的部分。后来，在阶段2B，儿童有了一种图式或计划，如先把饼分成两半，接着每一半再分成两半。但只有四块，一名儿童说块数不够。于是另一名儿童又把四块的每一块再二等分，得到了八块。然后拿出其中的六块给了六个布娃娃。

七至九岁的阶段3A的儿童能成功地运用试误的方法。如先让六个布娃娃排在饼的周围，然后再把饼分开。

最后，大约十岁左右的3B阶段，儿童对解决问题表现得较有把握，比如他先把饼分成三块，然后又把每块一分为二。

九岁的约翰显然处于阶段2的后期，他在等分圆饼时遇到了困难，通过试误或移动线的位置，最后才达到了3等分。

教育含义

目前学校所确定的给儿童讲授分数的时间，似乎与皮亚杰所描述的必然的发展特点是相当吻合的。但许多六岁的儿童还没有理解"一半"和"三分之一"所必需的概念。通常的教学方法应加以改进，要让儿童自己形成必要的运算，而不是告诉他二分之一、三分之一或六分之一怎样划分，因为那种只是"告诉"的讲授方法，是否会产生理解，乃是不能担保的。

分数的特点是分成的每一部分必须具有同样的量或彼此相等，在儿童能够认识到分数的这一必然的特点之前，他们必须首先把分数的每一部分看作是组成一个整体的不可缺少的部分，这个整体可以被分割或由分割的部分重新组合起来形成同一个整体（守恒性）。这一认识通常在儿童入学的第一年中产生。

皮亚杰总结出，儿童必须掌握分数的以下七个条件或特性，才能具有运算性质的理解：①

1．没有一个可以分割的整体，就不可能有分数的思想。两岁左右的儿童把整体看作是不能分的而拒绝分割。他们受封闭的形状（格式塔）所制约。三岁儿童愿意分了，但分割的行动使对象失去了整体的性质。

2．一个分数蕴含着一定数目的部分。定量的分配是以分成的份数必须与享受者（布娃娃）的数目相一致为条件的。但较小的儿童还是按自己喜欢的方式随意地划分。

3．一个确定的分数的第三个特点是完全的划分，即没有剩余的部分。有些注意到前两个条件的儿童，还常常只是把整体的一部分分掉。

4．整体所分成的份数和分（切）割的次数之间存在着固定的关系。一次切割把饼分成两个部分，但那些用切下一小部分的方法去划分的儿童，认为一次切割只产生一个部分。同样，他们认为

① 同上，第309页。

二次切割产生两个部分。他们的划分是在拓扑学的而不是在欧几里得几何学的水平上进行的，他们认为切割线的数目与切成的块数是正好一样的。

5. 算术上的分数概念意指各个部分都是相等的。即使实验者坚持要求每个布娃娃应分到一样多的饼，很多儿童仍留下一部分饼没有分掉。

6. 只要再分(subdivision)的概念是运算性质的，儿童就认识到分数具有两重的性质。它们都是原来整体的部分，同时本身也是一个能够进一步再分的整体，它们形成一个构造的序列。那些割一块再割一块的儿童，表明他们还没有理解这一套序列。

7. 分数是与它所来自的整体相联系的，整体保持着不变性。“整体的守恒是运算性再分的根本条件”。①如我们已经看到的，它通常要到六至七岁时才会产生。

作　业

运用类似于上面所介绍的活动，检验皮亚杰关于儿童分数概念的结论。(参阅皮亚杰、英海尔德和彻敏斯卡所著《儿童的几何概念》第12章。)

比与比例

本章第一部分谈的是作为整体的相等部分的分数概念。通常用$\frac{a}{b}$这一形式来表示分数，其中a、b是整数，且b不为0。数字a代表所取的份数，b代表整体被分成的份数，比的观念也可以用$\frac{a}{b}$来表示。但一个比是指两个数相比较。比如，在有15个学生的

① 同上，第311页。

班级里，如果有5名男孩，10名女孩，那么班级中男孩所占的份额就是5/15或1/3。男孩对女孩的比就是5比10或1比2，它在习惯上也常用分数的形式表示成$\frac{1}{2}$，但读作1比2。

比例的观念就是两个等值的比。在解决物理领域内的许多问题时，比例是非常有用的。下面我们将要用它来解决速度和时间、相似三角形及概率等问题。

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$这样的记号表示一个比例。知道了其中三个字母所表示的数，第四个数就很容易求出来。例如我们知道了一列火车1小时运行60公里，得到一个比为60比1。为了计算火车在5小时内走多远，就可以列出如下的比例式：

$$\frac{\text{距离}_1}{\text{时间}_1}=\frac{\text{距离}_2}{\text{时间}_2}$$

$$\frac{60}{1}=\frac{x}{5}$$

等式两边的数同被5乘后，即可算出x为300(公里)。

在下面的讨论中我们将看到，儿童认识不到两个象$\frac{2}{3}$和$\frac{4}{6}$这样的相等的比是等值的。

速度和时间

我们已经发现，作为空间间隔(距离)和时间持续(时间)两者关系的经典的速度概念，在儿童发展过程中约到九或十岁才很晚出现。与此相反，早在前运算时期，即甚至在六岁以前，就已有了并非建立在这种比的基础上的直觉的速度观念。①

① 皮亚杰：《发生认识论》，第62页。

虽然如上面引文所说，儿童在九至十岁时有了作为距离与时间之比的速度观念，但运用比例的思想去度量或测定速度的能力，大约要晚两年，直至形式运算水平或大约到小学毕业才发展起来。具有讽刺意义的是，皮亚杰研究速度和时间概念的专著《儿童的运动和速度的概念》，早在25年前就以法文版问世，但直到1970年才被译成英文。

研究儿童运用比例的能力，可用运动的物体来做实验。让一个物体沿着一条线路移动，由儿童确定开始与停止的时间，如2秒钟。画出物体经过的路程，旁边记下2秒时间。再用另一个物体沿着与上面相平行的路线移动等长的一段距离，但用了4秒钟时间。然后问儿童，这两个物体的速度是否一样或是其中有一个快一些。

如果两个物体(如卡车)部分地或完全地同时运动，那么，儿童对速度的运算性理解，即把速度理解为时间和距离之间的一种数学上的比，要到阶段3时才会出现。然而如果卡车是一个接一个运动的，如上面的实验那样，那么儿童又会重犯从前的老错误。

一名八岁的儿童观察一辆玩具卡车在4秒钟内运行了4cm，另一辆在4秒钟内运行了5cm。问他两车是否运行了同样的时间，他说"是的"。运行的速度是否一样呢？他也说"是的"。为什么呢？"因为有一辆车运动的步子大一点。"

还是让这个儿童比较在一段距离内(4cm)两车的运行情况，一辆车用了4秒钟，另一辆车用了3秒钟。是否有一辆车走得快点？"是的"。哪一辆？"走了4秒钟的那一辆。"哪一辆在较短的时间里走到头了？"化了3秒钟的那一辆。"刚才哪一辆走得快？"走了4秒的那一辆。"这些问题难回答吗？"不难。"①

如果物体运动的距离和时间都不相等，那么即使象2比1这样简单的比，儿童也不能理解②。

---

① 皮亚杰：《儿童的运动和速度的概念》(The Child's Conception of Movement and Speed)，纽约：Ballantine 图书公司，1971，第227页。

② 同上，第226页。

这些儿童把"较快"看作与"较多的时间"意义相同。

阶段3快结束时，比例就逐渐构造起来了。最后在阶段4，大约是十二岁时，儿童在形式运算的水平上，懂得了比值的测量。

让一名十二岁的儿童比较下面两次运行：一次是6秒钟运行8cm，另一次是5秒钟运行5cm，他认为"第一次走得快，因为如果第二次运行了与第一次同样的距离，那么它需要更长的时间。第二次走的距离要短，所以它只用了5秒钟。"①

处于阶段4初的儿童，能把1与2，1与3，1与4之比用式子表示出来，但他们计算其它的速度比值时仍有困难。后来，他们运用了系统的方法。让他比较6秒钟走16cm与5秒钟走15cm的两次运行，他测量后说："你得把16用6除，15用5除。"②

比例和概率

> 十一或十二岁时，儿童在一些不同的领域中产生了比例的思想……这些领域包括空间的比例（相似形）、测量速度（速度和时间）……和概率……③

如果要计算概率，比如计算从一个装有15只红球、10只蓝球和8只绿球的布袋中随机取出两个同样颜色的球的概率是多少，那么儿童必须至少能进行两种运算。他必须会运用考虑所有可能组合的组合系统，还必须理解比例④。在具体运算水平上，儿童还不能把握如下的事实：$\frac{3}{9}$与$\frac{2}{6}$是相等的⑤。

皮亚杰在一本论述概率的书中⑥，研究了儿童对比例的理解，

① 同上，第242页。
② 同上。
③ 皮亚杰和英海尔德：《儿童心理学》，第141页。
④ 同上，第144页。
⑤ 同上。
⑥ 皮亚杰：《机遇概念的起源》（La Genèse de La notion de hazard），巴黎：Presses Universitaires de France，1951。

因为在承认四分之二的概率与六分之三的概率相同时，就直接应用了比例。这本书在将近四分之一世纪后的 1975 年被译成了英文①。这方面的内容我们将在第 13 章叙述。

几何的比例

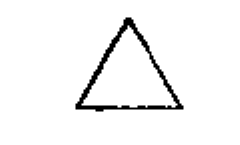
> 看出两个图形相似，是一回事；而能够在运算水平上根据一个实际的模型画出一个与之相似但原先并不存在的图形来，这完全是另一回事。②

关于儿童在速度和运动以及概率范围内对比例的理解，我们已在前面几节进行了初步的探讨，在以后两章中，我们还要进行更充分的讨论。

关于儿童对比例理解的第三方面的研究，即几何方面的研究，是本节要讲的内容。材料主要引自《儿童的空间概念》第 9～14 章。该书出版于 1948 年，比皮亚杰关于速度和运动的著作迟两年。我们先讨论儿童对相似三角形中比例的理解，然后在第 18 章再从儿童画地图的能力来加以研究。

相似三角形

平行。四岁以下的儿童不会画三角形，也不能从其它图形之中认出三角形来。从五岁起，我们就可以对儿童进行相似性的研究，如向儿童呈示一个三角形及一条基线要求儿童以这条基线为一边，画一个大三角形，并使这个新的三角形"看上去"跟原来的三角形"一样"，或与原三角形"具有相同的形状。"



五到六岁半的阶段 2A 的儿童，能够在原三角形的周围画出另一个三角形来，但他们不考虑边的平行和角的相等。六岁半到七

① 皮亚杰和英海尔德：《儿童机遇概念的起源》。

② 皮亚杰和英海尔德：《儿童的空间概念》，第 321 页。

岁半的阶段2B的儿童则开始懂得使边保持平行，但只能对某些特殊类型的三角形完成这一任务(如等边三角形或等腰三角形)。

七至九岁的阶段3A的儿童能发现并使用平行的观念，画出与任意一个模型相似的三角形来。

在九岁半到十岁半的阶段3B，儿童开始从定性的(知觉的或视觉的)比较过渡到定量的比较和比例。他们开始考虑其中包含的比例关系。让一名九岁半的儿童以一条6cm长的基线为边画一个更大的三角形，使之与基线上方的边长为3cm的等边三角形相似，他用自己的米尺画出与较小三角形的边相平行的较大的三角形的边，并说："看，你也可以这样量它。"①给他一个底边为3cm，腰长为6cm的等腰三角形，他立刻重复自己的度量，随后说："不可能吧，它太高了。"但是在他检查了一下，看出边是平行的后，就满意了。

角的相等。理解角的相等是判定三角形相似的基础，为了研究儿童理解角的相等的能力，给儿童一些三角形的剪纸，让他们把这些三角形分成形状相似的几类。允许儿童用手操作，如把一个三角形放在另一个之上。

在五岁到六岁半的阶段2A，儿童只能对图形进行一种大致的比较，还不认识相似性。儿童不去仔细地检验角是否相等或把一个三角形放到另一个三角形上加以比较。他说他把两个三角形归在一起是因为它们都是"胖的"(大的)，或者他认为两个三角形的形状不一样，是因为其中有一个高些。

皮亚杰指出，值得强调的是，儿童在这一阶段仍缺少理解角的相等的能力。它表明对相似图形的认识只靠知觉的提示(线索)是不够的(等边三角形除外，因为它的三个角是一样的)。

"就角的情况而论，对边的长度、高与底边的比，也许还可加上对倾斜程度的估计等的知觉，总是经常性错误的主要的原

① 同上，第339页。

因。"①

在大约七岁左右的阶段 2B，儿童开始注意边的不同程度的倾斜(当两个三角形都是正放着的时候)，但对角的判断的准确性还是很不够的。

在阶段 3A (七岁半到九岁半)，儿童的判断不再是纯粹知觉的或直觉的了。这时儿童会自发地把两个纸板图形重叠起来加以比较。这是一种包含着可逆动作的方法，它具有完全运算性的特征。从中儿童发现，两个三角形的角相等，跟三角形的边长无关。这时儿童把两个三角形相等描绘成"尖的程度相同"或"倾斜的程度相同"。

到阶段 3B，九岁半到十一岁的儿童对角的相等是相似判断的基础的理解，已趋稳定和完善。当问到两个三角形是否形状相同时，他们回答："你只须去量那角落(角)就知道了。"问是否必须测量三个角，答道："不，只要两个，第三个显然是相等的。"

总之，作为发现三角形相似基础的平行线的观念，在 3A 阶段已被儿童掌握了。由此，儿童接着发现它们的角是相等的，最后才获得成比例的观念。

皮亚杰也研究了儿童对矩形相似性的理解，他发现，情况与三角形适成遗憾的对照，因为矩形的相似性须以有关尺寸比例的知识为前提②。皮亚杰运用矩形作为研究阶段 4 的基础，他发现，对涉及边的测量和表示为比值的定量或测度形式的比例的完全理解，直到大约十二岁的形式运算水平时才发展起来。这支持了他关于比例概念发生的早期研究。

在绘制地图的能力中所表现的比例观念也可在阶段 4 发现。这一观念我们将在第 18 章加以讨论。

① 同上，第 344 页。

② 同上，第 338 页。

教育含义

当前小学数学中并未对速度与时间以及相似三角形给予过多的注意，其原因，大概同样是因为在大约12岁之前，运算性的理解还没有出现。

然而，已在向儿童介绍百分比，概率和看地图等内容，而这些都要用到比例的思想，许多儿童可能对此还没有准备性。

12 时　间

看来，在阶段1和阶段2（五到九岁）……儿童对这两种工具（钟表以及沙瓶或滴漏）是完全迷惑不解的。起初（阶段1），这是因为他相信计时工具的运动同要测定时间的动作有差异；后来（阶段2），又是因为他无法使上述两种运动同另外一些与之相比较的运动同步化（即传递性）。……①

所有时间测量所依据的基本公设，是一切运动（测时工具的运动以及待测时的运动）的存在都具有这一特征，就是在相同条件下，倘若它（运动）重新发生，那么将会经过同样的时间。②

有一个教师这样写道："我至今还能回想起我年幼时认识钟表所遇到的苦恼和挫折。滑稽的是，当我读完了本章之后，竟迫使我施行起一种名为'底特律学习测验'（The Detroit Test of Learning）的能力倾向测验来了。其中有一项称作'定向性'的分测验，它提出如下一些问题：

1．你的年龄比你妈妈的年龄大吗？
2．你吃早饭是在早晨还是晚上？
3．在什么时候你能看见星星？
4．你明天的年龄比今天大还是小？

---

① 皮亚杰：《儿童的时间概念》，第176页。
② 同上。

5．太阳升起的时候是早晨还是晚上？

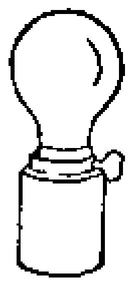
6．一个月与一周相比，哪一段时间长些？

我开始认识到这些问题以及该项测验中的其它一些问题都是与儿童的时间概念有关的。”

事件的时间顺序

儿童的时间概念最初是直觉的。这时，感觉印象或者知觉是儿童作出有关时间结论的基础。到后来，逻辑为运算性地理解时间提供了一个基础，而不再是单靠感觉材料。皮亚杰将这两种理解水平称为直觉时间和运算时间。

为了研究所涉及的运算，皮亚杰用了两只容积相同的玻璃瓶，把一只瓶放在另一只瓶的上面。



在上面一只瓶子中灌满有颜色的水，每隔规定好的时间，让一定量的水从瓶子 I（上面的瓶子）流入瓶子 II（下面的瓶子）。

给儿童六张到八张纸，每张纸上都印着一幅空瓶的图画，要求儿童在每一次水流动后记下每只瓶中水面的位置。

这件事做完以后，把这些图混和打乱，然后再要求儿童把这些图一张张按照被画的次序排好。

接着把每一张图沿水平方向剪开，使得上面的瓶子与下面的瓶子正好一分为二，然后再把这些纸打乱，要求儿童对每一张瓶子 I 的图找出与它配对的瓶子 II 的图。

儿童为了成功地完成这个任务，必须将瓶子 I 的几张图排成正确的顺序，同样瓶子 II 的几张图也要按正确的顺序排列起来。照皮亚杰的说法，这就是时间的本质——至少同时将两种运动协调起来，形成一种共进序列(coseriation)。

当我们研究了事件的序列或次序之后，我们问儿童，水从一只瓶子的一个标记流到另一个标记所经过的时间，是否与另一个瓶子中水从相应的一个标记到下一个标记所经过的时间相同，这就是时间绵延观念。

从心理学上讲，儿童必须能够应用顺序或次序关系和绵延来协调两种运动，才能对时间进行运算。

在阶段1，从五岁到七岁，儿童不能将这些瓶子的图排成正确的次序，即使这些图还没有剪开也不行。他不能按照唯一的序列重新排出事件的次序，因为他还不能将各个事件对应于指示时间系统的唯一的点。儿童为了成功地完成任务，他提出要求让他再看一次实验（再获得知觉），然后根据他所看到的瓶子中液体在某一时刻的位置找出正确的图来。在第一阶段后期，儿童用试误的办法能成功地将没有剪开的图排出顺序。

在阶段2，从七岁到八岁，儿童能迅速地将没有剪开的图排成唯一的序列。但是一开始他还不能把剪开后的两个图的序列关联起来。在第二阶段后期，儿童用试误法成功地将剪开的图配了对。

试误是一种知觉的方法，儿童试着拿起一张图观察它看上去是否是对的。如果不对，他又拿起另一张图再试试看，直到他最后找到正确的图为止。

在阶段3，大约九岁左右，儿童不需要靠试误的方法就能直接解决问题。这时儿童对涉及两种运动的时间的先后顺序和时间的绵延，有了运算性的理解。

结论

皮亚杰向自己提出了一个问题：为什么八到九岁的儿童能毫无困难地将十只不同高度的娃娃与十根不同长度的木棒排成两个对应的序列，使每一只娃娃能找到与它相对应的木棒（参阅第88页），然而却不能成功地完成上述关于瓶子的实验呢？

皮亚杰得出结论，认为将两个系列仅按高度来排列，同不仅是

根据高度而且要同时协调两种运动来进行排列是完全不同的。“两种运动固有的接连发生的次序不是别的而正是时间本身。”①

儿童将通过在用钟表来测量其它的运动(如走到学校的运动)时观察钟表指针的运动，来学会计时。

时间的绵延

〔诊断活动 8.1〕

为了研究儿童对时间流逝的绵延的理解，我们再次应用上述的瓶子，不过现在的问题并不是关于次序而是关于时间的绵延。让儿童注视水滴的运动，然后问他：“水从下面瓶子的一个位置升高到另一位置 (II_1 到 II_2) 所经过的时间，同水从上面瓶子的一个位置降到另一个位置(I_1 到 I_2)所经过的时间是不是一样长？”

在阶段 1，六岁到七岁，儿童认为流逝的时间是不同的。为什么呢？“因为从 I_1 到I_2 (上面的瓶子) 要比从 II_1 到 II_2 (下面的瓶子)所经过的时间长一些。”这又为什么？“因为上面的瓶子比较大，里面的水多。”知觉材料是该儿童回答的基础。

在阶段 2，从六岁半到九岁，儿童具有一种直觉的观念，即时间同速度是成反比的。(假如我跑步回家，那么要比走回家所花的时间少)。因为从儿童看来，好象液体从上面瓶子流出来的速度比灌进下面瓶子的速度要快一些。儿童由此得出结论：从 II_1 到 II_2 需要更多的时间。而事实上液体是同时在两个容器中流出和流进的：所谓同时就是具有同步的时间绵延，这种同时性是由连接两个瓶子的活塞开关实现的。

这些儿童对于认识液体从 I_1 到 I_2 和从 II_1 到 II_2 所经过的时间的同一性，缺乏必要的运算思维，他们尚不能把时间的绵延跟事件的次序协调起来。

① 同上，第28页。

定量的时间既是序数又是量数(基数)。四个事件 A、B、C、D 发生的次序(在上一节里所讨论的),相应于从 A 到 B 的部分时间绵延包含(包容)于从 A 到 C 的较长的时间绵延,以及从 A 到 D 的更长的时间绵延。

在阶段 3,八岁半或九岁的儿童已有必要的运算性的"群集",来构造一个包含全部瞬时和事件的时间度量表,他认识到虽然液体的水平面在一个容器中比在另一个容器中移动得快些,但是移动或时间的绵延是相同的,此时他已能够使两个不同运动的时间同步化。这种同步化正是时间的本质。我们正是将钟表指针的运动与我们要计时的运动同步化的。

物 理 时 间

在上面两节中,我们要求儿童重新构造两种计时的顺序,即先后次序和(同时性的)绵延,旨在鉴定其中包含的运算。在这一节里则要研究儿童观察或知觉类似现象时的另一种反应,而不是让他们将所看到的重新构造出来。

儿童要理解时间,就必须要能够将不同速度的运动纳入统一的空-时参照系中。实验者把两个娃娃放在起跑线上,发出一个信号譬如敲一下桌子后,两个娃娃开始赛跑,一个娃娃跑得比另一个快一些。实验者再敲一下桌子,两个娃娃就都停下来。为了研究儿童的时间先后观念,我们问儿童这两个娃娃是否在相同的时间起跑,是否在同一时间停下。

在阶段 1,从五岁到七岁,儿童认为娃娃不是同时停下的,一个娃娃晚停一些,跑的时间长一些,因为它跑得远。这些儿童把时间同空间混淆起来了,他们甚至可能还没认识到娃娃是同时起跑的。

同样,当问到时间绵延问题时,这些儿童认为一个娃娃所花的时间长些,因为他跑得远些。

在阶段 2，也就是五到七岁，儿童能正确地答出两个娃娃是同时开始跑的这个先后次序问题，不过，他们仍然还是答不出时间绵延问题。他们说一个娃娃花了更多的时间，因为他跑得比较慢(或者比较快)。有些阶段 2 的儿童能正确答出绵延问题，但答错了先后次序问题。他们说两个娃娃不是同时停下的，即使他们知道这两个娃娃跑了相同的时间。到阶段 2 的末期，儿童靠试误以及重复提问发现了正确的答案。

在阶段 3，从七岁到九岁，儿童能直接答出正确答案。

传 递 性

一个对时间关系具有运算能力的儿童，就具有了"群集"能力，而处于直觉水平的儿童没有这种能力。这种群集能力可以用传递性来加以研究。若

$$a=b, \quad 且 \quad b=c,$$

则

$$a=c。$$

在定性水平上可以用三个形状不同但容积相同的瓶子来做实验。如果用液体注满 A 瓶的时间和注满 B 瓶的时间相同，注满 C 瓶的时间和注满 B 瓶的时间相同，那么注满 A 瓶的时间和注满 C 瓶的时间比较起来又怎样呢?

一直要到八岁左右，儿童才能运用传递性的演绎逻辑正确地解决这个问题。在八岁之前，儿童只会运用知觉的手段，当儿童把 B 与 C 联系起来时，他不再能保持 B 与 A 的关系，因而不能将 A 与 C 联系起来。

时间的守恒

正如本章开始时引用的一段话所指出的，皮亚杰发现，儿童在

大约九岁之前尚不能有效地使用钟表或沙瓶滴漏，儿童常常相信钟表指针的运动速度是随着被测定时间的运动的速度变化而变化的，也就是指针会走得快些或慢些。“如果我做事情做得快，钟也就走得快，如果我慢下来，钟也变得慢下来。”

正如皮亚杰指出的：

> 实际上，所有时间测量所依据的基本公设，是一切运动的存在都具有这一特征，就是在相同条件下，倘若它（运动）重新发生，那么将会经过同样的时间（等时性）。①

等时性

因而，儿童常常无法认识钟表指针速度的守恒，他认为指针的速度会变快或变慢，这取决于被测时的那个运动是怎样的，他们尚不能掌握钟表的等时性②。

皮亚杰为了验证上述的结论是正确的，他用了一个沙瓶做实验，这个沙瓶上有三条刻度线，每条线的颜色不同，分别表示刻度线以上部分为整个瓶子的1/4、1/2与3/4。实验时将瓶子的底部遮起来。

实验时要求儿童通过把弹子从一个容器移到另一个容器或者在纸上按均匀的时间间隔划上记号，来测定沙粒下落的时间。当儿童做完了这些以后，让他加快移动弹子的动作再进行一次实验，然后问他沙从一条刻度线降到另一条线所花的时间是否比刚才的实验多些或少些，还是相同？（参阅下页照片）

在阶段1，五岁到六岁的儿童认为，当他加快在纸上划记号的动作或者移动弹子的运动时，沙粒也落得更加快些，此时，知觉是他回答的基础。

在阶段2，七岁到八岁的儿童认识到，当他自己运动的速度改变时，沙下降的速度是不会改变的。他已具有了理解速度的守恒

① 同上，第176页。

② 同上，第177页。

性所必需的运算性的群集和定量化。

虽然速度的守恒性是理解时间的必要条件，但是它并非充分条件。对同步的绵延和传递性的理解也是必要的条件。阶段 2 的儿童无法将速度概念的守恒运用到两个运动的物体上（即缺乏同步性）。同步性对于理解时间也是必要的。

同步性

〔诊断活动 8.2〕

对时间进行测量，也就是意味着对各种钟表的运动加以比较。各种不同的钟表必定“告诉”我们相同的时间。但是儿童一直要到阶段 3 大约九岁左右方能理解这一点。

作为一种实验活动，可以让儿童按均匀的时间间隔在一张纸上划出记号，先是用一只跑表来计时，时间间隔为 30 秒或秒针走半圈。接着用沙瓶滴漏进行计时再重新做一遍，让儿童在纸上划记号，然后要求儿童对沙瓶及钟表指针所测定的时间加以比较。

在阶段 3 之前的儿童，缺乏作出结论所必要的传递性，因而无法断定沙瓶和钟表测定的是相同的时间（即在纸上划出记号的时间间隔）。这些儿童认为一件工作如果用跑表测定花了 30 秒时间，

苏姗，六岁，尚未掌握时间守恒性。她认为当她缓慢地移动弹子时，沙瓶中沙粒漏空的时间将比她快速移动弹子时来得长。

那么改用沙瓶进行测定，所花的时间就会长些或短些，因为钟表指针比沙瓶中的沙粒要运动得快些。

即使一个儿童能够认识到钟表指针是以同一速度运动的，他也许仍然无法掌握由两种不同的钟表所测定的时间的等同性（即时间的守恒性），而这一点是非常重要的。

密司边，七岁，她注视着壁上的挂钟，但是她认为当她缓慢移动物体时秒针转半圈的时间（30秒）比她快速移动物体时来得长。

詹姆士，九岁，能掌握时间守恒。

时间单位的构成

等时性及同步性是理解时间的两个必要条件，这一点刚才已

经叙述过了。第三个也是最后一个必要条件是将时间间隔或绵延分成能够重复测定的时间单位。这些时间单位也可用到需要计时的其它动作上去，也就是用数来进行真正的计时。

有一个实验，要求儿童随着一个节拍器的节奏从1数到15，同时叫他看着跑表的指针（在同一时间内跑表走了15秒）。然后将跑表遮起来，叫儿童再比较快地从1数到15（调整节拍器让它敲打得也比较快），并让儿童预言在这段时间内跑表的秒针走了多少秒。

在阶段2，儿童无法把自己所做的工作（从1数到15）的绵延同钟表指针的绵延同步化。他认为钟表的秒针将走得更快一些，例如走到20秒或30秒，因为他数得更快了。或者这些儿童可能会说钟表秒针走了更多的时间，因为秒针走得比较慢了。

以年龄表示的时间（将事件按顺序排列）

〔诊断活动8.3〕

为了研究儿童对于年龄的时间概念，可以问四到九岁的儿童，他是否有兄弟姐妹，他们的名字叫什么。如果他没有兄弟姐妹，再问他是否有朋友。让我们假定跟一名五岁儿童谈话，他有一个弟弟，名叫乔尼。

"乔尼几岁啦？""不知道。"

"你和乔尼谁的年龄大？""我。"

"为什么？""因为我的岁数大。"

"谁先生出来？""不知道。"

"你生出来的时候是几岁？""两个月。"

"等到乔尼开始上学的时候你们俩的岁数谁大？""不知道。"

"你再长大的时候，你们俩将是谁大？""不知道。"

"你的妈妈比你们大吗？""是的。"

"你的奶奶岁数比你妈妈大吗？""不。"

"她们的年龄一样吗？""是的。"

"你奶奶的年纪每年再增加吗？""不，她的年纪是一样的。"

"你和你的妈妈谁先生出来？""我。"

"你奶奶生出来的时候是几岁？""她已经很老了。"

在阶段1，回答同上面的谈话相类似，儿童尚无法掌握时间是连续的观念，他的回答可归为*原始直觉的*。

他认为当一个人长大的时候，年龄是不变的，所以妈妈和奶奶有相同的年龄。他还常常认为他比他的父母年龄大，因为他第一次看到父母时他已存在了。他还无法进行这样的推理：因为乔尼岁数小，所以他出生一定晚一些。

在阶段2，从六岁到八岁，有一些儿童能够根据现在的年龄推出谁先出生，但是当弟弟长大时，他将变得"比我（答话的是一个女孩）年龄大了，因为他长得比我高大了"。这时儿童把年龄（时间）与大小（空间）等同起来，儿童尚未把时间的本性看成是一个连续体。

这阶段的另一些儿童尚不能根据现在的年龄说出谁先出生，但是他们认识到当他长大时，他和弟弟之间的年龄差异将会保持不变。一个儿童如此说道："人会长得越来越大，然后有很长一段时期保持一样，后来突然，他们变老了。"

这些儿童对时间有一个直觉的或知觉的理解。到了阶段2的末期，运用恰当的提问，他们也能在试误的基础上得到正确的答案。

在阶段3或大约八岁左右，儿童的回答一般是直接而正确的，这时他们的回答是基于逻辑而不是知觉。

儿童处于具体运算水平时，能够理解：

1．各种事件在时间上具有先后顺序的观念（借助于出生次序）："如果我的年龄大，那么我必定先生出来。"

2．时间绵延的观念或者年龄差异守恒的观念："如果我大五岁，我将永远大五岁。"

结语及本章内容的教育含义

学习认钟计时的集中活动通常在三年级开始，这正好符合皮亚杰所述的具有准备性的阶段。

有些阶段3的儿童在八到九岁时就理解时间了，而另外有些儿童在十岁时还仍然停留在阶段2，他们对于时间还没有真正的理解。

能够"看"懂一只钟表上指针所表示的时间或者"讲"出时间，是一种生存技能，它是需要教的，本章的诊断活动揭示了儿童中可能存在的许多糊涂概念。

13 机遇和概率

机遇和概率观念的形成以一种非常严格的方式依赖于组合运算的发展(在十一到十二岁)。①

人们经验中的大多数内容能够运用逻辑或数学的过程演绎地构造出来，例如鸭子与家禽的关系，或者一个集合中物体的数目等。可是对于经验中那些无法使用演绎方式加以同化的内容——如对于随机混和的事物或者偶然发生的事物，又怎样呢？假如存在这种情况，它对儿童将会提出哪些特殊的认识问题呢？

我们关心的第二个问题，是要理解儿童用实验探求经验世界的各种问题的答案时所使用的归纳过程。皮亚杰把归纳法描述成这样一种方法，其最主要的特征是尽力筛选我们的经验，以便发现哪些经验是有规则的，哪些经验是依从于规律的，以及哪些是出乎这些规律和规则，只是偶然发生的②。

是否在人的思想中存在着一种概率的直觉或观念，就象整数概念的直觉那样基本，并经常被使用呢？我们终于认识到事实和一系列原因无法分离地混合在一起，迫使我们采取一种概率的态度。例如，在三次划船野餐的活动中都下了雨，那么，你对于第四次郊游的天气将怎样预料呢？

令人感兴趣的是，原始人也许没有机遇(偶然)的概念，他们把每一个事件都看作是由隐蔽的或者明显的原因所造成的结果，他

① 皮亚杰和英海尔德：《儿童机遇观念的起源》，第161页。

② 同上，第xiii页。

们缺乏理性的或实验的准则，不接受偶然发生的奇异现象。如打雷或下冰雹，那是由于上帝或者神灵在发怒。现代的机遇概念是同"隐蔽的"因果论、宿命论和不可知论根本对立的。对于原始人来说，几乎任何事情都可能是某种奇迹①。

幼儿所问的许多自发的问题大多没有理性的解释，尽管他们认为存在着一种隐蔽的原因，例如：为什么这根手杖比那根长？为什么日内瓦湖不一直通到伯尔尼？为什么你的两只耳朵向外张开？类似这些熟知的"为什么"的问题，成年人是难以回答的。这些为什么都是询问事物在某种情况下的原因，然而在这种情况下也许存在着某种原因，也许不存在这种原因，现象是偶然发生的，但儿童总是看到某种隐蔽的原因。

假如概率的直觉不是先天的和原始的，那么这些观念又是怎样在儿童的心理中发生发展起来的呢？儿童最初并没有机遇观念，因为他必然首先构造一个因果系统。如果一个物体在海边特定的地点浮起来了，那么这是由某种力所引起的呢，还是偶然发生的？

迄今为止所研究的大多数理性运算或逻辑运算都是作为可逆过程而构造起来的，一些分散开来的物体是可以逆转的，可将它们重新移回到一起。前逻辑儿童的特征是思维的不可逆性，这些儿童没有意识到这种分散与合拢是一种可逆过程，他们认为将几个物体分散开来时，物体的数目就增多了。但是，儿童是在一步一步地进步到理解运算的可逆性。

与此相反，机遇概念是以不可逆的混合为本质特征的，至少从物理观点看来是如此。例如将一把黄沙扔在地上，这个过程是很难逆转的。皮亚杰假设，机遇观念的出现，即儿童发现机遇观念并真正理解其不可逆性，必定发生在儿童理解可逆运算之后。情况

① 同上，第 xvi 页。

难道不是这样吗？[1]

前逻辑儿童的思维过程是沿着单一的方向运动的（是不可逆的），在他的思维中还没有机遇观念，这正是因为他的心理组织（或心理结构）还不能将可逆的心理运算从不可逆的心理运算中区分出来。

故而必须把机遇看作是一个与逻辑起作用的范围互相补充的领域，所以一直要到儿童理解了可逆运算之后，通过将可逆运算与机遇（不可逆性）比较，他才能理解机遇概念。

机遇概念的物理侧面

皮亚杰与英海尔德合著的《儿童机遇观念的起源》一书于1951年用法文出版，可是令人遗憾的是经过二十四年才在1975年出版了英译本。全书分为三大部分：

1．机遇概念的物理侧面。

2．随机抽取与概率的定量化。

3．组合运算——组合排列。

我们在这一节中将借助于随机混合与不可逆性先来研究上述第一个问题：机遇概念的物理侧面。

随机混合与不可逆性

一扇门被风关上时正巧打痛了一个儿童，这个儿童很难相信风或门会没有伤害他的意图，他只看到了各个事件之间的相互作用。比如由于某件事使他走近门，又由于某个原因使这扇门动起来了，但是他还不会承认这些事件的相互独立性，他还没有认识到机遇正是日常所发生的一些事件的特征。当他经过扶梯下面时扶梯倒下来了，他不会认识到扶梯倒下来与他从扶梯下面走过是完全无关的（即两个事件是相互独立的）。

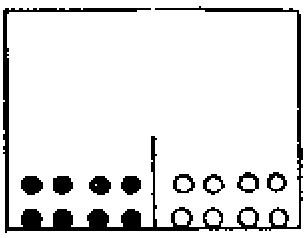
---

① 同上，第 xix 页。

使儿童(以及他原始的思想)不能形成机遇观念的原因是：(1)儿童对事件因果的相互作用已有认识，而对事件的相互独立性尚缺乏认识(扶梯倒下来是因为梯子底下滑动，他经过扶梯下面是因为这条路最短)。(2)儿童已认识到事件的相互独立性但还没有认识到它们之间的相互作用。①

如果把一组物体(如小球)以随机方式充分混和，那么儿童是否会认识到在混和过程中这些球的运动是相互独立的呢(除了碰撞之外)？还有他是否会认识到混和过程是无法逆转的呢？或者尽管儿童看到了混和时的杂乱无章，但他还是认为这些物体仍然被无形的联系连结在一起呢？

我们用一个箱子来做实验，里面装着8只白球和8只红球，中间用隔板分开。问儿童，假如箱子倾斜他认为这些球将发生什么情况(箱子倾斜并使球保持不动)？当箱子重新放回原来位置时，这些球的排列又将怎么样？红球是否仍在一边或者这两种颜色的球已混和起来了？如果混和的话，那么是以什么样的比例混和的呢？



然后实验员开始把箱子慢慢地倾斜过来，接着又返回到原来的位置。此时儿童观察到了所发生的情况——其中有几个球现在改变了位置。这时要求儿童预言，如果我们把上面的过程再重复一遍又将发生什么情况？儿童发现第二次倾斜之后，和原来相比有更多的球改变了位置。随后再让儿童预言经过许多次倾斜之后所发生的情况。

这个办法亦可用来检查儿童具有什么样的排列概念，对于排列我们将在后面专门用一节篇幅来进行更详尽的讨论。

在阶段1，从四岁到七岁，儿童认识到和原来的放法相比，球的整体发生了变化，可是他却常常预言这些球将最终返回到它们

① 同上，第1~2页。

原来的位置。

问阶段1的儿童凡依(五岁六个月)：如果倾斜箱子这些球将发生什么情况？

他回答说："这些球将呆在原来的地方不动。"

实验者慢慢地倾斜箱子，一只红球滚到白球这边，后来一只白球又滚到了红球那边。凡依看后，才说这些球不会再回到原来的位置了。

实验者问凡依："假如我把箱子再倾斜一次呢？"

凡依答："那么这些球将更加混起来了。"

实验员问："为什么？"

凡依答："因为将有两只球滚到另一边去。"

实验者问："如果今天下午我们一直重复做下去呢？"

凡依答："这些球将全部回到它们原来的位置。"①

这是一段典型的问答，从凡依的回答中可以看出，阶段1的儿童还根本没法理解随机混和的不可逆性。

在阶段2，从大约七岁开始，机遇的直觉出现了(这是与具体运算发展阶段一起出现的)。

一名七岁的儿童看着处在倾斜的平衡状态的小球说："它们以各种方式混和起来，然后箱子还原时这些小球又一起滚回来了……就这样一点一点慢慢地又变为不混和了。"②

在阶段2，儿童已把混和看作是一个肯定的事实，而不再象阶段1那样把混和看作是一种不自然的状态。但是尽管承认了混和，但儿童对混和还是缺乏真正的理解。

在开始于十一到十二岁的阶段3，也就是形式运算阶段，儿童已理解了随机混和过程——这是一个不可逆的过程，箱子愈倾斜，球就愈加混和，两种颜色的球回到原来位置的机会是极其稀罕的。

① 同上，第7页。

② 同上，第19页。

机遇游戏

〔诊断活动 6.1〕

在这一节所描述的实验中，儿童只是作为旁观者观察处于平衡状态的球。从心理学上讲，机遇游戏与上述实验的区别就在于进行机遇游戏时是让游戏者(儿童)处在活动之中的——如抽卡片、抛掷硬币、掷骰子、对结果打赌等等。

本实验包括：给儿童看筹码或硬币，其中每一个筹码或硬币一面有十字形记号，另一面有一个圆形记号。实验时问儿童：筹码上抛落下后哪一面朝上。

问一个五岁儿童夏普："假如我抛这个筹码，我们将看到十字形还是圆形？"

夏普回答说十字形。

问："为什么？"

夏普答："因为它大一些。"

让夏普抛筹码，结果是圆形朝上。

问夏普："如果我们再抛一次将会怎样呢？"

夏普答："十字形。"

问："假如我们把全部筹码(十到二十个筹码)一起抛上去将会发生什么样的情况呢？"

夏普答："不知道，我得看了再说。"

他把筹码全部抛上去，结果圆形朝上的比十字形朝上的多。

问他："为什么圆形多呢？"

夏普答："不知道。"

问："假如我们把全部筹码再抛一次又会怎样呢？"

夏普答："也许这回十字形更多了，因为上一回圆形多。"

问："它们可能全是十字形吗？"

夏普答："是的，假使我们想要它们全是十字形的话。"①

---

① 同上，第99页。

台克斯特，七岁，他认为下一次重抛时仍然还是十字形多。

接着不让儿童看到，悄悄地用一套预先伪造好的正反两面全部画有相同记号(圆形或十字形)的假筹码代换刚才那套筹码，再进行上述实验。

实验者要观察儿童对于全部筹码都以同一记号朝上是如何反应的，随后问儿童这里面是否可能会有什么戏法。

在阶段 1，儿童的回答带有一定程度的驯从，例如回答说："这些筹码刚才就是那样掉下来的"或者"如果我没有看到这些筹码是怎样掉下来的，我也说不出哪一面朝上"。

这些儿童中大多数人不会想到这里面会有什么戏法，或者如果有戏法，那也是人的力量——是实验者用双手变出来的戏法。

在阶段 2，往往从大约七岁开始，儿童拒绝接受用假筹码(正反两面都是相同记号)做出来的结果，儿童不相信全部筹码会以相同的记号朝上，除非这里面有什么把戏。他们有一种笼统的对于概率的感觉，正是这种感觉否定了上面的结果，他们已经认识到筹码必须是固定的，不能掉换，他们还自行检查了筹码另一面的图形。有些儿童在检查了一只假筹码后，就肯定地概括说，这些筹码的正反两面必定全都是相同的。

在阶段3，从十一岁到十三岁，对于概率的认识比直观的或笼统的感觉又进了一步，开始出现了定量化。

问一名十二岁的儿童，如果二十个筹码一起抛上去，结果是有较多的十字形还是有较多的圆形，这个儿童答道：“这完全是碰巧的，靠的是运气”。再问他如果将这二十枚筹码丢上一千次或一万次是否多数是出现十个圆形和十个十字形呢？他说：“要丢上一百万次。”①

随机抽选与定量化的开始

〔诊断活动6.2〕

为了开始研究儿童是怎么样对一个给定事件中所包含的概率进行定量化计算的，皮亚杰采用了一套有几种不同颜色的算珠，其中每种颜色的算珠数目是不同的。实验开始前，将这套算珠全部放在桌上使儿童能看清每种颜色的算珠有多少，另外将一套完全一模一样的算珠放在一只包里并加以混和，然后让儿童把手伸到包里取出一个算珠，先后共取两次，在儿童还没拿出算珠之前，要叫他预言这个算珠将是什么颜色的。

这套算珠中有六个是红的，四个是蓝的，一个是白的，一名六岁的儿童预言第一次取出的算珠将是白色的。

为什么呢？

他说：“因为包里只有一个白色的。”

然后当着儿童的面把这个白的算珠从包里取走，再叫儿童预言下一次取出来的算珠将是什么颜色的。

“蓝的。”他说道。

为什么呢？

他把手摊开来，一看是个红的，就问道：“为什么是红的呢？”

① 同上，第106页。

由此可见，在阶段 1 儿童还没有机遇或者概率的概念。各种颜色的算珠在数量上的差异，看起来还没有成为预言取出的算珠将是什么颜色的一个因素。儿童预言红的可能是“因为我十分喜爱红的”。

在阶段 2，开始了定量化。但是当某些颜色的算珠已经从包里取走后，儿童仍象原来的算珠全都在包里那样作预言。他们每次取出算珠后，不能对包里还剩的算珠数目作出相应的调整。

在阶段 3，从十一岁到十二岁，儿童在作出下一次预言之前已经考虑到被拿走的各种颜色的算珠数目了。

一名十二岁的儿童，从一套有十四个绿的、十六个红的、七个黄的及一个蓝的筹码中抽取时，预言第一次取出的两个筹码将是绿色的，可是他取出的实际上是一个红的，一个黄的。

那么第二次抽取的情况又将如何呢？

他说：“两个绿的。”（这回他果真得到了两个绿的。）

再下一次呢？

他说：“仍然有很大的可能会得到两个绿的，因为包里还有十

斯各特，七岁，从六个红的，四个蓝的和一个白的字母中摸取一个时，能正确地预言可能取出红的字母，但说不出道理。

二个绿的。"①

在阶段3，机遇的观念比以前更加精细了，概率的计算也已建立在可能组合的总数之上了。机遇与概率的概念本质上是组合性的②。

杰夫，九岁，预言将取出唯一的一张白色圆纸片。问他："为什么？"他说："因为只有一张白的。"

概率的定量化

[诊断活动6.3]

在上一节中，儿童所面临的问题是一个袋子里装着许多有色筹码，每种颜色的筹码数目是不同的，要求儿童猜出从袋中随意取出的一个筹码将是什么颜色的。在阶段1，儿童作出预言时是不考虑每种筹码的数目的，儿童在阶段2，从七到十一岁时，开始考虑到每种颜色筹码的数量。可是在连续多次抽取筹码后，他就忘了考虑那些已经取走的筹码了。然而阶段3的儿童，从十一岁到十二岁或者更大些，就能作出精确的计算了。

① 同上，第127页。

② 同上，第128页。

皮亚杰提出了要研究的问题，为什么儿童认知概率事件中所包含的数量关系要到这么晚的年龄呢？还有，为了成功地完成概率计算的任务，究竟哪些逻辑运算及算术运算呢是必需的？

为了更加详尽地研究这些必需的运算，我们可以给儿童看两套小的白色筹码，其中有一些筹码背面有个十字形。我们允许儿童先仔细看看每一套内所有筹码的背面，然后等到儿童说看好了，再分别将每套筹码都搅动一番，使儿童无法认出哪一个筹码背面有十字形。接着问儿童：“从哪一套筹码中比较容易取出一个背面有十字形的筹码呢？”

阶段1的儿童，从四岁到七岁，完全忽略了两套筹码内所包含的定量关系。到阶段2时儿童才开始认识到一种简单的多少关系。在阶段3儿童已能运用必要的比例性质的观念了。

在阶段1，儿童尽管已经看到一套的三个筹码中只有一个背面有十字形，而另一套的三个筹码背面都有十字形，可是他仍然从只有一个背面有十字形的那套筹码中去取。

问他：“为什么你挑那一套筹码？”

答：“因为那一套里只有一个十字形，取起来最容易。”

在另一个问题中，一套筹码总共有两个，其中有一个背面有十字形，另一套筹码总共有四个，其中有两个背面有十字形。阶段1的儿童将从四个一套的筹码中去取，因为“那里有两个筹码背面有十字形”。

七岁左右的阶段2的儿童，当他获得了第一个逻辑算术运算时，能解决只包含一个变量的问题。比如，有两套筹码，每套各有三个，其中一套有一个背面有十字形，另一套有两个背面有十字形。这时儿童已认识到后一套有2/3的机会取出背面有十字形的筹码，面前一套却只有1/3的机会。

同样，如果分子相同而分母不同——例如分别为2/3和2/4，那么这些儿童认识到从具有2/3关系的那套筹码中取出背面有十

字形的机会更加多些。

阶段2的儿童象阶段1的儿童那样，仍然无法同时比较两个变量。比如1/2和2/4的分子、分母都不一样，儿童就不能加以比较了。

一名十岁儿童说："从这一套拿(指1/2的那套)，不，从那一套拿(指2/4的那套)。"

再问他："倒底从哪一套拿更有把握？"

他答："不，它们是一样的，不过我更加倾向于从这一套拿(指2/4那套)，因为那里面有两个背面有十字形的筹码。"①

儿童在阶段3处于形式运算水平时，才能解决比例问题。当两套筹码中背面有十字形的筹码所占的分数分别是1/3和2/5时，阶段3的儿童拣了2/5的那一套，因为他知道1/3等于2/6，所以2/5的机会更多些。同样，一名十二岁的儿童在遇到1/3与8/17的问题时回答说：

"在8/17那套筹码中比较容易取到背面有十字形的筹码，如果要机会相同的话，8/17就要变成8/24。"②

皮亚杰的结论是：基本的概率观念是在形式运算水平时发展起来的，原因在于形式运算从心理学上讲是二阶运算，或者说形式运算要用到先前已学会过的运算即具体运算。形式运算是更加抽象的运算，它要求假设演绎的能力，即在对概率进行定量化之前考虑各种可能性或潜在性以及不同的逻辑联系如析取等的能力③。

组合运算

"我们所进行的每一项研究都使我们期望相同的结论：机遇和

① 同上，第154页。

② 同上，第159页。

③ 同上，第159～160页。

概率观念的形成是以一种非常严格的方式依赖于组合运算本身的进步的。”①

组合

〔诊断活动6.4〕

我们在前面曾借助于从一只口袋中取出两颗有色算珠并预言它们的颜色来研究组合。在这一节里，我们要求儿童运用一切可能的方式把各种颜色进行组合。

阶段1的儿童，从六岁到七岁，对组合的观念还没有真正的感觉。给一名六岁儿童看三种不同颜色的算珠——白的，红的和绿的。

实验时告诉儿童这些算珠代表许多小男孩，并问他这些男孩有多少种方式每次走出两个来。他把两个白色算珠放在一起，两个红色的放在一起，两个绿色的放在一起。

问他：“还有别的办法吗？”

答：“还有这种。”说着又拿出另一对白色算珠。

问：“这种方式不是已经有过了吗？”

答：“是的。”

然后他把一颗红的一颗绿的放在一起，接着又把一颗白的一颗绿的放在一起，随后又把另一颗红的与一颗绿的放在一起。

问：“你不是已经这样做过了吗？”

他把第二次放的一颗红的与一颗绿的拿走了。

问：“已经全了吗？”

答：“是的，已经全了，全部方式都在这儿了，再要别的那就需要另外的颜色了。”②

这个儿童漏掉了不同颜色间三种可能组合中的一种，即红色与白色。

---

① 同上，第161页。

② 同上，第165页。

在阶段 2, 从七岁到十一岁, 出现了对一个系统的探索和定量化的端倪, 但是这些过程还是试误性质的①。

给儿童四堆不同颜色的算珠(A、B、C、D), 一个八岁的儿童将它们配成 AB、CD 的对子, 接着又配成 AC、AD、CD, 然后取走了第二对 CD, 说道:"就这些了。"

问他:"你怎么能够肯定呢?"

答:"噢, 还有这一种。"(又配成 BC 对。)

皮亚杰得出结论说, 具体运算阶段的普遍特征是开始会运用一种加法的思想, 但还不会运用交(合取)或者乘法结合(前科学思维的普遍特征亦是如此)②。

在阶段 3, 从十一岁到十二岁, 即处于形式运算水平时, 有些儿童发现了不再遗漏任何对子的一个系统。这一点与阶段 2 完全不同。阶段 2 时系统还是不完全的, 儿童还必须运用试误或凭经验寻找的方法。

有一名十一岁的儿童在考虑六堆不同颜色的筹码时, 立即找到了一个系统, 把 A 堆中的筹码与所有其余颜色的筹码结合起来, 配成 AB, AC, AD, AE, AF, 然后将 B 与其余的颜色结合, 配成 BC, BD, BE, BF, 接着将 C 用同样的方式配成 CD, CE, CF, 随后配成 DE, DF, 最后配成 EF③。

因而, 组合运算是在大约十一或十二岁时, 在形式运算水平(假设-演绎思维)上发展起来的。

是什么道理使组合比单纯的序列化或者一一对应更加困难呢?"答案是明显的, 在组合情形中这些对应不是彼此独立的, 它

① 同上, 第 167 页。

② 同上, 第 169 页。

③ 在 n 个事件中每次取 2 个事件的组合公式为 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$。将各种颜色配对时, 若 n(颜色的种数)等于 6, 那么可能的组合为: $C_6^2=\frac{6(6-1)}{2}=\frac{6\times5}{2}=15$。

们构成了这样一种统一的系统，使得第一个对应决定着后面的对应。”①

在一个单纯的序列化或一一对应中，只要将相同的运算重复一定次数并反演一次就足够了。然而在组合中，必须先协调几个不同的序列并预见它们之间相互关系的格式，然后作出一个适当的结构(假设-演绎的结构，即首先形成一个假设，然后由它进行推理)。

形式运算一般讲来都是二阶运算，是施加于其它运算之上的运算。在组合的情况中，我们打交道的是一系列连续的对应，这正意味着我们所处理的就是二阶运算，从心理学来讲，二阶运算是与思维的形式运算水平有关联的。

排列

〔诊断活动 6.5〕

排列就是指一组元素所能排列成的不同次序的数目，要求在每次排列中用到全部的元素。例如有两个人及两张椅子，问有多少种坐法。

因为只有两个人 A 和 B，所以只有两种可能的次序或排列。这两个人可以坐成 AB 的次序或 BA 的次序。如果加上第三个人 C，那么三个人可能有几种坐法？第三个人 C 可以坐在 AB 的右面、中间或左面：

$$ABC \qquad ACB \qquad CAB$$

他也可以坐在 BA 的右面、中间或左面：

$$BAC \qquad BCA \qquad CBA$$

这样对于三个元素，就产生了六种可能的排列。

对于四个元素 A, B, C, D，我们可以先把 D 与三连体 ABC 排成四种不同的方式(D 在 ABC 的左面、右面，D 在 AB 的中间及在 BC 的中间)：

① 同上，第 172 页。

$$DABC \qquad ABCD$$

$$ADBC \qquad ABDC$$

加上第四个元素后，对于六个三连体中的每一个三连体都可以形成四种排列，因而四个元素就能产生 $4\times6=24$ 种排列。

现在将二个、三个、四个元素的可能的排列数合在一起，得到：

元素数	排列
2	2
3	6
4	24

我们不能期望儿童会发现排列的公式，但是他们有可能自己发展出一个象上面所列的只包含少量物体的系统。我们把三个元素的排列公式叫作3的阶乘，写成3! 它表示元素数(3)和所有小于该数的正整数(自然数)的连乘积。

因此 $3!=3\cdot2\cdot1=6$

对于4个元素：$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

对于5个元素：$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

对于 n 个元素：$n!=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$

排列的心理发生通常儿童要到十四岁至十五岁时才出现。这种情况与组合的发展正好形成了有趣的对照。组合的出现往往要早二至三年，也就是在十一到十二岁。

开始研究排列时，要求儿童看着两个不同的小娃娃 A 和 B，告诉儿童这两个娃娃正准备去散步，问儿童，他们在散步时的位置除了 AB 外是否还有别的方式？比方说象这样——BA？一名六岁的儿童回答："是的。"

又问："假如我们再加上另外一个不同模样的小娃娃（摆成 ABC 的位置），这三个娃娃的位置是否还有别的方式？"

儿童将三个娃娃排成 BAC 之后又排成 CBA，接着他说他认为这就是全部情况了。

在阶段1根本不存在分析系统。

在阶段2儿童才发展出局部的分析系统。

八岁至十岁(阶段2A)的儿童，对于三个元素已成功地找到了全部的六种排列，可是他还不能继续运用相同的过程对四个元素进行排列。

在阶段2B，儿童概括了他们对三个元素排列时所使用的方法与过程，并试图将这个方法应用到四个元素的问题上去，尽管他们尚无法完全解决这个问题。此时，对于四个元素的排列，他们所发现的可能性少于24种。

在阶段3，从十四岁到十五岁，一套完整的分析系统才被发展出来。

一名十四岁的儿童在考虑三个元素的排列时说："噢，我已经看出来了，我可以把每一个元素放在第一个位置上两次，这就得到了六种排列。"

问他："对于四个元素又怎么样呢?"

答："我可以把新的一种颜色放在最前面，我可以把它放在前面六次，然后对于每一种颜色我都可以运用同样的系统，那样就有24种可能性。"

达林，八岁，他对于三个物体找到了六种可能排列中的五种。

又问："那么对于五个元素呢？"

答："有120种方式。"

问："为什么？"

答："如果有两种颜色，那么我们用1乘2，如果有三种颜色，我们用1乘2再乘3，如果有四种颜色，我们用1乘2乘3再乘4……"①

这名儿童甚至已经发现了计算公式。

为什么排列的发现会晚于组合的发现呢？皮亚杰说：

> 其原因毫无疑问在于组合数只是由一切可能的结合所产生的，而排列数则更加多了，排列蕴涵着按照一个动的参照系将各元素关联起来的能力。……组合运算只是由乘法运算的一种简单的概括所构成，而排列则提供了影响其它运算的关系或运算的范型。②

因此，可把阶段3分成两个分阶段——标志着形式思维开始的3A阶段以及作为这种结构模式达到平衡水平的3B阶段。

本章内容的教育含义

如果随机混和及概率这些概念在形式运算水平之前是无法理解的（正如本章中许多实验活动所指出的，大约要到十一或十二岁甚至更晚的年龄才能理解），那么对于当前倾向于将概率作为小学数学教学内容的这样一种趋势，就应当采取不同的观点了。倘若要在小学数学中引进概率，那也只能采用相当有限的方式，用可以看到和摆弄的物体在具体水平上进行教学。

也可以将概率作为比较聪明的儿童课外兴趣活动的内容。教师似乎往往感到无法安排优异儿童的课外活动。概率的活动也许可以作为一种选择。

① 同上，第191～192页。

② 同上，第194页。

关于儿童概率的概念，皮亚杰描述了三个重要的发展阶段。第一阶段发生在七岁或八岁之前，该阶段的特征可以表述为缺乏基本的包含可逆性（类以及整数与分数的关系的群集）的逻辑运算与算术运算。在阶段1这个水平上的推理是前逻辑性质的推理。

从七岁或八岁到十一或十二岁，儿童在具体水平上逐渐构成了逻辑序列群集以及数的群集。必须允许儿童去观察和摆弄有关的物体，并让儿童去探索研究物理上可能的群集或排列。

直到十一岁或十二岁，即形式思维阶段开始时，几个具体运算的系统才能被儿童同时联系在一起，然后转化成它们的假设-演绎的含义，也就是它们命题的辑逻术语①。

---

① 同上，第213页。

14 逻辑思维的发展

在儿童的智力发展中似乎存在着两个关键的时期：七至八岁和十一至十二岁。在七至八岁期间，伴随着自我中心的减弱，第一次开始出现了验证或逻辑证实的要求；在十一至十二岁期间形式(演绎)思维开始出现。①

在第5章已讨论过，逻辑思维的活动一开始是以逻辑分类的形式出现的，这些早期的逻辑思维活动是儿童形成数概念的前提。儿童合乎逻辑地思考的能力是在小学读书期间逐渐发展起来的，这是一个发展过程，即使最好的教学方法也必须考虑到智慧的发展阶段。逻辑思维并不是在随便什么时候都能教的，如果确实能教会儿童逻辑思维，那也必须考虑合适的年龄。正如艾尔肯(Elkind)所说："我们对于现实的大多数认识的获得，不是不需要我们自己的逻辑力量，而恰恰正是依靠了我们自己内部的逻辑力量。"②

思维的自我中心

儿童的逻辑思维能力存在着几个局限性。其中之一就是儿童思维的自我中心。一个幼儿仅仅从他自己的观点来看问题而不顾

① 皮亚杰：《儿童的判断与推理》，1928，第74页。

② 戴维·艾尔肯(D. Elkind)："幼教工作中的巨人皮亚杰"(Giant in the Nursery, J. Piaget)，《纽约时代周刊》(New York Times Magazine)，1968年5月26日，第54页。

及旁人是否理解他。儿童这样做的时候，他的思维即使不是全部，也是大部分以自我中心为特征的。这时儿童还没有表现出使旁人相信他的思想的需要。他宁可接受他自己的答案而很少对此表示疑问。

内　省

儿童逻辑思维能力的另一个局限性是他缺乏对自己思维的自觉意识。当一位教师企图帮助儿童解决一个问题或帮他找出一个错误时，她必须了解儿童在什么程度上能够对他自己的推理过程进行分析。我们能否假定一个儿童对他所表达的思想具有意识，或者包含着某些无意识的活动呢？正如我们已经指出的，儿童具有自我中心的观点，这种自我中心观点包含着一定程度的无意识。一个人如果只是想到他自己，对他自己没有任何疑问或诘难的话，那么，这个人就有一种比较强烈的只相信或接受他自己的思想的倾向。

皮亚杰在一项对七至十岁的儿童的研究中，对下列事实产生了深刻的印象：儿童无法讲清楚他们是怎样得出一个答案的。皮亚杰作出假设，认为他们不能把自己思维过程中的步骤重新恢复出来，或者他们只是随意地虚构一系列步骤，儿童变成了自己思维错觉的受骗者。

韦恩（七岁）：这张桌子4米长，那堵墙壁的长度是桌子的3倍，墙壁有几米长？——“12米。”——你是怎样做出来的？——“我把2加2加2加2，总是加2。”——为什么加2？——“为了得到12。”——为什么你取2呢？——“因为没有别的数。”——这扇窗高4米，另一扇窗的高是它的一半，另一扇窗高几米？——“2米。”——你是怎么算的？——“我从4中去掉了一个2。”①

① 皮亚杰：《儿童的判断与推理》，第139页。

盖思(七岁)：你们是三个男孩，给你们9个苹果，每人可得几个？——“每人3个。”——你是怎样做出来的？——“让我想想看。”——什么？——“让我想想是多少个，让我在脑筋里再想想看。”——你在头脑里想什么呢？——“我在数数。”——你在头脑里数些什么？……结果盖思的回答仍然只是“我猜猜看”，“我数数看”，“我在想到底是多少个，结果找到是3”①。

皮亚杰从许多类似的例子中得出结论说：

在任何情形中儿童都不能解释他正在寻求什么，他们也无法解释为了找到答案他们该做些什么……儿童总是从他已经得到的结果出发，仿佛他预先就知道了这个结果，然后再用或多或少是任意的方法求出它。②

推理过程在儿童的思维中不是完全有意识的，或者说，儿童记住的只是他推理过程中的几个术语，然后儿童再尽其所能将这些术语组合起来，或者把整个推理过程逆转过来，从答案出发，创造过程，回到原来的前提或问题上去。

那么儿童到什么时候才可能具有内省呢？皮亚杰的结论是，儿童在七岁前完全缺乏内省，但从七岁到十二岁，儿童在思维方面不断努力，变得对自己越来越有意识。儿童给出定义的能力在不断地改善，就是这种发展的一个实例。

这些思想对于小学低年级教师来讲具有重要的意义。从学习准备性的观点来看，因为小于七岁的幼儿尚无法分析自己的思维过程，故而对处于前运算水平的儿童大概不应当给他们出那些需要逻辑分析过程的问题。七、八、九岁儿童的教师，正面临着儿童对思维的非常粗浅的意识和他们解数学问题时的逻辑思维过程。教师应用心地安排好教学程序。

---

① 同上，第140页。

② 同上，第141～142页。

滥 绎

儿童推理的另一个局限性是滥绎(transduction)。一名儿童(八岁)看到一颗小卵石掉入一杯水中，当问他水为什么会上升时，他回答因为卵石是重的，给他看另一颗小卵石，并问他如果将这颗卵石丢进这杯水里将发生什么现象，原因是什么。儿童说："水会上升，因为这颗卵石是重的。"再给他看一颗更小的卵石，并问他同样的问题，儿童的回答是："不，因为它轻了。"这时幼儿运用了三段论式的推理或演绎，他作出了概括：重的东西会引起水上升。然后再问他："一块木头会怎么样呢?是否水也会上升?"儿童回答："是的，水会上升的，因为木头不是重的。"这名幼儿不合逻辑地自相矛盾，这时他还没有意识到他这样回答已经引起了矛盾。他的头脑里只是简单地想着几件事情，并且把它们都看作是彼此无关的。

对于每一个物体只有一种专门的解释，只存在一种特殊的关系，并且这种关系只能运用于特殊的推理之中，这样一种观念就称作滥绎。这是一种推理形式，从特殊到特殊，没有概括或逻辑的严密性。皮亚杰总结说：儿童的推理不能从一般或概括到特殊或个别(即演绎)，也不能从特殊到一般(即归纳)，简言之，儿童既不能推出一般也不能从一般出发，而只能从特殊到特殊。儿童还没有概括的能力。

逻辑思维中的定义

如果一个儿童的推理过程不是完全处于有意识的水平，那么他在概括适当的定义时就会有很大的困难。比纳(Binet)和西蒙(Simon)报告说，儿童在九岁之前是没有能力作出定义的，而推孟

(Terman)则认为八岁的儿童已开始具有定义的能力了。

皮亚杰对定义的特征是这样讲的:

> 从心理学的观点来看,定义是一个人对推理过程中所使用的一个词或一个概念的有意识的认识。①

但是儿童还难于对他自己的思想进行考察(即内省),由于儿童对自己的思想缺乏意识或自觉,所以他无法作出定义。当要求一个幼儿叙述一个物体如"叉子"或"母亲"的定义时,他往往只会简单地重复一些名词,如说:"一把叉就是一把叉。"即使他对一个物体作出了定义,那也仅仅是根据这个物体的用途来定义的。如"它是为了……",一把叉"是吃东西用的",母亲"是为了烧饭的"。

问一名五到七岁的儿童雨是什么,他的回答还是根据用途:"下雨是为了浇水灌溉。"他既不是从物理的因果出发来考虑下雨的,如下雨是______的结果,也无法从逻辑定义出发来考虑雨是什么,即用一个常用的句式来定义雨,以作为回答,例如"雨是从天空中落下来的水滴"。在这个前因果阶段,儿童的思想直接反映了当前现存的事物,并把思想与实际事物混淆起来。这时儿童对于概念和客体还无法加以区分。

儿童在七到八岁时开始将思想从事物中区分出来,并开始意识到推理过程。他开始运用逻辑的定义,如"母亲是一位有孩子的妇女"。但是这类逻辑定义在十一到十二岁之前尚是不完整或不全面的,儿童只有到十一至十二岁时才能考虑一般的命题,如"所有的母亲都是妇女"或"不是所有的妇女都是母亲"以及"并非所有有孩子的人都是母亲"。

为了确定"活"的定义,要求儿童将各种物体按照它们是否是活的进行分类,然后再问他为什么。一开始先问些容易回答的物体如狗、鱼、鸟等,然后逐渐难些,如问河流、云、汽车等。大多数回答是某个物体是活的,因为"它会动",但当问到汽车、云或手表

① 同上,第147页。

时，儿童就迷惑起来了。许多儿童讲不出为什么一个物体是活的或者不是活的，他们也无法给出这样的定义，如“活的东西它是靠自己活动的”，只有极少数最聪明的儿童才能这样回答。

仔细地盘问儿童，将证实有些儿童已经有了把能自己运动作为定义的概念，但是只说：“它在动”。皮亚杰作出结论说，这些儿童还没有完全童识到他们自己的思想，儿童只有到了十一至十二岁时，或者差不多读完小学时，才能期望他们给出完整的定义。

作者对一百名八岁儿童作了一项研究，用的题目是“假如你接触到太阳，太阳会感觉到吗？”其中51名儿童回答说太阳会感觉到的。另外有些儿童不同意问题的前提，因为“太阳太热了”，“太远了”，“你会死的”等等。只有五个儿童回答说太阳是没有感觉的，因为太阳不是活的东西，这种回答才是根据逻辑的推理：如果太阳不是活的，那么太阳就没有感觉。

由于儿童的推理是与成人的推理完全不同的（即推理缺乏演绎而且极不严密），故而对教师提出的难题就是要去发现儿童是怎样思考的。而且，如果一个儿童还没有感到使别人相信他的需要，那么，他的“推理”在什么程度上能被接受呢？

语言与逻辑思维

语言理解与运算思维之间没有多大关系，这一点在某些儿童身上很容易发现，如有些儿童在言语方面明显落后但智力运算未受影响，又有些儿童在运算方面落后但言语却并无毛病①。

如果将语言能力定义为掌握一种语言的语音与语法结构而不是指对语言的恰当的运用，那么这种语言能力平均在四岁就出现了。语言不是运算思维的制约因素②。

虽然词汇通常不是达到理解的捷径，但儿童所用的语言却常常标志着他们的逻辑思维的阶段。向年龄很小的儿童问一个词的

① 弗思：《皮亚杰与知识》，第129页。

② 同上，第114页。

意义时，他可能很简单地用手势而不用言语来表达。比如问他母亲是什么意思，他就指指母亲。稍大一点的儿童就以用途来定义，如说母亲是“烧饭的”。再大一些的儿童会说母亲是一个“妇女”，年龄再大些他会讲母亲是“一个有孩子的妇女”。在十一到十二岁前儿童不可能讲出逻辑上完整的定义。儿童一直要到约十二岁时才能达到抽象逻辑思维的假设-演绎水平。

在思维的具体运算水平（约七到十二岁），儿童开始运用表示两个物体之间数学关系的词汇，如“大于”、“小于”，“较高”、“较矮”，“较重”、“较轻”等。这已经与前运算水平完全不同了，在七岁前儿童经常使用的是表示绝对量的词汇，如比较两个量时，如果一个大于另一个，那么前运算的儿童只会说：一个物体是大的，另一个物体是小的。

儿童对逻辑中连接词语的理解

表示因果和逻辑关系的连接词

儿童对逻辑关系是怎样思考的呢？这项研究是由皮亚杰开创的，皮亚杰让一组儿童把未结束的句子讲完整，使得句子正确或具有意义。在造这类句子时，没有结束的部分要以逻辑中常用的连接词开始，如因为，所以，由于，故而，等等。例如：

我洗了个澡，因为……

窗子被打破了，因为……

女孩子从马背上掉下来了，因为……

这条鱼不吃东西了，因为……

“因为”或“所以”这类连接词是用于表示因果关系的，亦用来表示逻辑关系，关系的观念在逻辑中和数学中都是最根本、最重要的一个观念，因为各种观念间的联系都是从逻辑中发展起来的。

连接词“因为”(because)

连接词“因为”表示两个事件或两种现象之间的一种原因与结果的关系。例如:“一个男孩从自行车上跌下来了(结果),因为有个行人挡住了他的路(原因)”。连接词“因为”也可以表示蕴涵或逻辑关系,而不是表示因果关系。例如:“他必定是上班去,因为他带着午饭”。蕴涵(他上班去)不是一个可以观察到的事件,而只是根据事实(他带着午饭)得出的一种观念或判断。

正是这种蕴涵逻辑使我们特别感到兴趣,在算术范围里,皮亚杰让儿童完成下面的句子:“九的一半不是四,因为……”①这个句子可以正确地讲成如“九的一半不是四,因为四加四等于八”。为了解释为什么九的一半不是四,我们必须作出一个定义及一个关系,而这种关系不是两个事件的因果关系。这里包含的是一种逻辑关系。当我们讲“九的一半不是四,因为……”时包含的是逻辑关系。如果我们人为地定义 4 加 4 等于 8,那末 8 的一半是 4。由于 8 和 9 不是同一个数,所以 9 的一半必定不是 4 而是另一个数。也有可能幼儿在回答时说“九的一半不是四,因为他没法算”,他的回答恰好是运用了“因为”的因果意义或心理学意义,但是这种回答离开了主要点。

第三类关系是心理学关系,这种关系介于刚才所说的两种关系(因果关系与蕴涵逻辑关系)之间,心理学关系是一个动作与一个意图之间的一种因果关系,而不是两个独立的事实之间的那种因果关系。比如:“我打了皮尔一记耳光,因为他正在取笑我”。这类关系(心理学关系)是很重要的,因为儿童具有一种用心理学关系来代替逻辑关系的倾向,比如上例中“九的一半不是四,因为他没法算”。

在试图分析儿童建立这些正确的关系所碰到的困难时,必须先要区分可以用连接词(如“因为”等)连接的各种意义。这种区分

① 皮亚杰:《儿童的判断与推理》,第 27 页。

在考虑儿童经常使用的词汇"为什么"时也是十分重要的。对于"因为"的每一种含义存在着一种可与之相比较的"为什么"的含义。

因果性的含义	为什么船会浮呢？(因为……)
动机方面的含义	为什么你要干那件事？(因为……)
逻辑关系的含义	为什么这是一颗行星而不是一颗恒星呢？(因为……)

皮亚杰在对六岁儿童进行的一项研究中发现，在他们运用的134次"因为"的关系中，有112次是动机方面的或者说是心理学方面的关系，10次是因果关系，12次是逻辑关系。由此可见，心理学关系占有优势，在心理学关系中包括了诸如下面这样的句子："看，他正在笑，因为……"，"雷纳要迟到了，因为……"，"我想要做一只炉子，因为……"①。

在儿童的思维中，因果关系比较罕见，因为按照皮亚杰的看法，儿童很少企图将他们对外界现象的因果解释的探索与别人交流，不过儿童已感觉到对因果解释的需要，在六岁儿童所提的问题中可以发现大约有20%的问题是关于物理因果性的，比如："它被打破了，因为它不很牢"，"它没法钻进巢中去，因为巢太小了"②。

在上述皮亚杰的研究中，关于蕴涵意义的逻辑关系，连接词"因为"只用了十二次，然而这种逻辑关系正是儿童逻辑论证的开端。如在皮亚杰研究的实例中，有位六岁儿童说："不，这是一条船，因为它什么轮子也没有。"逻辑过程是从一个前提开始的，这个前提为：船是一个没有轮子的物体。这个物体没有轮子，所以它是一条船。

同样，有个例子说："这个梯子做得不好，因为你没有照那种方法做。"前提是好的梯子是照一定的方法做的——而这个梯子不是照那种方法做的，所以它做得不好。

① 同上，第12页。

② 同上，第13页。

"你可以说那些儿童正在上学去，因为他们都带着午饭"。在这个例子中，前提是他们上学时必定都带着午饭，而回家时就不带饭了。因为那些儿童都带着午饭，所以他们必定是上学去。

那么，在什么年龄逻辑关系的运用才得到发展呢？在什么年龄儿童才能完成包含着逻辑正确性的句子呢？皮亚杰对一百八十名七岁到九岁的儿童研究过这个问题。在研究中皮亚杰曾应用下面两个命题：

1．鲍尔说他看见一只小猫正在吞食一只大狗，鲍尔的朋友说这是不可能的，因为……

2．9的一半不是4，因为……

	7岁		8岁		9岁	
	男孩	女孩	男孩	女孩	男孩	女孩
句子1	36(47)*	38(60)	50(77)	54(72)	88(88)	61(72)
句子2	8(41)	6(44)	30(57)	14(46)	25(62)	17(48)
合计	21(44)	22(52)	4[illegible](67)	[illegible](59)	56(75)	39(60)

此表引自皮亚杰：《儿童的判断与推理》第25页。

* 括弧外的数字为判断正确的百分率(%)，括弧内的数字为判断不完全正确的百分率(%)。

其中最不恰当的回答是儿童只给出了心理学的解释，比如"9的一半不是4，因为他不会算"，或者"因为这太傻了"，或者"因为这错了"。

一个儿童无法恰当地做到逻辑的正确性，这是什么道理呢？皮亚杰报告说，这并非是因为儿童缺乏知识，道理很简单，原因在于儿童的思维是自我中心的，儿童还没有认识到需要逻辑的正确性。皮亚杰说道：

> 儿童只要还处于自我中心的阶段，他就认为其他的人总会明白他正在思考的东西以及他这样做的道理。一句话，这些自我中心的儿童总认为他们自己是完全被人理解的。①

① 同上，第27～28页。

皮亚杰的这个结论向教师提出一个重要的挑战。

一个儿童在正确地进行推理时，他无法证实他的推理，这是因为他已习惯于认为那些最要紧的论点是当然的。那么，儿童对于逻辑论证存在的困难是不是因为他对自己的推理过程还缺乏自觉意识的能力呢？皮亚杰追问道：

> 儿童的逻辑推理总是一直停留在隐含的状态之中，因为儿童总把逻辑推理认为是当然的——在这里，儿童本身是否意识到这一点呢？他是否在思想中清楚地存有"八的一半是四，因为四加四等于八"呢？显然没有。儿童还没有意识到这种逻辑推理过程。儿童只意识到那些与他的答案有关的某些特殊情况，他还根本没有能力表达与之相对应的普遍规律。①

例如，象6的一半等于3这样的回答，是因为"它被平分"或者"6的一半得到3"，而这些回答都只是简单地重复了原来的命题。不过也有少数儿童回答正确，如说："6的一半等于3，因为3加3是6。"

假如我们接受"3加3是6"以及"3加3的一半是3"这样的定义，那么我们就可得出"6的一半等于3"。在运用"如果……那么……"这种句型结构时，"如果"引出的是前提或定义。当"如果"引出的子句成立时，则"那么"引出的子句在逻辑上也必定成立。由此可知，如果3加3等于6，那么6的一半必等于3。

连接词"所以"(therefore)

"所以"是一个连接词，是"因为"的反演。连接词"因为"把原因和结果或者理由和逻辑结局连接起来。例如：

天在下雨，因为草地上是湿的。

（理由）　　（逻辑结局）

连接词"所以"是把结果同原因或者逻辑结局同理由连接起来。

草地上是湿的，所以天在下雨。

（逻辑结局）　　（理由）

① 同上，第29页。

同样，6的一半是3，因为3加3等于6。

3加3等于6，所以6的一半是3。

连接词"所以"所包含的意思比连接词"因为"的因果关系还要丰富一些。在运用连接词"所以"时必需用到演绎——地上是湿的，所以(我演绎得出)天在下雨。连接词"所以"经常用于形式化的证明之中。

皮亚杰得出结论：儿童直到七岁或八岁时，逻辑论证还处于非常不完善的阶段。在儿童完全掌握演绎之前必须有一段很长的过渡时期来进行这方面的学习①。通常往往要到十一或十二岁，儿童才能开始考虑形式证明。"所以"这个词在儿童的词汇中极少出现，当一个儿童在用"所以"这个词时，往往是作为"因为"或"和"的同义词来用的。

关于"所以"这个词作为蕴涵关系或者推论来使用的情况，皮亚杰在一项专门研究中报告说：

> 我对三十名六岁到九岁的儿童进行了个别考查，其中没有一个人能够正确使用"所以"这个词，也没有一个人能够指出这个词在成人运用时所具有的特殊关系。一句话，儿童还不会表达逻辑推论关系中的特殊的准确无误的词。②

事实上，那时儿童把"所以"、"因为"都当作"和"的同义词，由于"和"可以把两个独立事件或者两种独立的观念联系起来。同样，儿童亦常常把用"所以"、"因为"连接的那些观念或事件视为独立的或彼此无关的。这种看不到事物之间关系的困难有时候叫做"并列"(Juxtaposition)。在儿童所画的人物图形中，常常可以看到两个手、两只脚或者两只眼睛的位置与其它部分的关系是不恰当的。

连接词"那么"(then)

连接词"那么"经常用于证明之中，不过它也可用于其它的

① 同上，第32页。
② 同上，第34页。

目的。

说明时间　　那么现在是什么时间呢？

说明动机　　那么你想要干什么呢？

用在逻辑或推论中——“如果……那么……”句型

如果窗子上全是水汽，那么天气一定非常冷。

或者其它　　如果鱼不上钩，那么这些鱼一定不饿。

“如果……那么……”是逻辑中一种基本连接顺序，这种句型是关于蕴涵或者演绎的。

即使年龄很小的儿童也常常在逻辑意义上运用“那么”这个词①。

一名四岁半的儿童问道：“那是你的吗？不是你的，那么它是我的。”（相当于“如果它不是你的，那么它就是我的”。）

一名六岁的儿童说：“如果你丢了一样东西，那么它就遗失了。”

一名七岁的儿童说：“他个子很小，那么他象我。”

让步连接词

否定逻辑蕴涵关系、否定因果关系或者否定顺序关系的连接词，可以看作是让步连接词，其中包括“虽然”、“即使”、“不管”、“但是”。皮亚杰报告说，儿童在十一或十二岁前对这些让步连接词很少理解②。对这些儿童来说，让步连接词在完整句中的意义还没有同“和”或者“因为”等连接词区分开来。

例如，一位八岁的男孩说：

“我有几个大朋友，即使他们都很好。”在这里他所说的“即使”是同时的意思（“和”）。

“尽管他在打猎，他从树上摔下来了。”在这里尽管的意思也是指同时（“和”）。

① 同上，第36页。

② 同上，第38页。

然而就是这同一位男孩，对于"埃米尔正在街上玩，尽管……"这个句子却给出了一个正确的回答，他用"天气很冷"这几个词把句子补完整了①。

归纳推理及演绎推理

我们都知道水会结冰。我们测量结冰时的温度。经过了若干次试验或实验，或者经过读书学习之后，我们得出结论：水是在一个固定的温度结冰的。根据有限次的观察概括出"水是在0°C结冰的"。对于这个概括可能会产生疑问，尽管疑问很小。这样一种概括包括了比实际所观察到的更多的情况，它是建立在推理基础上的。从许多特殊情况归纳得出的这一类概括的过程叫作归纳推理。我们推导或总结出：在有限的观察事例中是正确的东西在一切事例中都是正确的。

在小学里运用归纳法经常要比运用演绎法好，这是因为归纳法同发现有关。当儿童在观察特殊的例子时，应当鼓励他们去发现模式或进行概括。例如，发现 $4+2=6$，同时还发现 $2+4=6$，显然加数与被加数的次序不会改变总和。再多做几个实例，如 $1+5$ 及 $5+1$ 等，然后可以用归纳法作出概括：加数与被加数的次序不改变总和(交换性)。同样 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$，你能从 $\frac{1}{3}$ 及 $\frac{1}{4}$ 中看出并思考出一种能得到 $\frac{7}{12}$ 的方法吗？你只要把加数与被加数的分母 3 和 4 加起来就得到和的分子 7，把加数与被加数的分母 3 与 4 乘起来就得到和的分母 12。那么，这种方法对于其它的分数单位相加也行吗？如果行的话，我们就可以作出归纳性的概括了。

另一种获得结论的方法叫作演绎推理。演绎推理不是象归纳推理那样通过与物质世界的直接接触的感觉从实验、观察或者"学

① 同上，第44页。

习”得到的。例如，我们可以说(1)琼斯住在纽约，(2)所有住在纽约的居民都是住在美国的，因而(3)琼斯住在美国。在此无需再附加证明。演绎推理唯一的权威性在于有条理的思考。这里不存在概率的问题。演绎思维是建立在人的思想间所使用的逻辑系统的一致性的基础上的。一旦假设或前提被接受是真的，那么结论就非使人相信不可。如果我们接受了(1)和(2)两个命题，那么我们就必须接受第(3)个命题。

不过，一个儿童是否会自觉地接受并实施或者理解这种演绎思维或逻辑呢？皮亚杰描绘演绎推理过程如下：

> ……为了找到一把钥匙，俾使一个人从局限于自身的、暂时的观点转入另一种不致与自身引起矛盾的观点。因而他的思想经常面临着这样一个问题：怎样去选择合适的定义、概念或前提，也就是从一切可能的观点看来这些定义、概念或前提都是可以使用的，而不致与当前直接的经验结果相矛盾，也不致与过去的经验或他人的经验结果相矛盾。换句话说，面临的这个问题就是怎么样去选择具有最大限度可逆性与互反性的那些观念……①

对于上述住在纽约与住在美国的居民之间关系的例子，住在纽约的儿童在考虑时必须能运用包含关系的逻辑(参阅本书第5章)。

由于逻辑与数学都是一种抽象，它们都不是受物质世界直接操纵控制的。我们完全可以人为地选择某个理论性的问题，比如："假设在院子里有三只双头狗，问院子里总共有几个狗头？"皮亚杰在谈到这一类假设性问题时说了下面一段话：

> 那么，人们的思想怎样能够解决那些客观现实本身并未直接提出来的、有关选择定义或关系的问题呢？……定义始终是某种选择与决策的结果，客观现实只是提供时机，但不强迫人们作出选择……个体往往是采用某种规则作为一个假设，来观察在应用它时是否会使他达到一种道义上的满足状态，尤其是，是否会使他总是正

① 同上，第193页。

确的而不致引起内在矛盾……这个问题是通过一系列的推理过程才获得解决的，这些推理的目的不是要发现外部世界将发生什么，而是要发现指导思维过程的个体意志满足或不满足的状态将是怎样。①

儿童在几岁的时候才能运用演绎逻辑或演绎推理呢？皮亚杰开始研究这个问题时采用了比纳-西蒙五个荒谬命题的测验。他让44名儿童(9到12岁)重新改写下面五个命题，使得这些命题不再存在谬误。

1. 一个可怜的骑自行车的人不小心将自己的头撞破了，死在地上；他被送进了医院，他担心他无法复原了。

2. 我有三个兄弟：保尔、欧内斯脱和我自己

3. 昨天发现了一具可怜的小女孩的尸体，尸体被砍成了十八段，有人认为她必定是自杀了。

4. 昨天发生了一起铁路车祸事故，幸好不是十分严重，死亡人数只有四十八人。

5. 有一个人说：倘若我由于绝望而想自杀的话，我也不选星期五，因为星期五是一个不好的日子，它会使我倒霉的。

在44名儿童中，33名对第3和第4题毫无困难，只有13名能正确答出第5题。在回答第5题时，看来错误主要是由于儿童不能接受这个前提"倘若我想自杀的话"，并且他们都把这句话当成是主要点了。例如儿童回答说"自杀是最傻的事了"，由此可见，他们无法接受这个前提"倘若我想自杀的话"②。

作者用第5题测验了一百名八岁的儿童，其中有二十九名不能接受"自杀"的前提，而43%的儿童(百分比最高)都把注意力集中在"星期五是一个不好的日子"这个前提上，他们不接受这个前提，因而也遗漏了问题的要点。有一名儿童回答说：星期五是个好日子，因为在星期五"有游戏"(确实，在学校里星期五对儿童来说

① 同上，第193～194页。

② 同上，第64页。

是一个好日子，对教师也同样）。另一名儿童回答说“星期五是干这件事的好时光”（意思是指在星期五自杀）。还有一名儿童讲：“倘若我想自杀的话，也要等到我丈夫死的时候。”

作形式的推理，也就是，当一个思想（前提）同现实矛盾时暂且先接受它，然后由此演绎出什么，这种形式推理儿童在十一或十二岁之前是难于进行的。因为，只要前提不符合儿童的经验，他们就不会同意这个前提。例如，无论是碰到太阳的前提还是自杀的前提，儿童都不会接受。不过，作者发现儿童是能够接受双头狗的前提的。

虽然作者得到的第4题的结果与皮亚杰所报告的结果无多大差异，但在“弟兄”的问题（第2题）及“双头狗”的问题中却发现了明显的不一致。这几个题目都是取自皮亚杰一本最早的著作《儿童的判断与推理》，这本书曾受到了一些批评，有一种意见认为该书中的测验大多数都是在言语水平上进行的。

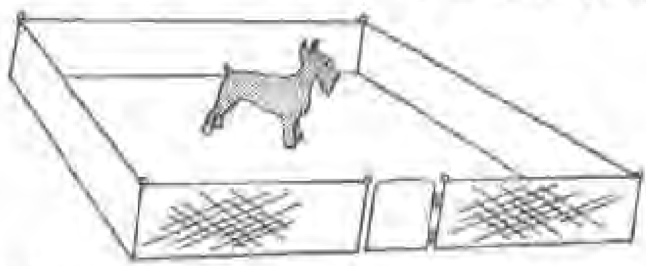
对于第二题，皮亚杰发现在他抽选的九至十二岁儿童的样组中，只有三分之一的儿童能够改正“我有三个兄弟：保尔、欧内斯脱和我自己”这个句子。我们在测验一百名八岁儿童时发现，有四十名能正确答出只有两个兄弟，另外有十七人把“我自己”改成别的名字如“约翰”等，这些回答我们也算作是正确的。然而，人数仅次于前者的三十五名儿童，只考虑到句子的语法，他们把“我自己”改成“我”，结果还是忽视了句中逻辑上或数学上的矛盾。顺便提一下，这道测验题如用于女孩，可改为“我有三个姐妹：苏姗、玛丽和我自己。”

如果一个前提同儿童所理解的物质世界的现实相矛盾，那么儿童就不愿意用这个前提作为他逻辑思维的基础。作为例子，我们再来考虑双头狗这个题目。

前提：假设在院子里有三只双头狗，问院子里总共有多少只狗头？

皮亚杰发现大多数儿童无法接受双头狗的前提，他们在回答这个问题时说：这种东西是没有的。但我们发现在我们所测验的150名年龄为九岁与十岁的儿童中，约有三分之二的人接受了这个前提并答出了正确的数学上的答案：六只狗头。只有少数儿童不接受这个假设，但是不正确的回答是各式各样的，其中有一种特别幽默的回答是"在院子里一个狗头也没有，狗头是长在狗身上的"。这个回答提出了演绎逻辑中一个有趣的问题，它涉及封闭（包围）关系的观念。如果我们接受前提，即狗是在院子里或者说狗被院子封闭着，同时狗头是长在狗身上的，那么这些狗头就必定在院子里。

应当同这样回答的儿童就"在里面"这个词汇的含意进行核对。有的儿童可能把"在院子里面"的意思看作是"躺在院子里面"。还有些儿童可能是指狗在院子里面，



而狗的头却伸在院子篱笆的外面。作为拓扑关系之一的"里面"或封闭的观念，将在几何一章中加以详细讨论（参阅本书第15章）。

封闭（或包围）的关系和逻辑对成年人来讲也可能是困难的。设想有一位狩猎松鼠的猎人，他看到一棵树上有一只松鼠，于是就走近那棵树，这时松鼠立即逃到树的另一面去了。猎人绕着树走，松鼠也同时绕着树逃，始终在与猎人相反的一侧。对此可提出这样一个问题：猎人是绕着松鼠在走吗？

进行形式上的推理如下：

如果我们接受前提：松鼠是在树上，

猎人绕着树在走，

那么，猎人必定是在绕着松鼠走。

尽管关于"围绕着"这个词的定义也许还会出现一些争论，然而上述问题已经向我们说明了形式演绎究竟是怎么回事。形式演绎不是从根据我们的经验或观察认为是正确的事实或判断出发，

而只是从个人接受的命题(前提)出发，去探求将引出什么结果。

甚至对所观察到的现实进行演绎推理时，演绎对它所要求的严格程度也是形式的。举例来讲，水在摄氏零度或更低的温度时会结冰，如果现在温度是零下八度，那么湖会结冰吗？倘若我们接受水在零度结冰的前提，又知道零下八度是低于零度的，那么在零下八度时湖将会结冰。这里所包含的演绎逻辑是强迫性的，如果我们接受水在摄氏零度或更低的温度时会结冰这个前提的话。

归纳思维与演绎思维的实例

怎么样运用归纳法来考虑交换性，这在上一节里已经讲过。用演绎法来考虑同样的观念，我们得从一个概括或一个定义出发。对于任何整数 a 和 b，

$$a+b=b+a$$

于是对某一特殊情形写出表达式(如 $5+6=6+5$)的依据就是上面的定义。这就是中学或大学水平的演绎证明的方法。

我们学习时，大多数人必须从"经验"中学习，这是一种生活中的归纳法。当同一类事物多次在我们面前发生时，或者也许只发生一次，我们就可以由此作出一个概括。当概括形成之后，就可以运用到特殊情况中去，这种方法就是演绎法。作者散步途经一块绿化地时，听到一个女孩子告诉一个男孩她不能和他一起吃午饭，当男孩坚持问她什么道理时，她最后回答说，因为上次和他一起吃午饭后她生了胃病，这大概就是用归纳法得到的一个概括，也就是

说，她曾经多次和他一起吃饭，而每一次都引起消化不良。

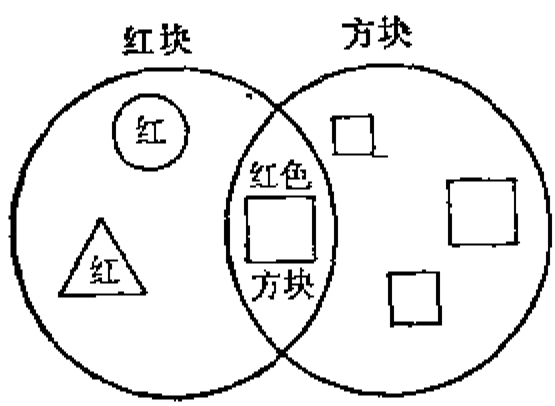
如果我们接受"金黄色头发的人是比较好开玩笑的"这个前提，而苏姗就是这样一个人，那么用演绎法就能得出结论，苏姗必定是比较好开玩笑的。也可以用归纳法得出同样的思想，也就是先知道了一些"金黄色头发的人"比如琼尼，罗丝，皮尔等好开玩笑，从而作出概括说："金黄色头发的人"比较好开玩笑。

成见也可能从归纳法开始，然后再转变为演绎法的，例如，皮尔是红头发，他的脾气很急躁，同样，乔厄和海伦也是红头发，脾气也很急躁，由此可以得到归纳的结论：凡是红头发的人都是脾气急躁的。一旦形成了这种概括，那就会用演绎法来判断其它的红头发的人。

在几何中，如果我们从定义出发，比如三角形是具有三条边的图形，以此定义去判断其它特殊的例子，这就是演绎法。教儿童的一种比较好的方法（归纳法）是先给儿童看许多三角形，然后问他们这些图形有些什么相同点，让他们由这些经验形成定义或概括。

合取和析取

逻辑中的合取（"与"）同集合论中的"交"具有相同的含义。一个红块集合同一个方块集合的合取或"交"就是红色方块，这些红色方块位于"交"的区域中。



逻辑中的析取（"或"）同集合论中的"并"具有相同的含义。红块集合和方块集合的析取或"并"是全部木块，或是红块，或是方块，或是红色方块。

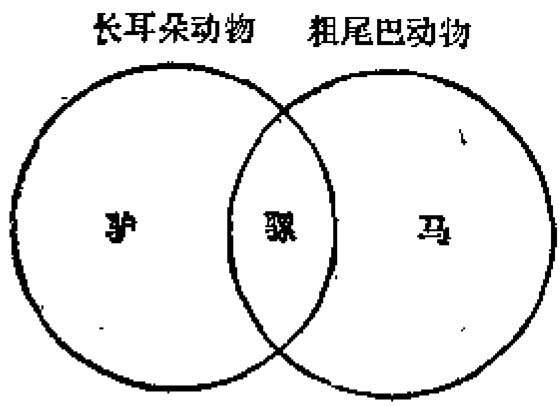
虽然六岁儿童能够用木块来解决合取和析取的问题（参阅书本第3章），但皮亚杰断言儿童没有能力系统地运用合取或者析取。① 如果这个结论是正确的话，

① 同上，第159页。

对于小学教师将有重大的意义。成人所具有的各种概念都是处于平衡的状态之中，因为这些概念都是合取或析取的产物。但是对于心理平衡（平衡化）所必需的逻辑过程，儿童一直要到大约十一或十二岁时才能开始获得发展。

如果儿童把生命定义为具有自己运动的性质，那么对于太阳，情况又怎样呢？太阳有生命吗？或者说太阳是活的吗？不是活的，那么什么是有生命的物体所具有的而太阳却没有的呢？是血液。于是，倘若把生命设想为自己运动和有血液的合取，那么有生命物体的类或集合，就可以定义为有血液且能自己运动的那些物体。然而儿童总是分别考虑有血液和自己运动这两个性质的。他说：太阳是活的，因为太阳会动，但是此时他忘了太阳没有血液。在儿童的思维中还没有出现合取。

同样，如果一只动物有长的耳朵，那么它是一只骡或驴。如果一只动物有一条粗尾巴，那么它是一匹马或一只骡。这只动物既有长耳朵又有粗尾巴，它是什么呢？皮亚杰同许多将近八岁的儿童谈话，并从中得出结论：儿童在思维中不能同时考虑两个条件（比如“粗尾巴”和“长耳朵”）。皮亚杰发现，75% 的儿童无法做到合取①。



粗尾巴动物的类或集合是（骡，马），长耳朵动物的类或集合是（驴，骡），这两个类的合取或“交”就是（骡）。

儿童逻辑或推理的发展阶段

儿童推理的发展过程可以分为三个阶段，第一个阶段是前运算阶段，从二岁至七、八岁，特点是儿童没有概括能力。第二个阶

① 同上，第 180 页。

段，从七岁到十二岁，叫做具体运算阶段，特点是思维中矛盾较少，概括能力有进步。这阶段中儿童越来越意识到存在于各分离事件中的关系。这时的概括能力仍然部分地依靠知觉——或者说，依靠儿童在物质世界中直接观察到的并能用实验来检验的东西。第三阶段称作形式运算阶段，儿童直到十一至十二岁时才开始出现形式运算，形式运算思维的特点是可以脱离现实的物质世界，它不再一味相信与物质世界相接触的运动和实验。而是采用一个法则或假设，将它应用到紧密相连的推理步骤的长链中去，这些推理步骤的正确性，是由指导思维进程的意志满足或不满足的状态决定的，而不是由物质世界的检验所决定的。皮亚杰对这些观念阐明如下：

> 我们可以这样说，在推理的第一阶段，思维并不超越单纯地"模仿"现实，它没有获得任何必要的蕴涵；在推理的第二阶段，思维开始对现实施行"运算"，创造了局部可逆的实验，并因而对某些断言和结果间的蕴涵有了意识。最后在推理的第三阶段，这些运算在下面的意义上互为必要条件：儿童意识到肯定某某事物势必迫使他自己肯定另外的事物。此时儿童终于获得了各种运算（合取、分取、否定、蕴涵等）间的必要的蕴涵和思维的完全可逆性。①

迈尔（Maier）对于形式运算阶段是这样描述的：

> 儿童智力发展的最后一个时期是在十一至十五岁，此时儿童生长发育成熟，青年期开始，思维的本性正在经历一个巨大的变化，皮亚杰在1958年发表的一篇著作中②，将这种变化同儿童大脑皮质结构的成熟联系起来了。青年与儿童不同，他们已经成为"……这样一个人，他的思考已超越了眼前的事物，他对每样事物都已形成了自己的理论，他特别喜欢去考虑那些不存在的东西"③。青年已经获

① 同上，第194～195页。

② 皮亚杰1958年发表的这篇论文载于泰纳（J. Tanner）与英海尔德合编的《儿童发展问题讨论集》（Discussions on child development）第三卷，1958，第114，154～162页。——中译者注

③ 皮亚杰：《智慧心理学》（The Psychology of Intelligence），1950年英文版，第148页。——中译者注

得了超越他自己周围的现实世界和他自己的信仰去进行思考与推理的能力。简言之,青年已进入观念的世界,进入与现实世界相脱离的本质之中。青年的认知开始依靠纯符号和命题的运用而不只是现实。①

这样一连串的思维可从任意选择的定义或假设出发，如同在简单的演绎证明中的情况一样。儿童经常运用的逻辑范型为"如果这件事"发生的话,"那么那件事"必定发生。儿童可利用他自己能够确定的变元来叙述命题。

逻辑中各种命题可用四种基本方式进行组合。当考虑两个变元,例如鱼饵的两个因素——嗅味与颜色时,四种命题运算为:

合取：它是既有嗅味又有颜色的。

析取：它是有嗅味或颜色的。

否定：它是无色亦无嗅味的。

蕴涵：如果它是无色的,那么它必定有嗅味。

对于其中每一种可能性必须仔细查核，并把每种可能性同它的蕴涵联系起来。儿童一直要到形式运算水平才能发展起一种穷尽一切的过程,也就是说,才能确定所有的可能性和从这些可能性中决定一个正确答案的检验程序。

本章内容的教育含义

本章对小学教师的主要价值可能在于：(1)认识儿童在达到形式推理之前必须经过的几个阶段。(2)了解这些阶段通常是在什么年龄范围。(3)熟悉在每一个阶段中所发生的一些思维过程。本书中所描述的许多测验题，将有助于教师确定她的学生的思维发展阶段。形式推理一直要到十一至十二岁才能出现，这意味着

① 迈尔(H. W. Maier):《儿童发展的三派理论》(Three Theories of Child Development),纽约:Harper & Row 出版,1969,第146页。

大多数不到十一、二岁的儿童对于形式逻辑是毫无准备的。

形式运算

十一至十二岁儿童的教师需要自觉地意识到，当儿童进入形式逻辑中所包含的抽象阶段(也就是形式运算阶段)时，就应该培养学生命题类型的思维。只是告诉儿童怎样思考，不给他合取、析取、否定、蕴涵等帮助思维加工的工具。对于逻辑过程尚有一个结构问题。有些五年级或六年级的数学教材中，现在已加进了有关逻辑的章节，作为形式逻辑或演绎逻辑的引论。

小学高年级的教师或中学教师，若对十一至十六岁儿童形式运算思维过程的结构有兴趣作进一步的研究，可阅读皮亚杰和英海尔德合著的《从儿童到青少年的逻辑思维的发展——论形式运算结构的构造》①。可惜的是这本书很难读懂。

1973年5月在美国坦普尔大学举行了皮亚杰学会的第三次年会。从会议论文中读者可看到一些关于形式运算思维过程方面的较难理解的知识和实例。特别有用的是隆泽(E. A. Lunzer)的报告②。

具体运算

教五岁至十一岁儿童的教师们，主要是跟处于具体运算水平的儿童打交道，儿童在这时开始出现了逻辑，但仅仅是在与物质世界中的具体对象有关时才出现逻辑，比如设想有两种木块的集合：红木块同方木块。如果一个木块不是红的(否定)，那么它必定是方木块(演绎)。这类刚开始出现的逻辑活动已在第5章中讲过了。

虽然数学被公认为是一门最出色的演绎科学，但是在小学里教儿童数学时不应当这样处理。对数学家来说，数学是一种抽象，是人类思维的产物，即使可以用数学来描述物质世界中的现象，但

---

① 皮亚杰：《从儿童到青年逻辑思维的发展》。

② 参阅美国费城坦普尔大学皮亚杰学会编印的年会资料。

数学本身并非是物质世界中的部分实体。数本身就是一种抽象，你在物质世界中不可能看到单独一个数，譬如"2"。正是这种抽象性才导致数学，导致它作为一门用演绎逻辑来处理的科学的完美性，至少部分地是如此。

但是小学儿童还缺乏在抽象水平上用形式逻辑和证明来进行学习的准备。儿童在很大程度上是物质世界的一部分。数学对他们来讲应是探索和发现的领域——通过具体事物对物质世界进行归纳的研究。应当鼓励儿童去发现数学中的各种模式与规律，例如根据对物质世界的特殊的观察发现交换性(这就是归纳法)。

五岁至九岁儿童的教师需要意识到儿童自我中心的本性。对于这一年龄阶段的儿童，很难要求他不是从自己的观点来进行思考。我们在"内省"和"滥绎"那两节中所讲述的儿童思维的局限性，教师必须加以考虑。

我们的大多数知识是来自于自己的逻辑力量中，而不是来自于其外，这一点特别重要。认识不是现实的摹本而是现实的重新结构。正是理性和逻辑才使儿童克服了感觉印象的错误。由于我们的大多数知识来自自己的逻辑力量中，这就意味着认识并非直接来源于教师。教师的一个主要责任是为儿童提供物质经验并向儿童提出问题，俾能在儿童心灵中引起平衡化过程或者逻辑运算，这就是儿童的一种学习方式。希望教师在这样做的时候，尽可能减少一点"讲述"或"解释"。

15 儿童是怎样开始认识空间的

对儿童发现空间关系的研究——这也许可以称为儿童自发的几何，其意义不亚于研究儿童的数概念。儿童在几何方面的发展顺序似乎正好是同历史上发现(几何)的顺序相反。①

几何学是数学中一门研究空间位置或定位的学科。几何学有多种，与儿童的经验最密切相关的是拓扑、欧氏几何、投影几何及度量几何或测量。

目前，向儿童引入几何知识总是从欧氏几何开始的——如线段、三角形、正方形和圆这些欧氏图形。从历史上讲，几何学也就是这样发展起来的。这正是古希腊人在二千年前所研究的几何类型，直到今天它依然是初中几何的基础内容。

在小学低年级所出现的几何内容，大多数是这样一些活动，如用线段来连结各点，对画出来的图形进行再认并说出它的名称，象三角形、正方形和长方形等。

这类活动涉及欧氏几何的内容，欧氏几何可以认为是研究所谓刚性的各种图形的，例如一个三角形可认为具有三条刚性的边——这些边是不会弯曲也不会延伸的。当我们把这个三角形与另一个三角形相比较时，可以移动这个三角形，它的大小和形状不会改变。

① 皮亚杰："儿童是怎样形成数学概念的"(How Children Form Mathematical Concepts)，《科学美国人》(Scientific American)，1953年11月号，第75页。

目前小学里正在向大多数儿童介绍的几何，是在下述假定的基础上编排的，即一个儿童最初的空间概念是欧氏几何的概念。但是皮亚杰认为这个假定是不正确的。宁可说，儿童最初的空间概念是拓扑性质的。作为数学中一个分支的拓扑学是直到十九世纪才发展起来的一门相当新的学科。

拓　扑

对生活于其中的空间或世界，儿童的最初印象是一片混沌、毫无组织的。各种图象在婴儿面前来去匆匆，就象出现在一个活动的舞台上那样。婴儿抓住了一只奶瓶，但他并不知道怎样移动奶瓶使得奶头能塞进嘴中；他伸手去抓某样东西，但东西却不在手所伸得到的地方，他的动作完全是偶然的。

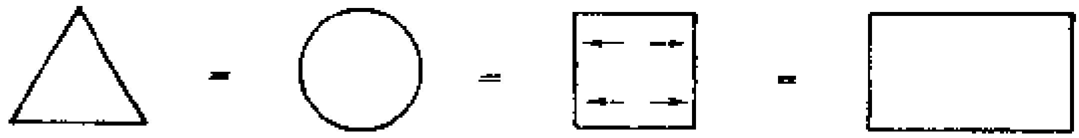
对婴儿来讲，形状不是严格不变的刚性的东西，他所看到的形状是经常在改变的。当一扇门在开启时，它看上去的样子就是不同的；当他的妈妈向他走来时，看上去也是不一样的；当妈妈的面孔转向左面或右面时，或者向上仰视或向下俯视时，以及当妈妈走近或走远时，他所看到的妈妈面孔的形状也是在变化着的。

但正如成人所知道的，这时母亲面孔的实际形状是不会改变的。在欧氏几何中我们可以把面孔描述为一个圆或椭圆，但是婴儿不会把面孔看作是一个刚性不变的形状。

在投影几何中，一个物体不是根据它本身来考虑的，而是从相对于空间中若干其它位置的关系来考虑的(有关投影几何的内容将在第 16 章进一步研究)。

在拓扑数学中，图形不是设想为形状上是刚性的或固定不变的。它们可以延展或紧缩，以致可能具有不同的形状。故而拓扑有一个别名，叫作“橡皮几何”。简单的封闭图形如正方形、圆形与三角形在拓扑上是等价的，因为它们能够伸缩变形、相互转化。把

正方形拉长就得到长方形；把正方形的角压进去就形成椭圆或圆，也可以形成三角形。

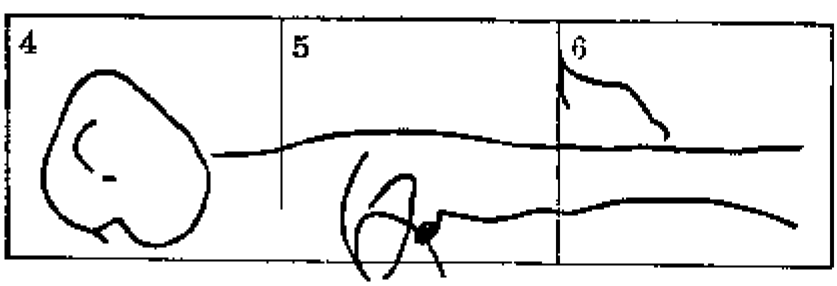


上面这类图形在数学上叫作简单的封闭曲线。任何起迄于同一点、且没有两次经过其它点的图形都是简单的封闭曲线。

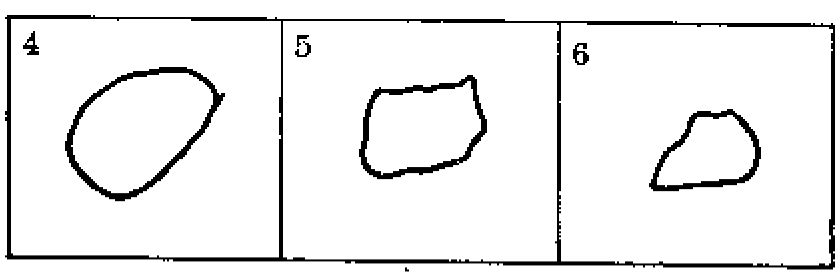
儿童最初看到的三角形并不象成人所看到的那种样子，而只是一个封闭图形。让三岁或四岁的儿童画一个正方形或三角形，他可能画成一个圆形的样子。这在拓扑上是正确的，因为它们都是封闭图形。虽然在欧氏几何中三角形是单独存在的，但在拓扑中就不再是这样了。现在在小学低年级已出现某些拓扑问题，它们不是通常几何课所提供的最初的经验。

儿童经历了胡乱涂画的阶段后，在三岁半左右开始能区分封闭图形与开放图形。而欧氏图形如圆、菱形与正方形作为封闭图形对于儿童来说还全是相同的，画这些图形时全都使用相同的方式。

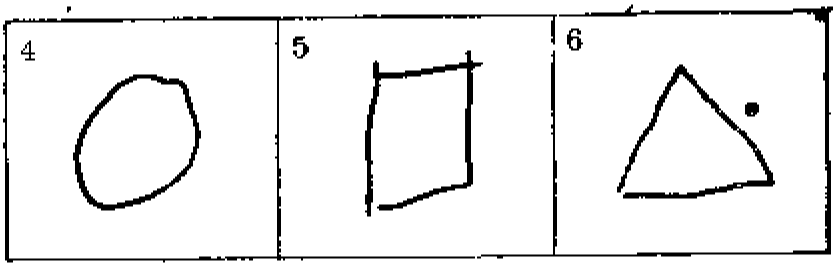
一位聪明的二岁半的女孩子，无法照着她母亲画的样子画出三角形，她同妈妈掉换腊笔，以为用妈妈的腊笔可以画出来。



处于乱涂阶段的四岁儿童照着样子画的圆、正方形与三角形。

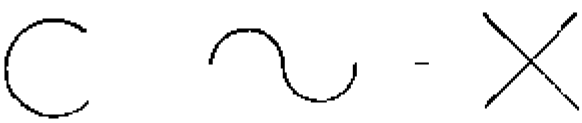


另一个四岁儿童照样子画的圆、正方形与三角形。



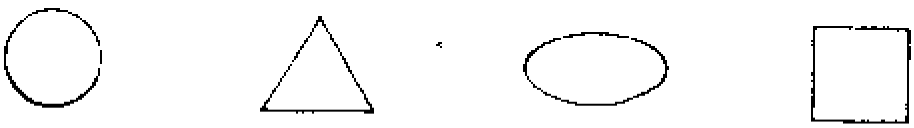
同一个儿童在一年后画的图。[1]

开放或封闭的特性都是拓扑特性，幼儿能够再认它们的区别。



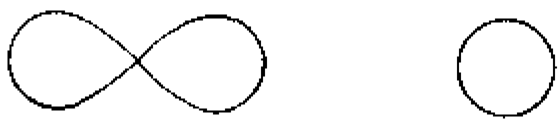
开放图形

拉长或者压缩（但不撕裂）并不能把封闭图形改变成开放图形。儿童在能够区分简单的欧氏封闭曲线图形（如三角形、正方形和圆）之前，就能区分封闭图形与开放图形。



简单的封闭图形

8字形虽然也是封闭的，但在拓扑上并不等价于一个简单的封闭图形（如圆形）。要把它变成一个圆，必须将8字形在交叉点上“扯开”或者“分离开来”。



这两种图形在拓扑上不等价

因为儿童在意识到欧氏关系（如形状与大小）之前先意识到拓扑关系，所以他起初无法设想叠合的观念。一个三角形与一个正方形是不可能叠合的，但三岁的儿童却看不出三角形与正方形在欧氏关系上的这种差别。

皮亚杰总结说：“在儿童掌握了拓扑关系后，还要经历一段相

① 玛丽·萨默（M. Sime）：《儿童的眼光》（A Child's Eye View），纽约：Harper & Row 出版，1973，第39页。

当长的时间，他才能发展欧氏几何与投影几何的概念。”①

在这个结论中皮亚杰为他的认知发展理论的逻辑-数理模型找到了证据。他说：“相当奇怪，儿童几何概念的心理发展次序，更加接近于现代几何的演绎结构或公理结构的次序，而并不接近于发现几何学的历史次序。这给心理结构和科学本身的逻辑结构之间的亲缘关系提供了另一个实例。”②

拓扑中的各种关系

家庭关系，如“兄弟”、“姐妹”，对于儿童所使用的“关系”是很好的例子。在拓扑数学中也存在着一些关系。第一种最基本的可以由知觉掌握的拓扑空间关系是邻近或“靠近”关系。儿童年龄越小，一个物体的邻近关系的重要性就越大，因为幼儿是根据哪个物体近些哪个物体远些来区分各种物体的。在画面孔时，他把两只眼睛画得靠近鼻子。

第二种基本的拓扑空间关系是分离关系。当一个儿童逐渐长大时，他能越来越容易地将一个物体从别的物体中或者将某个物体的一部分与另一部分“分离”或者区分开来。他把门同墙壁分离开来；将一件玩具同他睡的小床分离开来；当他画面孔时，他将鼻子、嘴巴和眼睛分离开来。儿童能区分欧氏图形（如三角形与正方形）之前，已能够将一个图形画在另一图形的内部，如把一个圆画在另一个圆内，或两圆相交，或两圆相离，因而他已注意到了这两个圆是否是分离的。

第三种空间关系是次序关系——如挂在幼儿小床上的一串珠子的次序，或者更为重要的，开门、开灯、看到东西、就餐的次序。

第四种空间关系是封闭关系或包围关系。如狗在院子“里面”，

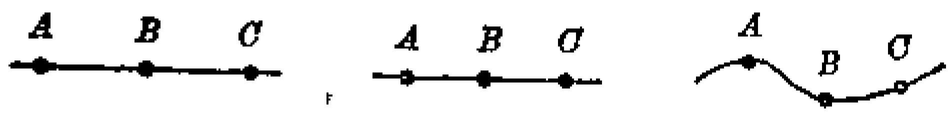
① 皮亚杰：“儿童是怎样形成数学概念的”。

② 同上。

汽车在马路"中间"，鼻子被面孔包围或封闭，鼻子在眼睛和嘴巴"之间"，窗户是被一堵墙围住的，一个人的笑容是包含在面孔上的。儿童能够将一个圆画在另一个圆的内部或者说把一个圆封闭在另一个圆的里面，由此可知儿童此时已注意到了存在于两个圆之间的封闭关系。虽然年龄很小的幼儿甚至在拓扑上也可能画错，如把一只眼睛画到面孔外面去了，他没能把两只眼睛都画在头的内部或者被头封闭在里面，但是这些儿童在能学习欧氏关系之前，就能自已纠正上述这类错误。

目前小学里提供给儿童的几何方面的最初经验是距离、直线和角度等刚性形状的欧氏概念，这样做实际上忽视了心理学上关于幼儿是怎样开始认识空间的研究成果。因为幼儿的空间观念在类型上全部是属于拓扑性质的，这与欧氏概念完全不同。

请看下面的三个图形，从欧氏几何看来每一个图形都是不同的，线段的长度不一样而且其中有一个图形是条曲线，它们三者的形状是不同的。然而这三个图形在拓扑上却是完全等价的，不管把这些线段如何伸长或弯曲，其相邻关系、次序关系、分离关系及连续性关系都是保持相同的。例如，仅考虑三个点(A, B和C)，



A、B、C的"次序"在三个图形中都是相同的，在每个图形中B都是被A和C封闭的，A与C是被B分开的。由于在A、B、C三点之间各种拓扑关系都是相同的，所以每个图形在拓扑上都等价于另两个图形。

守恒性

欧氏几何与拓扑之间一个重要的区别集中在长度守恒或方向守恒的观念上。在欧氏几何中，长度作为已知线段的一个性质是刚性的或守恒的，而在拓扑中，长度是没有意义的，一切线段都是

等价的，任何一条线段都可设想成是能伸缩和弯曲而不破坏各种拓扑关系的。这些拓扑关系在后面几节里将详细讨论。同样，直线的方向守恒性(方向不变性)是一项欧氏原理，然而在拓扑中不管线弯曲或笔直都不会影响各种拓扑关系。

儿童从大约三岁至七岁处于拓扑表象阶段，此时儿童最令人惊讶的特征之一就是缺乏大小恒常性。儿童认为靠在一起的两根棍棒长度是相同的，但是把一根棒移动后，儿童就会认为它变长了或变短了。仿佛空间是有弹性的。在两个物体(如两棵树)之间放进了第三个物体，就会使儿童认为这两棵树之间的距离改变了。一架电梯往上开去时，儿童看起来要比它往下开来时远些。

婴孩见到的大人的面孔是一个灵活的或拓扑的结构，当大人走近孩子时，大人面孔的大小在改变，当大人的头转向左右或朝上朝下时，头部的外形亦在变化着。在某一时刻面孔的形状是椭圆形，而在另一时刻看上去又象圆形。用数学的语言来讲，面孔外形的变换在拓扑学中是一个关于同胚的研究。面孔的外形看上去变化时，其拓扑关系如下巴、鼻子、嘴巴之间的次序关系仍然是不变的。

要更加详细地研究儿童画图形时区分拓扑与欧氏几何的能力，读者可以参阅本书第 16 章“画出基本的欧氏图形”一节里的图解，或者参阅皮亚杰的《儿童的空间概念》一书第 52 到 79 页的“几何图形的画法”一节。

次序的拓扑关系

幼儿探索空间的最基本的方法就是了解一个物体的邻近是什么。紧跟着拓扑的邻近关系的，是某个物体与其它物体的分离关系。第三种拓扑关系是次序或顺序关系。为了研究儿童对次序关系的理解程度，我们把颜色各不相同的纽扣(或珠子)放在一条线

上，并给儿童一套相同的彩色纽扣，要求他以同样的方式把钮扣摆在另一条线上。在实验开始前，我们先检查一下儿童是否确实能够再认各种不同颜色的纽扣。

二岁和三岁的儿童尚无法理解所提的要求，四到五岁的儿童只有把模型直接对着他自己的线使得他能经常对照，才能理解次序的观念。假如模型不放在他的旁边或者将模型弯成一个圆，那么他们就无法再复制。他们也不能将钮扣以相反的次序摆在线上，因为此时他们还未达到思维"可逆性"的智慧水平。

儿童在调整左右水平的次序关系或上下垂直的次序关系或圆形次序关系时所表现出来的无能与困难，涉及到基本的动作协调上的困难。皮亚杰作出结论说，（在这个运用钮扣和线的实验中）以熟练的运动形式表现出来的儿童的动作活动，对于儿童空间直觉思维和心理结构的发展都是极其重要的①。从数学角度看，左右（水平维度）或上下（垂直维度）的观念包含着一个坐标系统，你一定会记得，在代数或解析几何课本的插图中是经常看到这种坐标系的。空间中各定点之间的一维、二维与三维的数学就是欧几里得空间的数学（平面几何与立体几何）。

儿童在六岁和七岁之间已达到了能够解决次序问题的水平。在我们给他看一个模型之后，儿童就能以正次序（从左到右）或逆次序（从右到左），或者以一个圆的形式复制并重建这个模型。此时儿童已具有思维的可逆性，可逆性是他们智慧活动的特征，这跟过去纯粹感知运动的活动是完全不同的。

有色钮扣实验的一种变式名为"挂衣课题"，在这个实验中，将不同颜色的衣服挂在一根晾衣绳上，让儿童观察它们的次序。然

① 皮亚杰和英海尔德：《儿童的空间概念》，第97页。

后给一名六到七岁的儿童许多用纸剪成的彩色衣服，让他们在另一根晾衣绳上照样挂一排衣服。接着再叫他以相反的次序重做一遍，同时问，如果把次序颠倒过来，那么这根晾衣绳看上去将是什么样子，他回答说将还是象原来的那样。

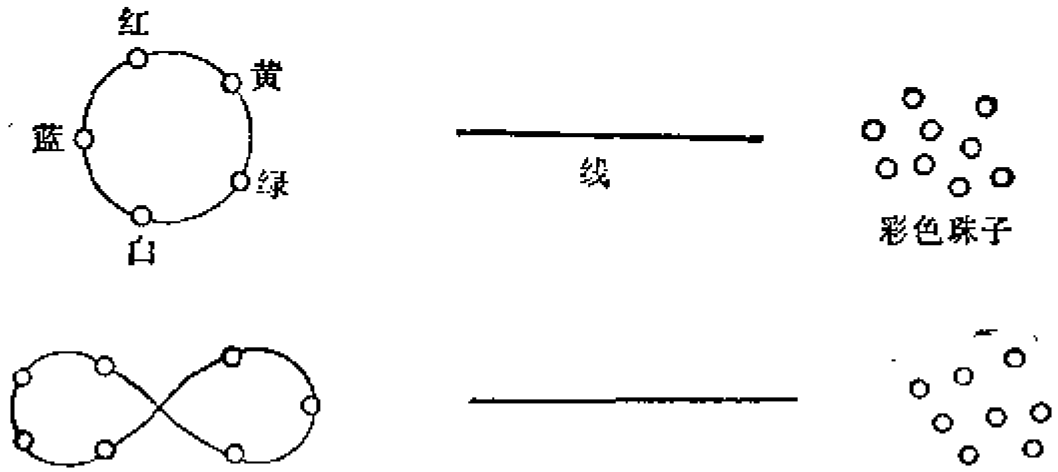
将实验再变化一下，问儿童假如把这些衣服垂直堆放的话，最底下一件衣服和中间一件衣服将是什么颜色的？儿童正确地预言了从左到右逐一堆放和从右到左逐一堆放的中间一件和最底下一件的颜色。

一位六岁女孩将衣服在晾衣绳上排成一定的次序。

给儿童看一根串有各色珠子的圆形项链，要求儿童回答假如把这根项链解开摆成直线，项链将是什么样子。给他一根线与各色珠子，让他用实物摆出来。（不准儿童解开项链，线也不准弯起来。）

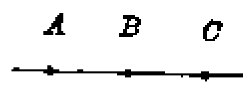
倘若儿童对这种活动没有什么困难，那么再给他一串摆成8字形的珠子，当要他照8字形上的次序，在直线上重新排一串珠子

时，他就立刻被8字形上的结引入歧途。他通过解开8字形来检查他排的珠子，将两者进行比较①。

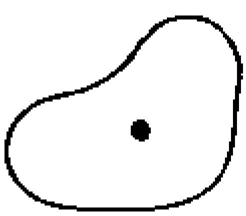


包围或封闭的拓扑关系

我们已经探讨了基本的拓扑关系如邻近关系、分离关系和次序关系。另一个重要的拓扑关系就是包围关系(或封闭关系)。考虑下面一条线段，B点对于A点及C点的关系是“在二者之间”。只考虑一维(水平的)时，可以说B被A与C包围或封闭。



“在两者之间”的关系只是“包围”关系中的一个特殊情况。同样，如果一点位于一个封闭图形的内部，那么该点被图形所包围或封闭。这种包围关系已涉及二维图形(平面图形)。再考虑一只桔子里面的一粒核，这就涉及三维(立体)包围的观念了。



从拓扑学来讲，桔子被挤压时，它的外形改变了，核的位置也可能移动，可是桔子包围着核的拓扑关系没有改变。

结

在拓扑学中有一项研究称作结的理论。可以把一段线打成各

① 同上，第101～102页。

种简单的结来研究拓扑关系。在简单的环形结中也可以设想是存在着包围或封闭关系。如果在线上有一个环，那么将线的一端穿过此环，这时包围关系(环绕关系或封闭关系)就存在了。没有这种“包围”关系就不可能出现“结”。

A　　　　B

皮亚杰为了研究儿童对包围关系的把握程度以及打结的能力，他使用了一段线，先问儿童是否能打一个结。如果他们不会，可以先做样子给他们看，随后让他们重复这种办法。如果这也不行，那么可改用半段红色半段蓝色的线，象讲故事一般地向儿童解释这个打结过程。比方说：“你把红的一段线先从下面绕过去再往上穿出来，象这样，对了，你看那红的一段线就在中间了。”

儿童在不满四岁或五岁时是不会打结的，甚至照着别人的样子打结他也不会。下面是这个阶段的两个实例：

柯尔(三岁十个月)。实验者问他：“你会打结吗?”(把一根线放到柯尔面前。)柯尔答：“会”(这时他只是把线的两端放在一起)。无论实验者如何进一步解释，也不能使他有什么改进。结果实验者叫柯尔注意看着他是怎样打结的，实验者慢慢地打了一个很松的结，中间还留着一个小孔。柯尔问道：“那个洞是干什么的?”此时实验者让柯尔将一粒珠子穿过该孔。(柯尔将珠子穿过这个环。)实验者又对柯尔说：“现在你将线穿进这粒珠子，再把珠子沿着线从一端移动到另一端。”(柯尔使穿在线里的珠子走完了线的全程。)尽管对柯尔教了怎样打结，可是他还是不会照样子做，他仍然只是把线的两端放在一起。

梅尔(三岁十一个月)。他在把线的两端放到一起后，没有就此停止，而是继续用心观察。实验者说：“你可以把线的一端穿进象这样的小孔”。因此梅尔照着实验者的话把线的一端穿进由线的弯曲

部分所形成的"半环"，接着梅尔拉线头，可是他惊讶地看到"结"消失了，线还是没有打结。于是实验者再向他指出线"必须交叉"并且演示给他看，可是梅尔自己还是不能重复这些动作。①

环的观念以及把线的两端互相交叉并将一端穿过此环的动作，处于第一阶段的儿童还无法掌握。

处在第二阶段(四岁到六岁)的儿童，不需任何帮助就能复制他所看到过的一个简单的结，但把这个结放松或抽紧后，他就不再认为这是相同的结。放松或抽紧的过程并不改变现存的拓扑关系，只是幼儿还没有意识到这些关系而已。在许多打假结的情形中，他们都无法讲出一个真正的结是什么样子的(所谓假结就是指线的两端看上去交叉了，但实际上并没有形成打结的环绕关系或包围关系，如果把线拉紧，结还是没有打成)。

一名五岁的儿童不用任何样子就打了一个结。

实验者问他："你是怎样打的呢？"答："我把线穿过一个孔，后来就打出一个结来了。"实验者再给他看一个缝衣服时用的"结"，该结打得很松使各个部分都能看得很清楚。儿童说："不，这不是结。"实验者说："你拉拉看。"儿童答："嗯，这是结。"实验者指着一根没有结的只形成了半个环的线又问："那么这个是不是结？"儿童答："不是结，因为它没有穿过小孔。"实验者指着一个放松的结再问："这个呢？"儿童答："不，那也不是结。"实验者说："让我们假定这是一根管子，里面有一只蚂蚁开始沿着管子在爬。蚂蚁一直要爬到管子的另一端才能出来，否则它是爬不出来的。你说蚂蚁将走哪一条路？你用手指沿着线比划一下。"(当儿童的手指到达打结点时，他的手指突然从一边跳到另一边去了。)实验者又对儿童说："如果你用这颗珠子沿着线滑动呢？"(儿童把珠子穿入线中滑动了几厘米，停下了，实验者要他继续下去，他失败了。)实验者指着一个抽紧的结再问："那么这个是不是结呢？"儿童答："是的，这段线在上面，那段

① 同上，第108页。

线在下面。"①

给另一名五岁的儿童看一个逐渐抽紧的结，然后要求他画出来。他画了一条直线，在直线上添了一个黑圈圈，代表一个结。此时给他

一段线，他能打出这种结。随后又把打得很松的同样的结给他看，虽然他也能打出这样的结，但他却认为这是另一种不同的结了。可是他又无法解释这是为什么。②

当儿童将线的一端绕到接近另一端时（实际上这已是一个三维的立体观念了），儿童已经完全忘掉了"（一段线内）各点之间实际的相继次序和相邻部分的真实的邻近关系"③。相反，当儿童将线的一端绕到结的另一边时，他却认为结两边的线是不连在一起的。因而，尽管他会照样打一个结，但却无法注意到理解包围关系所必需的三维方面的内容，他只是企图在桌面（即一个平面或二维空间）上打出一个结来。

当结放松或抽紧时，线上各点的相邻关系以及各点位置的次序关系都是不会改变的。从拓扑上讲，当结放松或抽紧时，结是不变的，它还是同一个结，次序关系、相邻关系及包围关系均未改变。

按照皮亚杰的观点，儿童无法再认放松的结，是因为儿童的基础观念在性质上仍然太依赖于知觉了，儿童的观念仍然还没有达到足够程度的柔韧性（可变性），儿童的观念依然束缚于静止的构形上。

一个结放松或收紧时的构形在拓扑上讲是相同的，用数学术语来表述，就是这些图形是同坯的或者在拓扑上是等价的。拓扑学是研究这种同坯的——即研究构形中的变化或变换。

儿童进入第三阶段或运算阶段（将近七岁）后，开始认识到抽

① 皮亚杰和英海尔德：《儿童的空间概念》，第113页。

② 同上，第114页。

③ 同上，第118页。

紧的结与放松的结之间的对应关系，他开始能区分真结与假结，并且能预言当线拉紧时是否会形成结，或者是否看上去象结而实际上是假结：一旦线拉直结就消失了。

当一个结放松或抽紧时，处在运算水平上的儿童已认识到包围的拓扑关系并无改变。变化的只是欧氏观念，如环的“大小”(环为圆形或椭圆形)或结的“长度”与“宽度”。他认识到即使环的欧氏形状改变了，线上各点的拓扑的相邻关系、次序关系和分离关系也未变化。邻接的部分仍然是邻接的。原来靠近或分开的部分仍然是靠近或分开的。当结收紧或放松时，包围关系亦毫无变化地重现着。

连续性关系与无限关系

连续性是将四种拓扑关系——相邻关系、次序关系、分离关系及包围关系合在一起的结果。

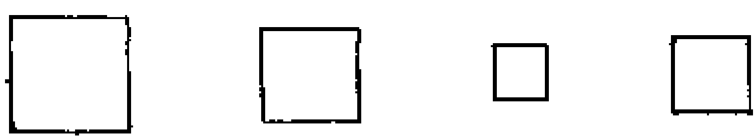
一个点代表了空间中的一个位置，一条线是无数点的集合，这个内容现在在一些小学一年级的教材中就已经可以看到了。但是我们将看到“一条线或线段是无限多个的点的集合”这一观念是个多么困难的概念。对这些概念儿童到底具有什么样的观念，这是值得考察的。实际上儿童的想法与通常几何中引进的概念是很不相同的——在几何中完全是人为地将一条线定义为无数多个点的集合。按照皮亚杰的看法，连续性观念在任何程度上讲都不依赖于儿童在学校里所学得的经验，而是必须等到适当的智慧发展阶段才出现；对于连续性概念来说儿童适当的发展阶段的年龄是相当晚的。儿童在平时已看到了连续性观念的若干实际例子，如他注视着一块方糖放进水里后，先溶解为谷粒那么大，以后又变成云雾状，最后就完全消失了。

可以用想象一条线段或一个正方形变得越来越小的办法来研

究连续性观念。在该项实验中，不仅能研究意识活动，而且还能研究抽象思维的过程，儿童的抽象思维是在七岁到十二岁之间开始发展起来的，最后到十一或十二岁时进一步发展成为形式思维。

实验时要求儿童画出他能够想出来的最短的一条线段或最小的一个正方形，处于第一阶段的儿童不可能相信某种无法见到的物体还会存在。他只能连续进行次数有限的等分。当他在考虑分割一条线段时，他也许不会想到线段的一半还能一分为二。他所能想到的最短的线段将是一条看得见的线段，同样最小的正方形也将是一个看得见的正方形，而不是一个点。

一名五岁的儿童以尺寸逐渐缩小的次序先画了三个正方形，可是随后画的第四个正方形却比第三个大。他不能将他一开始所进行的工作继续下去，也就是无法再画出一个更小的正方形。即使他开始是正确地按照尺寸逐渐缩小来画正方形的，也还是无法继续这样画下去。当要求他以尺寸逐渐放大的次序画出线段或正方形时，也发生了同样的问题①。



让一名七岁儿童画出最短的线段，他画了一段二毫米长的线段。问他这段线段上是否有什么点存在，他回答道没有。再问他为了连成一条二厘米长的线段，需要几条这样短的线段，他只是作为一种估计答道"十条"。又问他在相隔二厘米的两个点之间可以放进多少个点，他猜道："一百个点。"当他开始在相隔二厘米的两点之间的空隙中画点时，他只放进了 23 个点。这时再问他 100 还对吗？他回答说：不对，因为 23 个点挤在一起已经太密了。再问他，没有错吗？他回答说："没有，因为再加点的话，就不是一条直

① 同上，第 130 页。

线了。"①

从七、八岁到十一、十二岁，儿童经历了第二个阶段。在该阶段中，他承认有进行更多次等分的可能性，但是他决计不会把次数看作是无限的，他还无法超越有限或看得见的大小来作概括。

一名八岁儿童在他首次尝试时画了一个尽量小的正方形。问他画的是什么，他说成是一个点。他把最短的线段也说成是一个点。可是再问他最短的线段这个点是否跟最小的正方形所构成的点相同时，他回答说是不一样的，因为前者是一个小方点，而后者是一个小长点②。

这个儿童并没有把点设想为不具有维度的点(即没有长度也没有宽度的点)，幼儿在考虑线段上各点之间的关系时，已经掌握了相邻关系、分离关系、次序关系与封闭关系的拓扑概念。他认为在各点之间是存在空间的，而这些空间本身又被许多点充满着，这些点接近其它的点但又与其它的点互相分离。然而，由于儿童此时还缺乏无限分割及无限次封闭的思想(这些要到后一阶段也就是最后一个发展阶段才会出现)，所以相邻、分离、次序与封闭这四种拓扑关系还不能合在一起成为单一的整体。

儿童非要到十一或十二岁也就是即将小学毕业时才能掌握无限的观念，这一点是特别使人感兴趣的。可是至今我们仍然在小学低年级中人为地把线作为点的一个集合向学生介绍。实际上儿童非要到形式运算阶段才能进行思维的抽象运算，正是这种抽象运算能无限地将整体进行等分或者分解，因而才能把线段看作是无限多个点的集合。

下面是接近形式运算阶段的十岁儿童阿尔夫的实验情况：

> 阿尔夫(十岁二个月)。实验者让他画出最小的正方形，他画了一个微小的点。实验者问他："当你分割一条线时，分割到最后还留

① 同上，第132页。
② 同上，第139页。

下什么呢?"阿尔夫答:"一个点"。又问他:"你能在你的头脑里分割这条线段吗?"答:"能,这条线段会变得越来越短,越来越短,分到最后什么也没剩下了。"再问他:"在这个正方形(边长为三厘米)中有多少个点?"阿尔夫答:"成千上万。"问:"在这张桌面上呢?"答:"十亿个点。"问:"如果让你数这些点你要数到什么时候?"答:"我想我会永远数下去。"问:"是不是会有数完的时候?"答:"不,永远不会完,因为没有哪一个数可以是结束的。"①

最后再介绍一名将近十二岁的儿童的实验情况,作为发展最后阶段的一个明显的例子:

贝特(十一岁七个月)。实验者问他:"沿着这条直线可以画多少个点?"答:"你没法说,也没法数,你可以把点画得越来越小"(在这里已经包含着无限缩小包围的想法了)。又问他:"在这个圆内有多少个点?"答:"这是没法讲出来的。"再问:"只要你大体上讲,一万、十万还是一百万?"答:"这是没法说的,点那么多,多到你没法讲。"实验者说:"你画出一张图来表示最短的线段看起来象什么样子。"答:"可是这是办不到的,因为这条线段可以一直短下去,一次比一次越来越短,这是没有完的。"②

在形式运算水平,思维变成了假设与演绎的思维,思维本身已经摆脱了感觉经验或知觉的具体水平。一条线已被看作是点的一个无穷集合。连续性概念,当它综合了相邻、分离、次序和封闭等拓扑概念而形成时,也就"圆满地完成了作为儿童空间观念基础的一些拓扑概念的发展。"③

因为大多数儿童非要到十一或十二岁才能在某种程度上理解"无限"的观念,所以显然,在小学低年级就用"点的集合"向学生引进线段,三角形或其它几何图形等,是毫无意义的。这倒并不是说,如果进行个别教学的话,某些优异的儿童不可以早一点考虑这

① 同上,第146页。
② 同上,第146～147页。
③ 同上,第149页。

些概念。但是我们上面的讨论，在考虑学生所适宜的作业或活动的类型上，将会给教师一些好的主意。我们所引录的与儿童的谈话技术，在确定每个儿童的连续性或无限概念处于哪一发展阶段方面，亦为教师在程序上提供了一种出色的指导。

本章内容的教育含义

皮亚杰关于儿童最初的几何观念是拓扑的，而不是欧氏几何的发现，要求托儿所、幼儿园以及小学一年级中最初进行的几何(空间)活动类型应是拓扑性质的，这些活动应该建立在刚才讨论过的那些拓扑关系——相邻关系、分离关系、包围关系与次序关系上。

应该研究儿童对那些存在于各种物体之间的拓扑关系的认识。本章中已详细描述了许多活动实例，并介绍了适当的谈话技术。

儿童能在一个圆内或在它的包围之中画出另一个圆，从而注意到包围关系吗？儿童能在一个圆内画出另一个圆且使这两个圆只相交于一点，从而注意到圆与圆之间的相邻关系吗？儿童能将上述图形与其它格局，如彼此相交于两点或根本不相交的圆进行区分吗？

给儿童看一张图，上面画着一个院子，院子"里面"有一幢房屋，院子"外面"有一只狗。儿童能注意到狗、篱笆、房屋及院子之间在拓扑关系上的区别吗？让他照这个样子画一张图，儿童是否能将房屋画在院子中，而将狗画在院子外呢？儿童是否能将篱笆把狗与院子隔开呢？

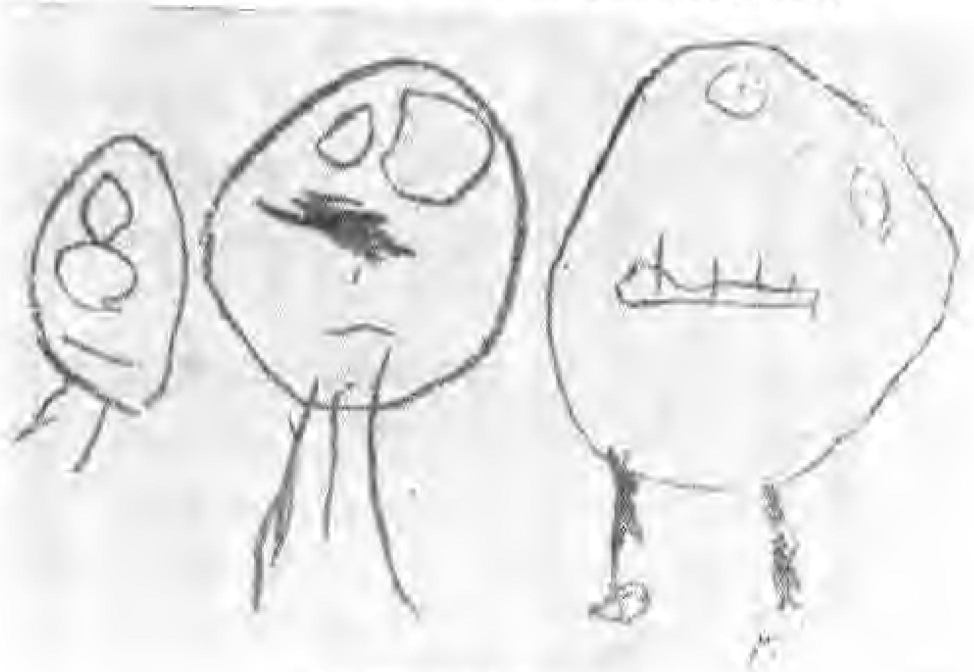
为了确定儿童对相邻或接近关系的理解，可考虑下面的插图。图中，房屋实际上是靠近学校还是靠近教堂？树是邻近房屋还是邻近粮仓？当考虑分离关系时，可提出这样的问题，粮仓同饲料筒是分离开来的吗？

当考虑包围关系时，可向儿童提问：牛是在牛棚里面还是外面？房屋是在院子里面吗？汽车是否在马路中间？船是否在河流中？可以让儿童随便画一个什么人，并对他画的图提些问题：如两只眼睛的位置是否正确？两只手的位置对吗？两只脚的位置对吗？

当儿童画一幢房屋时，相邻关系是否正确？烟囱、窗户和门是否大体接近应有的位置？所有这些活动都是拓扑性质的，都是很好的数学活动。

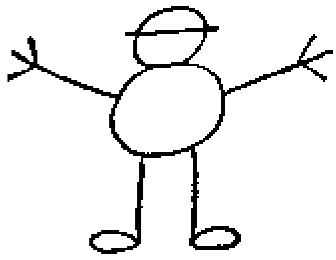
美术与数学

数学同儿童艺术活动的密切关系是显而易见的，教师在观看儿童的艺术作品时能够从中确定这些儿童的拓扑能力。



一位四岁儿童画的人体。

让儿童画人的形象，这是用以观察儿童是怎样表现或画出人形的一个很好的活动实例。两臂和两腿怎样画法？臂与腿怎样跟身体接起来？最初，两臂与两腿好象棍棒似地撑着一个头。再大一些，两腿就连着身体而不再是连着头了。这样腿同身体以及头的“相邻”关系就正确了，腿、身体、头的“次序”关系也正确了。后来儿童又把手指加到臂上去了，脚也加到腿上去了。



上图中，“次序”关系再一次正确地表现为：脚、腿、身体、头、帽子。这些元素中每一个都是跟其它的元素分开的，腿被脚与身体封闭着。此后，又有了更大的分化，两只手被画在手指与手臂之间，这说明儿童注意到了下面的拓扑次序关系：手指、手、手臂。手是被封闭在手指与手臂之间的。

当儿童开始画人的面孔时，再一次表现出了拓扑特性。年龄很小的儿童所画的图，甚至从拓扑上讲也是不正确的，他把嘴或眼睛画到头的外面去了。面孔应当包围眼睛，可是儿童却没有做到这一点。此后，眼睛可能画在面孔里，可是两只眼睛却画在一上一下的垂直位置上，而没有画成水平的，这一点本章前面已指出过。当我们研究儿童的图画时，要注意：嘴、鼻子、眼睛的次序是否正确，眼睛在鼻子和嘴巴的中间吗？鼻子、嘴和眼睛是否互相分离开来呢？当他画耳朵和帽子时，耳朵和帽子是连在头上的呢，还是跟头分开的？

一般在六岁到七岁的时候，这些拓扑关系就应已经解决了。四岁、五岁、六岁儿童的老师应当仔细观察这些发展，可以向儿童提出这样一些问题，比如：“帽子(或鼻子)应该画在那个地方么？”“你的照片象你所画的吗？”“狗的位置对吗？”“房屋的那扇门的位置画得正确吗？”“你把你的玩具放回到老地方了吗？”

这里提出的问题均未回答。因为艺术教师以及数学教师最感

兴趣的是儿童的创造性。不应把儿童对画图的兴趣局限在他们表象的准确性上。

关于拓扑中的次序关系，我们应该向儿童提供许多运用它的机会。当儿童排队时，他们位置的次序是怎么样的？谁站在吉姆后边？谁排第一，谁排最后？谁站在乔厄跟汤姆的中间？吃饭时，餐具的次序如餐巾、叉、盘、刀、汤匙等是否正确？你能从汤匙开始以相反的次序说出餐具的名称吗？

在玩积木时，儿童能以某种方式将积木排次序吗？给儿童一套彩色积木，他能不能照着给定的彩色积木的次序将它们排列呢？比如说排成一行或一个圆或一个正方形。儿童是否能够重建一种线性的次序如一块红、两块蓝、一块红、两块蓝，如此一直继续下去呢？他们是否也能逆转彩色积木的次序？这类活动在具体水平上为儿童提供了良好的数学经验，并将有益于运算思维的发展。

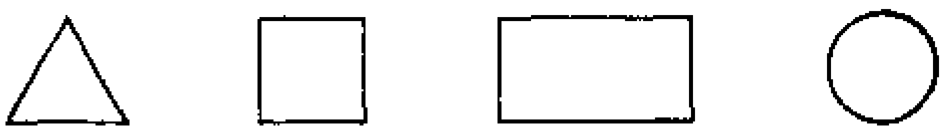
目前小学低年级的数学教学中，几何概念（线、三角形、正方形等）都是作为点的集合来教的，现在必须对这种教法重新予以审查。非常非常短的线对许多儿童来讲也还是一条线段而不是一个点。当谈到在一条线上倒底有多少个点或者多少条线段这样的概念时，必须把邻近、分离、次序与包围等拓扑关系合在一起以形成连续性关系（正是连续性概念才能使儿童对无限或无穷进行考虑），但儿童一直要到十一或十二岁时才能发展出这种能力。

倘若皮亚杰是正确的，那么目前在小学低年级中把线作为点的集合来教就纯粹是一种空谈的言语练习。当新数学运动这样干时，实际上是象旧数学课本一样徒劳。于是儿童开始鹦鹉学舌地背诵射线、线段、三角形等等的定义，因为儿童对这些概念还缺乏必要的准备。从逻辑上讲，可以借助点的集合来研究空间及线段或射线，但是从心理学上讲，在十一或十二岁之前还不能这样做。

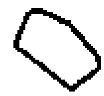
教儿童认识形状

你会教幼儿认识"形状"吗？如果能的话，怎么教呢？假如给一

名三岁半的儿童看如下的基本欧氏几何形状：



并叫他画出来，那么他会全部用同样的方式画成不规则图形，如

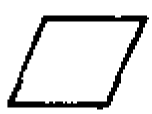


这些儿童认识到上面的图形全是“封闭”的，可是他们不会运用边数、边长或各边之间的夹角来区分这些图形。

甚至在儿童能够接受教学后的一年或二年，教学方法也还应当包括让儿童亲自去摆弄与探索具体的形状，而不是光让儿童看这些形状。正是通过空间中的运动，如儿童接触一个物体时，用手指和手把物体翻转并沿着物体的轮廓移动等动作，儿童才开始明白他周围世界的真实面貌。

儿童的发展过程与他所具有的经验之间的相互作用，使他走向对周围世界的认识。教师则为儿童提供适当的经验，没有这些经验儿童不可能会有认识，可是要注意，经验必须在恰当的时候向儿童提供才能奏效。

从三岁半到七岁，从几何角度来看，儿童正处于发展上的拓扑水平。儿童此时能理解拓扑关系却无法理解欧氏几何关系，比如对边数、边长及各边之间的夹角，他就不能理解。



再过一年左右，儿童方能区分类似的形状，如正方形、长方形与菱形，儿童在七岁之前是不能正确地作出或画出菱形的。

儿童智慧的发展阶段对于教学方法具有重要的意义。例如，一个儿童是如何开始懂得什么是正方形的呢？

师范院校的学生习惯于“定义”某个事物是什么这样一种大学水平的学习方法，以致在当了新教师后也可能还是情不自禁地对儿童说：“正方形就是……”

更加形象地说，目前存在着一种“显示与讲授”的教学方法论。教师向儿童“显示”一张正方形的挂图，并进行讲解，“这就是一个正方形”。这种方法的根据，是假定头脑的工作就象一只照相机在拍照片那样，摄下的形状就成为头脑里的一个“印象”。

皮亚杰发现儿童的头脑并不是拍摄现实。给三岁半的儿童看一个正方形，他可能把它画成介于圆与三角形之间的某种封闭图形。在头脑中构成的东西并非必定象真实的物体那样。

16 从拓扑到欧氏几何

儿童动作性的活动对于他理解空间思想具有无比巨大的重要性。①

图象空间

因为数学是一门建立在逻辑推理基础上的演绎科学，所以有些在数学上训练有素的小学教科书的编写者总是存在这样一种倾向，想要在智慧或演绎的逻辑水平上对儿童讲述数学观念。故而，在几何中常常一开始就讲授距离、长度、角度、直线与线段、三角形及正方形等欧氏观念，仿佛这些是空间中"真正的元素"，而事实上，对于幼儿来说却常常并非如此。

儿童能够观察到一段"距离"或者一条"直线"或者一个"正方形"，然而他还是无法将这些观念转化为心理表象。让儿童画一张图来表示一个他曾经看到过但现在不在眼前的物体，通过这种方法研究儿童构成心理表象的能力。儿童的这些图画证实了儿童所具有的空间观念是拓扑的而不是欧几里得的。

比如，在第259页的图中，眼睛的位置从拓扑上讲是画得正确的，眼睛是在头的"里面"，可是从欧氏几何来考虑就画得不正确了，因为两只眼睛画成垂直的而实际上应该是水平的（左面一个图）。同样，从拓扑上讲，头发画在头上是对的，然而从欧氏几何来考虑，头发画在旁边就错了，实际上应该在头顶上（中间一个图）。

① 皮亚杰和英海尔德：《儿童的空间概念》，第13页。

下图中画着一匹马和一个骑马的人，这是一位四岁半的儿童画的，他是一位艺术家的儿子，他在图中把骑马人的头画得很大，下面四条粗线代表两只臂膀和两条腿。

在图中可观察到拓扑观念或相邻关系，如骑马人是在马的上方，还可观察到分离的观念，如两臂和两腿是画成与脸和身体分离的。但是不能观察到次序观念(这是相邻与分离的综合)。骑马人的臂和腿的位置没有体现出次序观念。画中也没有把身体与头部分开。

图中人的脸封闭或包围着眼睛和嘴巴，拓扑的封闭观念正确地表现出来了。假如儿童没有拓扑的封闭观念，那就可能把一只眼睛画到脸的外面去。儿童对欧氏几何与透视关系是缺乏理解的，马的四只脚的长短与位置反映了这一点。不过从画上可以看出马是在跑的，而这也许正是这位年幼的艺术家所要表达的全部内容吧！

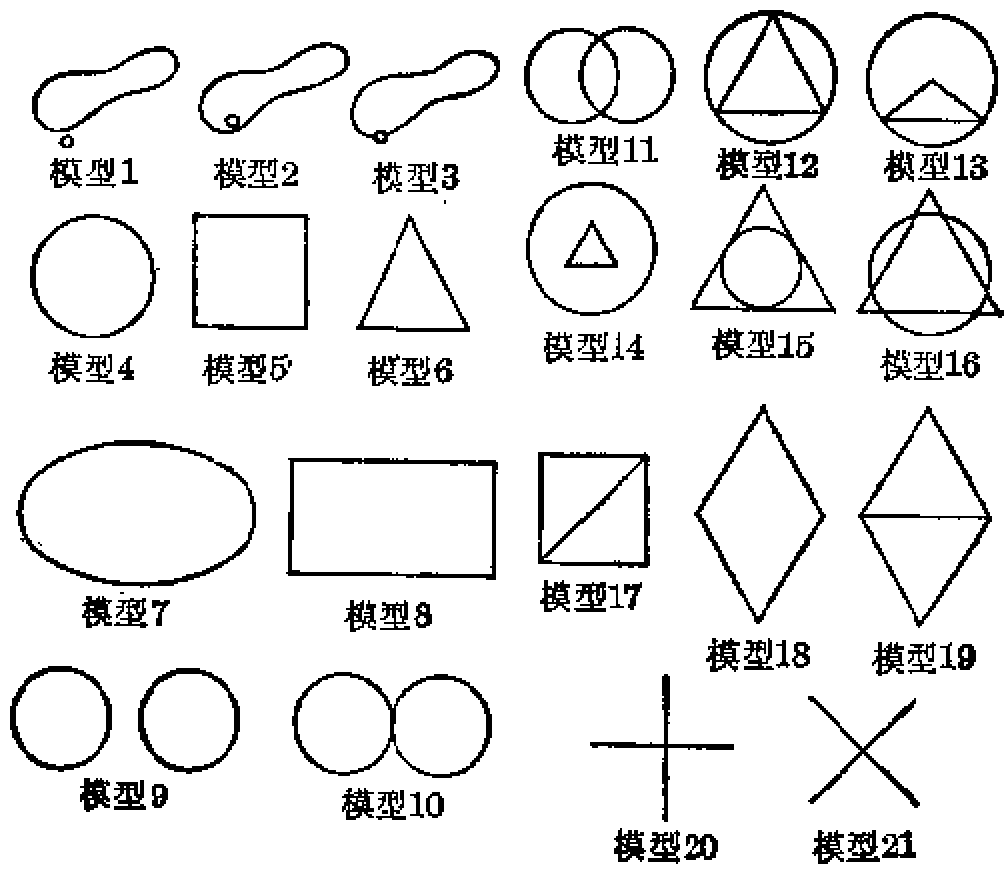
在这个阶段中，欧氏观念以及投影或透视的观念刚开始出现，

然而它们都被拓扑关系掩盖住了。例如相邻关系是正确的，如两条臂和两条腿的位置大体上靠近它们应有的位置，在画两臂时已能分离出手指、手和手臂，而不再画得象一根棒那样了。

在这个阶段，直线、角、圆、正方形和其它简单图形的欧氏观念已经出现。但一直要到八、九岁时，儿童才会画出体现透视、比例与距离的图画。这最后的透视与投影几何的阶段，将在第20章进行分析。

画基本的欧氏图形

皮亚杰为了研究儿童表征基本欧氏图形的能力，要求儿童画出下面21种图形：



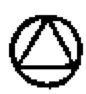
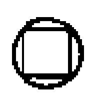
引自皮亚杰的《儿童的空间概念》第54页。

在阶段1之前，从儿童乱七八糟的涂画中观察不到任何目的或目标，儿童在三岁以前通常是这样。在阶段1(通常在三周岁

时)可观察到两个水平：在较低水平，儿童的涂画根据图形是开放的(如×)或封闭的(如○)而有所变化；在较高水平，儿童画的图开始具有一种更加确定的形式。此时，圆、正方形和三角形全部以同样的方式表示成一条不规则的封闭曲线。因为这些图形在拓扑上是等价的，所以从拓扑上讲儿童如此画也是正确的。然而，边长、角度、大小和边数等欧氏关系完全被儿童忽略了。

阶段2开始于四岁左右，并延续到五至六岁，在该阶段的较低水平，儿童对区分各种欧氏图形有了进步，儿童开始能把曲线图形从直线图形中区分出来，但还不能区分各种直线形(三角形、正方形、正五边形等多边形都是直线形)。

阶段2的较高水平的标志，是儿童能依据图形中角的数目进行区分(比纳和推孟报告说，儿童照样画一个正方形的能力，是对四岁心理年龄的一种测定)。此时儿童已开始注意到二维图形，他能将圆从椭圆中区分出来。在该阶段的最高水平，儿童能正确地画出内接图形，比如：

 和 

儿童在六岁至七岁之间掌握了菱形(按照法国比纳的研究，儿童在六岁掌握菱形，而在美国根据推孟的研究则是在七岁)①。

在阶段3(六岁到七岁)，儿童能自己重新画出上述全部图形，包括复合图形。

教育含义

上面的讨论，指出了儿童从三岁到七岁所经历的几何概念发展与心理发展的几个重要阶段。由此可知，对于托儿所、幼儿园及一年级来说，儿童相应的合适的活动是不一样的。在托儿所，儿童的几何活动应当是强调拓扑性质的。在幼儿园及一年级，应强调从

① 同上，第68页。

拓扑到欧氏几何的过渡。我们所描述的发展阶段将会使教师对于每个年龄可以期望儿童进行哪些类型的活动，有一个明确的观念。

知觉与思维

我们的经验可能会告诉我们，我们关于空间的知识和概念，是通过“触”、“视”周围物体的感性经验而发展起来的，并在这些感知觉的基础上将这些物体合成一个有意义的整体。这个假定迄今一直是许多数学家和教师们所采用的教学方法的根据。

皮亚杰发现这个假定或者说结论实际上是错误的，他发现事实上儿童空间观念的演化是在两个不同的水平上进行的——知觉水平(即通过触与视的感性学习)和思维或想象水平。这后一个水平并非如人们所设想的在逻辑上是从前一个水平来的，而是各自沿着本身的途径发展，故而在某些地方必须将两者分别的发展协调起来。例如，给儿童看两根木棒并问他，它们的长度是否相同或者是否有一根长些？他观察到两根木棒的两端正好对齐，根据知觉，他同意它们的长度是相同的。然后将一根棒移动位置，再问他两根棒是否仍然长度相同？

他现在根据知觉回答说一根棒长些，因为该棒的端点离得远些了。此时儿童还没有达到长度守恒的阶段，一个智慧的观念这时跟知觉所告诉他的东西冲突起来了。

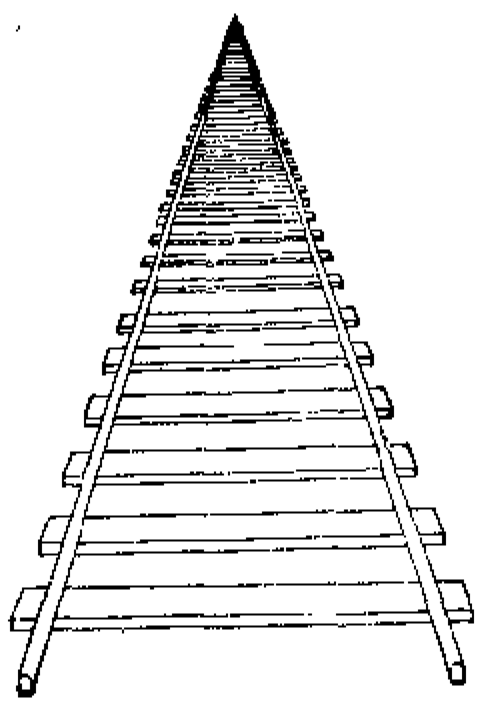
要理解一个儿童究竟是怎样学习有关空间的概念与知识的，已变得更加困难了，因为在儿童的智慧与知觉之间存在着冲突。我们将首先来探讨空间概念是如何通过感官的知觉发展起来的。

在知觉基础上的空间

儿童的空间概念在两个水平上发展着。一个是知觉水平，这种学习水平是建立在通过触觉和视觉印象所获得的感性映象的基础上的。心理学家把这个水平描述为感觉运动水平。

甚至在这个知觉水平上，成年人也可能被诱惑而假定儿童所获得的视觉印象能够转译为跟成人一样的结果，并假定儿童的"知觉场"与成人的"知觉场"具有相同的从最简单到最高度发展的基本结构。如果这个结构从一开始就具有某种几何特性，那么儿童应该能立即再认那些欧氏几何的性质(如大小与形状等)。于是在不考虑距离、不管透视与大小的情况下，可以期望婴儿能对一个物体的形状进行再认。儿童从一开始就将有空间关系的知觉。如果这个假定是正确的，那么就能在欧氏几何的空间图形规律的基础上对儿童开始进行教学了(正如目前学校中所做的那样)。

然而皮亚杰发现这些假定是不正确的，他发现幼儿所感知的"形状"不是恒定或固定不变的，事实上，就大小不变而言，在八岁儿童与成人之间仍然还存在着很大的差异。例如一名七个月或八个月的婴儿还没有客体稳定性的观念，就同影片的画面一样，图形一会儿出现，一会儿又消失了。当喂他的奶瓶是瓶底朝着他时，他不会想到把奶瓶掉转过来。



才几个月的婴儿在视觉与抓握之间尚缺乏协调的能力，因而对于他来说，空间还没有形成一个协调的整体——他还不能用触觉去找到

他所看见的东西。因而固体也仿佛是位置不固定的，而且不具有稳定的大小及形状。

正如在透视（投影几何）中的情况一样，形状与大小的问题也可能与观察者有关。对观察者而言，铁路轨道在远处越来越靠拢，倘若从观察者的角度来看，那么这就是画铁轨的方法。

在欧氏几何中，铁轨是被画成平行的样子，就象空间中的实际情况那样。

学习欧氏图形

〔诊断活动7.1〕

如果给儿童一个三角形，并要求描述它，他可能把它摆弄一阵，感觉到它的三条直边和三个角。儿童由于看和接触或者说通过感性印象而发展起来的对三角形的认识叫作知觉。知觉是由于直接和物体接触而产生的对物体的认识。但是一个三角形的图是否能引起儿童对三角形的心理想象呢？他是否就能由此认识到边是直的、边数以及长度等等呢？这些全都是欧氏性质。

儿童运用这些性质以抽象出三角形的观念并对其它的三角形进行再认的能力，牵涉到表象。但表象不是一个照相过程。儿童在什么年龄时才能对一个欧氏图形产生表象或重新构造起该图形的观念，注意到图形的直线性、边数、长度等性质呢？困难是什么？

为了研究儿童在二岁至七岁期间根据感性经验（知觉）抽象几何观念或对几何图形"构成一种心理映象"的能力，皮亚杰运用了一个熟知的实验。让一名儿童走到屏板的背后，允许他把手伸出来接触并摆弄放在屏板前的一个物体。然后要求儿童从许多物体中或者从给他看的图样中指出这个物体。对于年龄较大的儿童则要求他们画出该物体的图形来。对年幼的儿童一开始先给他一些熟悉的物体如一把汤匙或一只皮球等，对年龄稍大的儿童则可给

他用硬纸剪成的各种几何图形。

这种实验方法已作为一种游戏应用于佛罗里达州皮尔斯堡一所小学的实验班级中(见下面的照片)，这个实验班中有名男孩在正规的课堂教学中已有三个月未讲过话。原来班级的老师曾提醒实验班的教师要注意这一情况。尽管同学们都把他当作哑巴，但他对这一游戏情境也忍不住作出了反应。

儿童喜欢的一种游戏情境。若用于智力诊断，则应采用个别谈话技术。

我们可以观察到，儿童认识欧氏几何图形有三个发展阶段。在第一阶段，年龄延伸到六岁四个月，儿童能再认熟悉的物体如一把汤匙，可是却无法再认欧氏几何图形如一个三角形。第二阶段是过渡阶段，从六岁到七岁，儿童能再认某些欧氏图形而对另一些则不能，儿童能将曲线图形如圆和椭圆从直线图形中区分出来，可是对这两类图形中的每一类却不能再进一步作出区分。比如无法从长方形、平行四边形及菱形中区分出正方形来。在第三阶段已达到了复杂形状的综合，这时儿童的探索活动在本质上更加注重方法了。

阶段 1 当我们更加仔细地考察每一个发展阶段时，可以发

现在阶段1存在着两个水平。在较低水平，儿童只能再认平时熟悉的比如汤匙之类的物体，却不能再认基本的几何图形。在较高水平，儿童能再认某些几何图形。最为有趣的是，此时儿童能够再认的图形并非是欧氏图形而是拓扑图形。例如，此时儿童无法区分圆形和正方形，因为两者都具有封闭的形式，而只能将开放图形从封闭图形中区分出来。于是儿童对几何图形进行再认的发展顺序为：(1)儿童熟悉的物体，(2)拓扑图形，(3)欧氏几何图形。

儿童首先只能区分开放图形与封闭图形，然后才能区分两个同是开放或同是封闭的图形。由此可见，儿童的概念还是属于拓扑性质的。

处于阶段1的幼儿在摆弄物体时所进行的探索是被动的，儿童只会单纯用双手抓握物体。如果物体上有一个孔的话，他很可能会把手指伸进去。儿童这时还没有形成直线和角度的观念。

一名三岁儿童再认了一只球、一支铅笔、一把钥匙和一把剪刀，可是他不能再认一把调羹。他也无法从其它图形中区分出用硬纸板剪成的圆、椭圆或半圆来。

另一名三岁儿童

> 以相同的方法再认物体——握住物体，将物体从一只手换到另一只手仔细端详。此时他抓起了一个三角形，但并没有表现出研究它的企图。当问他："你知道这是什么吗？"儿童回答："不知道"。又对儿童说："你再仔细看看"（他用两只手抓住三角形并把它翻来翻去）。再问儿童："你能把它画出来吗？"儿童答："行！"（他胡乱地涂画起来。）给儿童几个模型让他挑选，问："是这个吗？"（指正方形。）儿童答："是的。"又问他："或者是这一个吧？"（指菱形。）儿童答："不是。"再问："你看着这些模型，倒底是哪一个？"儿童答："这一个。"（指正方形。）①

这名儿童无法从正方形或圆中区分出三角形来，他也不能将正方形从圆和椭圆中区分出来。给另一名三岁半的儿童看一个

① 同上，第22页。

圆和一个正方形，结果他把两种图形都画成椭圆的样子，或者从许多模型中挑出椭圆来表示它们。①

阶段1的儿童还不能区分圆与正方形这些欧氏图形。对于这一阶段的许多儿童来说，这些欧氏图形是毫无差异的。当然圆与正方形在拓扑上没有什么不同。

儿童是通过施加于物体上的手的动作抽象出物体的形状的，比如沿着物体的轮廓摸摸，用手围住它（把手指弯曲起来），或者设法分解它（将手指伸进物体的孔内）。儿童对于物体边界的这些知觉涉及数学中的拓扑关系而不是欧氏关系，他们注意的是这些形状是开放的、封闭的，还是分离的。

皮亚杰得出结论说这些基本的拓扑关系长时期来没有受到几何学（及几何教师）的注意。他们只认识到几何是从古埃及测量欧氏图形的实际问题开始的（如测量长方形的土地），并认为今天仍应倾向于用这种方式开始讲授或者学习几何。

阶段2　儿童在阶段1水平上的区分，特点是笼统的（或一般化的），他对于细节毫不注意，至少也是很不留意。但是他已能识别基本的拓扑形状如汽车轮胎，注意到轮胎是环形的中间有个很大的孔。在阶段2，儿童对于细节已给予更多的注意，他开始能再认欧氏图形了，画欧氏图形的能力也显示出有进步的迹象。儿童更加积极地进行探索，他不再满足于简单地抓握物体或感知物体。不过探索仍是杂乱无章的，很少有以系统的方式沿着某个物体的轮廓去进行探索的企图。例如儿童在曲边与直边、圆与正方形之间已发现足够的线索对它们进行区分了。

一名处于阶段2的五岁儿童拉姆能够区分圆和正方形，可是他却无法在各种直线图形之间进行区分（如长方形、正方形、十字形、菱形）。他把直线图形都画成象正方形那样。②

---

① 同上，第26页。

② 同上，第29页。

给另一名五岁儿童一只五角星，让他认清五角星的形状。但他还是不能从画着五角星、六角形、五边形和十字形的图片中找出五角星来。因为这几种图形都有若干个尖角①。

另一名五岁儿童能将菱形与其它图形区分开来，他把这种本领称作是“学来的”。可是开始时他却不肯努力去画它。后来他成功地画出来了②。

一名七岁儿童将硬纸板剪成的图形在手上沿顺时针方向旋转起来，同时他解释道：“我已经知道它的奥妙了。我把它转起来就感觉到了。”他把菱形比喻为象一只鸡蛋，只是两头变尖了③。

阶段 3 皮亚杰把运算定义为能够返回到原来起点的或者说具有“可逆性”的一种动作。儿童约在七岁或八岁时达到了这种可逆性。儿童在研究问题时，是从某一个作为参照的确定的点开始的，后来又以一种系统的方式仍然返回到该点。跟前两个阶段截然不同的是，儿童此时已具有一般的计划，而在前两个阶段中，儿童的每一个活动只是一个孤立分离的动作，还没有连成有意义的整体。处于阶段 3 的儿童用手指仔细地探索着图形，最后返回到同一个参照点，从而协调了整个图形。他能容易地再认那些简单的图形。

例如，一名八岁儿童能正确地画出十字形及半个十字形。为了画六角星，他用手指探索着模型的六只尖角，有条不紊地返回到模型的中心点，以协调对整个六角星的感觉印象④。

欧氏图形的教学

儿童能单纯依靠知觉，也就是让他看着形状并告诉他该形状的名称，来学习形状的观念(比如三角形)吗？还是必须让他从物

① 同上，第 32 页。
② 同上，第 35 页。
③ 同上。
④ 同上，第 36 页。

理上探索这个物体，摆弄它，用手指抚摸它的轮廓，通过这些“动作”来构造三角形的观念呢？

这是一个极其微妙的区别。我们究竟是直接从这些物体学到形状观念的呢，还是通过我们的手指沿着物体的轮廓在空间移动时的动作协调并抽象出形状观念的呢？

皮亚杰提出了一个根本性的问题——儿童是怎样进行几何图形的抽象的(对几何图形的心理映象是怎样发展起来的)？儿童是否光靠知觉(看着一个图形)就足够了呢？许多这方面的实验，都表明了单凭知觉或视觉是不够的，还必须要有儿童对物体施加的物理的动作。在这些实验里，必要的动作或运算就是儿童的手指或双手沿着物体轮廓的运动，而形状正是这样抽象出来的。皮亚杰作出结论如下：

> 我们发现了手指运动所起的作用，这一发现有助于证实我们早先从实验资料的研究中所了解到的结果。我们现在可以进一步认为，无论在三个阶段的哪一阶段，儿童能够再认的特别是能够表象的只是那些他们通过自己的动作实际上能重新构造的形状。因此，形状的抽象是在协调儿童动作的基础上才达到的，这种抽象不是直接从物体得到的，或者说，这种抽象至少不完全是从物体直接得到的(即光是靠看看物体)。①

要注意，假若儿童只是偶然地沿着一个物体的轮廓运动，那还是不够的。这必须是协调的动作，也就是说，儿童在图形中必须有一个参照点，为了检验存在于图形中的各种关系，必须要能返回到该参照点(即具有可逆性运算)。这种可逆性一直要到阶段3才会出现。

皮亚杰总结道：

> 因而在阶段Ⅰ，儿童能够再认并画出来的只有那些封闭的近似于圆的图形以及建立在简单的拓扑关系(如开放或封闭、相邻与分离、包围等等)基础上的那些图形……

① 同上，第43页。

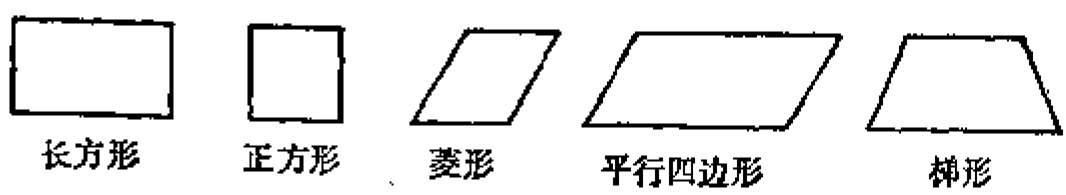
当我们研究阶段II的儿童时，我们发现了儿童再认欧氏图形的端倪。他们是根据直线与曲线、角度的大小、平行、尤其是图形各边相等或不相等的关系来进行再认的。……

最后，在阶段III，几何图形同协调的（物理）动作（摆弄物体以探索它）之间的联系变得非常清晰明显，表现在儿童能返回到一个固定的参照点（当手指沿着物体的轮廓运动时），正是这种具有可逆性的动作，对于儿童的再认与表象达到概念化是绝对必要的……①

本章内容对教育的含义

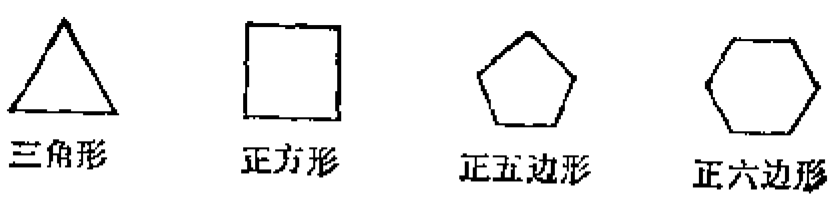
我们已经讨论了儿童学习基本的欧氏图形或对这些图形进行抽象时心理发展的次序。应该根据儿童的发展为他们选择各种适当的几何活动。因为儿童实际上先发展拓扑的认识，故而应当先进行拓扑性质的活动（例如区分开放图形与封闭图形）。然后为了帮助儿童对熟悉的欧氏图形进行抽象，应该让他们从日常熟悉的物体如铅笔、叉或球等开始。在他们能再认这些物体后，再让他们进行有关基本欧氏图形（如三角形、正方形及圆）的活动，可先让他们将曲线图形从直线图形中区分出来。

随后，可让儿童区分关系更加密切的各种图形，比如下列的几个四边形：



四边形——除梯形外其余都是平行四边形。

也可以让儿童学习区分各种多边形：



① 同上，第43页。

教学方法应当是一种允许儿童对各种形状进行物理探索的方法(例如让儿童摆弄硬纸板或木头做成的模型)。皮亚杰评论道:"动作性的活动对于儿童理解空间观念具有无比巨大的重要性。"①教师可以让儿童从许多形状的模型中拿出给他摆弄过但没有让他看到过的模型,来测验他理解几何图形的能力。也可以让儿童画出该物体,以测验他抽象所给形状的能力。表象,比如说画出图来,比再认更为困难。

对于托儿所、幼儿园和一年级的儿童,如果要让他们对各种几何物体构成恰当的心理表象,那么他们应有许多摆弄这些几何物体的经验,应让他们蒙着眼用手指和手摸这些物体的轮廓,并叫他们画出这些物体的图形。光是靠老师拿实物给他们看以及讲给他们听,还是不够的。"看"和"听讲"并不等于进行抽象和理解。儿童必须根据自己对各种物体的物理动作来形成他自己的心理结构。

儿童喜欢对他们在物质世界中看到的那些形状的模型进行讨论,比如硬纸箱,停车标记,铁路叉口的标记,或者桌面等。可以让儿童找找看这些物体有几条边,几个侧面以及几只角。伴随着这些活动可以把各种图形的几何名称教给儿童,比如说盒子的一个侧面就是一个长方形。借助于对各种物体的边、侧面、角等等性质的经验,儿童就逐渐知道了这些几何形状的名称。

---

① 同上,第13页。

17 一维测量

从当前关于儿童度量观念的心理发生研究所揭露的一些事实，不难看出总有一天将在教学中找到它们的实际应用。①

对于儿童在测量长度或进行线性测量方面的观念，一般的教学计划并不予以考虑，在本章中我们将专门研究这方面的问题。

测量是一种涉及客体的活动或操作，它是一种非常具体的活动类型。也许正因为它具体，比如说它包括使用各种类型的尺，所以儿童都喜欢它。儿童倒底是怎样学习测量的呢？这是一项很有趣的研究。虽然测量在知觉活动中存在着它的根源，但是儿童一直要到八到十一岁之间的某个时候才会完全发展起测量概念，同时我们也看到，测量概念的发展是同基本的守恒概念有关的。

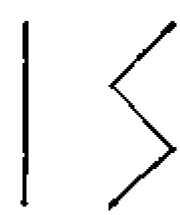
每个儿童对于测量几何的理解，要经过哪几个发展阶段呢？跟人们的预料完全相反，一些必要的测量概念儿童直到将近十一岁时还没有完全发展起来，这时儿童一般在读五年级。由于测量是一种非常具体的活动类型，所以这一时期儿童已经有了相当多的知觉类型的学习。但是要能观察或者知觉特殊的现象，还是不够的。认识直线同能够重新画出一条直线，这是完全不同的两个问题。后者更困难一些(参阅第 20 章)。

① 皮亚杰和英海尔德：《儿童的几何概念》，第 vii 页。

> 研究儿童是怎样开始进行测量的，这个问题之所以特别有趣是因为测量中所包含的运算（或操作）是如此的具体，以致在知觉活动中有它们的根源（如对大小的视觉估计等等），同时，又因为这些运算是如此复杂，以致直到八至十一岁之间的某个时候才能完全构造起来。①

关于守恒性，我们已经进行过非常详尽的讨论。守恒性对于测量概念的发展也是重要的基础。我们发现参加实验的大学生简直无法相信，不满七岁的儿童竟会认为当一根木棒在运动时它的长度是会改变的——也就是说，这些大学生直到亲眼目睹后才相信这一点。

处于较早发展阶段的儿童，他们的一个主要困难，在于无论到什么地方，他们只考虑终点或末端的情况，而中间各点的情况是不管的。因而无论是直线还是折线，只要它们的端点离开儿童的距离相同，儿童就认为它们是同样长的。这可以用下面的实验来证明。给儿童看两条路线，如右图，并问他，如果有一只蚂蚁沿这两条路线走，哪一条路程长。假如这两条路线的终点位置离开儿童的距离相同，那么对他来说，这两条路线就具有相同的长度。这些儿童尚无法借助点和线段的次序系统来看待这两条路线。皮亚杰由此得出结论说，这些儿童不会把位置的改变看成是空间中的一种动作，仿佛是从起点开始它们全部脱离了空间，而在终点又回到空间似的。



对成人来说，只要有一把标有适当单位的测量工具，那么依靠他的经验，测量似乎是相当简单的事。不过有许多问题他们认为是不言自明的。用测量工具去测量某些物体，要有适当次数地改变测量工具的位置。为了进行测量，儿童必须发展长度守恒的观念。任何一种物体（比如一种测量工具）在运动时它的长度是不会

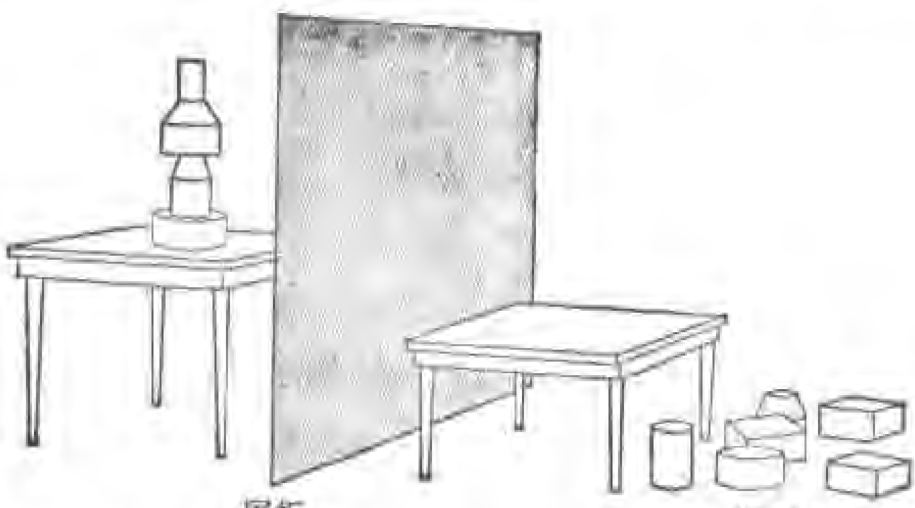
① 同上，第7页。

改变的。

测量的首次尝试

〔诊断活动 9.2〕

那么儿童是怎样去解决那些需要用到测量的问题的呢？皮亚杰用由各种形状的积木搭成的塔来研究这个问题。让儿童搭一个“同我一样的”或者“同我的一样高的”塔。并且要求儿童在另一张低一些的桌子上搭这座塔，以避免视觉的迁移（将两座塔放在一起利用视觉比较高低）。可以用一块屏板把两座塔隔开来，不过允许儿童自由走动，去观看模型。



阶段 1　在阶段 1，测量的方法只是视觉比较。除了视线外，没有任何别的移动。儿童只作出视觉估计，并不企图应用任何测量工具，如木棒之类。即使给他一根木棒，且问他这是否对他有所帮助，也还是不会使用。一名四岁的儿童先瞧了瞧模型塔，然后就专心地去搭自己的塔而不再去看模型了。直到搭好以后，才又走过去看模型。他感到不满意，于是又拆掉重搭，后来又第三次这样做。问他，他的塔是否与模型高度相同，他回答“是的”。给他一根木棒，问他这是否能帮助测量，他只是把棒放在他的塔顶上作为

装饰而已①。

阶段 2　在阶段 2，儿童使用了测量工具，但运用得不正确。处于这个阶段的较年幼的儿童，仍然缺乏空间的协调的观念。为了比较两座塔，儿童需要一个坐标系或者参照系。如果他把棒的两端分别放到两座塔的顶上，那说明他还没有用以解释结果的参照系。他还不能运用欧几里得几何中的平行、垂直、水平和角度等概念。儿童这时把塔一直往上搭，到看上去两座塔的塔顶差不多在同一水平线时为止，他是靠视觉来判断的。他还没有考虑到两座塔的基础不是在同一水平面上这个事实。水平高一些的儿童，他会拿起一根测量棒，把它横在两座塔的顶上，同时思考着两座塔的地基高度是否相同。后来他认识到，它们不在同一水平面上。他想把它的塔搬到另一座塔的桌子上，使得他能更清楚地用视觉进行比较。但实验人员不允许他这样做。最后，他不得不往四周看了看，想找到另外一件东西，以作为测量的标准。他可能先用自己的手。他把一只手放在塔顶，另一只手放在塔底，然后尽量保持两手的相对位置，把两只手移动到另一座塔旁，看看他的手是否碰到了塔顶和塔底。当他发现这并不是一种很好的方法时，他可能用自己的身体。他在身体上与他的塔顶同样高的地方做个记号，同样在和塔底同样高的地方，如膝盖处，也做个记号，然后走到另一座塔的旁边去比较。六岁左右使用的就是这些方法。

最后，儿童开始寻求一种比自己的身体更为方便的测量工具。他可能再另外搭一座和他的塔同样高的塔，而这座塔是允许搬动的。这种方法已包含着数学关系的逻辑了。因为，他造的第二座塔 B，在高度上等于他造的第一座塔 A，如果他把 B 塔搬到模型 O 所在的桌上，塔 B 在高度上等于他要测量的塔 O，那么，这必定意味着 A 和 O 的高度是相等的。这个思想在数学上就是等量关系的

① 同上，第 34 页。

传递性：若 $A=B$ 且 $B=C$，则 $A=C$。

亚诺(五岁)还不能运用传递思想。

他搭完了塔，走过去看模型。——"这两座塔高度相同吗？"——"是的。"——"你能肯定吗？"——"能肯定。因为我已经看过了。"——"你看的时候，没有差错吗？"——"没有……"(他犹豫起来。)——"你会测量吗？"——"不，我不知道怎样去量。"——"那你会干什么呢？"——"我能把塔拆掉，在这儿重搭起来。"(指着模型的旁边。)——"你会用自己的手去量吗？"——"不，我不知道怎样做"。①

洛尔(将近七岁)也处在阶段2，不过在稍高的水平上。他固定自己双手的位置作为测量单位，懂得了等量关系的传递性。他遵循的是这样的逻辑，假如他两手之间的距离(B)等于两座塔的高度，那么，这两座塔必定是高度相同的。

洛尔(六岁)："这两座塔一样高。"——"你怎么知道的？"——"我看出来的。"——"你怎么能肯定呢？"——"我可以把屏板拿掉，这样看得更清楚些。"——"还有别的办法吗？"——(他把一只手放在塔顶，另一只手放在塔底，然后走过去，但是他发现他的两只手已动过了，于是又重新开始。)——"你不认为这样做是错的吗？"——"不！"——"这根短棒有用吗？"——(他把短棒靠近他的塔，试图将它水平移动并保持垂直状态，但却忽视了塔基水平面的不同。)②

皮亚杰作出如下总结：

关于儿童逐渐发现一种中介(测量工具)用途的方式的分析，往往被儿童已获得的经验搞得复杂起来。阶段2的许多儿童，已经学会了怎样进行测量，其它的儿童也看见过成人的测量。在这种情况以及其它类似的情况下，很容易将外界因素和内部因素区分开来，因为儿童把呈现给他的事物同化于自己的表象格式中，他所能记住的仅是他理解的东西(那种鹦鹉学舌般的言语再现不算在内)。只是在阶段2B的末期，当他感到用张开手指或手臂的办法来比划大

① 同上，第42页。

② 同上，第46页。

小有困难时，他才发现需要一种与自己身体无关的普通的测量。①

于是，在儿童利用第三座塔作为测量标准以后，他发现用一根棒更加方便。他最初选用了一根与要测的塔一样高的棒。后来他又选用了一根比塔更高的棒，他在棒上作了塔高的记号。最后在阶段3，他开始选用一根比塔低的棒，用这根短棒沿着塔身移动几次，进行真正的测量。

阶段3 在阶段3，测量是一种智慧或运算的测量。儿童这时能够用任意长的物体作为普通的测量工具。这个物体不一定与被测物体长度相同，也不一定与被测物体看上去相似。

这最后的发展阶段包含两种新的逻辑运算。第一种运算是把被测物体分成和测量工具长度相同的若干份，认识到整体是其各部分的和，第二种运算是*位移或称置换*，它使儿童能够用一个部分（测量工具）适当次数地置换另一个部分（被测量的物体），因而知道有多少个单位。

> 琪里（八岁三个月）说："我要测量这个塔。"——"怎样测量呢？"——（他用一根长棒去测量它的高度和宽度。）——"用这根小尺行吗？"——"那容易。"（他用这根小尺在桌子的四边量了又量，接着又用小尺测量他自己的塔，从塔底到塔顶用小尺量了十三下，当他测量模型时，用同样的方法也量得高度是十三个单位。）②

皮亚杰得出结论：**测量是分解成部分的运算同一部分置换另一部分的运算的综合。**测量能力的发展比数概念要晚些（数概念是类包含与序列化的综合），因为把连续的整体（如被测的物体）分解成可以置换的小单位，比数一组彼此离散的物体（如豆子或积木），要困难得多③。

因此，测量首先是一种*位置的改变*，不管这种改变是眼的运

① 同上，第51页。

② 同上，第62～63页。

③ 皮亚杰："儿童怎样学习数学概念"，《科学美国人》，1953年第11期第78页。

动，还是测量工具的移动。这种位置的改变还必须同空间中的坐标参照系(如水平轴和垂直轴)联系起来。

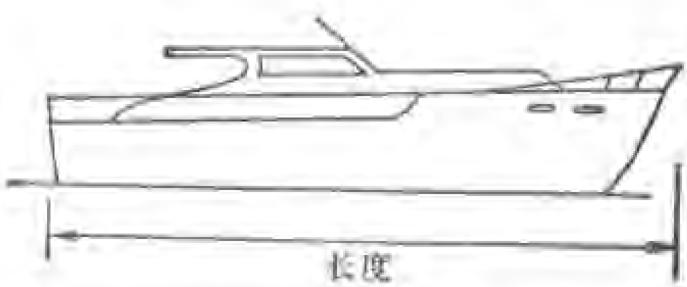
距离和长度的守恒性或不变性也是理解测量的基础和先决条件。如果儿童认为尺在运动时它的长度会发生变化，那么他怎么能用这把尺去进行测量呢？

距离与长度的守恒

两个物体之间的距离关系

按照皮亚杰的理论，距离和长度这两个概念在心理学上是不一样的，因此必须分别加以讨论。距离是用来说明两个物体之间的线性分离，或者是两个物体之间的空间的，而长度是物体本身的一个性质。

作为线性分离的“距离”。



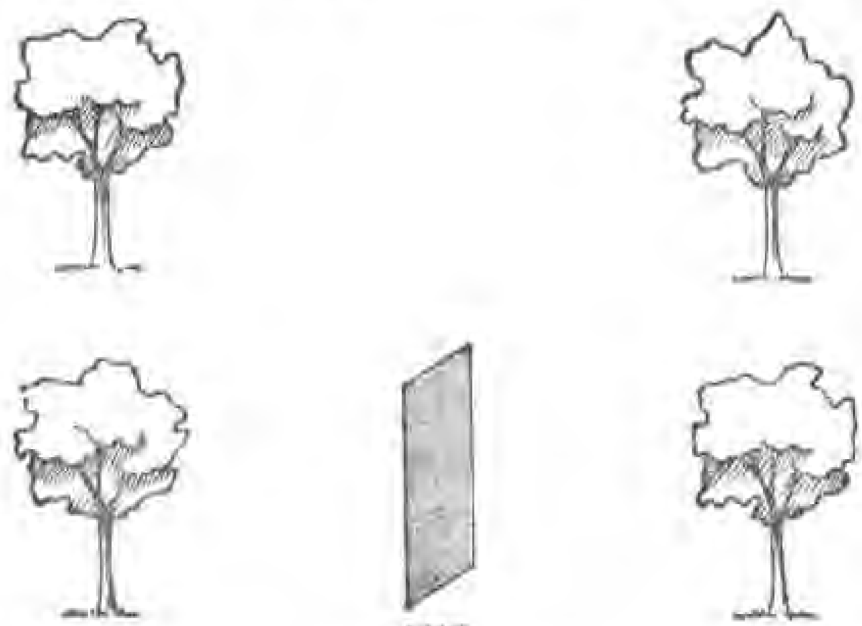
作为物体本身性质的“长度”。

儿童对距离的理解能使他从拓扑空间观念过渡到欧几里得几何观念。距离作为两个物体之间的关系包含着测量和欧几里得空

间的坐标参照系。

距离概念是借知觉来理解的吗？同样地，距离能被儿童表象出来吗？例如，考虑 A、C 两点的距离，如果在 A、C 之间放入其它的点，那么它们的距离还守恒吗？

为了研究这些问题，皮亚杰使用了两棵相距50厘米的模型树，要求儿童讲出这两棵树离得远还是近，这样做时避免使用"距离"这个词。在两棵树之间放一块硬纸板，再问儿童同样的问题。

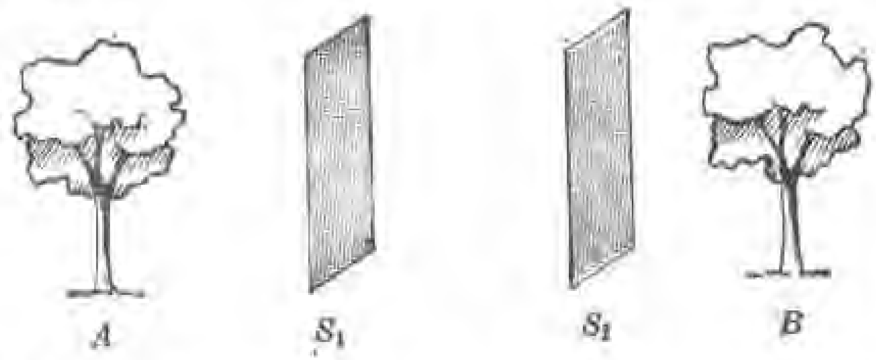


屏板

对于不满四、五岁的儿童来说，放进了硬纸板，就意味着两棵树联系的中断。他不能把隔成的两个区间看作一个整体，他只能考虑整体中的一个部分，因而他回答道："距离小了"(阶段1)。在阶段2，儿童能够看出两棵树之间的整个距离，但是他认为纸板占据了一些空间，所以距离也肯定减小了。阶段3的儿童才理解，在这种情况下距离是不会改变的。

当间隔不再涉及物体间的距离而是涉及空间物体的地点或位置时，儿童就达到了阶段3或运算水平。这些位置或地点是欧氏几何固定空间的一部分。在儿童的头脑中，这些位置和地点是用这个空间"范围"中的坐标轴或参照系组织起来的。

皮亚杰的结论是：

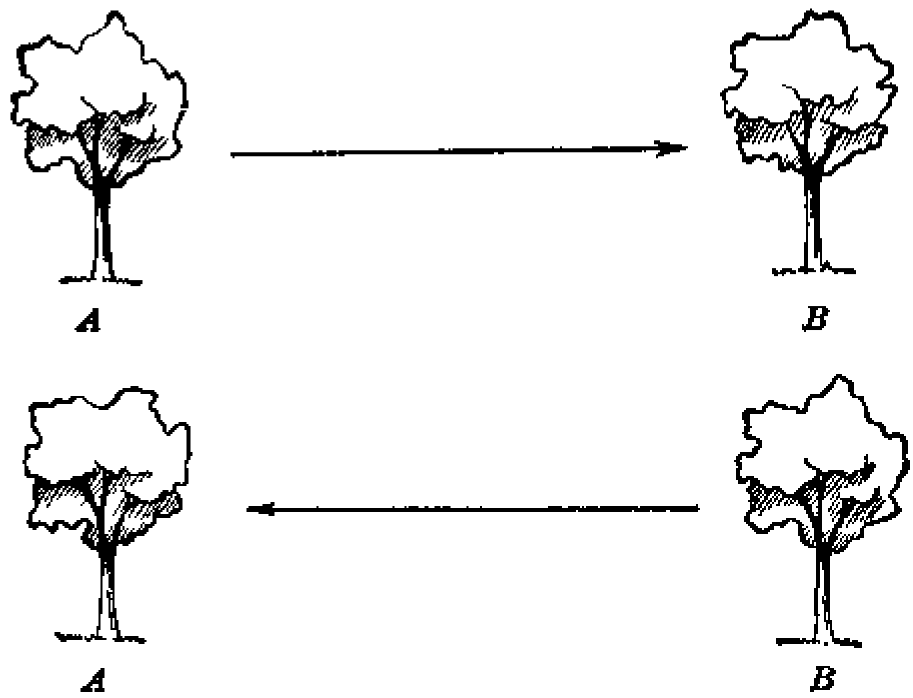
> 显然，距离概念的发展是同任何测量行为无关的。距离概念发展完善了，才能进行距离测量。在儿童未获得下列三点认识之前，是不可能进行距离测量的：
>
> 1）距离 AB 是不会改变的，即使在它之间放进了附加物体 S_1、S_2 等。
>
> 
>
>
> 2）AB 的次序可以逆转为 BA，但这并不改变它们之间的距离。
>
> 3）如果在物体 A 和 B 之间插入 S，那么 $AS<AB$。只有理解了这三点之间的关系，才能进行欧氏几何测量。因为这些仅涉及部分与整体之间的同一性和相互关系，而测量处理的就是一个部分与另一个部分之间的关系，例如 AS 和 SB 之间的关系。①

上述第二点中包含一个基本的和重要的数学思想，即对称性。当我们考虑从 A 点到 B 点的距离时，那么从 B 点到 A 点的距离是否一样呢？就距离而言 A 同 B 的关系与 B 同 A 的关系是相同的，因而距离关系是一种对称关系。但是，许多儿童认为，如果一个物体放在比较高的位置，例如放在一张桌子上，那么物体到他的距离就不一样了。他们会这样想："往上"比"往下"更远。

位置的变化与长度的守恒

对成人来说，当一把尺沿着被测的物体移动时，尺的长度当然是不会改变的。但是，当一个物体移动时，儿童认为这个物体的长度是守恒的呢，还是变化的？还有，当尺移动到新的位置时，儿童认

① 皮亚杰和英海尔德：《儿童的几何概念》，第85页。



BA与AB的距离相同。

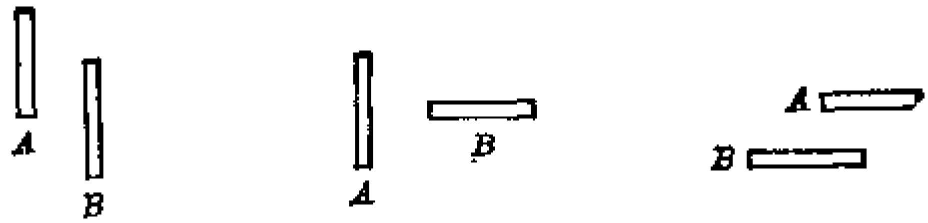
为尺原来所占的空间仍保持不变吗？假如儿童还没有长度和距离概念的守恒性，那么他们怎么能够进行测量呢？

〔诊断活动9.3〕

皮亚杰为了研究上述这些问题，使用了两根5厘米长的棒。先问儿童这两根棒是否一样长，得到肯定答案后，再将其中一根向前移动(离开另一根棒)，然后问儿童，两根棒是否还是一样长。

阶段1水平上的儿童，认为移动的木棒长一些，因为他们只注意木棒的一个终点或端点离得远些了。他们没有考虑到，木棒移动时，另一个端点也在移动，长度实际上是不变的。

"哪一根长些？"或"它们一样长吗？"——"一样长。" "现在哪一根长？"或"它们还一样长吗？"——"B长些。"



“现在呢?”——“A 长。” “现在呢?”——“A 长。” “现在呢?”——“B 长。”

这一水平上的儿童不能同时考虑木棒的两个端点和木棒的长度。当木棒移动时,有些儿童仅仅注视它的一个端点;有的则只是简单地把“运动的”木棒与“较长的”木棒等同起来,如果一根木棒在运动,它就会变得长些。这些儿童认为,当物体向前运动或向后倒退时,它们就会变长或缩短。因此,儿童这时还不具有测量的准备性。他们还没有认识到一个物体的欧氏几何长度是守恒的。物体移动时,其长度是不变的。在数学上,这些儿童仍然处在比较原始的拓扑水平上。拓扑学认为一个物体是可以拉长的,不象在欧氏几何中物体是刚性的。

观察六至七岁儿童的母亲,那是很有趣的。这些母亲简直无法相信他们的孩子会作出这样的回答,这些问题的答案对她们来说是那样的显而易见。她们认为,她们能够教会儿童还没有的观念。由于儿童还没有达到空间中长度守恒这样的发展阶段,所以他们的回答常常是不稳定的,有时正确,有时错误,有的说 A 长,有的则说 B 长。

因此,对处于这一水平的儿童来说,一个物体(如一把尺)位置的改变,会引起长度的不守恒,就是说,他们还不具有进行测量的准备性。要进行测量,儿童必须在头脑中建立起空间的独立参照系,在这个空间中,物体能够从一个位置运动到另一个新的位置,但在空间的每一位置上,物体的长度都不变。必须意识到空间中的参照系是由移动的尺或物体所占有过的不动的位置构成的。这些儿童还不能认识到空间中稳定的位置同运动的物体是不同的。他们只意识到占据空间或位置的物体,这一点当然是不会改变的。事

实上，在考察运动物体时，儿童往往不是参考两个端点的关系，而只是参考物体的一个端点，并且通常是离得较远的那个端点。

在阶段 2，通过试误，儿童开始认识到木棒的长度是一样的。儿童把一根木棒移回到原处，放到另一根木棒旁边，看到这两根木棒仍是一样长。这时他就说："这根棒看上去好象长一些，但实际上它们是一样长。"不过儿童这时表现得还不十分自信。把木棒移动到其它的位置，他们很容易又糊涂起来。

在阶段 3，儿童已具有长度守恒的观念，即认为木棒所占有的空间位置是长度相同的。移动一个物体，并不改变它所占据的空间大小。物体在欧氏空间两个位置之间运动时，其长度守恒已成为一种逻辑的必然。

> 卡尔（七岁七个月）："这两根木棒还是一样长，它们不会变长的。"——（实验者把木棒摆成各种位置。）——"这两根棒总是一样长的，它们永远保持一样长。"——实验者继续把木棒摆成各种位置，最后，卡尔就象莱布尼茨发现了万能上帝的全知和充足理由律一样，说："因为上帝不想使木棒变短，假如上帝要它短，它就会变短，但是上帝不想这样做！"①

这个孩子已经掌握了守恒性观念，他知道物体可以并排地放在一起，或者一端接着一端地接成直线，然而不管怎样摆法，其长度都不会改变。皮亚杰总结说："逻辑关系的发现是几何概念的先决条件，正如逻辑关系也是数概念形成的先决条件一样。"②

因此，位置变化、守恒性、外部参照系等观念都是测量的必要前提。这些观念对于大多数儿童来说，在七到八岁或者在小学二、三年级之前是不会出现的。然而有不少教师还在企图对二年级前的学生进行测量的教学。

---

① 同上，第 101～102 页。

② 皮亚杰："儿童怎样学习数学概念"，第 78 页。

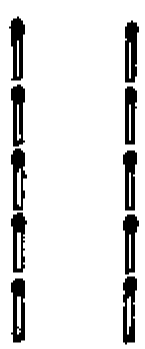
再分和守恒

上节中已经讲过，测量是位置变化的运算和再分运算的综合。位置变化是测量工具或尺沿着被测物体移动，再分就是把被测物体再分成与尺的单位长度相同的若干部分。

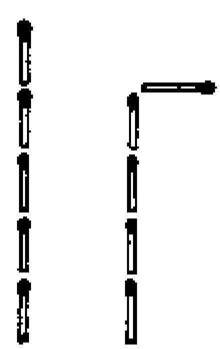
上述研究说明了儿童理解运动物体长度守恒的困难。当一个物体移开时，不满七岁的儿童往往认为它变长了。如果测量工具沿着被测物体移动时其长度会变化，那么很显然，这时候测量是没有任何意义的。

在测量中，还必须考虑把被测物体等分为同尺的单位长度相等的若干部分。那么，儿童对于这些部分的长度能够守恒吗？还是它们的长度会有所变化？

为了研究这些部分长度的守恒性，皮亚杰并排放两列火柴，每根火柴的长度相同，如图 A。然后再把一列火柴中的一根或几根摆得与其它的火柴成一定的角度，使它们不再成一条直线，如图 B。这时问儿童：假如有一只蚂蚁沿着这两列火柴爬行，哪一条路线长些？以此来检查儿童是否认识到两列火柴的长度相同。如果儿童试图去数每列火柴的数目，那么实验者应当把其中一根火柴折成两根，使两列的数目不相同。

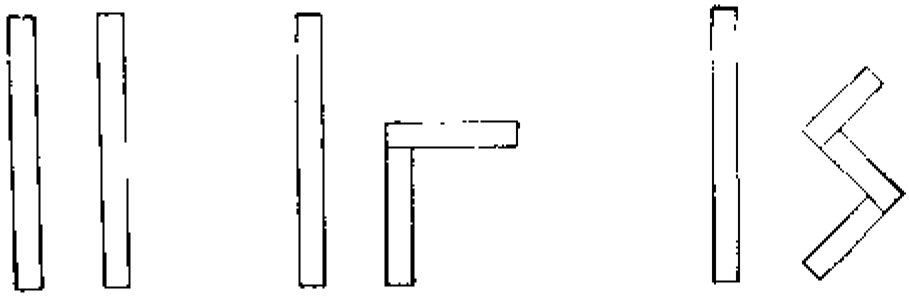


A



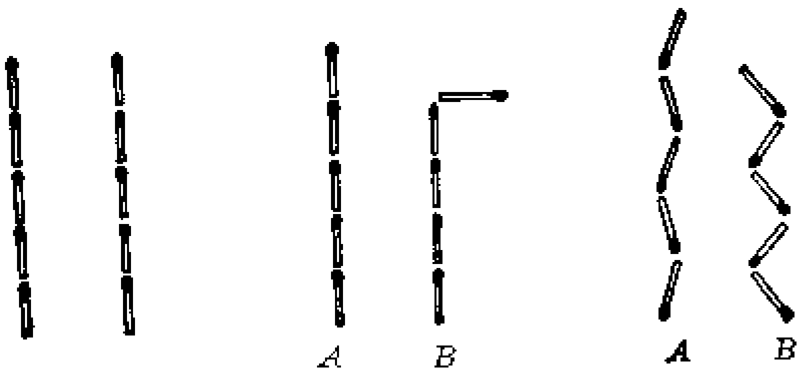
B

另一个与上类似但更为重要的实验是采用两条长度相同的纸带来做的。把一条纸带截成两段（后再截成三段），再按不同的角度连接起来，问儿童这些纸带是否仍保持相同的长度？



在阶段 1，儿童没有长度的守恒性。他们认为直的一条长一些，因为他们只考虑到端点或终点的位置。儿童仍是在拓扑的水平上进行思维的。

一名五到六岁的儿童是这样回答问题的：



“它们的长度一样吗？”——“是的。”　“现在呢？”——“A 长一些。”　“现在呢？”——“那个（指 A）长。”

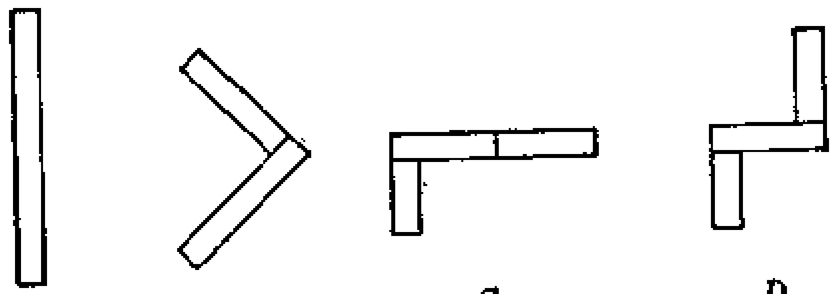
“你指给我看两只蚂蚁要走的路径。”——（他用手指沿着这两条路线移动。）——“这两条路的长度相同吗？”——“不，这一条长些。”（指着 A，然后他在形状比 A 更加凹凸些的 B 上再加一根火柴。）——“现在有几根火柴了（指 B）？你能数一下吗？”——“一，二，……、六。”——“那一条呢？”（指 A）——“一、二、……、五。”——“好了，那么现在这两条路长度是否相同呢？”——“相同的。”——“为什么？”——（他用手指着 A 与 B 的两个端点。）①

端点位置的不同竟使儿童忽视了数概念，以致五根火柴 A 比六根火柴 B 的路线更长。

在阶段 2，儿童回答问题时在守恒与近于守恒之间摇摆。

① 皮亚杰和英海尔德：《儿童的几何概念》，第 107 页。

在阶段3，儿童获得了测量时被分成的各部分长度守恒的概念。他们不再受一列火柴的形状变化的欺骗。他们已认识到现象会蒙蔽他们。给儿童看下列摆成各种角度的纸带：



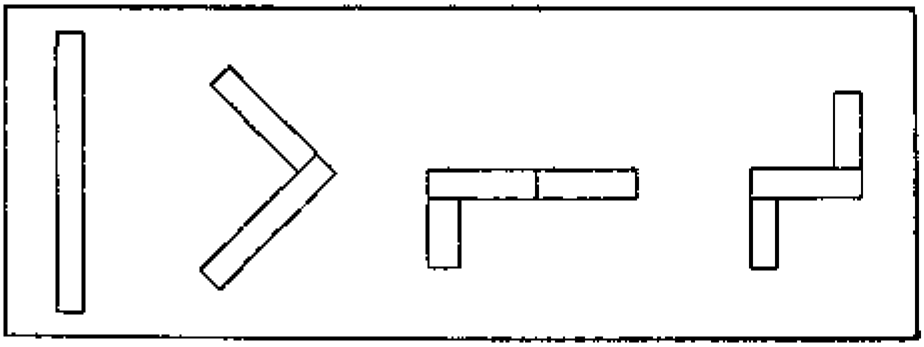
A B C D

儿童回答 A“看上去”长些但实际上“并不长”。为什么呢？“因为它们开始时都是同样长短的纸条，它们保持同样的长度。”皮亚杰总结道：

> 进行测量所必要的守恒性观念在阶段3已经实现了。守恒性观念把等分运算和位置的次序或变化完全协调起来。六至七岁中有1/10，七至七岁半中有1/2，七岁半至八岁半中有3/4的儿童达到了这一阶段。①

测量长度

现在利用放在一块硬纸板上的两条纸带来研究儿童进行实际测量的意图，每条纸带是由一段段纸带按不同的角度连接起来的，

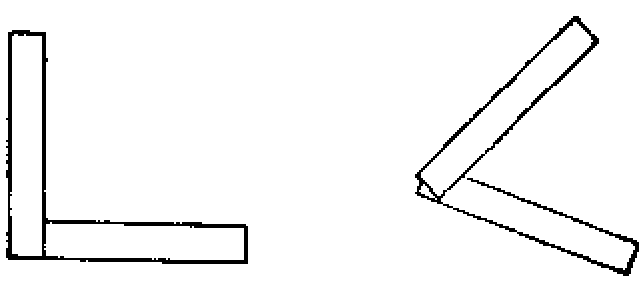


① 同上，第114页。

问儿童纸带的长度是否相同，然后要求儿童利用一段能移动的纸带来证实自己的回答。可以叫儿童把纸带设想为一个小孩要走的"路程"，这对他会有所帮助。当然，这不是一种自发的测量，而是建立在实验者建议基础上的测量。

在阶段1，儿童不会有效地采纳实验者的建议，他们处在非守恒的水平上。主要原因，是他们不能把被测纸带被等分成的部分与当做尺来用的纸带在测量时的位置变化加以区分，这两个概念还没有相互补充地结合起来，而要进行测量，它们必须结合起来。同时，儿童还没有构造起唯一的空间框架(参照系)，这个框架既涉及物体所占有的空间，也涉及物体本身。

例如让道尔(六岁四个月)去比较下面两个用纸带连成的等长的图形，其中一个两段纸带连成直角，另一个连成锐角。先给他演示如何用一条纸带作为测量单位进行测量，然后让他自己进行比较。他用这条作为尺的纸带去测量其中的一个图形，数着移动"尺"的次数，得到"6"这个数。于是，他不再测量另一个图形，就说所测的这个图形长些①。



在阶段2，儿童从非守恒向守恒过渡，但还没有达到完全的守恒。实验中要求他们使用现成的尺，以了解他们能在何种程度上使用这些智慧工具。他们开始理解用第三个长度作为尺来比较两个长度时所必需的数学观念，即假如尺与每一条纸带的长度都相同，那么这两条纸带的长度也一定相同(等量关系的传递性)。

① 同上，第119页。

一名处于阶段 2 的六岁半的儿童，已开始看到测量单位的作用。给他一张 3 厘米长的卡片，叫他比较两条纸带的长度，一开始他毫无目的地将 3 厘米长的"尺"沿着被测纸带滑动。当实验者问他："你能告诉我你所使用的方法吗？"他回答"不能"。再问他："那么你能干什么呢？"他回答"数数看"。然后他进行测量，发现一条纸带是 5 个单位长，而另一条是 6 个单位长。他回答说 6 单位长的纸条长些。他表现出对传递性的理解。

接着再给他看一张画着楼梯形状的图，图中有的线段较长，有的线段较短，和另一张锯齿形的图。他用 6 厘米长的卡尺去测量第二个图形 B，他发现，对图形 A 中的短线段来说，这把 6 厘米长的卡尺显得太长了。他不顾这个困难，作了测量记号，随意地猜测说这两个图形的长度相同。当追问他是否有把握时，他回答说"有把握"，虽然这实际上是错误的①。

在阶段 3，随着等分和位置变化之间的协调，儿童达到了测量的守恒性。

儿童现在已认识到，用作测量工具的单位（尺），在位置变化时，长度是不会改变的。当他用尺去测量物体，将物体等分时，每个分成的部分的长度也是不会变化的。皮亚杰总结道：测量所必需的智慧概念（等分及位置变化）现在已融合成一体，成为运算性的可以运用的概念了。儿童这时已能完全理解地进行系统的测量了。给一名八岁儿童看两个都是锐角形状的图形，他能立即说出其中的 B 长些。再问他能否肯定，于是他用一把尺量了量，指出 B 比 A 长多少。

再给他看两个楼梯轮廓图，每个楼梯都包含 3 厘米及 6 厘米长的线段。这时儿童能正确地使用 3 厘米长的尺和 6 厘米长的尺进行测量②。

---

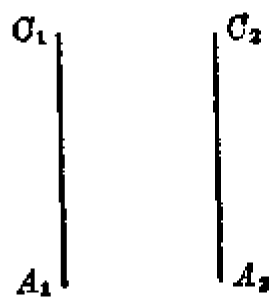
① 同上，第 124 页。

② 同上，第 126 页。

再分线段

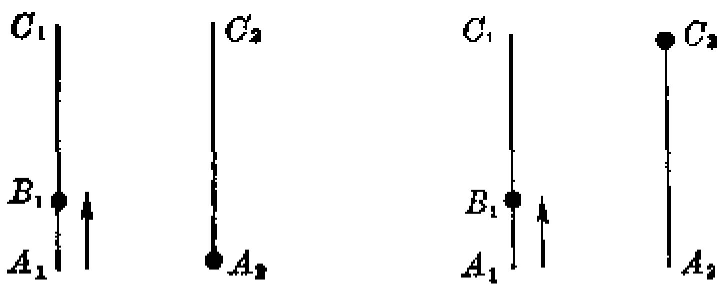
在上一节里，我们在儿童选择测量单位的长度时曾给以帮助。把较短的线段提供为适当的测量单位，以致这种测量单位在一定程度上是任意强加给儿童的。这样做为的是更容易研究长度守恒性的发展。守恒性是测量的最重要的条件。

在这一节里，我们不再向儿童提供一个长度合适的测量单位，这是为了观察儿童如何解决选择测量单位的问题。



皮亚杰运用两条长度相同的线段，它们用线绳来表示，每根长30厘米，两端系在两个钉子上，当中穿一粒纽扣代表一辆汽车。

实验者把 A_1C_1 线段上的汽车作为自己的，A_2C_2 上的汽车作为儿童的。实验者把他的汽车从 A_1 点移动到 B_1 点，并要儿童把他的汽车也运动相同的长度或一样远(见下左图)。

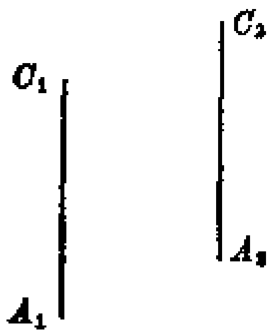


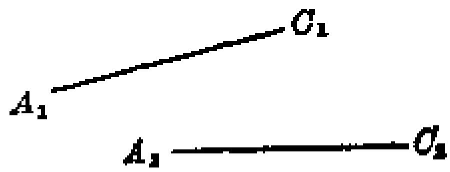
然后改变一下这个实验，以测验儿童思维的可逆性。把儿童的汽车放在 C_2，再让儿童把汽车移动象实验者所移动的一样远的路(见上右图)。

接着进行第二个实验。这个实验中，两根线的长度相同，并仍保持平行，但它们的端点不再对齐。

给儿童一把比汽车运动的距离长些但没有刻度的尺，注意观察他是否能用自己的手指在尺上作个记号表示 A_1B_1 的距离，以在 A_2C_2 上正确地标出他自己的汽车应该到的位置。

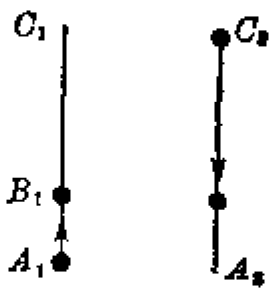
第三个实验是第二个实验的变形，只不过给儿童的尺要比汽车运动的距离短些。在这个实验中，把两根线都放长到 50 厘米。





这些实验还可以再作些改变，如可采用不同长度的线，也可以使用不平行的线，如上右图。

处于第一发展阶段的儿童不能把汽车运动的长度考虑为两点之间的一个间隔或距离，而是只考虑运动的终点或汽车已经到达的位置。这种情况在第一个实验的第二部分中，当实验者把自己的汽车从 A_1 运动到 B_1，并要求儿童把他的汽车从 C_2 起运动相同的距离（当然这段距离的方向是相反的）时，很容易看出来。



儿童简单地使用一种视觉的方法，他将自己线上的汽车放在与 A_1C_1 上的汽车大致相同的位置上。儿童只是把最后的位置看作是一种决定因素。他没有试图运用尺，即使实验者问他尺对他是否有所帮助，他也还是没有用到尺。

处于阶段 2 的儿童使用试误法才能正确地解决某些问题，而其它问题则解决得不正确。例如，有名七岁儿童，他用一把尺解决了第一个实验，因而他把距离看作是一段被测量的间隔；但是当他进入第二个实验，也就是两根线的端点没有对齐时，他就遇到了很大的困难。

在阶段 2，用尺来测量，仍然只是解决问题的次要方法。儿童用尺来检验他的视觉估计，或者用尺来检验他以手指或手所作的

艾伦把他的汽车放在距离 A_2 与实验者的汽车距离 A_1 一样远处。

近似的测量。这时儿童使用的方法仍是直觉性的。他还没有发展起一种一般的智慧程序来解决测量问题，如同阶段 3 的儿童那样。

在阶段 3，儿童对于解决测量问题已发展出一种一般的智慧程序，他不再用试误法了。儿童这时能对问题进行评价，并立即提出解决问题的正确的办法。他已达到思维的运算水平或推理水平。

艾伦成功地把他的汽车从相反方向（从 C_2 开始）移动了与实验者一样的距离。

然而，在阶段3，还存在一个发展的中点。如果尺比被测的距离长，儿童测量时没有困难；但如果尺比较短，儿童就会用其它的物体，如他自己的手，来完成测量工作。在中点后，儿童就能把尺考虑为一个单位，并沿着被测的距离移动尺，同时计算移动的次数，最后在尺上标出可能存在的剩余线段。

本章内容对教育的含义

关于儿童的线性测量，看来某些必要概念的守恒要到七岁半才能达到。形式运算的测量(不是依靠试误而是靠直接的洞察)要到八岁至八岁半才能获得。

本章的研究表明，如果系统的测量是能够"教"的话，那么也要到小学三年级后期才能进行。即使到了三年级，对大多数儿童来说，也只能是带有试验性或试误性质的经验。测量所必需的概念同其它概念一样，是从运算性的理解之中而不是从这种理解之外发展起来的。不能单纯地告诉儿童怎样进行测量，而应当向他们提供一些类似于前面介绍过的材料，让他们进行试验，自己解决测量的问题。教师应当提出问题，引导儿童达到所要求的目标——就本例而言，即是"测量"。当(1)儿童的年龄足够大，根据皮亚杰的说法，要到八至八岁半，(2)儿童被允许对要测量的对象进行操作(试验与摆弄)时，测量所必需的一些概念就会发展起来。这两个条件，对于测量所必需的运算思维都是不可缺少的。

首先，在进行系统的测量之前，儿童关于一个物体的长度的观念必须达到守恒。前面我们已经介绍了一些确定儿童发展水平的简单的实验。运用把另一个物体与这个物体进行比较的方法，来测量这个物体的长度，这标志着测量的开始。在物体的"长度"被作为一个观念守恒以前，测量是无意义的。其次，儿童必须理解再分的概念，因为被测物体必须再分为若干部分，其长度要与测量工

具或尺的长度相等。儿童沿着被测物体移动测量单位，将物体再分或在物体上标出再分的记号。对于有意义的测量来说，这些部分的长度也必须是守恒的。第三，儿童必须认识到两个物体之间的距离总是守恒的，不管在它们之间是否放着其它物体。

测量的能力与理解数的能力，二者在发展上的关系是一个十分有趣的问题。读作"壹"并写成"1"的算术单位是理解数的最原始的起点。连续计数时的每一个数，都比前一个数大1。与此相反，测量单位的概念包含任意地再分一个连续的整体(被测的物体)。这类运算思维或测量能力的成就比开始理解数的概念要晚。儿童试图测量时间和学习分数时(参阅第11和12章)也遇到类似的困难。

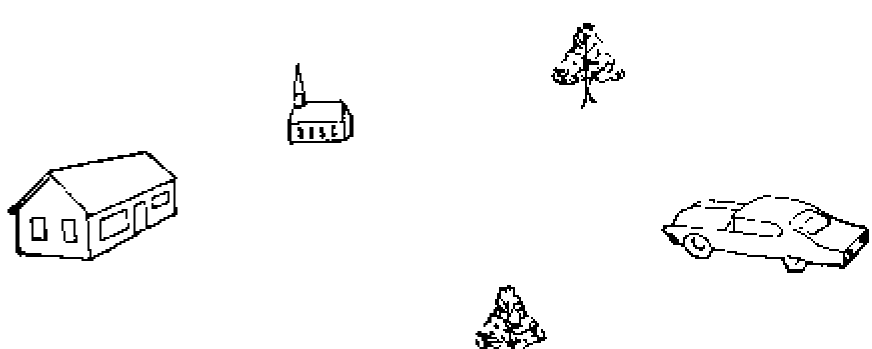
18 利用垂直轴和水平轴构造空间

恰恰正是抽象运算的发展(在十一至十三岁时)，才能使儿童理解他在学校里学习的地图和坐标轴……这是个人得出的概念与形式地学习所得的概念的结合。①

拓扑学是数学中的一个分支，它研究一个物体的本身以及存在于物体的各元素或各部分之间的关系(参阅第16章)。射影几何涉及透视或者从不同的位置或观点来看的一个物体的外形，比如正视或侧视(参阅第20章)。

欧几里得几何研究空间中不同物体之间的关系或它们的坐标。比如：这些物体的长度、高度或距离相同吗？是某一个物体大些或小些呢，还是它们的大小是相同的？它们是互相垂直的还是互相平行的？

物体之间的一种欧氏关系就是它们的相对位置。成年人为了研究一组物体，研究空间中每个物体与其它物体的相对位置，使用了一条垂直轴和一条水平轴作为参照系。物体就是相对于这些轴



① 皮亚杰与英海尔德：《儿童的空间概念》，第445页。

来确定位置的，比如"在轴的上面"和"在轴的右面"。如果用水平轴和垂直轴作为一个参照系，则确定物体之间的相对位置包括了角度测量和距离测量，或者两个距离的测量。

此类问题并不是容易解决的，这一点成年人也有所体会。例如当他在一个停车场中找他的小汽车或者在一个陌生的城市里想要弄清楚行车路线时，就会感到这一点。一个方位感很好的人，当他驾驶的汽车改变方向时，头脑中仍然保持着南北轴和东西轴。

儿童的参照系

水平与垂直

〔诊断活动7.2和7.3〕

儿童在什么年龄才能够发展起水平轴和垂直轴这种假想的和抽象的概念，以作为确定物体在空间中相对位置的参照系呢？比如画一张地图或布局图，就必须要有对参照系的真正理解，只有在参照系中才能恰当地确定物体彼此的相对位置。

完成这类任务的一个基础就是"水平"的概念。为了研究儿童的这一概念，皮亚杰使用了一个潍着一些有色液体的瓶子。他让年幼的儿童在一个空瓶上指出当含有液体的瓶子倾斜时液面的位置将是怎样的。

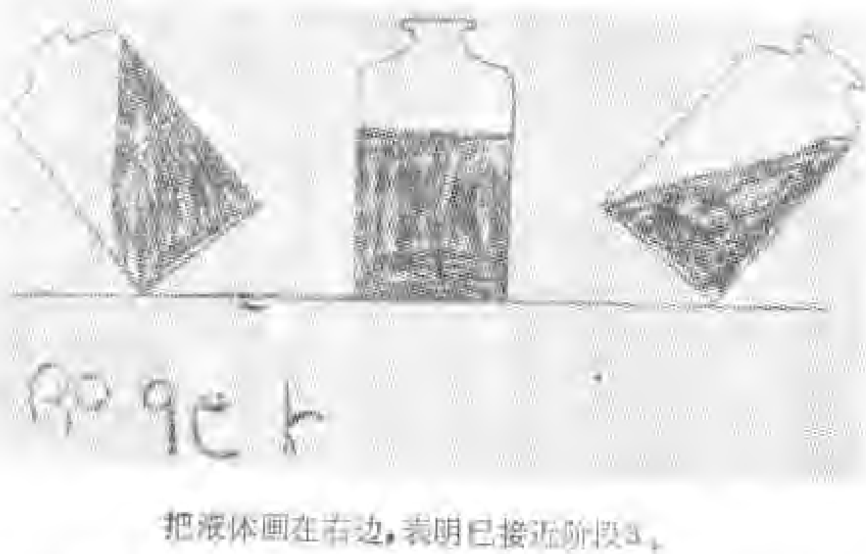
对于年龄稍大的儿童，就给他画有几个空瓶的图片，叫他在图片上画出装有液体的瓶子倾斜时的液体表面。

在四岁或五岁时，儿童对于水平面还不理解。这些儿童把瓶子倾斜时的水的表面，往往画成波浪形。

在水平概念发展的第二阶段，代表水面的线被画成平行于瓶底，或者象七岁的龙纳那样，把水面设想为一半平行于瓶底一半平行于瓶壁。

龙纳，七岁，阶段2，运用瓶底和瓶壁作为参照系。

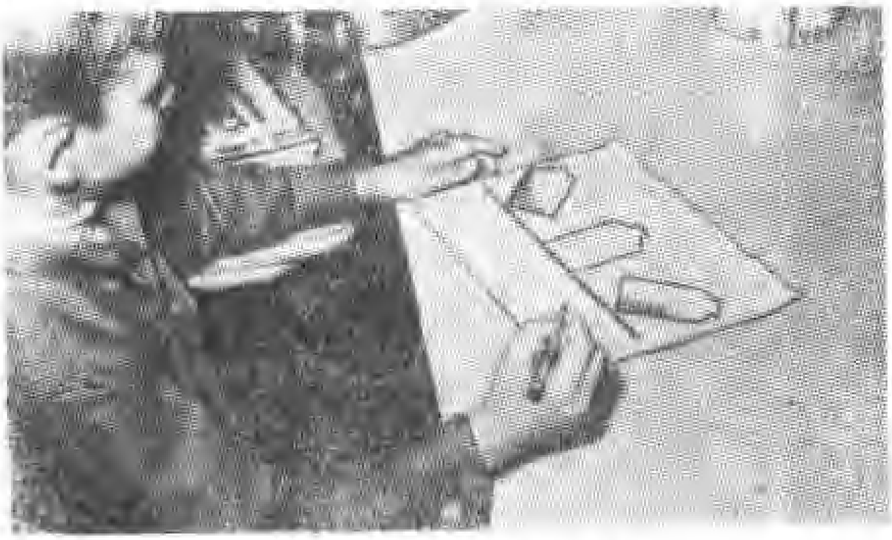
这些儿童使用瓶底或瓶壁作为一个参照系，他们逐步接近了水平线是直线的观念。然而，他们仍然没有固定的水平轴或垂直轴的观念。



把液体画在右边，表明已接近阶段3。

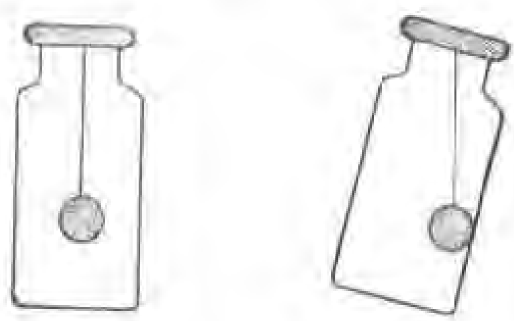
因此，以瓶底为参照物的参照系，在阶段2已建立起来了，尽管这时尚是一个流动变化的水面而不是稳定静止的抽象的水平

面。按照皮亚杰的观点，儿童的这些发现对于构造空间中的参照系还是不充分的，不过这些发现已为此作了准备。儿童仍然无法正确地确定物体彼此的相对位置，因为他还缺乏空间中线与面的观念。只有运用空间中的线与面，儿童才能将他所看到的东西（比如在瓶子中运动的液体）表示出来。



接近于阶段3的聪明的儿童。

为了研究"垂直"的观念，在瓶子中悬挂了一条铅垂线，线的下端系着一块重物，叫儿童画出瓶子倾斜时线的位置。



在阶段2，儿童设想挂在瓶中的垂线是随着瓶子一起倾斜而不再保持垂直的。儿童认为瓶壁与垂线的平行关系是维持不变的。甚至当着这些儿童的面进行实验后，再要求他们画出瓶子倾斜时垂线的样子，他们也还是不能画对。这时他们还没有自行确立抽象的垂直观念。

为了研究垂直观念，还可以观察儿童的图画。五岁、六岁及七岁的儿童在画一座山上的树木时，都将树画成垂直于山坡，同样把烟囱都画成垂直于屋面。

皮亚杰得出结论说，处于该水平的儿童还不能发展出一种抽象的参照系(比如一条水平轴和一条垂直轴)，以用来正确地确定物体彼此的相对位置。他们还没有空间中静止的线与面的观念，并以此来把他们所见到的各种物体坐标化。

在阶段3，儿童建立了空间中作为固定参照系的水平轴和垂直轴的观念。然而，只有经过多次重复实验之后才能实现这一点。水平轴与垂直轴的抽象观念一直要到大约九岁才能完全组织起来，并具有运算的性质，对于有些儿童这甚至要晚到十一至十二岁。

对于大多数儿童说来，这类运算思维或抽象思维大约在九岁开始，但是在比较聪明的儿童中，这也有可能在六岁半到七岁时出现。

在最聪明的儿童中，象柯厄和迪丝，我们发现他们已接近于抽象思维了，他们的坐标系统已是通常惯用的假设演绎的类型了。迪

丝这样规定："我认为纸的底边就是水平线，我画水面是相对于这条底边画的。"随后她根据平行与垂直的一套办法去处理全部问题，而不管她所画的那张纸是正放的还是斜放的。①

一般的参照系

〔诊断活动7.4〕

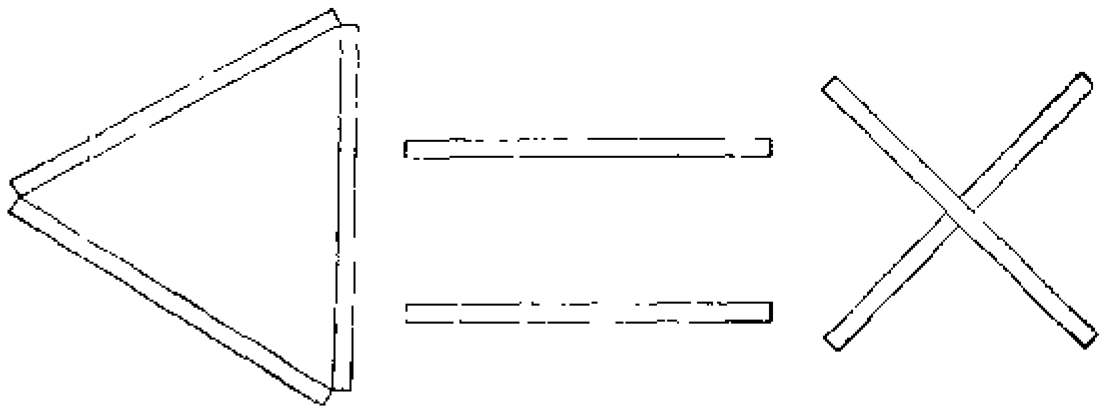
物质世界提供了一个天然的水平与垂直形式的参照系。地板和地面代表着水平面，许多垂直的物体比如墙壁、树木、轮船的桅杆、旗杆等都代表着垂直。当需要的时候，儿童是否会运用这样一些垂直和水平的系统呢？结果发现，刚入小学的儿童很少能这样做。

照模型画一个放大的布局图。

为了研究儿童正确地定出几个物体的相对位置的能力，皮亚杰把一组积木排列成任意的形状，让儿童用另一组同样的积木摆成与此相同的样子。当儿童作了第一次尝试之后，再给他一些纸条或小木棒，以便作为一组轴或者一个参照系。这时问儿童这些

① 同上，第411页。

纸条是否能帮助他正确地确定各个物体的位置。



A　　　　*B*　　　　*C*

正如所料，有些儿童无法看到把纸条作为参照系的价值，甚至在向他指出了这种可能性之后他还是不明白。处于阶段3的儿童开始能把纸条作为一个参照系。

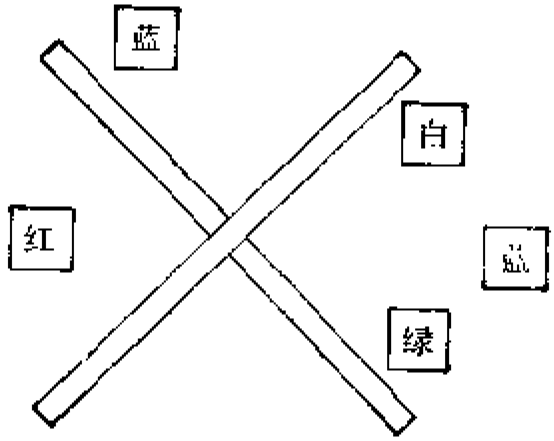
为了解决这个问题可以采用各种不同的办法。一名九岁的儿童把纸条以 × 形式放在模型上，并在他搭积木的地方也放上相同形式的纸条作为参照系。这样他就能根据积木在纸条分成的某个象限中的大体位置，来确定积木的摆法，但是各个物体之间的相对距离仍然不够正确，他还无法纠正他自己的错误。

另一名儿童一开始靠眼力估计来摆积木，然后用三条纸带构成一个三角形把模型中的积木都围在里面，他在自己摆的积木外也围了一个同样的三角形。这样做后，他又把纸条摆成平行的作为参照系。最后他将纸条摆成 × 的形式，并认为这种方法比较容易①。

阶段3的儿童在构造参照系方面取得了一定的进步，但是他们仍然无法用一般的方式确定物体的相对距离和实际位置。

皮亚杰作出结论，只有在十一至十二岁后的思维的形式运算阶段中，儿童方能建立真正规范的参照系，使他能同时比较距离和

① 同上，第414页。



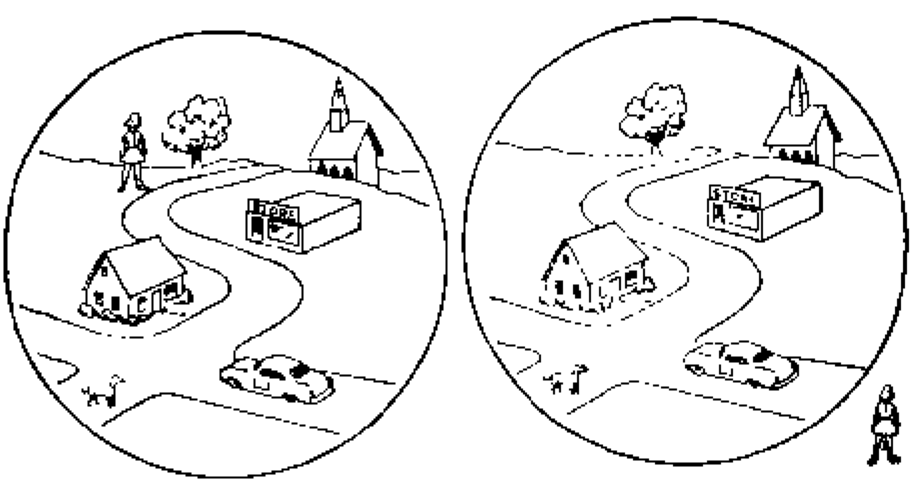
位置①。

因而只有到小学毕业进入初中时，儿童对于画地图所必需的经验才有所准备。事实上画地图涉及比例形式的分数概念或者画比例尺，而这些要到下一节将要描述的发展的第四阶段才能出现。

画　地　图

确定一个物体的位置

儿童究竟是怎样从简单的拓扑观念逐步发展到复制一张简单的地图所必需的射影几何和欧氏几何的概念的呢？对于年幼的儿童，皮亚杰运用了两个具有相同布局的村庄模型，每个模型中包括一条公路、几幢房子、一座小山和一条河流。



① 同上，第 414 页。

一只娃娃被依次放在模型中十五个位置的每一处，叫儿童把另一只娃娃放在另一个模型的对应的位置上。然后，将第二个模型相对于第一个模型旋转 180°，使得儿童无法利用他自身的位置作为一个参照点，再重复以上实验。第三次实验再作些变化，在两个模型之间放置一块屏板，使儿童可以分别看到每一个模型，但不能同时看到两个模型①。

在阶段 1，大约四岁左右，儿童仅仅用到相邻或封闭的拓扑概念。如娃娃放在"靠近"房屋处，但是娃娃这时与其它物体如河流之间的相邻关系，儿童往往就忽略了。同样，如果一个模型中娃娃被放在河流"中间"，那么儿童也会将另一个娃娃放到另一个模型的河流中间，不过很可能放错了，他把娃娃放到河流的另一头去了，这时娃娃对于其它物体如小山和房屋等的相对位置就不正确了。

对于上述这两种拓扑关系来说，儿童是完全正确的。娃娃是在河流"中间"，这是封闭的拓扑关系。当一个模型中的娃娃放在"靠近"房屋处时，儿童也能在另一个模型中把娃娃至少放在邻近房屋或房屋附近的地方，这是"相邻"的拓扑关系。

在阶段 2，从四岁到七岁，儿童能同时使用两个或三个参照点，比如小山和河流。他们也能将娃娃正确地放在房屋的左边或右边或前面或后面。然而还没有把整个布局坐标化。

在阶段 3，从六岁到七岁，一个模型旋转 180° 后没有引起任何困难，儿童能将娃娃正确地放在十五个位置中的任何一个位置。一个模型旋转 180° 后，儿童对于两个模型的视点或者透视角度不同了，这也就涉及了射影几何的数学概念。布局模型是两维的，故而还涉及欧氏几何的双重参照系和直角坐标，比如在房屋的左面和上面。

---

① 同上，第 421 页。

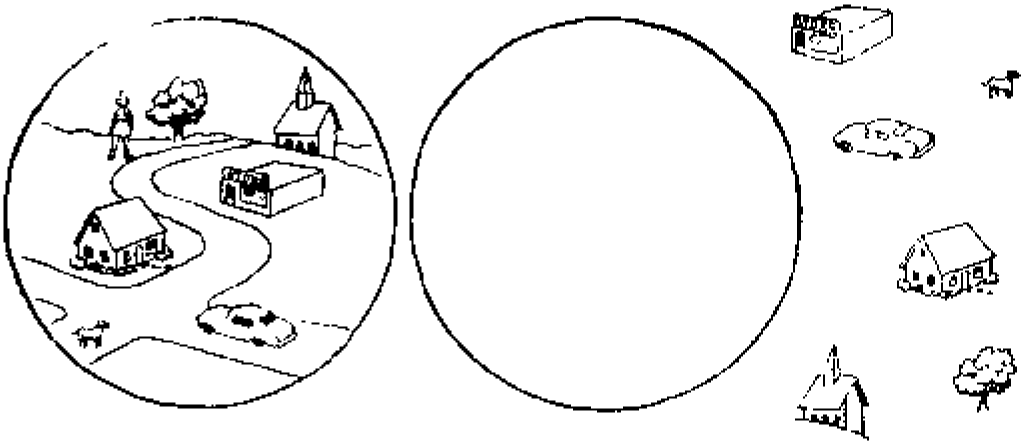
苏珊，九岁，她能在模型旋转 180° 后，成功地确定警察的位置。

上节中用瓶子和液体做实验时，要求儿童发展水平与垂直的概念，而本实验没有那么困难。在本实验中只有一个物体(娃娃)需要定位，并且是在一个已经完全组织好的布局模型中定位，也就是说河流、房屋等物体的位置都已经确定了。因而六岁到七岁的儿童就象上节中九岁的儿童做水平面实验那样取得了成功。

制作布局模型(或布局图)

〔诊断活动 7.5〕

在前一节里，要求儿童在一个两维的村庄布局模型中给一个物体(娃娃)定位。现在我们来探讨儿童复制一个完整的布局模型的能力。在这种活动里，要求确定许多物体彼此间的位置。对于年幼的儿童，可用积木来代表房屋等物体。对年龄稍大的儿童，则要求他们画出从上面看或者从 45° 角度看的布局图，也可以要求他们用缩小的尺寸或比例尺画。画这样一种图解式的布局图，已涉及本章所讨论的全部几何概念。



阶段1的特征是没有能力复制布局模型。他们只能以粗糙的方式做到某种近似，比如将篱笆"靠近"一幢房屋。在阶段2，儿童能从一堆积木中拣出模型中有的那些物体（如汽车、树木等），并试图把这些物体放在相类似的位置上，但是他还没有能使他把物体放在正确位置上的参照系。他只能摆出模型中的一小部分物体，并利用将两个布局中物体配对的方法来一个一个地正确确定物体的位置，因此这时只表现出局部的坐标化。与模型所占有的全部空间相比，儿童仅仅用到了其中一小部分空间。

也可以给儿童一张纸，让他在纸上画出物体，"就象这些物体在模型中一样"。倘若纸比模型小，则这种画法本身已包含按比例尺缩小了。故而在开始时纸的大小应与模型大致相同。

皮亚杰指出了令人感到惊讶的情况，他观察到儿童在恰当地利用他们所有的空间方面存在困难。他们无法象原来的模型那样，在复制的布局模型中放置物体。儿童无法利用可用的空间，这是因为他们还不会将"周界"（模型或纸的四边）用作建立参照系或坐标轴的基础。儿童只有会运用参照系或坐标轴，才能在复制的布局模型中正确地确定各个物体的位置。阶段2的儿童能够在一个物体与其它两个或三个物体之间建立关系，但是还不能把这样的小的物体群同其它的物体群联系起来。只有对靠近模型边缘的物体，儿童才用桌子或模型的边缘作为一根参照轴。在这个发展

阶段还不能画图解式的布局图等。儿童构造了几个不完整的物体群，但是还无法把各个物体群协调成为一个更大的相互联系的系统。①

奇司迪，七岁，复制布局模型有困难。

詹姆士，九岁，他在复制布局模型时表现得很自信，但把模型相对于他自己的地图旋转180°后，则遇到了困难。

在3A阶段，从七岁到八岁，儿童能制成一个模型的复制品，

① 同上，第435页。

表现出了对射影关系与欧氏几何关系的理解。在阶段3的第一个水平上，儿童能将全部位置协调成一个统一的整体，但是他无法保持物体之间的正确距离。当模型中的一个物体移动后，他只能把复制品中的对应物体近似地放到新的位置上，他这样做时仅仅利用了另一个物体作为参照点，因此对于其余物体的位置就可能不正确了。

让一名儿童绕着模型走一圈，模型中间有一幢房屋，在一个角落上有一棵松树。这时儿童能从四个不同的位置画出这个模型图。他已具有了这种对射影几何的理解。但是他无法讲出倘要使实验者看不到松树，应当把松树放在什么位置上①。

3B 阶段出现于九岁至十一岁之间，在该阶段，儿童能够通过测量正确地确定各物体之间的间隔或距离。在该阶段之前，儿童还从未显露出用两个距离或坐标来正确地确定物体彼此间相对位置的能力。在 3B 阶段按比例尺缩小也是有可能的。

按比例尺画图(比与比例)

画地图或复制一个比原模型小一些的模型，均包含着对比例尺或比和比例的理解。给一名十岁半的儿童一个模型，该模型比要求他复制的大得多。实验者问他怎么样才能将每个物体都放入复制的模型中，他回答道他能够这样做，只要将距离缩短，将各个物体变小些就行了。他愿意进行测量，但是实际上他仍然宁可作视觉估计。在 3B 阶段，儿童认识到复制的模型中物体应当象它们之间的距离一样缩小尺寸。对于简单的比如 1:2 或 1:4，儿童有了比例的感觉。皮亚杰将这个阶段的特征说成是掌握了距离与比例②。

然而，此时儿童仍然处在具体运算水平，他为了正确地确定物体在复制模型中的位置，还需要借助于客体如纸条作为参照系。

---

① 同上，第438页。

② 同上，第442页。

在阶段4，从十一岁到十三岁，儿童终于达到抽象水平或“形式运算”水平。他为了正确地确定物体的位置，不再需要将客体如纸条作为参照系。此时他在自己的头脑中已经具有了相交于模型中心的抽象的坐标轴(一根垂直的坐标轴和一根水平的坐标轴)，以作为复制模型的最好的参照物。这是从具体向抽象或从具体运算向形式运算的过渡。

问一名十二岁半的儿童有什么办法可以帮助他将每个物体放在正确的地方，他答道可以画两根相交的轴，这时他将一张纸对折两次，以折缝来代表这两根轴。他根据房屋相对于一根轴的距离来确定这幢房屋的位置。当实验者追问他这样做是否准确时，他回答说不准确，并说必须测量两个方向上的距离(即离开两根轴的距离)，同时按比例尺缩小①。

一名十三岁的儿童福尔已表现出了按缩小的比例尺来画模型地图的能力。他毫不费力就画出了坐标轴，而且还将坐标轴与纸的四条边合起来利用。

> 福尔正确地测量了每个物体的距离后，决定先画出1:4的模型地图。他刚画了几笔就自言自语道：“你必须把房屋画成1/4大小，不，这个房屋画得太大了些，嗯，大小正好了。”他继续以同样的方法画下去，时时看着纸的四个角和四条边，把它们作为参照物。当他做完了实验所要求的一些测量后，实验者问他：“在你画的图中，距离比实际模型中短一些，这对吗?”福尔答道：“是的，因为每样东西都只有四分之一大小”。②

本章内容对教育的含义

上述实验指出，儿童利用坐标轴画地图时所必需的抽象运算，一直要到十一至十三岁才能完全发展起来。皮亚杰总结说：“恰恰

---

① 同上，第445页。

② 同上，第445页。

正是抽象运算的发展(在十一至十三岁时)，才能使儿童理解他在学校里学习的地图和坐标轴……这是个人得出的概念与形式地学习所得的概念的结合。”①

按照皮亚杰的观点，抽象运算的发展在任何程度上都是无法加速的。假如皮亚杰是正确的话，那么，课程的设置与安排一定要适合儿童的发展水平。对于这个问题必须给予严肃的注意。以画地图为例，目前学校里在社会学科中正在把这教给许多儿童，而实际上，这些儿童都还没有达到必要的运算水平，以便真正理解这些活动所包含的数学基础。这些必要的发展基础包括对透视的理解、稳定的参照系(水平轴与垂直轴)的建立以及测定距离并按比例尺缩小的能力。而这些发展一直要到儿童即将小学毕业时才能趋于完善。

这些研究对于教师具有重要的意义。教师可能教得很好，然而她的教学却是建立在一个错误的假定上，也就是误以为她的学生都能自动地懂得或具有水平与垂直轴这种参照系的概念。实际上她在企图发展学生那些要以稳定的参照系作为前提的概念之前，应当先仔细地对儿童进行测验。我们已概述了进行这类评定的各种测验。教师不能期望学生在九岁以前就会有必要的发展，甚至有些儿童还要晚两年。

在小学低年级，一种常用的活动就是让儿童画出一张图以表明儿童的住处同学校的位置关系。这种活动要求儿童具有一个稳定的参照系，然而儿童无法在自己的头脑里重新产生这幅地图。即使儿童在教室的墙上看到这种地图，但离开教室后，对参照系也很少有什么印象。他仍然还是老样子，因为在他头脑里还没有形成抽象的稳定的坐标系统，如垂直坐标轴与水平坐标轴，用来确定街道与建筑物的位置。

---

① 同上。

只有当儿童能够假想出抽象的坐标轴如垂直轴与水平轴，并把它作为确定周围物体相对位置的一种手段之后，他才能开始表象空间。当儿童画地图或者不看着样子重新将看见过的一幅地图画出来时，可以从中发现儿童的这种表象能力或抽象能力。为了做到这一点，他需要一个参照系。如果儿童只是以一些具体的物体作为标记而找到回家的路，那么这时他还没有坐标系。

对于四岁到十岁的儿童，皮亚杰总结如下：

> 认识的发展不是一种单纯的积累过程。在四岁到十岁之间，儿童获得了关于他们居住地区的许多信息，他们也把居住地区的景象协调起来。然而形成地图这个过程是一个十分复杂的发展过程。①

在小学高年级，如果地理课要让儿童对于各个国家或城市之间的相对位置和距离有真正的理解，那就应当在儿童进入阶段3的发展水平后再上，而决不能提前。假如儿童还没有将空间构成一个协调的整体，那么地理课能有什么意义呢？

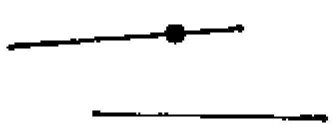
对于绘制地图及按比例尺画图，儿童大约要到十一或十二岁才能完全理解。是否能早一点教他们呢？按比例尺画图本身包含着对数学中比与比例概念的理解，这种数学概念在有些新近出版的六年级教科书中，也就是在儿童十一至十二岁这一适当的发展阶段才被引入。（欲进一步研究比例问题，请参阅本书第11章。）

① 皮亚杰、英海尔德与切敏斯卡：《儿童的几何概念》，第24页。

19 二维和三维的测量

二维或三维测量向我们提出了欧几里得几何空间的中心观念，即(垂直与水平)坐标轴的观念——这个系统是建立在客体的垂直或水平的基础上的。似乎婴儿也把握了这些观念，因为这样才能区分直立和躺下的不同姿势。但是，实际上，关于垂直线和水平线的心理表象平均要到九岁才发展起来。当一个儿童能够参照自然界的物体来构造这些坐标轴，同时又能达到知觉的协调时，他也就完全形成了如何表现空间的概念。①

关于儿童一维测量即长度测量的能力，我们在第 17 章已讨论过了。例如，给儿童看两条线段，在一条线段上已标出了一点，要求儿童在另一条线段的同样位置上也标出一点来，只要给儿童合适的工具(如铅笔或一段纸条)，儿童通常在八岁至八岁半时，就能标出来。

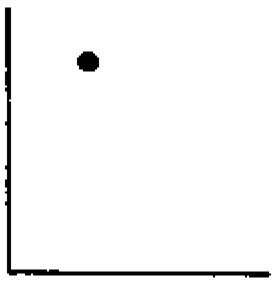


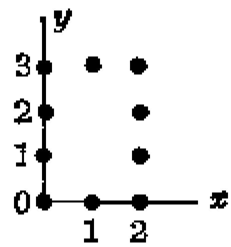
在二维空间中确定一点的位置

两维测量大约要在一维测量之后再过一年才能实现。两维空间涉及一个区域或面积。要在没有测角工具的情况下，确定二维

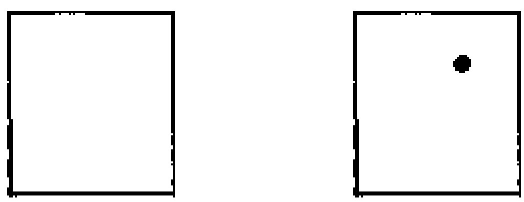
① 皮亚杰："儿童怎样形成数学概念"，《科学美国人》，1953 年第 11 期，第 79 页。

空间中一点的位置，就需要一个参照坐标系，如水平轴和垂直轴或叫直角坐标系。例如，为了确定下图中一点的位置，就需要水平的“尺寸”和垂直的“尺寸”，或通常所说的 x 坐标和 y 坐标。当要确定(2, 3)这样一点的位置时，我们可以在 x 轴上往右数 2 个单位，然后再和 y 轴平行往上数 3 个单位，这样，所得到的点的 x 和 y 的直角坐标就是(2, 3)。





假如儿童没有这些知识背景，那么如果给儿童一把尺、一根小木条、几张纸和一根绳子，他又是怎样在一张白纸上标出一点，使这一点的位置同另一张纸上的点的位置相同呢？



四至五岁的儿童只会猜测或估计点的位置，他们还想不到运用工具。在阶段 2，儿童以尺或木棒为工具企图用线性测量的方法来解决这个问题——他猜测或估计适当的角度，然后从纸的一角出发去测量距离。

在阶段 3，儿童起初靠试误，后来凭借逻辑发现了进行两个方向的测量或运算（通常是水平的和垂直的）是必要的，并能把两个方向的测量协调起来以确定点的位置。而在阶段 3 之前，儿童还不能协调这两个方向的测量，他们满足于一维测量，企图只依靠线性测量就能解决问题。解决这类问题的最大困难，是儿童大约要到九岁时才能发展起稳定的水平和垂直的概念。

面积测量

〔诊断活动9.4〕

对于测量面积或体积所必需的理解，提出了一个心理学问题或学习问题。这个问题与确定空间一点的位置有所不同。在二维空间中确定一点的位置，包含两个线性测量或坐标，如 x 和 y。

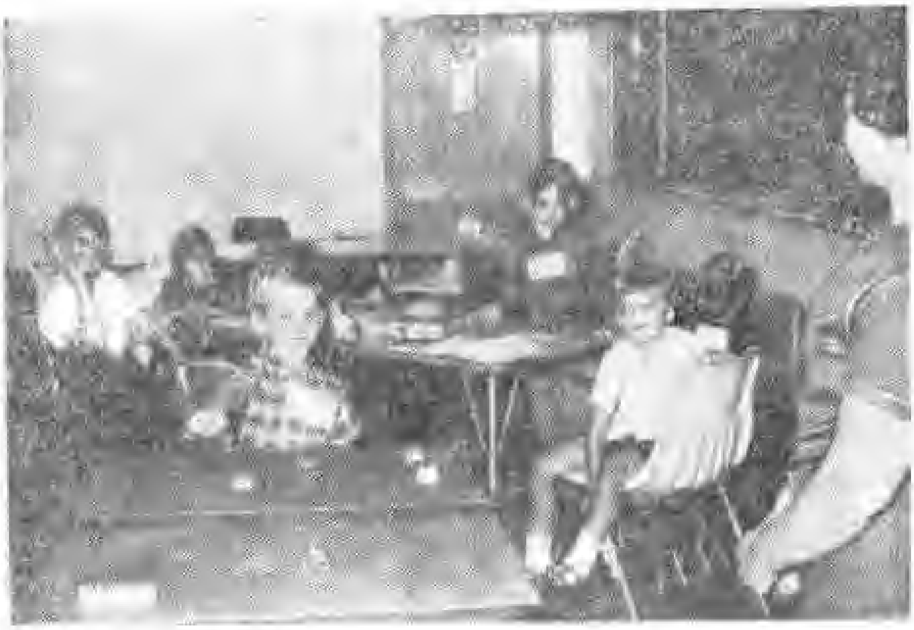
测量长度或线性测量所用的测量单位对面积测量来说是不够的，面积测量的单位必须是二维的，即含有如1平方厘米这样的面积。

儿童是如何设法解决一定要进行面积测量的问题的呢？这里，又再次涉及不变性或守恒性的问题。

例如，在一个盖着几座建筑物(如牛棚和房屋)的牧场中有一头牛，无论这些建筑物如何排列，这头牛是否能吃到同样多的青草？这个问题涉及欧几里得公理中如下的数学观念：从两个等量中减去相同的量，结果仍然相等。

设 $A_1=A_2$，A_1 与 A_2 表示两个牧场的面积，又 $B_1=B_2$，B 表示建筑物的底面积，不管建筑物 B_1 与 B_2 的位置如何。那么 $A_1-B_1=A_2-B_2$。

为了研究这些问题，皮亚杰把两块形状和大小都相同的长方形硬纸板涂上绿色当做牧场，在儿童承认它们大小相同 ，再把两只同样大小的牛的模型分别放在两块板上。这时告诉儿童，牧场主打算在这两个牧场上盖房子（以同样大小的积木当作房子），一个盖在牧场的中央，另一个则盖在角落里，接着问儿童，这两头牛是否仍能吃到同样多的草。然后，再分别在两个牧场上加盖一幢房子，其中一个牧场与原来的房子连在一起，另一个则是分散的，这样逐次进行下去，每次加盖后都向儿童重复提出上面的问题。

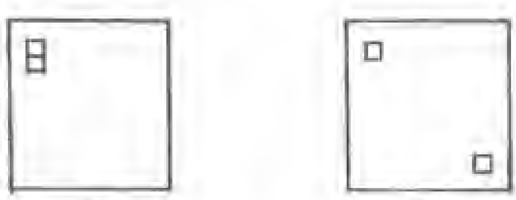


儿童指着他认为牛可以吃到较多草的那个牧场。
左边的那个儿童已处于阶段3的水平了。

有一名儿童，开始时，他同意草地面积相同，直至增加到14幢房子时，他还认为两头牛能吃到同样多的草。但后来他突然改变了看法。他对分散的房屋的知觉使他作出了这一改变。

在五岁到七岁，当添加了较多的房屋后，相等性常被否定。只有平均到七岁半，欧几里得公理中的上述数学观念才具有运算的性质，就是说，儿童理解到只要两个牧场拥有相同数目的房屋，那么不管房屋如何排列，它们的草地面积必定仍是相等的。

在前运算水平，一名六岁儿童注视着如下图所示的 B_1 中的两幢房屋和 B_2 中的两幢房屋，问他草地的面积是否相同，他说 B_1 牧场中草地多些。假如从 B_1 和 B_2 中各拿去一幢房子，他就说现在草地一样多了①。



B_1　　　　B_2

① 皮亚杰、英海尔德和彻敏斯卡：《儿童的几何概念》，第268页。

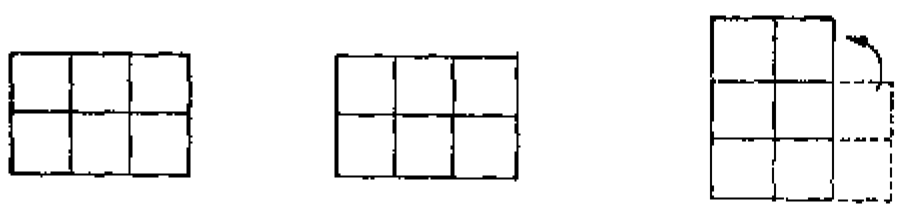
皮亚杰从许多这样的实验中得出结论：前运算阶段的儿童尚无法保持被减数的不变性（如当房子从牧场中移走时），减法运算对他们来说是没有意义的，虽然减法和加法是可逆运算（或者，更确切地说，形成了一对可逆运算）。理解面积守恒所必需的可逆性概念这时还没有出现①。

在阶段3，儿童能立刻懂得被减数的不变性，因为这时已有了对于面积加减的运算性的理解了，即理解到当房屋增加或从牧场中移走时，不管其位置如何，牧场的面积总是守恒的。然而，只有当面积测量的过程与对面积不一定随着形状的变化而改变的理解融合在一起的时候，面积的测量才是有效的。这一思想在下一节中还要研究。

面积的守恒与测量

〔诊断活动 9.5〕

皮亚杰为了研究面积的守恒与测量的观念，采用了下面两个方法。第一个方法是将十二个方块摆成两个相同的长方形，然后将一个长方形改变排列形状，移去一端的两个方块，把它们放在另外四块的上面或下面，如图 B 所示。



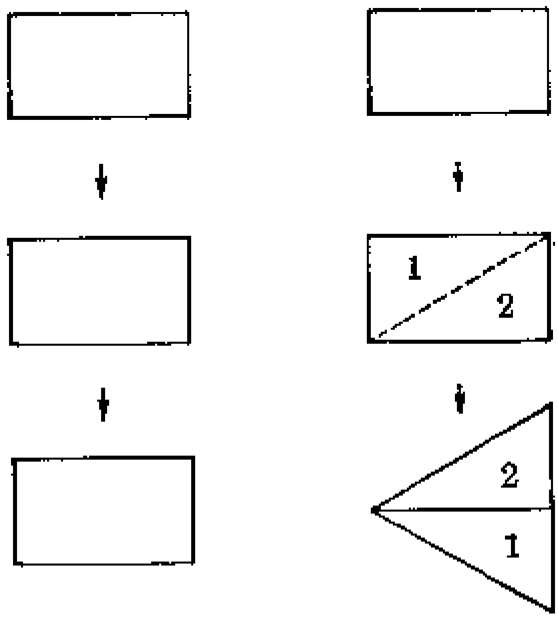
A　　　　B

接着问儿童长方形是否仍然是"同样大小"或有"相同数目的房间"。

第二个方法也是对第一个方法的检验。他先把两块硬纸剪成

① 同上。

全等的长方形，再将其中一个长方形剪成两个三角形，然后把这两个三角形重新排列成与另一个长方形形状不同的图形。



五到六岁的儿童认为，当形状改变时，面积或房屋的数目也改变了。他们被知觉所蒙蔽，此时他们的回答是建立在知觉基础上的。一个图形大一些，是因为它“看上去”大些，或者，在第二个方法中，是因为“它被剪开了”。

面积的守恒要求具有部分集成整体的观念，并要求儿童意识到这些部分的排列或聚集(相加)并不影响它们的面积(总和)。

在阶段2，儿童开始把面积等分成若干个用来“测量”的单位，借此考虑面积问题。但是他们的这种努力是试误性质而不是智慧性质的。

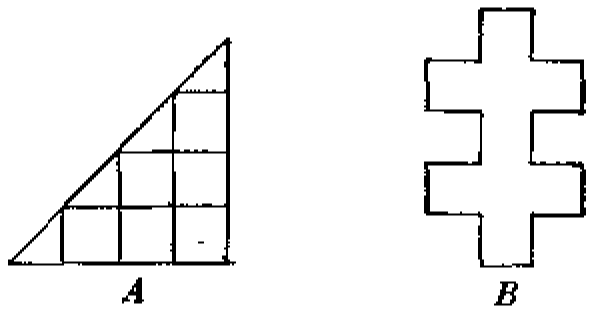
在运算水平或智慧水平上(阶段3)，面对把一个由六个正方形组成的长方形变成宝塔形，一名七岁儿童起先说宝塔形中有更多的空间，但他马上就纠正了自己的错误，因为在每个图形中都有六个正方形。把宝塔形变成下面左边的形状，他说这仍然

是一样的，因为还是有六个正方形。再把正方形排得散开一些，如上面的右图，回答也还是一样的①。

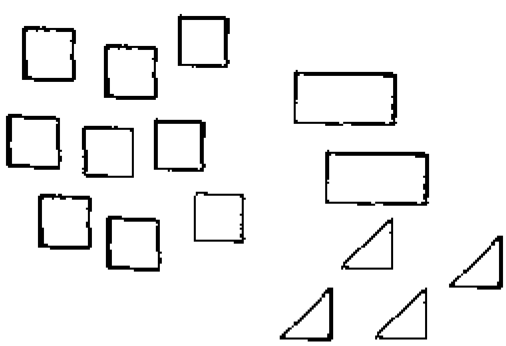
令人感兴趣的是，面积守恒性出现的时间与长度守恒性相同，虽然人们可能认为面积要更困难些。

面积的测量

利用叠置的方法　儿童是怎样试图对两个形状不同的面积进行比较的呢？皮亚杰用了一个直角三角形和一个不规则图形：



再给儿童一些形状为正方形、长方形和三角形的较小的图形。其中所有的正方形刚好能放入图形 *B* 中，长方形是由两个正方形组成的，而三角形则是将正方形沿对角线剪开来的。



问儿童这些较小的正方形是否能帮助他发现图形 *A* 与 *B* 的面积是相同还是不同。假如单用正方形还不够，就再问他用这些较小的图形是否能“覆盖”图形 *A* 与 *B*。一般说来，小于六岁的儿童还从未产生过“覆盖”的想法，因而不能解决这一问题。

有的儿童还不懂得若干较小的图形拼在一起，其面积和与一

① 同上，第285页。

个单一的大图形的面积相同这样一个基本观念。他们只能比较两个单一的图形的面积。

第二个更加重要的观念是，假如若干较小的图形能分别正好符合或覆盖两个图形，那么这两个图形的面积必定相等。这在数学上称为等量关系的传递性，通常表述为如下形式：

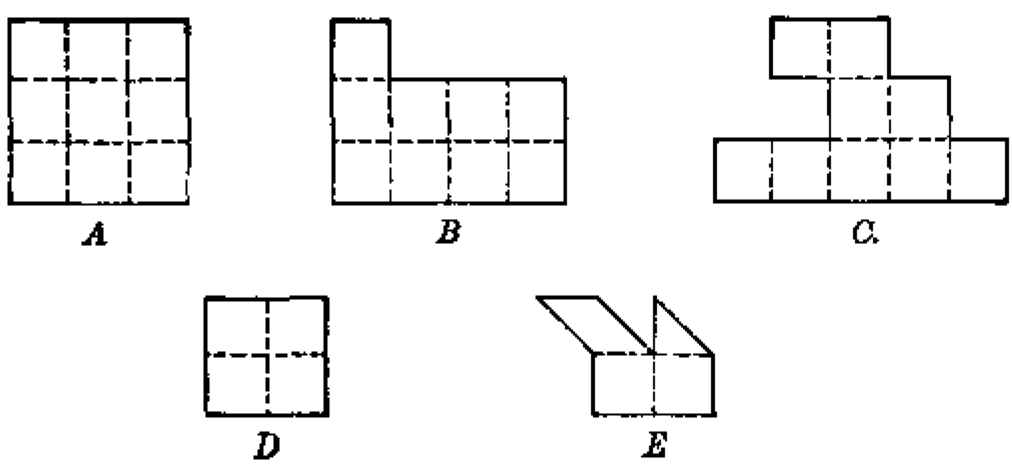
设 $A=B$，且 $B=C$，则 $A=C$。

上面讲到的能分别正好覆盖两种图形的较小的图形，就是中间项 B。若 B 等于 A 同时又等于 C，则 A 的面积必定等于 C 的面积。

儿童在六岁到七岁半时，通过试误的方法开始认识到这类问题中所含有的传递观念。从七岁半到八岁半，儿童能直接认识到需要公共的度量单位（较小的面积）以及其中的传递观念。

利用单位进行测量　给儿童适当小的图形，以覆盖需要比较面积的两个图形，这一点刚才已经讨论了。这个问题仅包含了定性的传递性。然而，倘若只给儿童一个比要比较的面积小的图形，那么单位测量（用单位反复度量）就成为必需的了。

为了研究定量的单位测量，给儿童几个形状不同的图形，要他比较大小或面积①。这时只给儿童一块小的正方形硬纸片，大小



① 同上，第296页。

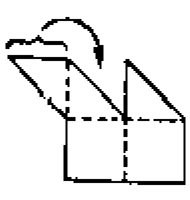
与上图中虚线的小正方形相同。再给儿童一支铅笔，允许他在图形上画记号，如上图所示。

五到六岁的儿童往往不能完成这一任务。有的甚至到七岁仍不能完成。他们在比较图形 A 与 B 时，回答说："B 大一点，因为它有一块多出来的东西。"倘若叫他们数一数每个图形中有几个正方形，他们在数出 9 个正方形后，还不认为这些图形具有相同的面积。对他们来说，知觉上的悬殊差异胜过了对数的同一性的认识。

在第二阶段或过渡阶段，儿童开始懂得了上面的观念，但是还没有达到一般性的理解。一名六岁儿童在比较图形 A 与 B 时说：B 中房间多些，因为 B 比 A 大。实验员帮助他在 A 中画了两个单位正方形，然后问他在 A 和 B 中哪一个能画出更多的单位正方形。这名儿童甚至在两个图形都画满了单位正方形后也不能肯定。再问他数一数是否会有所帮助，于是他数了数，发现每个图形都有九个单位正方形。但当实验员问他假如这些正方形都是巧克力，他将挑哪一个时，他仍选择 B，认为 B 的巧克力多些①。

在这一水平上，当比较 D 和 E 时，儿童不顾三角形与正方形所表示的面积之间的区别。他说，这两个图形有相同的面积，因为每个图形都有四个小部分。他们还没有基本测量单位的观念。

在第三种水平上，儿童掌握了基本测量单位的观念。在比较图形 D 与 E 时，一名八岁儿童认识到可以从图形 E 中切出一只三



角形并将它填到空缺的地方(如左图)，因而 E 小于 D。他也能运用三角形作为基本测量单位来进行度量。他发现图形 D 中有八只三角形，而图形 E 中只有七只三角形，所以图形 D 要大些。

皮亚杰总结道：对一维测量(长度)和二维测量(面积)来说，守恒性和测量能力是同时出现的。面积的守恒是儿童能用数出每个

① 同上，第 298 页。

图形中含有多少个基本测量单位(三角形或正方形)的方法，对两个形状不同的面积进行比较的产物①。

在阶段3，儿童能运用等分或标成较小的全等区域并进行计数的办法来确定一个区域的面积。这种计数方法可以设想为是一种加法，因为在计数时，每次都是增加1。

用线性测量的方法测量面积

到什么时候儿童才能发展出更为复杂的观念，即会用长度乘以宽度来求出一个长方形的面积呢？通常我们只是简单地"告诉"儿童这个公式，但这对儿童来说，即使不是毫无意义，也是意义甚微的。在前面几章，我们已提出了几种极好的准备性活动。皮亚杰把这种用长度乘以宽度求面积的能力划为阶段4，即属于智慧水平或"运算"水平。这个发展水平一般要到十一或十二岁才出现。

为了研究上面的问题，要用到面积加倍的观念。给儿童一把尺和一根线，然后让他看一条3厘米长的线段，并叫他画出一条长度加倍的线段。再给他一个边长为3厘米的正方形，叫他画出一个面积加倍的正方形(不能画成长方形)。

在阶段2，儿童甚至不会将长度加倍，由于缺乏长度守恒和等分的思想，儿童无法进行测量。

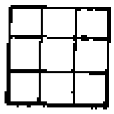
在阶段3，儿童能将长度加倍。皮亚杰着重指出：

> 情况好象是，儿童这时已具有了发现长度与面积或体积之间正确关系的一切准备。至少对于简单的图形如正方形来说是如此。儿童能自己发现，一个边长为另一个正方形两倍的正方形，其面积已远远超过另一个正方形的两倍，所以他认识到面积只可能是边长的乘积。换句话说，他能够发现，边长与面积之间的关系是一种数学上的乘法关系，而不是一个简单的比例关系。但他这时还不会进行这一运算。②

① 同上，第300页。

② 同上，第348页。

用长乘宽来确定面积，这比上节中所用的方法(将正方形分成更小的单位正方形并计数)要困难得多。不同之处在于，上节中的方法仅仅是简单地数出有限个单位正方形，例如，在左图中就是9个单位正方形。可是如果只考虑图形的边长，那么问题就更加困难了。因为表示每条边的线段都代表着无限多的点，它的长度无法数出来。



在阶段4，一名儿童发现了一个好方法，尽管这时他还没有学过怎样去求平方根。给他看一个边长为3厘米的正方形，要求他画一个面积加倍的正方形。他发现如果把正方形每边的长度都加倍，就得到了一个4倍面积的正方形。因此，他先求出原正方形的面积，$3\times3=9$，然后再将此面积加倍，$2\times9=18$，求出所要画的正方形的确切面积。他知道应把18的平方根作为新的正方形每边的长度。于是他取了18平方根的近似值——比4稍大一些的数①。

体积的测量

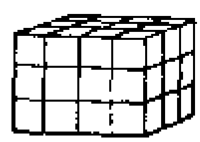
〔诊断活动9.6〕

体积的守恒

将守恒性或不变性应用于体积之中，要比应用于数、长度或重量之中，都晚一些。

可用一套36块的积木来研究儿童对体积的理解。这些积木先堆成底面是宽为3块、长为4块的长方形。

问儿童是否能将一幢拥有同样数目房间的楼房造在一个长3块、宽2块的较小的岛上(每块积木代表一个房间)。

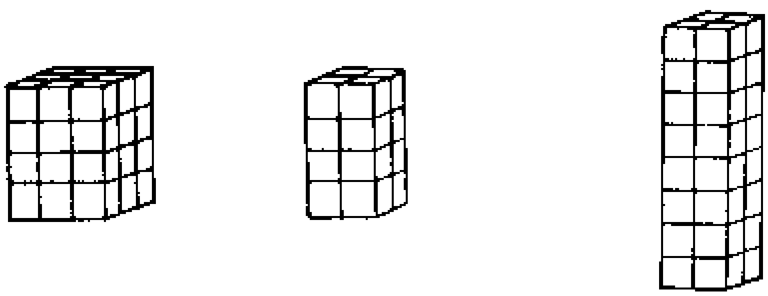


儿童在阶段1时，实际上毫不理解题意。在阶段2，他们也不会在较小的底面上造起一幢拥有相同数目房间

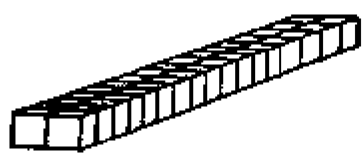
① 同上，第352页。

的新楼。他们把新楼造到同原来的房屋一样高时就停下了。他们还没有想到可以把新楼再造得高些，这样并不会超过原来房屋的体积。在这一阶段，儿童在形状变化时还没有体积的守恒性。在阶段2的末期，儿童开始对此有所理解。

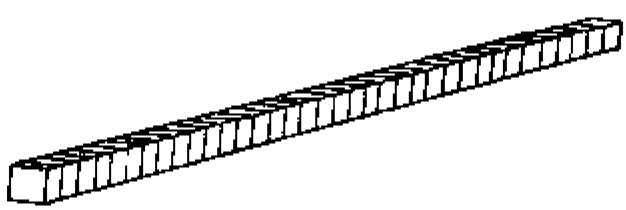
一名七岁的儿童能变换一幢3×3×4的楼房，将它改建在2×2的底面上。他先造成2×2×4的样子，然后经过一段时间的犹豫，觉得必须将新楼造高到2×2×7。这时他在比较了两座楼后，又在新楼上加了一层，成为2×2×8，他自认为这次做对了，但不能解释为什么对。



后来，再让他照3×3×4的模型造一幢相同的房屋，他照样造好了。接着实验者将模型改建成2×2×9的样子，并问他房间数是否仍与原来一样。儿童回答说一样，因为"它还是那么多块"。然后又把模型变成2×18×1，如右图所示。开始时，新



房子的长度使儿童认为房间多些了，但是随后他就想起房间的数目仍然同原来一样多，因为它包含的积木块和原来是相同的。后来他对另一种样子1×36×1又产生了误解，因为它太长了。尽管他也同意积木块仍是一样多，但还是认为它的房间要多些①。

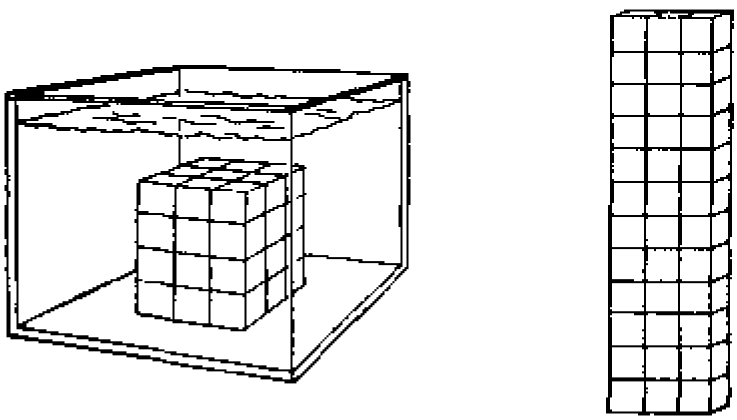


① 同上，第367页。

阶段3延续了一个相当长的时间，大约从七岁到十一或十二岁，这几乎包括了小学中的大部分时间。在该阶段，儿童掌握了当外表的长度、宽度和高度改变时，内部体积或积木中所包含的"房间空间"是不变的这一观念。然而，这种体积守恒只是守恒性的一种类型，它仅仅和积木的内部体积——由积木的边界面所决定的体积有关。儿童的体积概念这时既是拓扑性质的，同时又是欧氏几何性质的。

阶段3仅是这样一种类型的守恒性，即内部体积的守恒性，这一点可由下述实验清楚地显示出来。在这个实验中，先与前面的实验一样提问，但紧接着问儿童，假如把这两幢不同形状的楼房都浸到水中，将会发生什么情况。

沙尔兹(七岁十个月)这样估计：当我们把一个3×3×4的楼房放入水中时，水平面将会升高。实验者把它浸到水里，沙尔兹说：



"你看，我是对的！"这时，把楼房改造成上右图的样子(3×1×12)，实验者问："这两幢楼房的房间数目相同吗？"他回答："是的，正好一样。你用了一样多的木块。"又问他："在水里这两幢楼房的房间数目还是与原来一样吗？"沙尔兹答道："不，在水里有更多的房间。喔，不！错了！在水里房间少了，因为房子变长了。"①

可见，对于象沙尔兹这样的儿童来说，他已认识到了内部体积的守恒性，因为积木块的数目是一样的。但是，他还未认识到积木

① 同上，第375页。

块的内部体积同积木块所占据或排开的水的体积是相等的。儿童进行真正体积测量的意图只是到了阶段3的末期才开始出现。

在阶段4，儿童对体积的理解有两点进步。这时儿童已能根据三维的长度之间的关系(长×宽×高)来测量体积了。体积的守恒性也已扩展到被占有的或被排开的水的体积的守恒。

一名处于阶段4初始水平的十二岁的儿童，尽管还不知道怎样正确地测量体积，但他已接近于具有这种能力了。让他把一幢3×3×4的楼房造在2×3的底面上，他说他需要9×4或36块积木。问他为什么，他说因为"楼房是4块积木高，每一行是3块，就是4×3或12块积木，还要再乘以9，因为顶部的面积是9"①。当然，他这样乘是错误的，实际上应该是乘以9，而不是乘以3再乘以9。但他已接近于正确地解决问题了。

十二岁半的吉斯达到了对体积的完全理解：

> 吉斯(十二岁六个月)：让他在2×2的底面上造一幢与模型3×3×4体积相等的楼房。他说：这幢房子必定在高度上和模型不一样(他开始计算起来)，这房子总共有36块，要造9层。实验者问他：你怎么算出36来的？他回答：房子长3块，宽3块，得到9；高是4块，4×9=36。②

在阶段4，儿童第一次发现体积不只是指某些三维物体(如积木)所"包含"的内部体积。他第一次发现空间本身是永远存在的，不管是否被积木所占据。

皮亚杰对阶段4体积概念的这一变化作出如下解释：

> 理解了边界线(或边界面)与内部体积的关系后，儿童必然加深了对体积守恒性的认识。他们第一次发现了不仅"包含的"内部体积是守恒不变的，而且在一个更加大的容器中物体所占据的空间也是守恒不变的。当物体的整个外形改变时，物体边长与体积之间的关系仍然保持不变，这是一直要到阶段4才获得的最基本的真理，

① 同上，第382页。

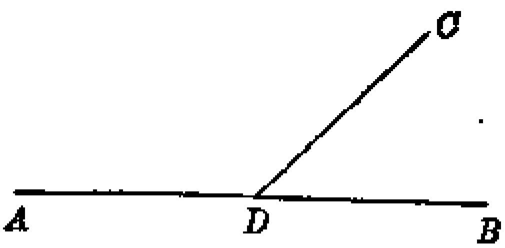
② 同上，第383页。

可将它表示为连乘的数学形式：$3\times3\times4=2\times3\times6=2\times2\times9=36$等。由于从这时起内部体积已能够测量与计算，因此，体积的不变性就扩展到了周围的空间。①

作相等的角

下面的作图问题，需要儿童对二维测量有所理解。儿童一般在十至十一岁之前，还不能掌握最好的作图方法。

一名儿童（或面对同样问题的成年人）是如何发展出作一个角与已知角相等的方法的呢？例如，儿童要到几岁时才能重新画出或复制左面的图形呢？发展程序是怎样的呢？



在儿童作图前，先给以纸、铅笔、线、尺和圆规，并允许他仔细地观察原图，必要时还可以重看原图，但不让他在作图的同时看图，也不许他临摹或描画原图以及用量角器去测量内角的度数。

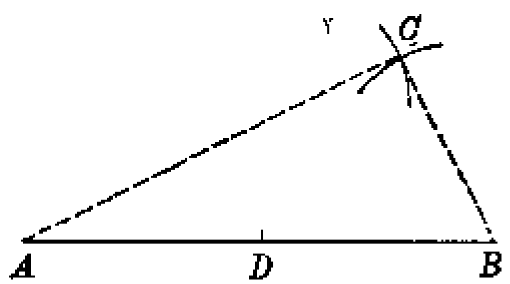
不满六岁的儿童是无法测量一条线段的，故而这个包含了测量两条线段与一个角度的问题，对于他们是太难了。甚至超过六岁的儿童也只能采用一种非常粗糙的方法。六到七岁的儿童极少用到提供给他的尺、圆规等工具。他们所用的方法完全是一种基于视觉估计的试误法。他们画好后，再去看看比原图大还是小，当他们觉得大小差不多时，就感到满意了。

在第二阶段，儿童能测量线段的长度，因而他能正确地在线段 AB 上定出 D 点的位置，但是为了画出 DC，他们仍然只能估计角度，不知道还有什么别的办法。他们并没想到去运用预先给他们的那些工具。

---

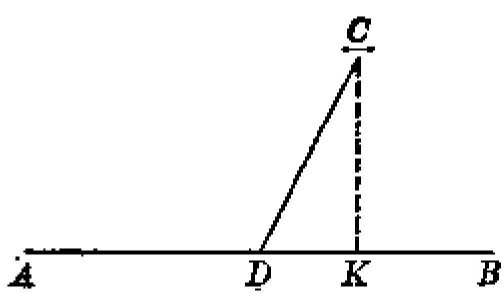
① 同上，第385页。

在第三阶段开始时，儿童试图将尺从 CD 的位置平移到他自己画的图上而不改变"角度"，因而他已在试图运用平行的观念了。他们能够解决线性测量的问题，可是仍无法解决测量角度的问题。他们使用的还是试误法。在该阶段的后期，儿童开始把这个图形看作是一个角度系统，并对 AC 和 BC 进行必要的测量。他用圆规在样图上量出 AC，接着在自己的图上以 A 点为圆心、以 AC 的长度为半径画一段弧，然后又在样图上量出 BC，在他自己的图上以 B 点为圆心、以 BC 的长度为半径再画一段弧。这两段弧相交于 C 点。于是他就能按正确的角度画出线段 DC 了。



莱恩(九岁八个月，阶段 3)说：为了画这个图，我需要那条线段(指 AC)。实验者问：为什么？莱恩答：因为我知道那条线(指 DC)开始的地方(D 点)，可是不知道它的终点在哪里(指 C 点)。问：你不能量量它(指 DC)吗？答：不，因为量了它我也只知道它长多少，可是现在我得知道它倾斜多少啊．接着他量了 AC 与 BC 并求出了 C 点①(如上图所示)。

在阶段 4，即运算水平上，儿童解决问题的方法已不再是试误性质而是智慧性质的了。儿童在样图上测量从 C 点到线段 AB 的最短距离(垂直线段)，于是得到了 K 点。他在样图上量出 DK 的长度，接着在自己的图上定出 K 点的位置。又在样图上量出 CK 的长度，并在自己的图上从 K 点起画出垂直于 AB 的 CK，从而得到 C 点。这样，他就能按正确的角度画出 DC 来



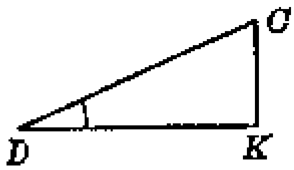
① 同上，第 181 页。

了①。

一名十一岁的儿童先量了 AB 和 AD 的长度，然后凭眼光估计了 C 点，接着他从 C 点画一条垂直于 AB 的线段。他量这条线段，想找到在什么地方垂直距离 CK 将与 DC 重合。当实验者问他为什么这样做时，他回答说他不知道在什么地方画线段 DC，但是通过求垂直线段 CK 的长度和线段 DC 的长度，就能找到 C 点②。

皮亚杰得出结论说，引进垂直的测量是意义重大的。在阶段4之前，这种方法是不会有的。它比用 AC 与 BC 画弧求 C 点需要更富想象性的作图能力③。

如果儿童能够认识到角 CDK 的测量是根据线段 CK、DK 与 DC 之间的长度关系，那么他就已站在数学中"三角"这门学科的门槛边了。



虽然皮亚杰把能够照样画一个角作为在十岁到十一岁出现的阶段4或运算水平的特征，但我们在对90名十到十一岁的儿童（全部为小学五年级学生）进行测验后发现，其中只有不到一半的人能正确地作出图来。

我们给每个儿童一张测验纸，要求他按照纸上的图在旁边重新画一个全等的角。只允许用铅笔、直尺和圆规作为工具。

我们设计的问题不象上面的题目那么困难。我们的图中 B 点在 C 点的正下方，这就提示儿童作图时要用到 B 点。即使如此，也只有不到半数的儿童获得成功。

作全等三角形

儿童是怎样解决作下面三角形的问题的呢？

给儿童一张纸、一把尺和一条纸带。样图就放在他前面的桌上，他可随时观察。

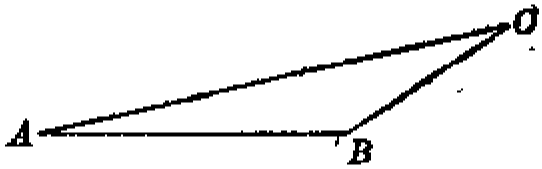
---

① 皮亚杰不是描述儿童如何画出垂线或能否这样做。显然，他的兴趣不在于垂线画得是否正确，而在于儿童是否能运用垂线的观念来解决问题。

② 皮亚杰、英海尔德与彻敏斯卡：《儿童的几何概念》，第183页。

③ 同上，第184页。

儿童解决这个问题的各个阶段同上节描述的阶段很相似，而且差不多是在相同的年龄水平上出现的。在阶段1，还不存在这种测量，儿童仅表现出描画图形的企图而已。



在阶段2，儿童去测量三条边，但一次只测一条，他们的测量仍然是一维的。对于一个两维图形如三角形来说，这是不够的。因此他们还无法正确地画出样图中的角。他们假定只要测量了一条边，那么三条边就一起确定了。他们还没有意识到下列事实，即对于一条边与另一条边所夹的角需要另一种测量。

在阶段3，从九岁到十岁，儿童发现“垂直”的概念可以为解决这个问题提供一条途径。但他虽然用到了“垂直”的观念，显然还没懂到怎样从 B 点作 AC 的垂线，他只能进行大约的估计。

在阶段4，儿童为了重新画出一个角如 $\angle BAC$，往往宁可先作一条位于三角形外面的垂线(从 C 向 AB 的延长线作垂线)，他在这样做的时候，表现出他已完全摆脱了知觉的约束，因为知觉总是集中在三角形和它的内部的。

为了画出这条垂线，首先必须将样图中的 AB 延长。接着必须测量从 C 点到 AB 延长线之间的最短距离(即垂直线段 CK)。这样，只要测得样图中线段 ABK 与 CK 的长度，就能重新作出整个图形了。在量出 ABK 的长度并将它画好后，再量出 CK 的长度并将它画成与 AK 垂直，然后就能画出与 AB 的夹角等于已知角的线段 AC 来。最后再画出线段 BC，三角形就画好了。

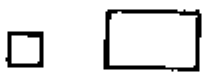
本章内容对教育的含义

面积

关于一维(长度)测量的教学意义已在前面第17章讨论过了。

本章所介绍的实验指出：儿童面积的守恒大约与长度的守恒在同一时期内出现。守恒性对于理解一维或两维测量来说，都是一个必要的先决条件。

一维测量经常在儿童处于运算水平或具有对测量的准备水平之前就教了，而二维或面积测量则经常推迟到儿童能理解的年龄之后几年才教。一般来说，儿童九岁时对用单位正方形的叠合来进行二维测量已有所准备。例如，九岁的儿童能把上图所示的单位正方形叠放到右边的长方形上，将长方形分成若干个单位正方形，结果求得其面积为6个单位正方形。



对七到九岁的儿童，首先应当运用本章所描述的那些实验来测验他们对面积守恒性的理解。当他们已处于守恒的水平或运算水平时，就对用单位正方形进行测量和计算被测图形中所包含的单位正方形的数目有了准备。不应预期儿童在十一至十二岁之前，就已发展了测出长与宽再用乘法求面积的方法。这就意味着，应把这种方法推迟到五、六或七年级再教。何时最合适，这取决于儿童的准备状态。

体积

观察儿童是否能将一幢积木搭的房子在一个较小的地基上重造起来，且使“房间的数目仍然相同”，这是一种揭示儿童对体积守恒性理解的有趣的实验。

儿童大约在八岁时，开始具有内部体积(在房屋内部的体积)的守恒性，就是说，他们这时认识到可以在不改变内部体积的情况下改变建筑物的外表形状(长度、宽度、高度)，只要所包含的积木块数是相同的。但是，儿童一直要到十一至十二岁时才能达到阶段4水平，才能理解积木浸在水中时所占有或排开的水的体积也保持守恒的观念。在这一阶段，他们还开始根据长度、宽度与高度的变化来看待体积。正是这一点，使儿童能发展出计算体积的公式：

$v=l\times w\times h$。

阶段4出现于儿童快要读完小学的时候。由于体积测量往往要到初中才教，所以那时儿童对体积的概念应该已有准备了。究竟要到几岁教体积测量？这最好是要等到儿童有了本章所介绍的那些类型的经验准备之后，以使儿童有机会在有意义的活动中发展必要的概念，而不是靠教师讲述儿童还不理解的公式。在小学五、六年级开始用积木来探讨儿童的体积概念，观察他们在怎样的程度上能解决这类问题，这是一件非常有价值的工作。在任何情况下，体积测量的公式不应当过早地去教。一定要到儿童有了对三维物体的经验，并开始理解必需的概念之后，才能教公式

$$v=l\times w\times h。$$

作图问题

在小学中年级与高年级，使用圆规与直尺的作图活动，对儿童探索空间和进行创造性活动提供了一种媒介。应当鼓励儿童去发展各种类型的作图。儿童可以从圆开始，逐步探索各种内接多边形的画法，比如在圆中先画一条直径，再画另一条与之垂直的直径，然后把两条直径的四个端点连起来，就得到一个正方形。

皮亚杰在考察了许多更加形式化的作图问题后，他发现处于阶段4的十和十一岁的儿童能够运用垂直的观念重新作出一个和已知角相等的角或全等的三角形。然而，我们发现，有许多大学生和成年人在这类作图中也还没有达到阶段4的水平。显而易见，有些儿童在小学高年级(四到六年级)就已经对作图有所准备了，并且许多小学已经开始在高年级为学生提供更多的这类几何的经验。在过去，这类几何知识一直要到十年级或十一年级才教。

20 射影几何

> 画或者想象一条直线，实质上已先假定了一个射影空间或欧氏空间……不管几何教科书中的观点如何，直线与空间的概念远非那么简单。① ……透视是在儿童心理发展的相当晚的阶段才出现的。②

数学中拓扑学的一个内容是研究图形本身的内部关系。例如在线段中，从左至右各点的次序关系是A、B、C、D。点之间的关系就是一种拓扑的观念。又如相邻的思想即B和A邻接，C和B邻接等，也是点之间的一种拓扑关系。包围的关系或者处于两者之间的关系也是一种拓扑关系。如B点在A与C之间，C点在B与D之间。

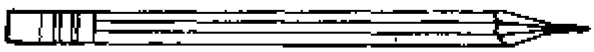
欧氏几何研究的是各种刚性图形之间的关系。例如，考虑两条线段的长度相同吗？两个三角形是全等的还是相似的？根据物体相互间的距离、角度或者方向的关系正确地定出各物体在空间中的位置，也可认为是欧氏几何的内容。如果所讨论的问题只是二维的，如在一个平坦的表面上或平面上，那么这种数学就是平面几何。

在射影几何中，一个物体或一条直线这样的概念不是根据它本身或孤立地来考虑的，而是跟观察它的特定的视点有关，即从这

① 皮亚杰和英海尔德：《儿童的空间概念》，第155页。

② 同上，第209页。

一视点来看它将是怎么样的。这可以包括三维或立体几何。例如，一支铅笔，从不同的角度来看，它的样子就完全不同。

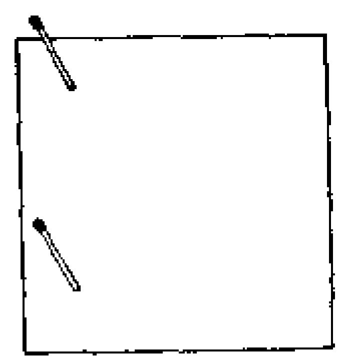


这些视点或观察者与物体之间的关系就表示一种透视关系。透视是射影几何中的一个部分。

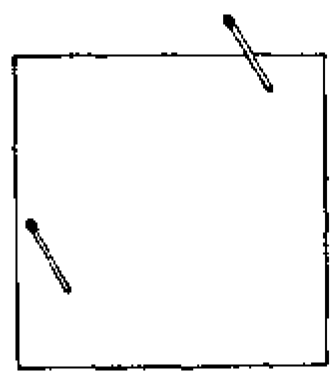
在射影几何中还有一个问题是，假如一个物体投影于另一个物体上面，投影将是什么样子呢？这个问题可以对儿童进行研究，办法是让儿童预言一个物体(如铅笔)在屏幕上的投影将是什么样子。

线性透视(直线性)

虽然对于线性透视的研究似乎非常有限，然而已发现儿童感知或再认某种东西如直线的能力与重新画出某种东西如直线的能力之间存在着很大的差异。我们感兴趣的正是儿童在感知空间与表征空间上的这种差异。

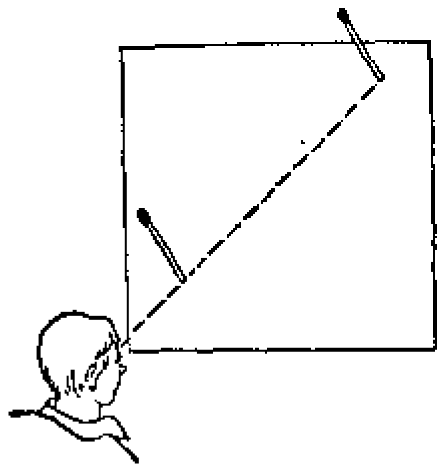


在一个实验中我们使用了一盒塑料火柴。把两根火柴放在离桌子一条边距离相同的地方，要求儿童把火柴想象为是电线杆，并且用其它的电线杆填满这两根电线杆之间的空间，使得这排电线杆排在一条直线上。这个实验的另一种变式是这排电线杆所形成的直线同桌边不平行，以便确定儿童不用桌边作参照系是否也能解决这个问题。



“直线性”概念是通过观察儿童将在什么地方运用“瞄准目标”或注视的动作确定直线性来进行研究的。这样一种动作涉及到

透视或观察者的观察点与被研究的物体。如果选一端作观察点，那么通过把一根火柴投影到另一根上的办法，就能将火柴摆成一直线。儿童一直要到大约七岁才能用“瞄准”或透视来确定直线性。



我们关心的是火柴移动时儿童保持直线性的能力，这是一种射影或欧氏的概念而不是拓扑概念，因为保持形状(如直线性)不是拓扑中的一个因素。

假如这盒火柴的长短不一，那么长度或距离的欧氏观念就发生了变化，但是火柴之间次序和相邻的拓扑关系并不改变。

对一组火柴瞄准所涉及的透视或射影几何，依存于观察者的位置，并随着观察者位置的变化而变化。直线是不受透视变化所影响的唯一的形状。

发展阶段

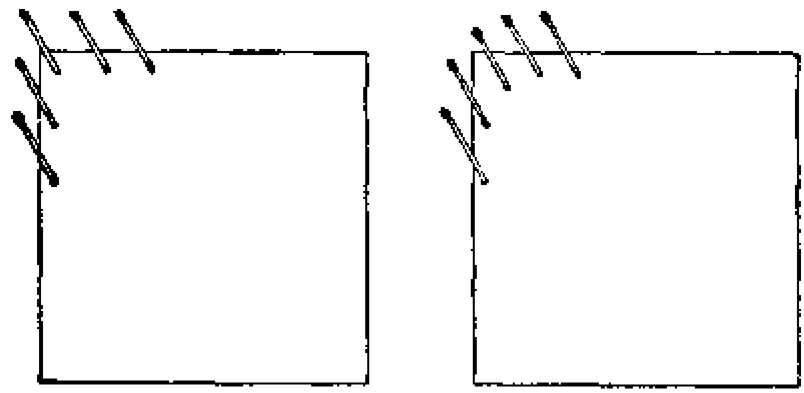
在阶段1儿童能够再认一条直线并能将直线与曲线区别开来，但是他们无法重新画出一条直线，即使让他平行于一条直边例如桌子边来画也不行。他们排的火柴棒或篱笆所形成的线是一条弯弯曲曲的或波浪形的线。他们只能直接靠着另一条直边来作直线，因而也只有将火柴靠着一条直边如一堵墙，才能把它们排成一条直线。

儿童的这种方法是拓扑性质的。如果没有一条直边作基准或模型，那么儿童排的火柴所形成的线就是弯弯曲曲或波浪形的，不过至少A与B、B与C等的相邻关系是正确的。同时B在A的后面，C在B的后面这种次序关系也是能够保持的。

在阶段2，儿童只有在靠近一条直线模型如桌边的时候，才能摆成一条直线。

让一名四岁半的儿童把十多个娃娃在地板上摆成一条直线。如果他试图将各个娃娃放得散开些，那么他摆的这条线就变得弯弯曲曲了。让他将火柴插入桌上的橡皮泥中并排成直线，那么也只有当这些火柴靠得很近时，他才能排成一条与桌边平行的直线。

当他试图排一条截割桌子一角的直线时，他把形成此角的两条桌边作为参照系，起初他将火柴排成一个直角(参看图 A)，随后又排成弧形(图 B)。



A　　　　B

叫儿童用手指指出这条线"看上去"是怎样的，他倒成功地按要求做了，但是当他再一次用火柴排时却又犯了同样的错误①。

一名五岁的儿童列尔无法在一个圆形平面上排出一条直线来，他想为了使这条线是直的，他应该站在线的中段而不是站在线的一头。

给列尔看一条笔直的线，这条线切下桌子的一个角。实验者问他：这条线非常直吗？列尔答：是的。问：为了判断它是否直，最好站在什么位置上，这儿还是那儿(指着线的端点和中点)？答："那儿(指线的中点)。实验者又说：现在让我们移到这张桌子上来(一张圆桌)，我想要你在这两点(A 与 E，相距 30 厘米)之间排一条直线。(列尔在 A 与 E 之间加进了 B、C 和 D 几点，可是他却

---

① 同上，第 160～161 页。

依照桌子的圆边。)实验者问他：这是直的还是圆的？列尔答：圆的。问：但是我让你排一条直线呀？列尔重新开始排，然后说：这回还是同原来一样。我不会排直的。应该把它放在那里(指着圆桌的一条直径)。①

在阶段3，儿童发现"瞄准目标"来排是排出一条直线的最好方法。因而此时表象的直线观念已代替阶段2中知觉的直线而发展起来，知觉的直线观念要求有一个模型如桌子的一条边。而阶段3的儿童已不再局限于这样的知觉观念。他现在不用外界参照系如桌子的边，就能排出一条直线。他已经掌握了投影关系依存于观察者的位置或视点的观念。

对大约七岁前儿童尚不能用"瞄准"的办法来确定直线性的事实，皮亚杰曾分析过心理上的原因，得出的结论是，儿童尚未意识到有特殊的视点。儿童发现他占据了特殊的视点，要比成人所想象的困难得多。瞄准的操作还包括辨别全部的视点，从中选出一个正确的来。这不是一种简单的动作而是包含了对所有视点的协调。②

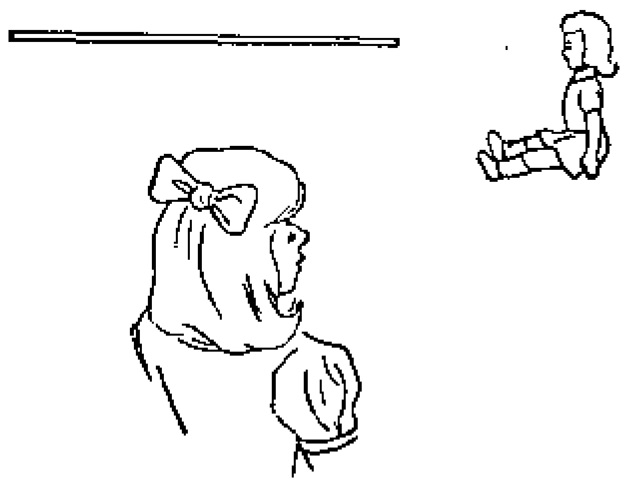
皮亚杰还指出，在这个实验设计中，没有任何东西是鼓励儿童去用投影的方法如瞄准，而不用欧氏的方法，如在两个端点之间保持最短的途径，或者始终沿着某一方向排列的。皮亚杰发现投影方法与欧氏方法在心理学上是同时发展起来的。③

在透视中看到的物体

为了研究儿童对透视或者呈现形状的理解，皮亚杰把一个娃娃放在儿童的右角上，让儿童画出一个物体如一根棒他看出来是

① 同上，第162页。
② 同上，第165页。
③ 同上，第166页。

什么样子的，娃娃看出来又是什么样子的。在下图中，这根棒儿童看出来是长的，而娃娃只看到棒的端面。



可以观察到三个阶段。小于四岁的儿童表现出毫无理解。四到七岁的儿童表现出完全不会或部分地不会对不同的视点加以区别。在这个阶段的较低水平(四岁到五岁半)，儿童所画的物体是与透视无关的，他不是从某一个特定的视点去看这个物体的。在这个阶段的较高水平(五岁半到六岁)，儿童开始对各种不同的视点加以区别。到第三阶段时，儿童已认识到不同的视点之间存在着明显的区别。在该阶段的较低水平(七岁到七岁半)，儿童仅注意到一般的形状变化，而在该阶段的较高水平(八岁半到九岁)，连局部的细微变化也注意到了，并且儿童能描述所发生的定量变化。

在阶段 2，佐姆(五岁二个月)有些回答是正确的，而另一些却错了。当木棒对于娃娃是垂直的时，佐姆能画出垂直的木棒，当木棒对于娃娃是水平的时，他也能画成水平的。但是当木棒指向娃娃时，他却无法画出木棒的终端面来。这时，他先画成水平的木棒，然后当实验者问他是否有把握时，他又把木棒改画成垂直的。实际上全都错了。①

同样，对于一块圆形金属片比如一枚便币，佐姆能正确地用一个圆来表示它或把它画出来，可是对于侧面图他却也画成一个完整的圆了。

实验者问佐姆："你这样看(正面看整个硬币的表面)和那样看

① 同上，第 176 页。

(侧面看硬币的边缘)，看到的是相同的样子吗?"佐姆答："不。"问："为什么不一样?"答："我不知道。"实验者说："试试看，把它画出来。"佐姆又画了一个圆。实验者拿出几张画好的图向佐姆说："你看看这些图，再从里面找出一张这样看(正视)所看到的样子。"佐姆挑了一个完整的圆。实验者又问："那样看(侧视看硬币的边缘)呢?"佐姆选了一个半圆。①

因而对于阶段2的儿童来说，不管观察者的位置如何，圆就是一个圆。给另一名六岁的儿童看一张铁路轨道图，图中铁轨在远处会聚，并让他复制这张图。

迈尔(六岁整)把铁路轨道画成平行的。实验者问他："如果你站在很远的地方看这些铁轨，铁轨这端与另一端是否一样宽窄?"迈尔答："它们是一样的。"又对迈尔说："象这样的篱笆(开始一段篱笆画给迈尔看)，你把它一直延伸到这条很长的路的尽头去。"迈尔将篱笆继续画下去，但始终保持相同的高度。问他："你看篱笆在路的尽头看上去是一样高呢还是低一些?"迈尔答："一样高。"实验者说："再把篱笆延伸得远一些。"迈尔照着办了，他一开始把篱笆画得稍许低了些，但又立即修改，使篱笆仍然同样高。他说："我把篱笆画得小了些。"实验者再问他："假如你站在很远的地方看一样东西，这东西看上去象是大一些还是小一些呢?"答："小一些。"实验者说："那好了，现在你就画出篱笆在很远的地方看起来是什么样子的。"迈尔还是画成同样的高度。问他："在路的尽头，在那儿很远的地方，篱笆好象小了一些是吗?"迈尔答："它并没小些。"②

在阶段3，儿童的思维处于运算的、智慧的或抽象的水平，这与前两个水平是根本不同的，在前两个水平他们的思维都是根据知觉或知觉映象的。这时他已概括出一种观念，即当一个物体离开观察者倾斜时，它看上去就短些。一名八岁的儿童(汉恩，阶段3)正确地画出或表征出一根垂直的木棒。问他："假如这根棒稍微

① 同上，第176页。

② 同上，第177页。

倾斜过去一些呢?”汉恩答:“你必须把它画得短一些。”再问他:“如果我再将它倾斜得更厉害些呢?”答:“你必须把它画得更短一些。”又问:“假如把棒放平呢?”答:“你只能看到一点圆形的东西,别的就什么也看不到了。”①

再给汉恩正面看一个金属圆盘,他把它画成一个圆。假如盘子稍微倾斜一点呢?汉恩画了一个椭圆。如果再倾斜些呢?他画了一个更扁平些的椭圆。那么最终放平呢?他画了一条线②。

因而,一直要到八岁或九岁时,儿童才能正确地从不同的视点或透视来画物体。透视是在儿童心理发展的相当晚的阶段才出现的。

投　影

皮亚杰将透视方面的这些研究扩展到包括对各种物体所投射的影子的研究,比如当一枚硬币、一支铅笔或一块长方形硬纸板倾斜成各种角度以及旋转到侧面或端面等各种位置时,让儿童试着用图画来预言影子将是什么样子的。这种活动在透视或视点方面提供了许多附加的经验,有助于激发儿童从他自己以外的视点去进行思考。从这类活动中可以发现,处于各个发展阶段的儿童的情况,同前几节所描述的相似。

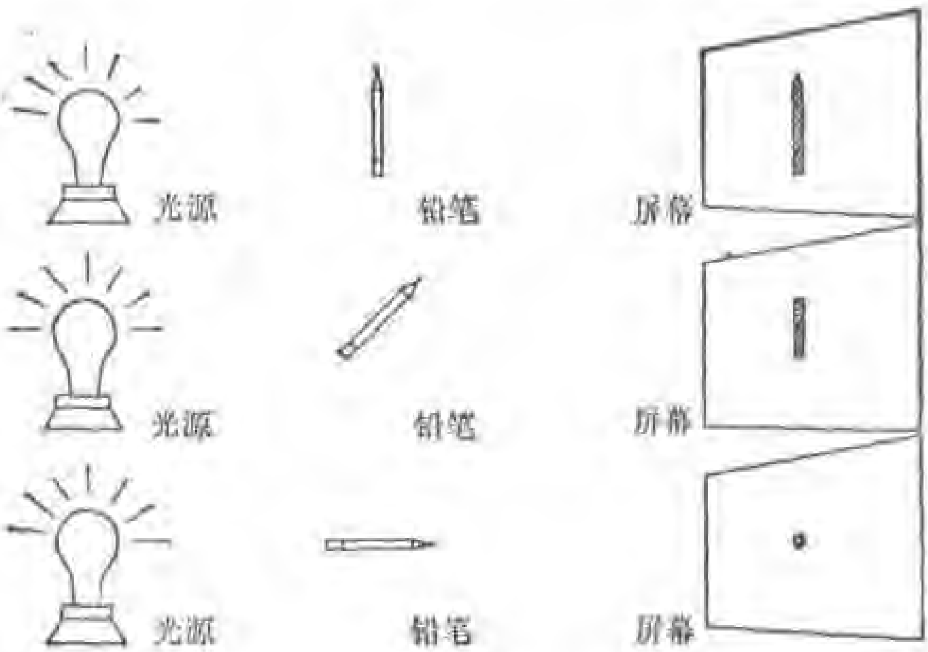
用一个可以随意开关的光源作为视点,并把一个物体放在光源与垂直屏幕之间的一个轻巧的支架上,让儿童用图画或从许多图样中挑选一个的方式,来预言物体的影子看上去将象什么样子。

用一支铅笔作为一个物体,开始先垂直放置,然后向着屏幕倾

① 同上,第189页。

② 同上。

斜，最后放成水平。在此实验中可以观察到相同的几个发展阶段。



不满七岁或八岁的前运算阶段的儿童，只能从物体本身的角度来考虑拓扑的概念。他们将自己的视点放在物体上。他们的知觉完全被（把自己放在物体上观察的）自我中心所支配。他们不能从其它不同的视点来考虑。不管这个物体对于光源的位置如何，总是将物体画成同样的模样。

在阶段2，儿童是从自身的位置而不是从光源的角度来表征物体的。如果铅笔（从光源）指向屏幕，那么儿童也是把铅笔的影子画成一条水平线，而不是画成一个圆。当灯开亮后，他对看到影子是个圆感到非常惊讶。同样，当铅笔从光源斜向屏幕时，儿童没能将它的影子画得较短些，而把影子画成一条长度跟铅笔垂直时的影子相同的倾斜线。灯开亮后，他看到影子比铅笔短，因而也感到很惊奇。

处在运算水平的儿童能从不同的视点进行考虑，正确地预言铅笔放在不同位置时的影子。

当实验中用一只圆盘作为对象时，也能观察到相同的阶段——五岁或六岁的儿童不管圆盘对于光源的位置如何，都预言它的影子是圆的。

在阶段2，儿童虽然能把倾斜的圆盘描述为倾斜的，但是却仍把影子画成一个圆或者改画后也还是不正确。在阶段3，儿童能正确地预言，当圆盘垂直放时影子是一个圆，当圆盘斜向屏幕时影子象卵形或椭圆，而当圆盘放平时影子是一条线。

用一块长方形硬纸板来做实验可产生类似的结果。五岁到六岁的儿童认为，无论纸板对于光源的位置如何，它的影子总是同样的长方形。在阶段2，对于长方形斜向屏幕的情况，儿童预言了不正确的其它形状，如说影子是一个正方形。在阶段3，当长方形倾斜时，儿童正确地描述说影子比原来的长方形"扁了些"；当长方形放平时，产生的影子是"一条直线"。

实验中若用一个三维物体(如一个圆锥体)，则预言影子的形状要比较简单的二维情况(圆或长方形)更困难。皮亚杰报告说，对三维物体的影子形成概念的能力，在时间上显著地落后于二维的情况。皮亚杰把这种能力作为阶段4的特征，它一直要到十一或十二岁时才会出现。

给一名阶段2的七岁的儿童看一个垂直放置的圆锥，他能正确地预言影子的形状，把它画成一个三角形。当圆锥底面朝向光

源时，他把影子画成一个圆，并在圆的上方加了一个点。灯开亮后他看到影子是一个圆，但他无法解释这是为什么①。

① 同上，第204页。

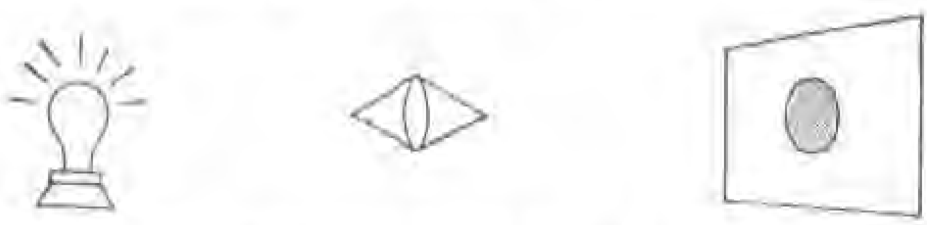
这一阶段的儿童对于物体究竟是怎样投影于屏幕上的问题还没有达到概念化。

阶段3出现的年龄范围相当宽(从七岁到十一岁)，在该阶段儿童开始根据试误的实验方法获得了正确的答案。

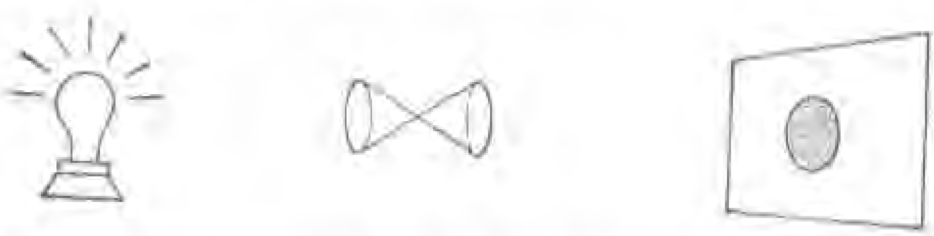
在阶段4，儿童不借助用光源和物体所做的实验就能直接把正确的答案概念化了。

蒙恩(十二岁整)：一个圆锥水平放置，蒙恩说："影子是一个圆，

因为从顶到底部越来越大，而尖顶这一点已经被大圆遮住了"(也就是被逐渐增大的横截面封闭了)。问蒙恩："下面这两个底对底水平放置的圆锥，它们的影子是怎样的呢？"



蒙恩说："一个圆，因为尖顶的两点被遮住了。""那么这种情况呢？"(顶对顶的双圆锥。)



蒙恩说："影子同样是一个圆。因为两个圆是同样的，前面的一个圆遮住了后面的一个圆。"①

① 同上，第207页。

21 数学实验室——一种个别化的学习方法

儿童本身也是物质世界的一部分。他们喜欢探究他们所见到的许多物体，有时甚至使父母大吃一惊。物质世界中诸如植物、岩石、鸟蛋、奶牛等许多对象都是值得注意的课题。儿童走路时，宁愿趟过前面的水坑而不肯绕道而行。对客体的直接经验就学习来说是极其必要的。它是皮亚杰所说的具体运算思维的基础。

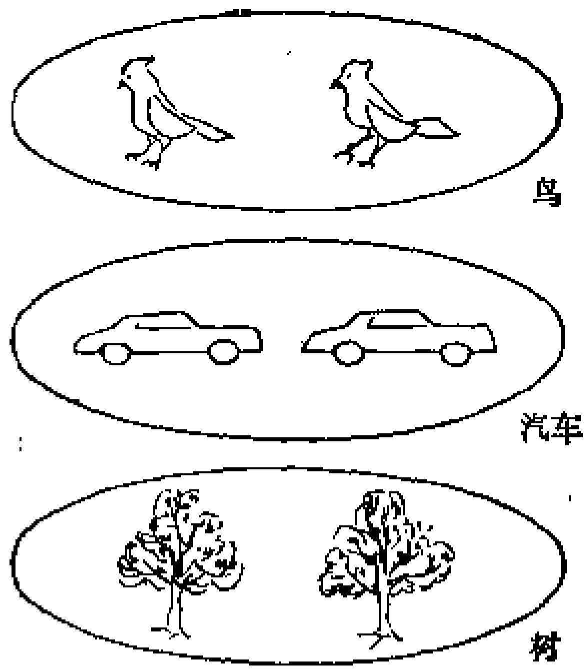
应该鼓励儿童去比较物体——确定这些物体的特点或性质与其它物体的特点或性质之间存在的关系。数学就是研究关系的。一个物体是否比另一个物体较重、较暗、较平滑、较粗糙、较大、较小、较高、较短、较厚、较薄呢？它们的形状相同吗？幼儿将探究这些关系，以后，他们将进行更精确的测量。儿童在实验室里自己进行这些测量，这对他们发展真正的数与几何的概念，是十分必要的。

儿童需要对他周围物质世界的物体有第一手的经验，采用数学实验室的教学方法，就是出于对这一重要性的重新认识。对真正的学习来说，数学的概念应该是从物质世界中抽象出来的。几何与物质世界的关系比数更容易看出来。因为儿童不能拿起或用手去操纵一个数。

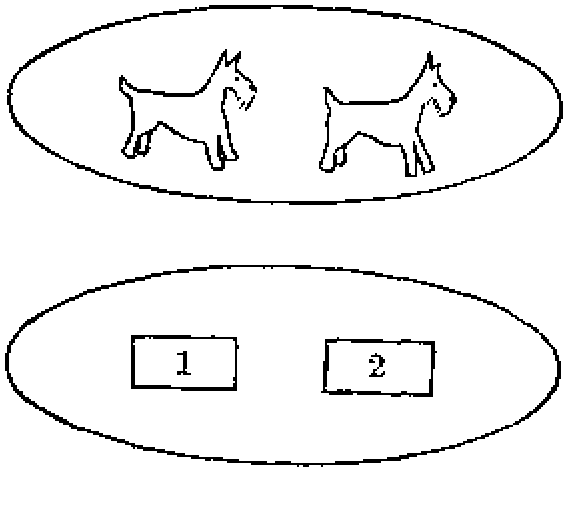
数是一个概念或一种抽象，而不是物质世界中的一个物体。不过，它需要一个物质的框架，让儿童在这个框架中发展数的概念。狗、汽车和房屋是我们周围物质世界中的物体，但“2”这个数并不是。数的世界与物质世界是完全不同的。不过我们可以用从数的世界中所得到的概念去描述物质世界中物体之间的关系。例如，

哪个物体重些、长些、宽些或高些？重多少，长多少，宽多少，高多少？在数学实验室中，测量是一项重要的活动。寻找记录或表述这些关系的方式，以使我们的工作系统化，并使他人能看懂或运用，这也是很重要的。这一方面，图表将是十分有用的。

数，在其基数意义上，可以看做是一个集合的性质。例如，考虑右图三个集合。我们可以发现，其中每个集合都有相同的数的性质，我们称之为“2”。每个集合都包含 2 个物体，尽管我们看不到在图画中有“2”这个字。“2”这个数是每个集合的性质。我们发觉，当我们把每个集合中的物体与相应的用来计数的集合配对时，它们都有一个“2”。

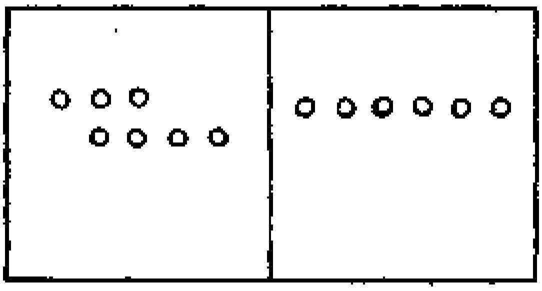


把一个集合中的物体与另一个集合中的物体配对，这是计算的前奏。比较两个集合，它们在数目上是相同的，还是一个稍大一些？哪一个大，大多少？



这种学习方法，与儿童通常通过简单地记住“一、二、三、……”的声音系列来学习计算是尖锐对立的。后者是无效的，这可以从要儿童说出你手中有多少个物体的活动中看出来。如果他只是学会了记住一系列声音，那么他就不能使数的名称与手中的物体个数相符合。他还没有建立一一对应的观念，而这一观念是计算的基础。

同样，儿童可以通过记住表中的两数的和来学习20以内的加法，而并没有真正理解。他记住了3+4=7，但他仍然告诉你，在下面的盒子中，右边的硬币要比左边的多。

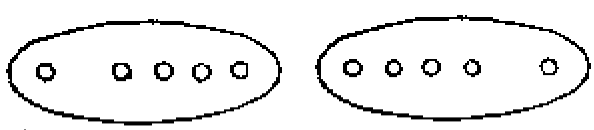


儿童必须在对客观物体的实际操作中发展数学的概念。前面介绍过的许多实验表明，这牵涉到个体的发展过程。对这些数学概念来说，每个儿童都有他自己的发展速度。

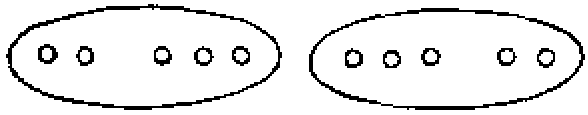
为了满足这一需要，可以把学校教室设计成一种数学实验室，允许儿童在其中进行个别化的必要的对物体的操作或具体运算，这些操作和运算对学习真正的数学概念来说是必不可少的。

这种建立在对物质世界的直接经验基础上的真正的学习，使数学成为一门有趣的、受学生欢迎并使学生能够理解的学科。儿童看到了他正在进行的活动的目标，数不再只是要求记住的某种表或总和了。从心理学的观点来看，这种目标的意识是极其重要的。调查的方法是一种实验方法——你能找出来吗？你能发现什么东西吗？心理学上认为，归纳或发现的方法是重要的学习方法。应向儿童提供一种情境，使他能从中自己发现或“提取”其中蕴含的结构。

例如，向儿童提供这样的情境，并问他们：下面两个集合中每个集合都包含同样多的物体吗？



这两个集合呢？



把子集的次序颠倒一下，集合中物体的数目还是一样吗？你能找到一般的规律吗？(交换性)

数学实验室如何开始活动

许多教师已经把一种实验室情境，例如游戏商店，用作数学教学程序的一部分了。教师让儿童到这个商店去买东西，然后根据所买东西的价钱，要求儿童适当地付钱、找钱。也可以让儿童乘火车旅行一次或让他们计算早晨自己喝的牛奶的价钱。这类实践活动给数学学习以一定的意义。

然而，从个别化学习方法来说，上面这些仍不是实验室的学习情境；它们通常是班级的整体活动，或是企图在同一时间里解决同样的问题。这样的学习，对有些儿童来说可能是有意义的，而对另一些儿童则是无效的。

实验室情境要求以一种个别的活动作为学习的基础。不过在许多情况下，也可让儿童结成一对甚至组成小组开展活动，这也有其长处。实验室中允许每个儿童进行自己的计算以发展他们自己的概念。成对或成小组进行的活动可能有助于对社交的需要和促使言语的发展。与其它方面一样，言语发展在数学学习中也是一个重要的因素。

教师在着手建立实验室时，可先从小范围开始。例如，在教室里布置一个算术角，放些计算架、算盘、积木、测量工具等有用的器具(见下图)。

如有条件，也可在校内专辟一室作为实验室，让儿童在完成规定的作业后到那里去运用所提供的材料开展活动。在实验室中，有许多专为儿童设计的有趣的活动，如数学游戏等。

班级组织

在传统的课堂教学中，儿童仅做一本教科书上的题目。如果分

组进行教学，儿童也只是做不同书本上的题目。虽然可以在这种情况下，采用个别化的教学，但它所提供的仍然是一种只有极小意义的替代类型的经验，而不是直接的经验。

在实验室的条件下，则是给儿童一些"作业"卡片，卡片上通常写着一些需要运用实验室的材料去解答的问题，其中大量是关于测量、比较、分类的具体作业和问答题。

作业可以个别地完成，也可以组成某种小组一起来做。允许儿童两人一组地活动以获得更多的第一手经验，也允许他们对问题进行讨论。实验中，可让一名儿童操作，另一名担任记录。在评

幼儿学校中的儿童在进行关于重量关系的实验。请注意背景中其它测量重量的工具。

价了他们的发现后，他们可以用最好的方式，如图、模型或表等，来记录这一发现。虽然两人一对或分小组学习对儿童言语发展和共享成果等很重要，但这有可能意味着，在这种学习过程中，仅有一个人在学习，而其它的人只是单纯地跟随而已。这种情况，教师很容易发现，必要时，应对分组作些变动。在新的作业开始时，最好重新分组。

教师可按照儿童之间的亲密关系，他们的混合能力或共同能力来进行编组。这些编组方式各有利弊。皮亚杰的实验可以作为决定共同能力组的基础。

刚开始时，教师一天可只让一个小组进行动手实践的“发现”实验，而让别的小组仍继续其日常课程。对新的程序，应先进行小规模的试验学习，看看儿童是如何活动的，当教师感到较有把握时，再扩大规模。这样做也为补充新的材料提供了充裕的时间。星期五下午（当然不必拘泥于这个时间），可作为实验室试验新程序的规定时间。

那些一直在传统的教室气氛中学习的儿童，需要给他们一段时间发展自信心。有的儿童甚至一直要到教师让他拿起铅笔，他才敢这样做。他们习惯于遵命而行。在实验过程中，可能会产生

幼儿学校中的数学实验室。

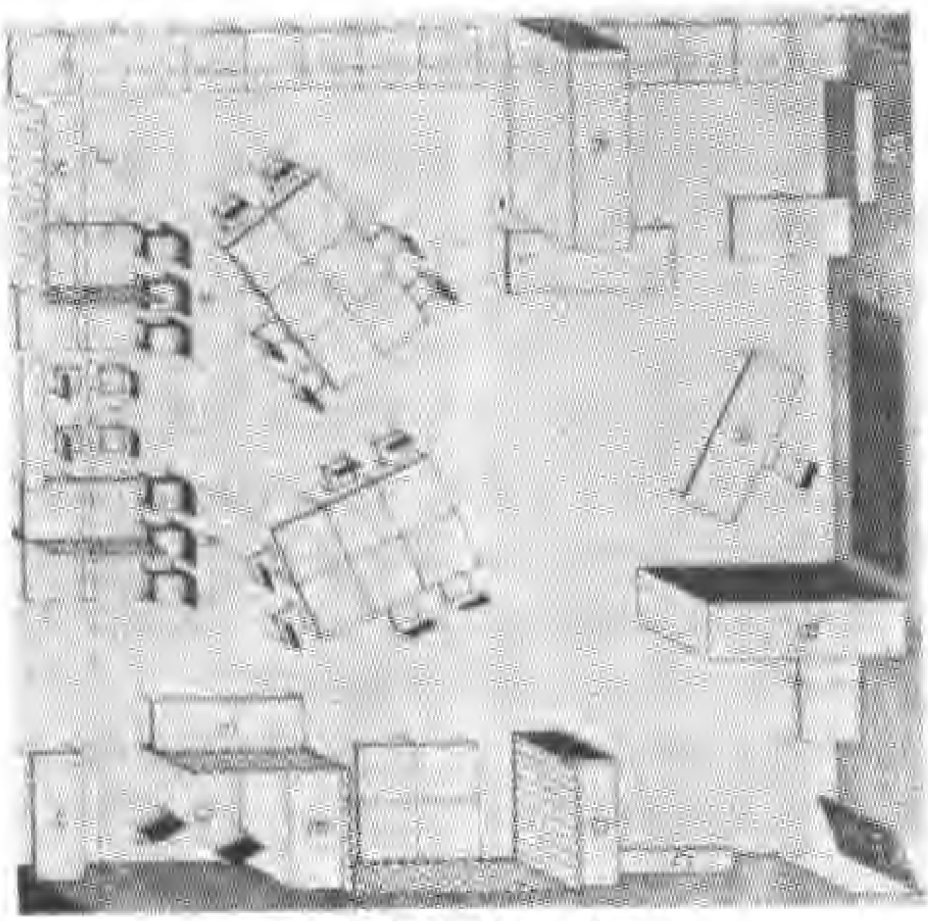
一些混乱和嘈杂，儿童会七嘴八舌地问个不停，但他们会逐渐专心进行自己的活动。最后，当教师经过各个小组时，仅起到一种真正的顾问作用。

教室的布置

在传统的学校中，书桌成排放着，所有学生均面对黑板和教师。在以教师为中心的学习情况下，这是一种合乎逻辑的布置。课堂讨论只是大规模地随声附和。全班学生思考同一个问题，同时朗读同一页书，学生不经允许不得擅离坐位。

但是，如果学习要建立在个别的基础上，即以自己实际的而不是别人替代的经验作为基础，那么对课堂作出另一种样式的环境布置则是十分必要的。同时应当保持一种较自由的课堂气氛，儿童在寻求答案时可以在教室里随意走动。

在许多这样的小学课堂中，原来放课桌的地方，现在放上了长



可进行积极学习的教室布置。

桌和椅子。长桌和椅子对不同的活动或分组可作必要的移动。因为儿童将是个别地进行学习或在小组中学习，各自进行的活动常常是不同的，所以可把书橱和挡板放成适当的角度来作隔墙，使得各个学习小组能分别开展活动。书橱和挡板的后面可用来展示小组活动的结果。儿童有时喜欢在长桌旁站着活动，那就把椅子整齐地堆起来。

在某些实验性的“开放”学校中，儿童不按年级或年龄分组，而是让90到120名儿童与几名教师一起在一间大房间内活动。儿童可以在完成某一种活动后，再去进行另一种活动，只要他们能够完成。活动的范围，同学习材料的种类一样，都要比在传统的课堂里广泛得多。

道德行为

纪律与正直

道德价值观的守恒依赖于逻辑思维的能力，正象“数”这类数学概念的守恒依赖于逻辑思维能力一样。儿童对诸如欺骗、说谎或搬弄是非这类有关道德行为的思想，在他们向健全成人发展的过程中，起着重要的作用。

正如布瑞尔利和赫茨弗尔德所指出的①：对儿童关于惩罚的思想的研究，导致我们重新考虑学校中条例和规章的整个问题。儿童那种克制直接冲动以解决矛盾（冲突）的能力包含着一种离中化的过程。因为这不仅要考虑行动本身，而且还要记得行动前发生过的事情，并能预期到行动后将会发生的事情。

正直的思想不能产生于成人所强加给儿童的规章之中，这些规章往往不被儿童所理解。皮亚杰在询问儿童为什么不应该“偷

① 布瑞尔利(M. Brearley)和赫茨弗尔德(E. Hitchfield)：《阅读皮亚杰著作指南》(A Guide to Reading Piaget)，纽约：Schocken 图书公司，1966，第130页。

抄”邻座同学的作业时发现，只有5%的八到九岁儿童和10%的十到十二岁儿童回答说因为这是“欺骗”①。大部分儿童的回答仅限于“这要受到处分”或者用今天的俗话说“这是禁忌的”。正直所需要的，只是在儿童之间保持团结和相互尊重，而这些通常是在成人的关心下而不是由儿童本身发展起来的。当儿童中的团结增强时，正直的观念就会几乎以完全自律的方式产生出来。

儿童逐渐能看出，对违反规章的人进行处罚以使其改正错误，这样做只是为了使违章的人认识到他破坏了这种团结的纽带。但这种处罚大都是无效的。互反的规律，即把自身置于他人地位上的能力，倾向于一种原谅和理解的道德。当然，对幼儿来说，只是朝这种互反性发展，还要经历许多反复。

皮亚杰得出如下结论：

> 因此，平等思想看来是从相互尊敬所特有的互反性习惯中产生出来，而不是从建立在单方向尊敬基础上的那些义务的机制中产生出来的。②

在实验室中，儿童可以按照自己的速度和水平，朝着自己所确定的目标去进行活动，欺骗行为不会发生。因为这是毫无意义的。正是那些外部强加于他们的标准练习和订正，才使他们采取欺骗行为，以免丢丑③。

材料及其使用

我们已强调了能为儿童观察、把握和度量的各种具体材料的使用，对发展儿童数学概念的重要性。这些材料应是适合儿童操

---

① 皮亚杰：《儿童的道德判断》(Moral Judgment of the Child)，纽约：The Free Press，1932，第285页。

② 同上。

③ 布瑞尔利和赫茨弗尔德：《阅读皮亚杰著作指南》，第158页。

作、不易滚动、不会造成伤害的。此外，在不用时，还应便于收藏。

对较低年级的儿童，可采用木块、干豆或念珠、火柴盒、橡皮、积木玩具、吸奶管、沙土、管刷、压舌板、计数架等材料；学习位值概念亦可运用算盘和袖珍图(pocket chart)。大部分材料都需要存放的盒子。要用黄沙时，可在地板和长桌上铺上塑料布。实验室中还应备有容积相同但形状不同的盒子，用来测定儿童是否达到守恒阶段或认识到量的守恒性。

言语发展是这类活动中值得重视的部分。盒子可用宽、窄，高、矮等加以描述，以此学习相等、大于、小于等数学关系。

□ 比 □ 能容纳的东西多

□ 比 □ 能容纳的东西少

在研究长度问题时，可让儿童比较不同颜色和长度的带子。先问他们：哪条长些，是红的还是黑的？再问：哪条短些？最后，要求他们通过找出最短的带子，把这些带子从短到长排列起来。

儿童能比较他们周围的许多物体的长度，例如铅笔、桌子边等。也需要对他们进行长度守恒的检验。在儿童不能理解长度守恒的概念之前，不应该让他们开始系统地学习线性测量。

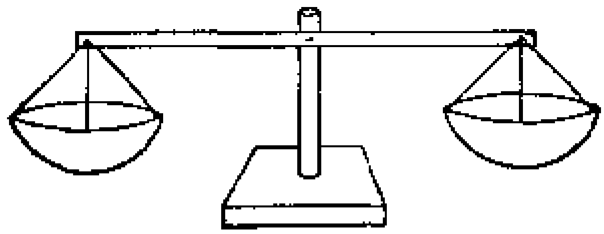
哪根长些?或它们是一样长吗?

哪根长些?或它们是一样长吗?

哪根长些?或它们是一样长吗?

当儿童对此已有准备时(九至十岁)，测量就应是科学和数学这两门课的一个重要内容。测量实验需要许多材料，包括天平、砝码、直尺、码尺、卷尺、千分尺、量角器、圆规、跑表、钟、温度计、小轮及各种体积的塑料容器等。

年幼的儿童可使用下图这样的天平；较大的儿童在掌握了守恒概念后，可让他们使用更精确的测量仪器。



学习表内加法和乘法

表内加法和乘法应该让每个儿童运用具体的材料来学习。某个加法族，例如其和为12的加法族(6+6, 5+7, 8+4, 9+3, 7+5, 4+8, 3+9)，应这样来学习：让儿童数出12个物体，然后想想看，这个集合能用多少种方式分成两个子集合。仅限于两个子集合是重要的，因为加法是一个二元运算，每一次运算只涉及两个元素。

学习积是12的乘法口诀，可让儿童随意分成几个集合，只要每个集合包含同样数目的物体。于是，12等于2×6或2个6的集合，6×2或6个2的集合，3×4或3个4的集合，以及4×3或4个3的集合。

儿童学习表内的乘法口诀时，如第四栏(4的乘法口诀)，可运用若干个包含4个物体的集合，这样就得到1×4, 2×4, 3×4, 4×4, 5×4, 6×4, 7×4, 8×4和9×4的积。

当儿童学会了表内加法，如3+2=□时，他们也就学会了相应的减法，如3+□=5和□+2=5。同样，当他们学会了乘法口诀，如3×4=□时，他们也学会了相应的除法，3×□=12或□×4=12。必要时，这些问题可用麦管等具体物体演示。

商品材料的使用

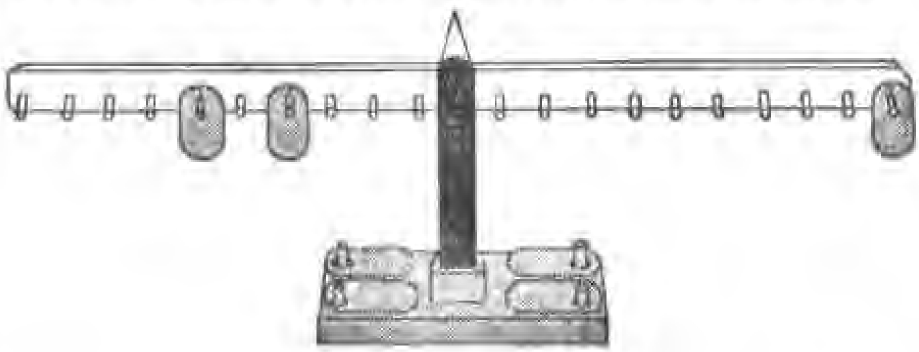
商店出售的材料，价格虽较贵但更有效，如逻辑积木、滚轮、跑表、数学天平、奎逊纳(Cuisenaire)数棒和数字积木。

多用途算术积木和数字积木都可用来把对具体材料的加、减、乘、除运算理性化。

商店出售的这些材料或家庭制作的类似的材料，为理解基本运算提供了更为坚实的基础。也可利用它们开展多种游戏以作为必要的实践或强化活动，这些活动既是有趣的，同时也提供了许多必要的技能训练，如学习乘法口诀。

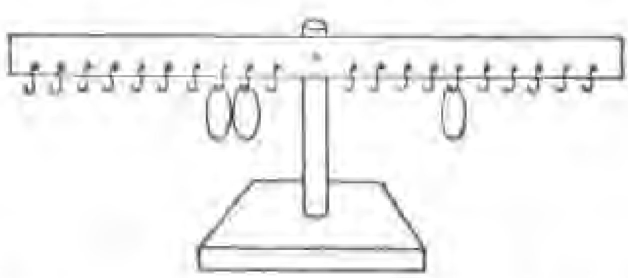
奎逊纳数棒是不同长度的木棒。让儿童适当地组合数棒，可以从中探索数的关系。例如，一根3个单位长的木棒和另一根3个单位长的木棒合在一起，长度与一根6个单位长的木棒一样。

数学天平对儿童学习表内加、减、乘、除也很有帮助。



数学天平

要解决2+3=□，可在天平一端的"2"这个钩上挂一个环，在同侧的"3"这个钩上挂另一个环，表示2+3，为了使天平平衡，必须在另一端的"5"这个钩上挂一个环。

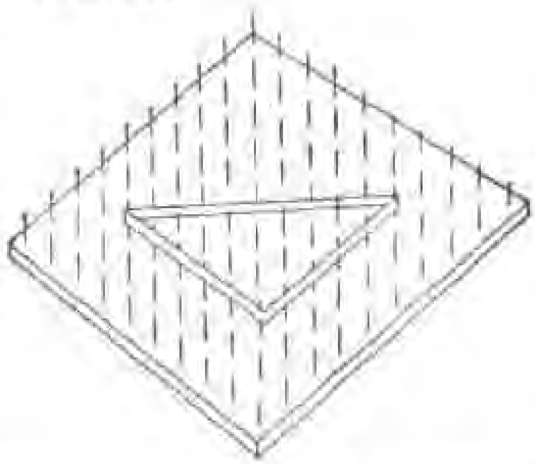


对一个减法问题（加法的逆运算），如2+□=5，也就是如果一个环放在一端的"2"处，另一个环放在另一端的"5"处，那么，为了使天平平衡，还有一个环应放在天平的什么地方。

对乘法来说，如3×2=□，就是把3个环放在2处，为了使天平平衡，另一个环必须放在另一端的6处。解决4×3的乘法问

题，就是把4个环放在3处，再把另外两个环分别放在另一端的10处和2处。对于除法，如$3\times\square=6$，一个环放在6处，那么为了使天平平衡，必须把3个环放在另一端的什么地方。

要探索几何或空间的关系，几何板是一种非常有用的器材，可以把橡皮带绷在板上的木栓上，以表示各种基本形状。周长和面积等关系就可利用它来研究。



一种滚动轮可用来测定距离。它上面有一个计数器能记下所走过的路程。

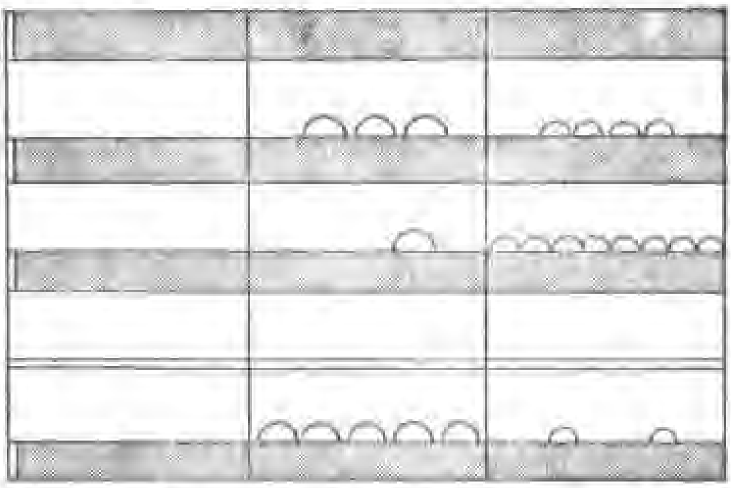
学习加、减、乘、除基本运算的程序或算法

在儿童运用适当的具体材料学会了表内加法和乘法后，他们需要继续学习二、三位数的运算方法。这须再次从具体材料入手，因为从抽象水平上开始，不能使儿童理解。

加、减、乘、除的算法是建立在位值基础上的。每个数字均有一个位值。古代人还没有这样的数制，他们是靠算盘来建立位值的。算盘对儿童是有用的，但用它来学习加法和乘法的算法，仍有局限性。

问题在于要寻找合适的具体材料来表示我们的十进位的数制。我们可用纸或卡片做成分、角、元等硬币的形状。儿童似乎较

容易理解关于钱的问题。因为在其生活中，钱是一种必要的东西。袖珍图也是一种用具体材料探索基本运算的有效的学具。



袖珍图

有些积木制品既能表十进制又能表示其它进制。如多基算术积木(Multibase Arithmetic Blocks and Multimat)，它是由"单位"、"条"、"层"和"块"构成的，用它来表示 $1245_{(10)}$，如下图所示：

如要学习除法计算，可让儿童把这些积木平分给 3 个孩子。这时，应将"块"(1000 个单位)看作是 10 层，与原来的 2 层(每层有 100 个单位)放在一起，得到 12 层。把这 12 层分成 3 个集合，每个集合有 4 层。下一步再把 4 条(每条有 10 个单位)分到 3 个集合中。这样，每个集合分到 1 条，还有 1 条余下来。把余下的 1 条看作 10 个单位与原来的 5 个单位合在一起，共有 15 个单位。然后把这 15 个单位均分到 3 个集合中，每个集合得到 5 个单位，因此

$$1245\div3=4\text{层}(100)+1\text{条}(10)+5\text{个单位}(1)\text{或}415$$

上述算法也可用更普通的袖珍图来表示。纵栏表示十位和个位或角和分；用纸或卡片做的钱代表要计算的数。例如，在下面的加法中

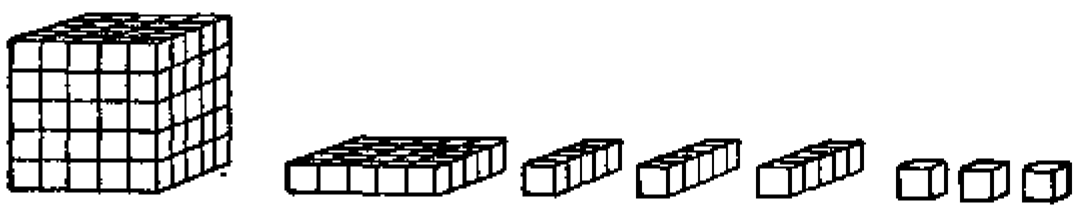
$$\begin{array}{r} 3\ 4 \\ +1\ 8 \\ \hline \end{array}$$

4个一和8个一合在一起得12个一，它也可以叫做1个十和2个一。然后把1个十放在十位的纵栏里。

非十进制

如果用刚才介绍的积木先去探索非十进制(例如五进制)，那对教师和师范生来说将更有意义。这种研究将能使参加实习的教师看到具体材料怎样有助于新概念的形成。那些接受训练准备将来当教师的师范生和那些已经理解十进制的人，常常不了解具体材料对儿童来说是十分必要的，或认为这也许是浪费时间。由于他们自己对五进制的理解可能受到某种限制，所以他们会认识到具体材料在解决诸如 $1133_{(5)}\div3$ 这类问题中的重要作用。

在五进制中，1133可用积木表示如下：

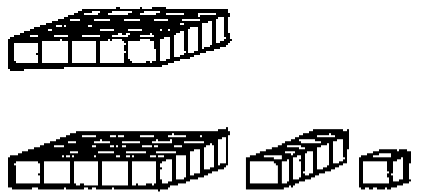


1块　　1层　　3条　　3个单位

要解决上面的问题，可把"块"(125个单位)看做5层(每层有25个单位)，于是就得到5+1或6层。把它们分成3个相等的集合，每个集合中有2层。然后，再把3条分到这3个集合，每个集合有1条。同样，把3个单位分到这3个集合，每个集合有1个单位。于是

$$1133_{(5)}\div3=211_{(5)}$$

用积木表示，结果就是三个这样的集合，每个集合有



2层　　1条　1个单位

象 1133÷3 这样的除法问题不应说成是"被 3 除"，因为这样说在具体水平上是毫无意义的。应代之以这样的说法："把 1133 这样的一个集合分成三个相等的集合。"

在儿童学习加法和乘法表时，这些积木也是很有用的。在十进制中，解决 2×6＝□ 和 6+6＝□ 这类问题，要用到"小块"这一单位来计算，2 个含 6 个单位的集合，共是 12 个单位，若用最少数目的积木来表示，又可说成是 1 条和 2 个单位。

十进制的乘法计算

为了介绍十进制的乘法计算方法，让我们来看 2×36 这样的问题是如何解决的。36 用积木可表示成 3 条和 6 个单位。那么，2 个这样的集合一共有多少呢？游戏的规则要求用最少数目的积木来表示答案。因此，2 个含 6 个单位的集合或 12 个单位就要改说成 1 条和 2 小块。这 1 条再与 2 个含有 3 条的集合并在一起，于是得到了 7 条。这题的答案就是 7 条又 2 个单位，或 72。

对于两位数的乘法，如 12×34 或

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 12 \\ \hline \end{array}$$

在运用象积木这样的具体材料时，就要涉及 12 个含有 3 条又 4 个单位的集合。如果把这 12 个集合分成 10 个含有 3 条又 4 个单位的集合与 2 个含有 3 条又 4 个单位的集合(乘法对加法的分配律)，那么问题就简单化了，就可用类似于上面所述的方法来加以

解决。

10(3条+4个单位)
或30条+40个单位
或3层+4条
或300+40

10×34
加
2×34

2(3条+4个单位)
6条+8个单位
60+8

儿童用具体材料解决数学问题的程序，可采用“作业卡”的形式来安排。本章末附有这类程序化的学习材料的范例。这些材料，使学习变得对儿童更有意义，也使教师免于一味充当问题的解答者。

爱护材料

对于使用学习材料的责任应该加以明确。

教师的责任

1. 收集并安置好必要的材料。
2. 安排好贮放材料的地方和盒子，并贴上标签。
3. 需用精巧的工具时，应仔细向学生介绍它们的使用方法。
4. 应放手让学生使用材料，不必把时间花在对材料的反复检查上。

学生的责任

1. 选择合适的材料。
2. 使用中爱护材料。
3. 用毕后放回原处或交给负责的组长。
4. 整理和打扫活动场地。

书籍

现在的教科书比从前的要好得多。包含的数学内容比较合适，同时组织得较好，阐述也更吸引人，还常常联系学生实际运用的需要。

传统课堂中使用的是一种按年级编排的教科书。儿童逐页、逐课地学习这些教科书，通过练习予以强化。教师提出概念、法则，做一些例题，然后儿童去做其它类似的题目。这样教学，只能使用一种课本，每个学生只是有一册复本而已。

然而，许多教师已认识到，同一年龄阶段的儿童，他们所具有的能力和能获得的成就是极不相同的。为了解决这一问题，他们对儿童进行分组教学，让能力和成就水平不同的儿童使用不同的教科书。解决这个问题的另一方法是向不分年级发展。这样做，就要求有更多的不同水平的课本。

在以经验为核心的数学实验室的学习程序中，课本也是必需的。然而，课本是作为一种材料来使用的，就象实验室中的其它材料一样，而不象许多课堂教学，把它们作为学习数学的唯一基础。

计算的实践活动是必不可少的，不过它并不是整个数学大纲，如许多学校所做的那样。例如在操场的四周围一道篱笆，每隔4尺立一根柱子，共要多少根柱子？儿童要解这样的问题，就要先求出操场的周长，并能看出必须用除法计算。他们也得知道必要的乘法口诀。为了记住这些乘法口诀以及除法的算法，就必须进行计算的实践活动。

如果这样的计算实践是从解决问题的需要中引出来的，那就更有意义。如果儿童不知道乘法口诀，那么他们很快就会发现，要做除法是非常困难的。

但是，乘、除运算的练习应该在儿童获得具体材料的经验之后进行，否则就没有什么意义。阅读本书的成年人大概是从乘法表而不是通过自己运用积木等具体材料来学习乘法的。分数问题之

所以有许多成年人还不理解，就是因为它们是在抽象水平上“教”的。例如，在客观世界中，什么问题是由这样的记号“$3\div\frac{1}{2}$”或“$\frac{1}{2}\div3$”或“$\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}$”来解决的呢？你能用具体材料来表示这些记号吗？

一旦概念被那些处于具体运算水平的儿童从具体物体中抽象出来，那么印有重复问题的教科书与练习册就能用来进行强化或作为练习材料。本书也可作为这些强化问题的重要的来源。在数学实验室的学习条件下，这些问题常采用“作业卡”的形式出现。

作业卡

所谓作业卡，就是把要学习的材料按页码或问题编成一张张卡片。这就可以在实验室的条件下，将要求儿童学习的关于某一概念的材料分成许多个“单位”，分别写在一些“作业”、“任务”或“工作”卡片上，然后让儿童学习。作业卡放在纸袋里或卡片夹中。作业题目修改时，可以变更、增补或删除某些卡片。

作业卡举例

I

(1) 从角和分两种硬币中（或用纸片画成的硬币代替）拿出一些钱来，分成两堆，使每堆中既有角，又有分。

(2) 在纸上列出两栏：

角　　　　　分

(3) 把每堆钱的总数写在适当的栏内。

(4) 一共有多少钱？它能用较少的硬币来表示吗？如果能，该怎样写？

(5) 解决这类问题的最好方法是什么？你现在所做的就叫加法。

II

(1) 用角和分来表示26（2角6分）。

(2) 把这个数加倍，先估计你的答案是多少。

(3) 你能用较少的硬币来表示你的结果吗？

(4) 你刚才所解决的问题可用下式表示：

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \end{array}$$

(5) 再做下面的题目，先用硬币来做，然后再用数字表示。

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ \ 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \times\ \ 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ \ 3 \\ \hline \end{array}$$

III

(1) 用角和分来表示32(3角2分)。

(2) 把这些钱平分给你和你的一位朋友。

(3) 每人分得多少？

(4) 你做的题目可用下式表示：

$$2\overline{)32}$$

在横线上面写出答案，把每人分得的角数写在原来总数中"角"的上方。

(5) 现在再对不同数量的钱试着解类似的除法问题。

IV

(1) 把装在袋子里的逻辑积木倒到工作台上。

(2) 把这些积木按你认为的某种性质分组，写出每组积木有什么共同点。

(3) 你能把它们再按另一种方式分组吗？写出新分的每组积木有什么共同点。

(4) 还有没有另外的分组方法，使得每组内的积木有相同之处？如果有，把它们写出来。

儿童在记录他的实验结果时，教师可与他进行讨论，看他是否发现了问题中所包含的重要模式。在第一次使用作业卡时，儿童可能把完成作业当成是一项竞赛游戏，他们虽然完成了作业，但忽

略了其中所包含的重要观念。如果儿童没有发现这些重要的观念，那么教师应向儿童问一些适当的问题。在儿童完成了某项作业并记下结果之后，方可继续进行下项作业。这是一种“实际做”的活动或作业。儿童学习的基础是自己解决问题，而不是去听别人“讲解”概念。

记录

儿童所做的记录可能成为他的学习经验的重要部分。有的经验涉及记录，有的则不涉及。评价的标准在于记录是增进还是损害经验，这可从儿童的记录行为中很容易看出来。把所做的记录展出给班上其它同学看，这可能是一件令人愉快的事。

儿童所做的第一种记录是关于个人的事情的，写在他们的日记或作业本中。在写作技巧提高后，他们喜欢记下长篇的故事。如果他们获得数学的经验，这些经验也将写入他们的日记中。

第二种类型的记录用的是图表形式，以展出给班上其它同学看。

如果使用作业卡，可在墙上张贴进度表，或在本上记下进展情况。当儿童完成了一项作业后，就在表上他的栏内记下通过的日期。

建议教师也亲自记录，把一周内儿童活动的进展情况（哪种活动会做，哪种不会做，为什么不会做；哪些儿童取得了成功，哪些儿童失败了，为何失败），分别记录下来。内容包括完成作业的日期、获得的成绩、存在的困难以及对数学的态度等。

校长应记录全校儿童数学上总的进展情况。这可从每班教师的记录中总结出来。还有一类记录是记载每个学生的进步，这可通过定期的考查（如半年或一年）来进行。测定个体的数学概念的发展情况是必需的，这就要求由专人对儿童进行类似于本书所描述的皮亚杰式的个别测验。那种关于计算的标准成绩测验，对儿童来说是一种机械的过程，它通常所测的并不是概念的发展情况。

儿童作业举例

每项作业应包括如下几个方面：

1．完成实验。

2．可能的话，用图表表示结果。

3．记下实验的发现或结果。

重量关系

1．在天平一端的盘子中放上比另一端多的物体(贝壳、纽扣、沙等)，估计它们的重量关系，并描述确定这种关系的不同的方法。

2．估计下列每对物体的重量关系(用天平秤检验自己的估计)。

(a) 一辆玩具小汽车与一支铅笔。

(b) 一只2寸长的钉子与一只4寸长的钉子。

(c) 一样大的东西与一样小的东西。

3．下列两袋东西的体积相同，哪一袋重些？

(a) 一袋念珠与一袋弹子？

(b) 一袋贝壳与一袋沙？

用天平确定它们的重量关系。

4．一分硬币，伍分镍币，一角硬币和二角伍分的银币之间的重量关系如何？写下你的发现或结论。

容积关系

1．拿一些不同大小和形状的容器，其中哪一个容积大些？

2．拿一套不同大小的塑料容器，探明它们之间的容积关系。用表或图表示结果。

3．拿三只同样型号和大小的饮水杯，每只杯子里倒进不等的水，使它们敲起来发出不同的音响。测定每只杯中水的体积。它们的数学关系如何？作出图或表。

时间关系

1．把全班同学的生日日期列出表来，写出各个月出生数。你的结论是什么？

2．在一根绳子的一端系上重物，做成一只单摆，以此作为计量时间的装置。然后试验一下，如把绳子缩短或加长，情况将如何。你能用图或表把你的实验结果表示出来吗？记下你的结论。

3．用图或表来表示你是如何度过一天24小时的。

大小关系

1．画一只比狗大的动物，再画一只比狗小的动物。说出这二者的大小关系。你能用图或表来表示吗？写下结论。

2．用一根绳子测量头围、腰围以及颈和膝部的粗细。你能用图或表来表示它们的关系吗？然后把这些关系与其它同学的进行比较。

3．用一根绳子，测量一下班里五名同学的臂长和脚长，用图或表来表示它们之间的关系。

4．以2寸的间距把全班同学按身高分组，每组有几名同学？你能用条形图来表示结果吗？

5．把一组纽扣或洋娃娃按大小分类，并作出大小关系图。

形状关系

1．找出你的教室中有多少三角形、正方形、长方形的图形(如黑板就是一个长方形)。列表表示这些形状的数目关系。

2．画一只帐篷，说出你在画图时用到了哪些图形。写出它的高与宽之比，以及顶部的宽与底部的宽之比。

3．看(或画)一只船的图画。画这只船用到哪些图形？不同图形的数目各是多少？能列表表示你的答案吗？

给教师的作业

选取并改进一套用来教某个数学概念的具体材料，并准备一套学生学习这个概念时用的作业卡。

22 结　论

> 皮亚杰的理论对数学教育的意义迄今尚未被人们所认识。现在非常急切需要那些有资格的研究人员对美国儿童进行相应的研究，应当根据正确妥当的心理学论证来重新编写新的教材。并且，在师范教育中扩大对皮亚杰理论及其意义的研究，将是改进小学教学新的里程碑。①

目前不少数学教育家正在开始思考皮亚杰的研究对于儿童数学教学有些什么意义，然而要贯彻皮亚杰的理论，看来还有一段很长的路程。第一个原因是要求有更多的支持皮亚杰理论的研究。第二个原因是不愿考虑学习过程中的心理学而宁可把数学看作是一个逻辑过程。第三个原因是不想钻研皮亚杰卷帙浩繁的著作。还有第四个原因，就是存在着反对的观点，如斯金纳的观点。至于皮亚杰对斯金纳的评价，本书在第15～16页上已叙述过了。

皮亚杰本人对当前教育所作的结论是比较消极的，这些结论在第二章里也已作过介绍。读者可以将它们重读一遍，以作为本书结论中的一个部分。

---

① 罗逊勃洛姆(P.Rosenbloom)："皮亚杰理论对数学课程的意义"(Implication of Piaget for Mathematics Curriculum)，豪斯通(W. R. Houston)主编：《帮助小学教师改进数学教育——会议报告集》(Improving Mathematics Education for Elementary School Teachers-A Conference Report)，密执根州立大学，1967。

发展阶段的重要性

我们曾经详细地揭示了儿童学习数学概念的困难。我们用许多实验论证了学习数学一定要有必要的准备性。然而，许多教师尚很难适应这样的思想，即将儿童发展阶段作为规划他们的教学大纲的一个基础。

儿童在达到具体运算阶段（阶段3）即达到数的守恒性之前，还无法理解大于、小于或加与减这些观念。使人感到不安的是许多教师却认为他们能够对平均年龄为六岁的儿童进行数的教学，或者对七岁的儿童进行度量的教学，或者对八岁的儿童进行逻辑的教学。

但是这决不意味着教师就无能为力了。教师应当运用可进行实际操作的材料为儿童提供丰富的经验，使得儿童在具有学习能力的准备时就能获得必要的学习环境或学习情境，这些外界条件将促使儿童形成对于守恒性或不变性概念等所必需的逻辑过程。这也就意味着要在谈话情境中对儿童进行测验和再测验，直到发现儿童对某种概念已有所准备。如果没有给儿童提供适当的学习情境，比如对许多后进的孩子就是如此，那么这些儿童即使到了三年级或四年级（即十岁或十一岁时），也仍然还处在数的非守恒阶段。

伊萨克描绘了假如过早地教数的概念，那么这些概念对于儿童来说将会是多么陌生。

> "通常四、五岁的儿童就能很容易地数数，大约数到八或十，他们不仅能够嘴上数，而且还能数实物。稍微大些的儿童，就能对简单的加法问题甚至最简单的乘法问题得出正确的答案……。但是，皮亚杰及其同事的一系列著名的实验表明，透过儿童那些言语的表面去分析，实际上这些儿童还没有一丝一毫关于数的观念，他们所说的数完全同大小及形状或排列混淆在一起了，这些儿童无法将数

概念运用到最明显的情形中去……。五至七岁的一般的儿童在计数和运算能力方面看来有些进步，但这些仍然只是外表的现象，几乎没有什么意义与价值，因为此时*基础还不存在*。事实上在这一阶段，我们能够观察到的进步是很缓慢的(每当物体的形状或排列改变时，儿童就要重新摸索守恒性的每一个侧面)。以致当把皮亚杰的实验应用于再大一、二岁的儿童身上时，正如我们可以想象的那样，我们将会发现自己又回到了熟悉的世界，似乎它以前确实是不存在的。儿童现在毫不迟疑地给出的正确的答案都是当然的。①

英海尔德认为②，守恒性或不变性观念的普遍的重要性，就在于各种最基本的推理形式——逻辑推理、算术的、几何的以及物理的推理，全都是建立在量的不变性原理之上的。不变性观念对于儿童来说涉及许多教师预料不到的困难。

守恒性或不变性的基础是可逆性。前运算阶段的儿童无法逆转他的思维过程，当一个物体的形状改变时，比如将水从一个容器倒入另一个形状不同的容器中，前运算阶段的儿童就会认为水增加或减少了。他是依据新容器的外表形状来思考的。他们还无法掌握这种思想，即过程是可以逆转的，可以把水倒回原来形状的容器中去，从而得出水的总量没有改变。同样道理，他们能够解答3+2=□，可是却不能解答3+□=5。布鲁纳指出③，对前运算阶段的儿童传授概念时，即使使用了高度直觉的方式，教师仍然会感到受到很大的限制。

那么，什么时候儿童才达到运算思维水平呢？儿童在十二或十三岁之前完整的逻辑思维结构还没有充分发展起来，不过许多概念在前一阶段、即具体运算水平就能掌握。其中之一就是包含

---

① 伊萨克(N. Isaacs)：《皮亚杰研究工作中的若干问题》(Some Aspects of Piaget's work)，英国福禄贝尔基金会出版，1965，第24～25页。

② 英海尔德："回忆伍兹霍尔会议"(Memorandum for woods Hole Conference)，转引自布鲁纳(J. Bruner)《教育过程》(The Process of Education)，哈佛大学出版社，1963，第41页。

③ 布鲁纳：《教育过程》，1963年英文版，第35页。

关系，这一般在七至八岁的儿童中就已发展起来了。当儿童能理解包含关系的概念时，教师就能用一种有效的方式开始教他们加法了。当然这种教学不应采用惯常的单纯“讲述”的方式，而应当为儿童提供某种情境，使儿童能在此情境中自己学习。这种学习应包含许多使用具体的或可操作的材料的活动。

本书的每一章都是要为教师提供充分的思想和材料，以便让他们决定在什么时候开始教学某个基本的数学观念。皮亚杰的研究成果，已经为其它许多研究所证实。例如，艾尔肯①证实了关于儿童掌握数的守恒的平均年龄。他报告说量的守恒（这是学习数的概念所必需的）是七岁到七岁半时出现的，这比目前大多数小学里对儿童进行数的教学的年龄要晚一年。阿尔密②发现在三种基本的实验中，守恒性在大约七岁时出现。其它一些研究发现，数的守恒的出现比七岁稍微早些。在儿童的发展中存在着一种变差，每个教师了解自己学生的唯一方法就是教师自己去对学生进行测验，并把测验结果作为制定教学大纲的依据。

因为七岁左右是一个关键性的发展时期，所以可以有充分的理由得出结论，就进行系统的数学教学而言，六岁到七岁的儿童实际上是处在学前的阶段。六岁的儿童与七岁相比则更近似于五岁的儿童。在一年级及幼儿园阶段，或许更应该为儿童提供学习数学之前的各种准备活动。这就意味着对当前许多一年级数学课程要来一个巨大的改革。在一年级时，应当让儿童运用具体材料进行更多的活动，而且要少用数学符号，如＋、－、×、÷。

虽然六岁半到七岁半这段时间是学习许多数概念的一个重要的准备阶段，但其它一些数概念，如比例和时间，则要到相当晚的时候才发展起来。

---

① 艾尔肯（D. Elkind）：“儿童对质量、重量与体积的发现”，《儿童的逻辑思维》，第17页。

② 阿尔密（M Almy）：《幼儿的思维》（Young Children's Thinking），哥伦比亚大学师范学院出版社，1967，第90页。

在论述几何与测量的几章中(第15章至第20章),我们已经知道关键性的发展变化出现于九到十一岁之间,这样,就不仅是小学低年级教师要考虑学习数学的准备性问题。儿童的数学和逻辑概念直到大约十二岁也就是小学毕业之际,一直在变化和发展着。此外,我们在谈到把七岁作为某些概念发展的平均年龄时,必须记住,这些概念很可能有些五岁的孩子就已经具有了,而有些九岁的儿童却还没有出现。

研究儿童对空间的理解是最有启发性的。儿童对于空间的理解不是由什么人给予他们的,也不是自动产生的,而是经历了一个长时期的发展过程。这种理解是儿童在一定的发展阶段,积累了许多关于物质世界的经验之后,在思想中构造起来的。儿童为了正确地决定自己和其它物体的位置,就需要一个抽象的参照系,比如垂直坐标轴和水平坐标轴(即笛卡儿直角坐标系),这一点儿童在大约九岁之前是做不到的,然而却很少有人注意到儿童缺乏这种能力。例如在低年级让儿童画一张他家周围的地图,在这个发展阶段,这类活动即使不能说毫无意义也是意义极小的。

研究儿童对测量的理解也是极有启发性的。在对儿童进行有成效的测量教学之前必须先发展某些概念。然而令人遗憾的是,不少教师至今仍然忽视几何,他们认为唯有数的运算才是必要的。而实际上几何对数的运算也是很有意义的。

皮亚杰对于儿童时间概念早已进行过详尽研究(参阅本书第12章),然而直到1969年才出版了关于这些研究成果的英文译本。

测 验

关于守恒性或不变性的重要性,阿尔密发现Pinter测验及阅读准备性测验的结果皆与儿童在守恒性方面的进步程度有值得注意的关系,她认为这两者有一个共同的因素作为基础,即教师通常

所说的"心理成熟"①。她总结道，各种新数学大纲的成就很大程度上依赖于所教儿童的概念能力②。根据儿童的这些概念能力来制订数学教学大纲，这正是本书最为关切的。

阿尔密在谈到诊断性测验问题时还指出了皮亚杰的研究及其方法对于评价儿童的进步具有重要的意义，她认为皮亚杰的谈话法提供了标准化常模测验所无法提供的信息。在谈话过程中揭示了一个儿童如何组织或不能组织信息的方式③。

现在还有一种建立在皮亚杰理论基础上的标准化测验，即一种"心理发展量表"④，它与传统的斯坦福-比纳(Stanford-Binet)测验的根本不同点在于，它是运用皮亚杰所描绘的阶段论来看待智慧发展的。斯坦福-比纳测验具有相当高度的结构，它是根据儿童正确与错误答案的得分给出一个平均的心理年龄(即智慧年龄，简称智龄)。而心理发展量表，如蒙特利尔测验，它所包含的测验题目较少，但每一个题目都是精心设计的，用于更加精确地测验儿童的思维品质。其中还有一些供选择的问题，它们的使用与否须视上一个问题的答案是否正确来决定。每个测验题就与本书中所描绘的一个实验相类似。可惜的是这样一个测验所花费的时间比斯坦福-比纳测验要长得多。

谈话技术

皮亚杰理论对于师范教育的另一个含义就是，对于某些教育

① 同上，第104页。

② 同上，第126页。

③ 同上，第135页。

④ 皮纳特和劳伦多(A. Pinard & M. Laurendeau)："一个依据皮亚杰理论设计的心理发展量表"(A Scale of Mental Development Based on the Theory of Piaget)，《科学教学研究杂誌》(Journal of Research in Science Teaching)，2(1964)，第253～260页。

技能必须比现在更加注意。最重要的教育技能之一是发展有效的个别谈话的技术。可以把五岁至十岁的儿童带到实验班中。当师范生们同儿童进行谈话或从旁观察时，他们会感到谈话技术的困难，因为谈话要以恰当的顺序提出问题并选用能够交流思想的词汇。本书中的许多照片就是在这种实验班里拍摄的。

如果实验班的教师不是在他自己班级的师范生面前与儿童谈话，那他会发觉这些儿童最能合作，儿童会把这些实验当作一种游戏并乐于回答问题。有时候找不到小学儿童，教师常常会发现，他班级中的师范生们把邻舍的孩子或自己家中的儿童带来了。儿童被带进实验班后，可先让他们坐在一边，每次叫一名儿童来做实验，如果实验从年龄最小的儿童做起，那么皮亚杰的发展阶段就很容易被演示出来。实验时要为每个儿童设立登记卡片并作不拘形式的记录。

师范生们还需要进行设计实验与仪器的练习，这些实验和仪器能适用于测验儿童的数学概念或逻辑思想。在把儿童带进实验班之前，应先对这些实验设计进行讨论。

因而，实验班教师应当为师范生提供下列机会：(1)进行某些皮亚杰实验，实验对象为不同年龄、不同能力的儿童，特别是在五到十岁的年龄范围内。(2)设计并实施各种实验去测验儿童对某些特殊的数学概念的理解，这可以对原来的皮亚杰实验作某些修改。我们感到幸运的是，皮亚杰的测验巧妙地运用了非常简单的设备与材料，并以儿童能够理解的问题来研究基本的数学概念。

在师范教育中，必须训练师范生在个别接触的基础上对儿童进行工作，这样，师范生就会很快认识到他们缺乏恰当地进行谈话的技能，这也是本书逐字逐句地摘引许多皮亚杰谈话记录的一个原因。不管是个别谈话还是在通常的课堂教学中，教师都必须考虑提出问题的方式，以使儿童不会碰到言语交际和理解有关数学概念的困难。许多教师也已经开始认识到，更为需要的是提出问

题并听取学生的回答，而不能缺乏耐心，直接将答案告诉他们。在皮亚杰的谈话中都没有给出答案，儿童需要帮助时可以这样问："老师，您能帮我做吗？"

当儿童提出问题时，教师的作用是什么呢？为了让儿童发展他们自己的结构，也许更为可取的办法是教师只回答他们"对"或"错"，而不必试图详细解释，因为解释并不能发展儿童必要的结构。儿童听到教师对或不对的回答后，他们必须形成自己对这些问题的解释或理论。这就是色奇曼在伊利诺斯询问训练研究中所采用的方法。①

把课堂作为实验室

许多实验，如那些守恒实验，都包含着物体形状或方向上的改变或转换，这些转换在知觉或感觉印象和守恒或不变性的逻辑之间引起冲突。教师的一项重要任务就是帮助学生运用具体物体来考察这类转换，以作为从知觉思维水平发展到逻辑思维水平的一个基础。

了解儿童概念的发展过程，对于确定应该在什么时候引入数学和逻辑中的各种观念以及引入的方式，是非常重要的。许多诊断性测验可用来确定引入的时间。但是当儿童已经具有学习的准备性或者当他们已处于具体运算水平时，数学概念的学习仍然是一种个别的过程。因为对于不同的儿童，同一种数学概念的学习是在不同的时间（即年龄）发生的。

个别教学的程序应当成为学校教学大纲的一部分。程序化的学习材料或作业卡片就是部分答案——即把对问题与材料精心组

---

① 色奇曼(J. R. Suchman)："伊利诺斯询问训练研究"(The Illinois Studies in Inquiry Training)，《科学教学研究杂志》(Journal of Research in Science Teaching)，2(1964)，第231～232页。

织的程序作为发展儿童有关的数学概念的基础。有必要在实验室中放置各种材料，这些仔细程序化并加阐明的材料将对每个学生提供充分的帮助，使他能自己进行实验或者与同伴一起进行实验。教师可以自由地在学生中间走动，在需要时给儿童以适当的帮助。

在数学实验室的课堂情境中强调自由运用许多材料来进行学习，这对于皮亚杰所设想的学习本质，是一个重大的贡献。五岁到十或十一岁的儿童，由于他们正处在具体运算阶段或正在向这个阶段发展，所以必须首先操作物体借以发展抽象的概念。

交往的相互作用与课时计划

必须强调，让儿童对物体施加各种动作，是发展必要的智慧结构的基础。在这方面，数学实验室是很有前途的。

可是在数学实验室里儿童只是个别地进行活动吗？皮亚杰对此指出："……儿童如果不同他人进行思想交流和合作，那么就无法把他的运算组合成一个连贯的整体……"①在教育过程中，儿童与旁人的交往行为和对物体的动作都是必要的。应事先安排好课上的小组活动，这样会鼓励儿童互相提出问题和交流思想。在数学实验室中可以让儿童小组活动，也可以让他们按个别的计划活动。在刚才引用的皮亚杰的话里要特别注意"合作"这个词（而不是"竞争"）。在集体活动过程中必须强调合作而不是竞争②。

鉴于当前存在着完全个别化的程序教材，它除了教师外不给学生同其他人相互交流的机会，故而上面摘引的皮亚杰的话更值得引起深思。

① 皮亚杰：《儿童智慧的起源》(The Origins of Intelligence in Children)，纽约：Norton 公司，1963，第 193 页。

② 利奇蒙(P. G. Richmond)：《皮亚杰入门》(An Introduction to Piaget)，纽约：Basic 图书公司，1971，第 95～96 页。

学习的加速

在欧洲有这样一种讲法，一小时只相当于美国的四十分钟。教师能不能设法加快儿童的智慧发展呢？能不能在更早的年龄"教"儿童呢？皮亚杰把这个问题称为"美国问题"，他曾报导过，他每次来美国总被问到这个问题①。

由于经常出现"美国问题"，所以在此有必要再次强调指出，虽然布鲁纳把皮亚杰划为"毫无疑问是认知发展领域中最有影响的人物"②，然而皮亚杰并不同意布鲁纳关于加速学习的主张，皮亚杰1967年3月在纽约大学的一次讲演中作了如下的评论：

> "几年以前，布鲁纳的一个主张迄今仍使我感到惊讶不已；即云，你可以通过一种智慧上诚实的方式，教会任何年龄的儿童以任何内容，只要你方法得当。噢，我不知道他现在是否还相信这一点……加速大概是可能的，但是不可能指望有极大的加速。似乎存在一个最佳期。什么时候是最佳期，这必定依赖于每一个儿童本身和学科的性质。"③

新数学运动

皮亚杰所进行的研究为下面的结论提供了一个基础，即对于一般的儿童来说，应当在七岁以后再开始应用数学符号如3+2=□和3+□=5来学习数概念。小学一年级的教师在教这种新的数学符号名称时会经历一段困难的时期。即使到了七岁以后，还会有少数儿童仍然不能理解数概念。

① 詹宁士："皮亚杰谈学习"，《星期六评论》，1967年5月20日，第82页。

② 布鲁纳：《通向教学论之路》，第6～7页。

③ 詹宁士："皮亚杰谈学习"，《星期六评论》，1967年5月20日，第82页。

其它一些概念，如进行度量所必需的作为点的集合的线与线段的概念、空集的概念以及透视和欧氏空间关系等，儿童一直要到九至十一岁才能开始理解。

新数学对数学学科的内容以及在许多教师和大学生已作过的关于究竟什么是数学的评论方面，作出了重要的贡献。然而正如许多新运动一样，新数学运动在某些方面，比如说在小学低年级，可能走得太远了。正如艾尔肯所报导的那样：

> 在编写新数学的教材时，大家都希望用一种新的精确的语言来促进集合概念的教学……显然为教集合概念而创造的新语言已失败了，因为这种新语言只适合于成年人的逻辑，而不适合于儿童的推理。如果早注意到皮亚杰所倡导的对儿童思维的研究，则有可能帮助我们避免"新数学"教学大纲中的某些困难。①

关于艾尔肯的如果应用皮亚杰的研究成果原可避免新数学大纲中的一些困难的推测，应该指出，皮亚杰有关数学概念的几本著作直到六十年代才出版英译本，《儿童的几何概念》一书在美国直到1960年才出版英译本，《儿童逻辑的早期发展》一书直至1964年才在美国出版英译本，而《儿童的时间概念》一书则晚到1969年方在美国出版英译本。

教育哲学与心理学

皮亚杰所关心的是知识的本质，包括现实、时间、空间、因果性以及逻辑等观念，因而他在哲学领域内也很活跃。皮亚杰主要考虑的是人体怎样把这些观念体现出来，据此可把皮亚杰称为发生认识论者。皮亚杰在教育哲学和教育心理学两方面都有很多贡献。对于那些其教育哲学是关于发展、经验和顺化（顺应）的哲学的人

① 大卫·艾尔肯："幼儿教育中的巨人——皮亚杰"(Giant in the Nursery-Jean Piaget)，《纽约时代杂誌》(New York Times Magazine)，1968年5月26日，第59页。

来说，皮亚杰的具体运算和运算思维结构的心理学正好为该哲学提供了所需的基础。还有，语言必定适合儿童的推理，因为推理不是由语言决定的。

皮亚杰认为，许多知识来自于儿童自身的逻辑力量（即平衡化），而不是来自这种力量之外；知识不是现实的一个摹本，而是对现实的重新构造。倘若我们肯定皮亚杰的理论，那么教师就必须对她的职责有一新的看法。她的主要职责将是为儿童提供一个物质环境；并善于提问，以触发儿童发展概念所必需的逻辑过程。本书中的许多测验能用来确定有效地实施这类教学程序的最佳时间。

知识的获得

在第3章里曾讨论过三种知识水平，它们的区别对于教师安排教学大纲是十分重要的。那些典型的成年人把知识看作是什么呢？汉斯·弗思①曾描绘了这样一种看法，即认知事物的开始“好象是”建立在我们感官的知觉基础上的。知觉给予我们一个现实的“摹本”，因而知识是现实的复本。根据联想和条件反射的原理，这时就构成了知觉的和运动的知识。智慧的或抽象的知识随后从我们的感觉或知觉开始。然而我们的逻辑结构或推理结构是从何而来的呢？我们的逻辑结构是否存在于儿童本身但一直要到很晚才开始起作用呢？抑或逻辑是来自许多条件反射活动或者练习类型的活动呢？

不少人认为逻辑的理性知识跟知觉知识没有质的差别。这实质上就意味着逻辑是通过练习（重复）和语言教学等教儿童养成某些习惯而概括、发展起来的。通过联想和条件反射作用，一些适当的反应链便被建立起来。语言或言语解释经常成为这类学习

① 汉斯·弗思：《皮亚杰与知识》，第183页。

的媒介。这样一种简化的方法，意味着教师只需要关心如何教学生养成知觉动作的习惯。然而实际上，逻辑是一种远比这一解释所承认的更为复杂的机制。

当我们教五至十一岁的儿童时，总是关心如何发展他们有关物理世界的知识和逻辑数学知识，但是对于后者，儿童无论从发展上或生物学上讲都仍有局限，因为儿童一直要到大约十二岁才会发展起进行抽象的逻辑数学推理的某些思维结构。

儿童在五至十二岁时有可能获得物质世界的知识以及某些类型的逻辑数学思想，但是必须通过对物体的积极主动的活动——即通过玩弄或操作物体，才能获得。光凭言语教学是不行的。知识的重要意义，正如皮亚杰所想象的，对于五至十二岁儿童的教师来说是难以作过高估计的。汉斯·弗思发人深省地问道："假如教师都认真地采纳皮亚杰的知识就是构造外物的一种运算的见解，那有谁能来大胆地猜想一下，我们的小学教育将会有怎样的变化呢？"①

综上所述，对于物质世界的知识并非象平常大家所设想的那样，是绝对地通过感觉以及言语教学所获得的现实的复本。对儿童来说，现实或知识首先是从他施加于客体上的动作经过内化而构造起来的。这种儿童借以构造他的世界的内化、或内部动作、或平衡化的性质，依赖于儿童的发展阶段，也依赖于他的生物遗传性。教师只是在儿童对更高的思维水平具有准备性时，才能通过提供合适的物质环境和提出适当的问题而发挥重要的作用。

教师的培训

皮亚杰所想到的教育中的问题已经在第2章里阐明了。问题之一是：教育的标准往往是由那些没有受过专业训练的人确定的，

① 同上，第7页。

无论是在教育部门、政府还是在立法机关。这种情况同医学界根本不一样。比如说，在医学专业中，任何标准都是由受过专业训练的合格的医生确定的。

在教学方法中必须考虑到记忆的作用。正如第8章中所述的，记忆不是简单地"回忆"。

"会做"或会操作同"理解"是迥然不同的，它们之间的差别亦须加以考虑，如在第4章所阐述的那样。

遗憾的是，教学至今还没有成为一门科学，我们还没有进行必要的被公认为是专业性的研究。

在教师培训中，应当作出几点规定：(1)要发展首创精神。(2)要有探索和调查的自由。(3)要有儿童心理学的良好基础。(4)要有从事研究工作的良好基础。研究工作应包括学会怎样向儿童提问，怎样记录事实以及怎样写研究报告。

"总而言之，只有依靠研究工作并通过研究工作，教师的职业才不再仅仅是一种谋生的手段而已。"①

---

① 皮亚杰：《教育科学与儿童心理学》，第125页。

附录一　诊断活动目录

1. 数学的理解与操作
   - 1.1 用四肢走路(四到九岁)
   - 1.2 乒乓球和滚圈(五到十二岁)
   - 1.3 斜坡或角度(五到十二岁)
2. 分类
   - 2.1 简单分类(四到七岁)
   - 2.2 类包含(六到九岁)
   - 2.3 乘法分类(六到九岁)
   - 2.4 交(六到九岁)
   - 2.5 量词“全部”和“一些”(五到十岁)
   - 2.6 层级分类(六到十岁)
3. 数
   - 3.1 次序化(四到七岁)
   - 3.2 次序化和序列化(四到八岁)
   - 3.3 序数和基数(五到八岁)
   - 3.4 序列的对应(五到七岁)
   - 3.5 次序的对应(五到七岁)
   - 3.6 数的守恒——互补集(五到七岁)
   - 3.7 数的守恒——同质集(五到七岁)
   - 3.8 质量守恒 I(五到七岁)
4. 记忆和数学
   - 4.1 记忆和次序化(四到七岁)
   - 4.2 记忆和水平概念(七到十岁)
   - 4.3 记忆，数的守恒，和长度的守恒(六到八岁)
5. 加法

附录二　一些数学概念发展的年龄阶段

概　　念	前运算时期的后期 4～7岁	具体运算时期 7～9、9～11岁		形式运算时期 11～15岁
拓扑空间	××			
简单分类	××			
序列化和次序化	××	×		
数的守恒	××			
长度守恒	××	×		
面积守恒	××	×		
类的加法和数的加法		××		
数的乘法		××		
乘法分类		××		
传递性		××		
交换性		××		
结合性		××	×	
分配性			××	
欧氏空间——形状	××	×		
欧氏空间——水平与垂直坐标		××		××
时间		××	××	××
测量——面积			××	
测量——体积				××
射影几何				××
比例		××	××	××
形式逻辑				××
概率			××	××
证明				××