

多元表征理论与概念教学

郑毓信 (南京大学哲学系)

概念教学是数学教学十分重要的一项内容。也正因为此,概念的“心理表征”(mental representation,也称“内在表征”,internal representation)就获得了数学学习心理学家的高度关注,这方面的研究工作并经历了由“外”到“内”、由“一”到“多”、由主要集中于“了解学生”到“努力促进学生的发展”的重要转变。以下就围绕所说的变化对此作出简要介绍,包括具体指明相关研究的教学涵义。

应当强调的是,尽管以下的分析论述主要集中于数学概念的教学,但其结论也可推广应用于“问题解决”的教学。例如,对于数学问题“深层结构”的强调显然就是与对于数学概念“形式定义”的强调直接相对应的;另外,这同样也可被看成改进“问题解决”教学的一个明确方向,即是应当更加重视问题表征的多样性与培养学生思维的灵活性。

一、“概念定义”与“概念意象”

1.数学学习心理学中对于概念“心理表征”的关注应当说是与心理学研究的整体发展趋势直接相对应的,后者即是指认知心理学逐渐取代行为主义在心理学领域中占据了主导地位,人们并清楚地认识到了促成这样一种变化的必要性:心理学的研究不应停留于外部的可见行为,而应深入研究人们内在的思维活动。

显然,从这样的角度去分析,学习心理学中特别重视概念的“外部表征”与“内在表征”的区分与联系就十分自然了,特别是,从教学的角度看,我们更应深入地研究教师在教学中应当如何使用各种外部表征才能帮助学生建立真正反映概念本质的内在表征。

例如,在笔者看来,我们就可从上述

角度去理解布鲁纳的以下论述:学生思维活动的水平主要取决于外在刺激的程度,对此我们并可区分出动作的(enactive)、图像的(iconic)和符号的(symbolic)这样三个不同的水平:在动作表征的水平,学生的思维必须借助实物或具体物的实际操作活动来完成;图像表征是指具体物消失时学生能依据实物的影像在头脑中制作心像来进行内在的思维活动;符号表征则是指学生已能直接对数学符号进行思维操作,从而也就标志着主体的思维已经达到了较高的抽象水平。

由布鲁纳的工作我们也可看出,尽管相关研究并非专门针对数学概念特别设计的,但其对于数学教学仍然具有重要的意义。当然,我们又应针对数学的特殊性对此作出更为深入的分析。例如,这就是这方面的一个首要事实:由于数学对象并非物质世界中的真实存在,而只是抽象思维的产物,因此,从这一角度去分析,概念的外部表征、特别是符号表征事实上就充当了数学对象的“物质承载者”,这也就是指,只有借助外部表征数学对象才可能获得相对的独立性,也即由内在的思维建构“外化”成为外部的独立存在;进而,这又是新的认识活动(包括数学研究与数学学习)的一个必要前提,即人们必须首先在自己的头脑中重新建构起相应的数学对象,从而,与上述的“外化”相对立,在此又必然地有一个“内化”或重新建构的过程(从而,这也就直接涉及到了概念的内在表征),我们并应清楚地看到这种建构活动的抽象性质,因为,只有这样,我们才能真正掌握数学概念的本质。

更为一般地说,这又可被看成数学学习心理学研究的一个基本立场;我们又不

应满足于将一般学习心理学的普遍性结论应用于数学领域,而应对数学学习领域中的特殊现象、特殊问题作出直接的研究。也正是在这样的意义上,相对于概念的“外部表征”与“内在表征”的区分而言,我们就应更加重视关于“概念定义”(concept definition)与“概念意象”(concept image)的如下区分。

具体地说,这显然也是数学特殊性的一个重要表现:数学概念都具有明确的定义(包括显定义和隐定义);然而,研究表明,在大多数情况下数学概念的内在表征又并非相应的严格定义,而是一种由多种成分组成的复合物,包括相应的心智图像、对其性质及相关过程的记忆,以及具体的例子等。而且,与严格的概念定义相比较,数学概念的内在表征又可谓有很不相同的性质。从而,我们就不应将数学概念的内在表征、也即所谓的“概念意象”简单等同于严格的“概念定义”。

例如,就几何概念而言,其概念意象往往包含有对其某个(些)特例(或原型)的感性记忆(这就是所谓的“心智图像”[mental picture]),从而也就有很大的直观性和形象性,而且,对其几何性质的记忆又往往与主体对于不同概念间逻辑联系的认识密切相关。与此不同,算术和代数的概念意象则往往与符号密切相关,并常常包括有对于相应计算过程(算法)的记忆。

2.以下就是关于“概念定义”与“概念意象”不同性质的一个概括:

概念定义	概念意象
单一性	丰富性
普遍性	个体特殊性
一致性、稳定性	分散性、变化性

另外,研究表明,学生关于数学概念的心理表征又往往具有以下弊病:

第一,模糊性。这就是指,学生对于自身所具有的概念意象往往不具有清醒的自我意识,从而也就与概念定义的明确性构成了鲜明对照。

第二,分散性和不一致性。正如上面的概括所提及的,学生关于数学概念内在表征的各个成分往往没有能构成一个有机整体,而是表现出了很大的分散性(正因为此,一些学者提出,我们事实上也可认为相关主体对于同一概念具有多种不同的心理表征);进而,在这些不同成分中直观形象又常常占有特别重要的地位,后者并就主要是一种“素朴的直观”,也即是与主体的日常生活经验或先前关于这一概念某个特例的学习经验直接相联系的,但却没有能够与相应的概念定义作出必要的整合,从而也就没有能够上升到新的认识高度。

事实上,在学生关于同一数学概念的不同心理表征之间常常存在一定的矛盾,特别是,其先前所建立的素朴认识常常是与概念的严格定义直接相冲突的。由于在缺乏整合性的情况下不同的刺激物通常只会激发概念意象中的某些特定成分,更由于学生对于自身所具有的概念意象往往不具有清醒的自我意识,因此,对于自身概念意象中所存在的内在矛盾他们通常也缺乏清醒的认识,更不能通过适当的调整自觉地去消除这种不一致性。

第三,不灵活性。这就是指,在新的数学学习活动中,学生往往不善于在心理表征的不同成分(或者说,不同的心理表征)之间作出转换,从而也就往往不能顺利地找出对于完成新的学习任务(如求解问题)较为适合的心理表征成分。

与此相对照,这又正是数学思维的一个重要特点,即是应当善于根据情境与需要在同一数学概念心理表征的不同成分之间做出灵活的转移,特别是,一个好的数学工作者更应善于由概念的严格定义过渡到相应的直观形象,或是由直观形象转移到形式定义。

由此可见,这就是我们改进数学概念教学的一个明确方向,即是应当努力帮助学生自身所具有的概念意象建立清醒的自我意识,学会在同一概念的不同心理

表征或概念意象的不同成分之间灵活地实现转移,特别是,更能对概念的严格定义与其原有的经验和知识作出必要的整合,后者既是指在教学过程中如何能够利用学生已有的知识和经验使得相应的定义对于学生而言变得丰富和生动起来,而不再是一种空洞的“词汇游戏”,也是指帮助学生从更高的抽象水平重新认识原有的知识和经验,包括对此作出必要的改造或重构(图1)。

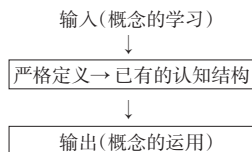


图1

与此相对照,如果我们在教学中未能帮助学生较好实现所说的整合,那么,严格定义的学习在最初往往就只是在学生原有的心理表征中加入了一个新的成分,或者说,这两者在学生的头脑中即应被看成两个互不相关的成分(图2)。

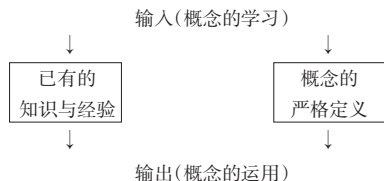


图2

例如,这就是所谓的“灾难研究”(disaster studies)的一个主要结论,即有很多原先被认为已经较好地掌握有关概念的学生(特别是,由于他们已在通常的考试中取得了较好成绩),在更为深入的研究中却暴露出了严重的观念错误(这往往表现为某种“素朴的观念”),而且,这些错误观念并就是与相应的严格定义直接相矛盾的。从而,在这些学生的头脑中所说的这两个部分似乎就是互不相干的:通常的考试仅仅涉及到了严格定义的部分,但在实际活动中学生却又往往仍然坚持原来的错误观念。

当然,从发展的眼光看,学生头脑中关于同一数学概念心理表征的不同成分(或者说,不同的心理表征)又不可能永远互不相干,从而,在更多的情况下我们就可看到这样的现象:由于已有的素朴观念的“长期性”(顽固性),更由于其对数学概念严格定义的学习往往建立在被动的接

受与机械记忆之上,因此,如果缺乏必要的引导,那么,随着时间的推移,最终就很可能发生相反方向上的整合(应当指明,后者往往是在不自觉的情况下进行的,即主体对此并不具有清醒的自我意识),这也就是指,最终所出现的很可能是错误观念对于严格定义的排斥或“改造”,即如由于坚持素朴的直觉而导致了对于形式定义的错误“转译”。显然,这也就十分清楚地表明了帮助学生通过观念冲突实现观念更新的重要性,当然,后者又以学生对于自身观念的不一致性具有清醒的自我认识作为必要的前提(图3)。

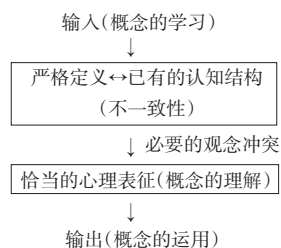


图3

二、由“单一表征理论”到“多元表征理论”

1.如果说上述的内容主要反映了数学学习心理学在20世纪80年代的研究成果,那么,这就是相关研究在当前的一个整体发展趋势,即是更加强调了数学概念心理表征的多元性,这也就是指,与前述关于“概念定义”与“概念意象”的区分相对照,人们在现今应当说更加重视由“单一表征理论”向“多元表征理论”的必要转变。

具体地说,对于数学概念本质的突出强调可以被看成“单一表征理论”的一个主要特征,前者并常常被等同于概念的严格定义。例如,上面所提到的布鲁纳关于学生思维活动三个不同水平的分析主要地就可被看成属于这一范围,因为,按照布鲁纳的观点,在动作表征、图像表征与符号表征这三者之间所存在的是一种线性的关系,我们并就应当以帮助学达到后一水平作为教学活动的主要目标。

与此相对照,所谓的“多元表征理论”则更加强调概念表征不同方面的相互渗透与必要互补,从而也就与上述的“线性”或“单向性”构成了直接对照。例如,从后一角度去分析,上述关于数学概念严格定

义与学生已有经验和知识的必要整合的论述就可以被看成属于多元表征理论的范围,特别是,我们不仅应当高度重视对于学生已有知识和经验的必要超越,也即能从更高的抽象水平去重新认识原有的知识和经验,而且也应十分重视如何能够利用学生已有的知识和经验使得相应概念的严格定义变得丰富和生动起来。

当然,除去对立双方的必要互补和相互渗透以外,这又是“多元表征理论”更为重要的一个特征,即是突出强调了数学概念的心理表征往往包含多个不同的方面或成分,这些成分对于概念的正确理解并都具有重要的作用;另外,与片面强调其中的某一成分相对立,我们又应更加重视这些成分之间的联结。

例如,美国学者莱许等就曾借助如下图形(图4)来说明数学概念的发展过程:“实物操作只是数学概念发展的一个方面,其他的表述方式——如图像,书面语言、符号语言、现实情景等——同样也发挥了十分重要的作用。”从而,这就不但与布鲁纳所说的“三种表征”相比包含了更多成分,而且也为我们应当如何去进行概念教学指明了努力方向:我们在教学中不应唯一地强调其中的任一方面,而应更加重视对于各个方面之间的联结,并应帮助学生逐步学会能够依据情况与需要在这些成分之间灵活地作出转换。

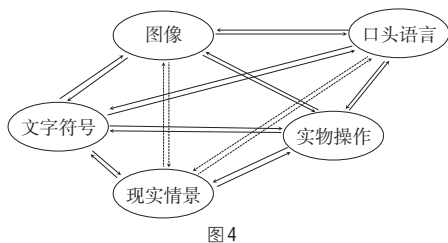


图4

莱许的上述论述显然具有重要的现实意义,这就是指,我们在教学中不应片面地强调“情境设置”或“动手实践”。另外,从更为一般的角度去分析,这事实上也可被看成为我们如何更好地去理解数学教育领域中这样一个普遍的发展趋势提供了直接的背景,后者即是指对于“联系”(connection)的突出强调(当然,对于这里所说的“联系”我们应作广义的理解,即这不仅是指成“同一概念不同心理表征之间的联系”,也是指不同概念、乃至不同学科或学科分支之间的联系)。例如,美国

数学教师全国委员会(NCTM)在2000年颁布的新的数学课程标准《学校数学的原则和标准》就将“联系”与“数和运算”、“模式、函数和代数”、“几何与空间感”、“度量”、“数据、统计与概率”、“问题解决”、“推理与证明”、“交流”、“表述”等一起列为学校数学的“十项标准”之一。另外,这也正是台湾地区自2000年开始推行的“九年一贯课程”的核心所在:“在九年一贯课程数学领域中‘联系’(台湾学者使用的词语为‘连结’——注)被突显,联系这一主题包括:内部联系和外部联系。……两者均包含察觉(recognition)、转化、解题、沟通、评估等能力。具备这些能力,一方面可增进学生在日常生活等方面的数学素养,能广泛地应用数学,提高生活质量,另一方面也能加强数学式的思维,有助于个人在生涯上求进一步的发展。”

2.按照“多元表征理论”,除去对于概念本质的很好理解以外,这也应被看成数学概念教学的一个主要目标,即是应当帮助学生建立概念的多元表征,并能根据需与情境在表征的不同成分之间作出灵活的转换。

由此可见,就数学概念的学习而言,我们就不应唯一地强调所谓的“同化”与“顺应”,特别是认定数学思维的发展主要地即可被看成一种“纵向的”发展,也即如何能对已有的认知框架不断作出新的改造或重构,而且也应当清楚地看到“模向的”扩展的重要性,也即如何能够开拓更多的方面,并在不同的方面之间建立普遍的联系。

例如,在笔者看来,我们事实上就可从后一角度去理解赫伯特与卡彭特关于“概念理解”的以下分析,尽管他们所论及的主要是不同概念之间的联系,而不是同一概念心理表征的不同方面:数学概念的“理解”就是指将新的概念纳入到主体已有的“概念网络”(认知框架)之中,也即如何能与主体已有的知识和经验建立广泛的联系;进而,“理解”又不是一种全有或全无的现象,而主要是指达到了何种程度,后者并就取决于联系的“数目”和“强度”:“如果潜在地相关的各个概念的心理表征中只有一部分建立起了联系,或所说的联系十分脆弱,这时的理解就是很有限的;……随着网络的增长或联系由于强化

的经验或网络的精致化得到了加强,这时理解就增强了。”

以下就是关于数学概念教学的一些具体建议:教师在教学中应当加强案例、图像、隐喻与手势(身体活动)的应用。更为一般地说,这也就是指,“语言学活动、手势和身体活动、隐喻、生活经验、图像等”都应被看成数学中意义建构的一个重要来源。

另外,以下的教学实例则更可以被看成“多元表征理论”的一个直接应用:

在完全平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 的教学中,教师应当有意识地应用多种不同的表征形式,即如:

(1)符号表征:利用多项式乘多项式法则计算 $(a+b)^2=?$

(2)语言表征:总结公式的特征:首平方,尾平方,首尾乘积两倍加中央。

(3)操作表征:让学生使用计算器,分别取几组数值计算 $(a+b)^2$ 和 $a^2+2ab+b^2$ 的值,然后通过比较发现所求的关系。

(4)情境表征:有一位老奶奶很喜欢小孩子,每次孩子们到她家,她都会给他们一些糖,她给自己立了一个规定:每次有多少孩子去,就会给每个孩子同样数目的糖(如有5个孩子就给每个孩子5颗糖)。现在有 a 个男孩子和 b 个女孩子准备去老奶奶家,这些孩子在商量是分开去还是一起去所得的糖会多一些?多多少?请你帮他们解决这一问题。由此引导他们去发现所求的关系。

(5)图形表征:利用图形(图5)并启发学生发现正方形以及四个小矩形的面积,由此引导他们得到所要的关系。

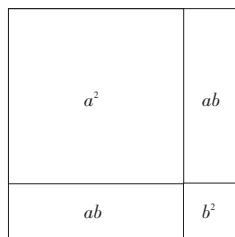


图5

当然,相对于简单地给出多种不同的表征形式而言,教师在教学中又应更加重视必要的引导。例如,就只有通过不同表征形式的对照比较,我们才能帮助学生更好地理解各种表征的特性及其局限性,如实例的描述性质与严格定义的建构性质,

图像的整体性、直觉性与符号操作的顺序性、逻辑性;等等。进而,除去帮助学生建立概念的多元表征以外,这显然又应被看成教学工作更为重要的一项目标,即是应当帮助学生在表征的不同成分之间建立充分的联系,并能根据需要与情境作出灵活的转换。

例如,在笔者看来,我们显然就可从后一角度去理解莱许的以下论述:学生必须具备了以下条件才算真正理解了一个概念:第一,他必须能将此概念放入不同的表征系统之中;第二,在给定的表征系统内,他必须能很有弹性地处理这个概念;第三,他必须很精确地将此概念从一个表征系统转换到另一个表征系统。

最后,还应提及的是,从上述角度去分析我们也可更为深入地认识数学学习的普遍意义,即是有益于学生思维品质的提升,特别是增强学生思维的灵活性与综合性。当然,又如前面所已提及的,对于这里所说的“灵活性与综合性”我们不应局限同一概念不同表征之间的联系,也应包括不同概念之间的联系。例如,主要地也就是基于这样一种认识,人们提出,数学概念的教学不应仅仅着眼于“概念的生成”,也应包括“概念的分析与组织”。

3.应当指出,上述关于教学涵义的分析并就体现了数学学习心理学研究在当代的这样一个发展趋势:我们不仅应当充分肯定深入了解学生内在思维活动的重要性,也应高度重视如何能以此为基础来设计教学从而进一步促进学生的发展。

从后一角度去分析,我们即可更为深入地认识以下一些教学建议的重要性:

第一,由于教学工作的主要目标之一即是帮助学生在头脑中建立概念的多元表征,因此,我们在教学中就应十分重视如何能使学生在这一过程中更好地发挥主体作用,即如教师可以要求学生通过物质对象的具体操作证实相应的符号方法,或是为抽象的数学概念给出一个实例,或是用一个隐喻来说明自己的感受或体验,等等。另外,要求学生对新学习的概念作出表述、甚至作出自己的定义也是一个十分重要的教学手段,因为,“一个学生处理或形成外部表示的方式将显示出他在头脑中对于这一信息是如何予以表征的”;而且,这种由“内”向“外”的转变也必然地

会使学生对自己的“概念意象”具有更大的自觉性,从而就十分有利于他们通过反思或改进实现新的发展。

第二,如果说先前的教学建议主要是从规范性的角度指明了我们应当如何去进行数学概念教学,那么,作为问题的另一方面,我们在此显然也应十分重视认识活动的个体特殊性,这就是指,不同个体在自己的实践活动中完全可能倾向于多元表征中的某一(些)方面。例如,后者就正是著名数学家阿达玛所进行的一项调查的一个主要结论。

具体地说,阿达玛以当时最为著名的一些数学家(包括爱因斯坦等著名物理学家)为直接对象进行了一项调查,即是希望了解他们在从事研究时所采取的是怎样一种思维方式,特别是,这主要依赖于语言、还是依赖于图像?结果发现,数学家中应当说存在几种不同的类型:大多数人“不仅在思维过程中避免使用语言,甚至还避免使用代数符号或者任何其他固定符号……而总是运用模糊的意象思维”;但也有相反的情况,如著名数学家、数学教育家波利亚就是这样的实例:“我相信,对于一个问题关键性思想总联系着一个恰当的词或句子,这个词或句子一经出现,形势即刻明朗。如同你所说的,‘它给出了问题的全貌’。”

由此可见,在数学概念的教学我们就不应不唯一地强调概念的严格定义,也不应以任何一种思维形式作为教学的硬性规范,而是应当从各个方面为学生的自由发展提供必要的条件,包括努力培养他们的思维转换能力。

三、案例一则:分数的教学

如众所知,分数的学习是小学数学教学的一个难点。例如,以下就是小学生中经常可以见到的一种“困惑”:在问及“ $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{1}{3}$ 究竟哪个大”时,学生常常回答道:“不一定,因为大圆的 $\frac{1}{3}$ 比小圆的 $\frac{1}{2}$ 大。”更为一般地说,分数的学习在很大程度上也可被看成小学生出现“两极分化”的实际开端。

进而,这显然又可被看成出现上述情况的一个主要原因,即分数有多个不同的

定义、包括“份数定义”、“商的定义”、“比的定义”等——由于这也正是数学发展历史的一个缩影,因此,所说的多元性就十分清楚地表明了分数认识活动的复杂性,或者说,人们对于分数的认识必然有一个不断发展与深化的过程(也正是从这一角度去分析,笔者以为,与“定义”这一词语相比较,“解释”就是一个更为恰当的用语)。

以下就从数学思维的角度、包括依据“多元表征理论”对此作出进一步的分析。

1.在分数的教学中我们是否应当唯一地强调由多个不同“定义”向严格的数学定义、也即能够正确反映分数本质的定义的过渡?

显然,依据“多元表征理论”对于上述问题我们就不应作出简单的回答,毋宁说,与单向的、线性的发展相比较,我们在教学中即应更加重视如何能够帮助学生从多个不同的角度去理解分数,并努力实现这些方面的必要互补与适当整合。

具体地说,分数的教学显然与前面所提到的各种表征形式,如实物操作、图像表示、语言解释、符号表征与现实背景等,都有直接的联系。例如,分数的“份数定义”就可被看成为分数的引入提供了重要的现实背景,这并直接涉及到了“均分”这样一种操作活动;另外,用“射线表示分数”则就代表了由“语言解释”向“图像表示”的重要过渡,等等。

更为一般地说,我们显然也可从这一角度去理解以下的论述:“研究者一致认为,对分数的教和学的复杂性产生影响的主要因素之一就是分数包含了一个多方位的构成。”

2.由以下的对照比较可以看出,这是学生何以会经常出现上述“困惑”的一个直接原因,即其关于分数的理解始终停留于“整体与部分的关系”这样一种解释,而未能将分数看成一个独立的对象(也即一个真正的数):为什么学生在自然数的学习中没有产生类似的困惑,即如认为“2与3的大小不确定,因为,2个十比3个一大!”

更为深入地说,这又是学生感到困惑的一个主要原因:在尚未求得两个自然数的比的情况下,为什么仍可将它们的商看成一个真正的数?因为,学生在这以前所

习惯的主要是这样一种思维方式,即是如何能够通过具体计算求得相应的结果;然而,分数的“商的定义”恰就要求人们较好地实现由“过程”向“对象”的重要转变,后者也就是所谓的“凝聚”——在不少学者看来,这并就是看成代数思维最为基本的一种形式。

显然,从后一角度去分析,我们也就可以很好地理解在分数教学中人们何以普遍倾向于以“实物分割”来引入分数,因为,在后一种情况下,由“过程”向“对象”的转化是十分自然的。与此相对照,如果学生尚未能够很好地适应由“过程”转向“对象”这样一种思维方式,那么,即使我们直接向学生点明“分数是我们结识的新朋友,……是‘新’的数”恐怕也未必有效;类似地,如果学生尚未将 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 等分数看成真正的数学对象,这时就立即引入分数的运算也是不恰当的,因为,即使这时学生仍可借助于实物(折纸)或图形的帮助完成相关的计算,如写出像 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ 这样的算式,这种认识显然不具有可迁移性,更不能被看成已经很好地理解了分数与分数运算的意义。

再则,如果说分数的“商的定义”主要涉及到了过程与对象之间的关系,那么,分数的“比的定义”就意味着采取了一个新的不同视角:我们在此所关注的已不再是每一个分数是如何产生的,而是各个分数之间的关系,也即分数的整体结构(从而,这也就更为清楚地表明了这样一点:就数学概念的认识而言,我们不仅应当注意它们的生成,也应十分重视“概念的分析与组织”)。

应当强调的是,后者并就直接关系到了“数学是结构的科学”这样一个论点,这就是指,数学对象的性质主要地就表现于它们的相互关系,包括大小关系(序结构)、运算关系(代数结构)、与拓扑关系(拓扑结构)等。另外,这种结构的观点显然也就最为集中地表明了数学的高度抽象性:在严格的数学研究中,无论所涉及的对象是否具有明显的直观意义,我们都只能依据相应的定义和推理规则去进行推理,也正因为此,数学对象的性质就完

全反映于它们的相互关系,或者说,在数学研究中我们必须十分习惯于从对象之间的关系这一角度去进行考察,并将数学的研究对象看成整体性的结构。

显然,依据上面的论述我们也就更为清楚地认识分数的学习对于学生数学思维发展的特殊重要性。

3.综上所述,分数的“份数定义”、“商的定义”与“比的定义”应当说体现了不同的研究视角,也即分别强调了分数的现实背景(与操作意义),由“过程”向“对象”的过渡,以及由个别的数的形成转向了整体性数量关系的考察。从而,我们在教学中就不应片面地强调其中的任何一个,而应更加重视它们的必要互补与适当整合,包括从一些新的方面进行分析从而促进认识的进一步发展与深化,即如用数轴表示分数等。

另外,在笔者看来,由分数的实例我们也可更好地去理解数学思维的两种基本形式。具体地说,分数的“比的定义”即可被看成皮亚杰所谓的“自反抽象”的一个实例,也即如何“把从已发现的结构中抽象出来的东西射或反射到一个新的层面上,并对此进行重新建构。”例如,这显然就是数系不断扩张的一个基本形式。进而,又由于所说的“自反抽象”显然可以被看成一种“纵向的发展”,并就十分清楚地表明了数学思维发展的层次性质:这“不是一个连续过程,它必须重新组织、重新认识,有时甚至要与以前的知识和思考模式真正决裂”,因此,从整体上说,我们也就应当明确肯定数学思维的发展同时包括了这样两个方面:“纵向的发展”与“横向的扩展”,它们并可被看分别体现了思维的建构性与层次性,以及思维的整合性与灵活性。当然,与片面地强调这两者中的任何一个相比,我们又应更加注意它们的相互渗透与转化——显然,事实上

也可被看成从又一侧面更为清楚地表明了“多元表征理论”的深刻意义。

最后,还应指出的是,正由于分数的学习不仅直接涉及到了各种具体的数学知识,也与数学思维的渗透与学习有着重要的联系,因此,分数的理解与掌握就必然地有一个较长的过程,在教学中更可能出现“先掌握算法、再逐步理解”的情况,包括“由记忆通向理解,通过记忆加深理解”。在笔者看来,这事实上也就为以下的现象提供了可能的解释:在具备了较多的数学知识(即如完成了初中的学习任务)以后,大多数学生在小学学习分数时所曾经经历的困难似乎都自然而然地消失了。例如,尽管这时他们往往仍然不能准确地说出分数的定义,也未必能对分数运算法则的合理性作出清楚说明,但大多数学生都已很好地掌握了分数的运算与大小比较,并不再为分数究竟能否被看成一个真正的数感到不解或困惑。因为,这时的学生已对相应的数学行为、包括深层次的数学思维较为熟悉和适应了。

当然,上述的事实又不应被看成是与下述论点直接相冲突的:只有真正理解了分数的意义,我们才能很好认识分数的各种性质,包括各种算法的合理性,并切实避免对于算法的机械记忆与纯粹模仿;毋宁说,这即是更为清楚地表明了思维发展的阶段性与复杂性。

另外,上面的论述显然也已表明,就分数的教学而言我们不应刻意地去追求这样一个目标,即是希望设计出这样一个教学方案,用之一下子就能帮助学生很好掌握分数的本质,与此相反,我们在教学中即应更加重视如何能够有效地促进学生思维的不断发展和逐步深化。

(责任编辑 贾振东)

