

# 国外关于数学学习中多元外在表征的研究述评

唐剑岚<sup>1,2</sup>

(1. 南京师范大学 数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097; 2. 广西师范大学 数学科学学院, 广西 桂林 541004)

**摘要:** 20世纪80年代以来, 随着现代信息技术在教育领域的应用, 多元外在表征的研究成了认知科学、教育技术、教育心理学等领域的热门话题. 数学学习中多元外在表征的研究主要趋势是: 综合运用多种理论和多种研究方法, 深入探讨多元外在表征研究对数学学习的价值与意义, 建构数学学习中多元表征研究的基本理论; 系统思考各种因素探讨运用多元外在表征的教学设计, 提高学习效率.

**关键词:** 数学; 多元外在表征; 功能; 效果

**中图分类号:** G40-059.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-9894 (2008) 01-0030-05

20世纪80年代以来, 随着现代信息技术在教育领域的应用, 多元外在表征的研究成了认知科学、教育技术、教育心理学等领域的热门话题. 同样, 表征的研究在国际数学教育领域也是一个鲜活的话题. 数学教育心理学国际研讨组 (International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME), 在1989年专门成立了表征的研究工作组. 著名刊物 *Journal of Mathematical Behavior* 在1998年专辟两期刊发了表征研究的最新成果. 随着信息技术被整合于数学教育中, 近十几届的PME研讨组对表征的研究主要关注技术背景下多元表征对学习效果的研究. 由于很多领域涉及表征研究, 而且争议较多, 要想较为完整地对象征的研究进行综述, 几乎不太可能<sup>[1]</sup>. 因此, 本文围绕近20年来国外关于数学学习中的多元外在表征的含义、类型、特征、功能、对学习的影响与效果等相关研究加以梳理与简评.

## 1 多元外在表征的含义与形式

表征, 用英语表示为 Representation, 在认知科学、教育心理学等领域中的含义是指用某一种形式(物理的或心理的), 将一种事、物、想法或知识重新表示出来. 因此, 一定存在一个“表征”实体集合, 也必定存在一个“被表征”的实体集合, 表征的概念要求在这两个集合的特性或元素之间有一种映射 (Mapping) 关系<sup>[2]</sup>. 表征是对客观事物的反映, 又是被加工的客体. 同一事物的不同表征形式, 叫该事物的多元表征 (Multiple Representations). 对数学学习中的多元表征的理解, 见仁见智. Janvier<sup>[2]</sup>认为多元表征是指同一数学对象的不同表示形式, 可以是心理的、主观的东西, 这叫内在表征 (Internal Representation) 或心智表征 (Mental Representation), 譬如个体在头脑中建构数学对象的心像 (Mental Images) 等; 表征也可以是外在于人脑的、客观世界的东西, 这叫外在表征 (External Representation), 譬如言语、文字、符号、图片、具体物、活动或实际情境等. 一个数学对象的多元表征好比星形的冰山, 中心是此对象的核心概念, 每一尖端对应着一个表征形式, 而完整的一个对象就是整座表征结构的冰山, 学生头脑中数学表征冰山的完善性是学生会和会学数学的重要标志. Hiebert 和 Carpenter<sup>[3]</sup>

认为外在表征是指以语言、文字、符号、图片、具体物、活动或实际情境等形式存在的表征. 内在表征是指存在于学习者头脑里而无法直接观察的心智表征或学习者拥有的心智结构. 学习者通过外在表征可以表达出自己的想法而达到沟通和交流的目的, 通过内在表征可以进行想象、推理等思维活动. Kaput<sup>[4]</sup>认为, 当人们在谈及表征时, 应该考虑表征了的事件、表征中的事件、表征了的事件正被表征的方面、表征中的事件正在表征的方面和两个事件之间的联系. 表征研究除了关注表征活动过程, 表征结果也同样重要. Goldin<sup>[5]</sup>认为, 外在表征是从传统的数学符号系统(如数轴、笛卡儿坐标系)到结构性的学习情境(如那些包含具体操作活动的数学学习情境、基于电脑的微观学习环境). 内在表征则指学习者对于数学对象的意义赋予与建构, 包括学习者的言语语义、心像、视空间表征、计划监控策略及启发法、数学的情感表征系统等. Cuoco 和 Curcio<sup>[6]</sup>认为, 学习者若要理解某个数学结构, 就必须在这个数学结构与一个更易理解的数学结构之间建立一个映射, 而表征就是这个映射过程. 它既不是表征的对象(被表征了的数学结构), 也不是表征的目的(较易理解的数学结构), 表征就存在于这种映射活动之中, 表征是一个包含对象与其它对象相互转换的“组件” (Packages). 譬如, 从电脑上输入的代数表达式不能称为表征, 只有当代数式的运算与电脑外界情境的转换有了一种映射, 才算是真正的表征.

综上, 研究者主要是基于信息加工的过程来理解多元表征的. 表征既可以看作加工的原材料、资源或载体, 又可以看作加工本身或过程, 还可以是加工的工具或产品. 只是不同研究者侧重点不同而已. 如果侧重的是加工本身, 那么表征属于认知的过程. 如果侧重的是加工的原材料或产品, 那么将表征分为外在表征和内在表征是合适的, 这是绝大多数研究者研究表征的基本出发点. 尽管研究者对外在表征和内在表征的理解有些差异, 但却有如下一致的看法: (1) 外在表征是客观存在于学习主体外在的实体, 具有客观性; 内在表征是主体心智结构中的内在对象, 具有主观性; (2) 外在表征可以脱离于学习主体而存在, 具有共享性; 内在表征必须依赖于学习主体而存在, 具有独特性; (3) 外在表征是内

收稿日期: 2007-12-13

基金项目: 基础教育新课改与高师数学教育系列课程的整合研究 (桂教高教[2006]194号); 数学教育研究及新课程实验专业支持 (GNUJ200330)

作者简介: 唐剑岚 (1974—), 男, 湖南永州人, 广西师范大学数科院副教授, 南京师范大学数科院博士生, 主要从事数学课程与教学论研究.

在表征之外化,内在表征是外在表征之内化;(4)外在表征与内在表征都具有多元性.外在表征的多元性表现为:表征的感觉通道形式的多元,可以是触觉表征(如折纸等动作表征)、听觉表征(如教师的言语等)和视觉表征(如书面语、课件动画等);表征的计算属性的多元,可以是口语、书写文本、数学公式和逻辑表示等抽象形式;也可以是图形表征、图表表征、图像表征等形象形式;表征的存在状态的多元,可以是静态的图片表征,也可以是动画等动态表征.内在表征的多元性具体表现为学习主体对外在表征内化在认知结构中的数学概念、数学命题、心像、心智模型(Mental Model)、视空间表征、图式和对数学的情感等.

## 2 多元外在表征的特点与功能

为什么要研究多元外在表征?多元外在表征究竟有怎样的功能?从上可知,每种表征都扮演不同的角色,它们或是思维运演的素材,或是联系、沟通的角色等.当然,只有恰当的外在表征才具有自身特有的功能.很多研究表明<sup>[1-7]</sup>:刻画数学对象的每种表征具有各自的特点与功能.口语、书写文本、数学公式和逻辑表示等表征虽然可以任意表达,但与约定内容紧密相关,而且包含反映关系的各种符号,能够描述和表达抽象的、逻辑的意义,这些表征既是人脑左半球的功能特点,也是左半球发展的外在促进.实物模型、图形、图表、图像等虽然不含有反映关系的各种符号,但却描绘了具体的、形象的、直觉的意义,便于人们较为快捷地“可视化”(Visualization)数学的整体结构和意义,这些表征既是人脑右半球的功能特点,也是右半球发展的外在促进.另外,不同的表征在表示信息上可能是等效的,但在思维运演和交流等功能上并不等效.譬如,实物模型、图形等表征适合于形象,直觉思维等非逻辑思维,有助于创新思维的培养;文字、符号等表征适合于逻辑思维,有助于逻辑、理性思辨的培养.再者,很多数学对象的具体表征具有优先性和典型性.譬如,同样表征“数”的概念,阿拉伯数字比罗马数字具有优先性和典型性;再如,同样表征直角坐标系上的直线方程,在一般式表征 $ax+by+c=0$ ,点斜式表征 $y-b=k(x-a)$ 和斜截式表征 $y=kx+b$ 等中,斜截式表征 $y=kx+b$ 具有优先性和典型性.但有时优先性和典型性却扮演负面的影响<sup>[8]</sup>.譬如,标准的几何图形或数学符号表达容易使学习者依赖典型,而产生错误的视觉判断或心理意义.总之,数学对象的多元表征的特征,在外在结构形式上如同冰山;在内容上,表征的丰富性以及相互联系性构成知识的网络结构;在方法上,表征间的转换(Transformations)或转译(Translations)体现了逻辑思维与非逻辑思维的互补.

由于数学学习内容的复杂性,单一外在表征往往难以充分揭示数学本质,研究多元外在表征的意义就是试图扬长补短地整合每种表征的特征与功能,发挥最大效益.Keller和Hirsch<sup>[9]</sup>研究指出,数学对象的多元外在表征能够具体形象地凸显一个数学对象的多元外在属性;能强化数学对象复杂性的一面,同时也可能淡化其复杂的一面;能够便于学习者对不同表征的认知联接.Ainsworth<sup>[10]</sup>综述了各个领域关于多元外在表征的研究,指出相比单一表征,多元外在表征具

有3个显著的功能:其一,互补功能:这源于表征之间的差异及其生成的不同功能.不同的表征能够提供不同的信息,不同的表征能够支持不同的认知过程,因此多元外在表征能够提供学习者互补的信息和支持互补的过程.其二,限制解释:一方面,多元外在表征可以帮助学习者利用熟悉的表征帮助解释不太熟悉的表征,具体的表征帮助解释较为抽象的表征;另一方面,学习者可以利用一种表征的内在性质限制解释另外一种表征.其三,建构深度理解:首先,多元外在表征帮助学习者从多元具体形式中抽象知识或问题的内在结构;其次,多元外在表征扩大知识的范围和丰富知识的表征方式,从而在知识数量上拓展了学习者的认知结构.再次,多元外在表征提供不同表征间的相互联系、沟通与作用,联结不同表征成为网络结构,从而在质量上优化认知结构,建构深度理解.

## 3 多元外在表征对数学学习影响的研究

既然多元外在表征具有单一表征不可比拟的功能,那么多元外在表征对数学学习产生多大影响,是如何影响数学学习过程与结果的呢?如何通过教学设计,优化并组合多元外在表征促进有效学习等问题,一直是认知科学、教育技术、学科教育等领域研究者的旨趣.目前,研究者主要基于个案、心理实验等方法进行研究,研究主题主要集中在多元外在表征对数学理解、数学问题解决等影响机制的研究.

### 3.1 多元外在表征对数学理解的影响

数学理解是国外数学教育研究的核心话题之一,它与多元表征有着天然的联系.Hiebert和Carpenter<sup>[3]</sup>指出,如果一个数学概念、方法或事实被学习者理解了,那么它的内在表征成了认知结构的部分,内在表征相互联系的数目和强度决定了数学理解的程度.多元外在表征是数学本身的具体体现,内在表征是学习者建构该数学对象的各种心智表征.外在表征与内在表征之间存在着密切关联,外在表征影响学习者数学理解主要是因为多元外在表征的组合方式影响了学习者内在表征的建构,内在表征的水平影响外在表征的内化.Kaput<sup>[4]</sup>指出,多元外在表征之所以在数学学习中扮演着重要角色,主要是因为学习者经由可视化的过程,并与学习者原有的心智表征产生交互作用,进而生成新的结构或联接旧有的结构以整合成较大的知识网络结构.影响学习者建构数学内在表征的网络或深度理解数学的主要因素是学习者在某个特定表征系统内的各种表征形式的操作与转换以及在表征系统间的转译.Janvier<sup>[2]</sup>指出,多元表征的恰当运用在一定程度上降低数学理解的难度,而且使得数学更具吸引力和趣味,但不恰当的运用反而对学习起反作用.Hitt指出<sup>[11]</sup>,表征系统内的转换与系统间的转译并不容易发生.要想发挥多元表征的功能,有必要教会学习者对表征系统内的转换与系统间的转译,并帮助学习者分析和建立各种表征的语义网络系统.Goldin和Shteingold也指出<sup>[6]</sup>,数学的外在表征并非孤立地被理解,而是各种形式的表征相互联系以及与内在表征的相互作用,从而促进学习者建构数学意义和理解.数学多元外在表征内化为多元内在表征的丰富性、联系性与结构性是数学深度理解的体现.Duval<sup>[12]</sup>指出,

表征和可视化是理解数学的核心,学习者通过可视化活动,将多元外在表征与内在表征不断转换与转译,而使得外在的数学符号系统成为内在数学符号系统的部分,从而促进数学理解。Ainsworth<sup>[10]</sup>指出,多元外在表征功能的发挥,需要考虑学习任务中多元外在表征的特点和学习者的基础。譬如,如果多元外在表征支持互补功能,那么需要学习者理解每种表征和知道选择恰当的表征,而不需要理解各个表征间的关系。

### 3.2 多元外在表征对数学问题解决的影响

多元外在表征对数学问题解决的影响是许多领域研究的主题。大量研究表明,各种外在表征对数学问题解决过程与结果有直接或间接的影响,这是由外在表征本身决定的。Zhang<sup>[13]</sup>指出,外在表征不同的问题能够引起内在表征相同的学习者完全不同的解题行为,而且这种影响未必都是通过内在表征机制来完成。外在表征通过两种机制在问题解决过程中起作用,一种是通过知觉系统直接觉察外在表征中那些不变的结构,减轻认知负荷,无需激活内部记忆系统某些复杂心理模型,无需推理等过程参与的情况下完成问题解决。另一种是通过激活内部复杂的认知过程,建立内部心理模型而生成问题空间。Cary 和 Carlson<sup>[14]</sup>研究表明,在问题解决过程中,如果外在表征可以利用的话,人们宁愿尽量少地利用内部工作记忆,以便付出最小的努力。Markman 和 Dietrich<sup>[1]</sup>指出,问题的外在表征方式具有多样性、丰富性,不同类型的问题表征方式适合于不同类型的心理加工过程。

如同对数学理解的影响,多元外在表征对问题解决的间接影响,主要是通过内在表征相互作用实现的。Janvier<sup>[2]</sup>等指出,学习者面对外在表征必须考虑该外在表征是否与其内在表征尽可能接近。其中各种表征间的转换与转译是解决问题的关键。Lowrie 和 Kay<sup>[15]</sup>证实至少在处理问题的最初阶段,解题者思考可能的解决方法时,他们或偏爱使用视觉表征或偏爱非视觉表征来解题。Alex 和 Micha<sup>[6]</sup>指出,多元表征的每种表征都有自己的优势和不足。不同偏好的学习者在问题解决时,运用不同的表征;在完成多重问题解决的任务时,如运用不同的数学表征、多种策略,会提高问题解决的成就表现。Große 和 Renkl<sup>[16]</sup>的研究却指出,一题多解对数学问题解决的成就表现并不能产生积极的影响,但具有多元表征的一题多解会对水平不同的学习者产生好的影响。

对多元外在表征对数学学习影响的研究,研究者主要是从心理学的视角,试图揭示多元外在表征影响数学学习的心理机制,为多元外在表征的教学提供科学的理论解释和实践指导原则。综合起来,研究指出:(1)每种表征具有优势和不足,对数学学习也有不同影响;恰当的组合和运用多元外在表征对数学学习有着直接或间接的积极影响。(2)在影响学习的过程中,表征系统内各种表征的转换和表征系统间各种表征的转译过程是十分关键的因素,这暗示运用多元外在表征进行教学时,表征的转换和转译是重要的教学目标。(3)在具体学习情境中,多元外在表征影响学习者数学学习的程度,不仅要考虑多元外在表征本身功能,而且要考虑学习任务的特点和学习者的个体差异(学习者的内在表征水平、学习者对外在表征的偏好等)。

尽管多元外在表征对数学学习影响的研究给多元表征的教学设计提供了很多的启发,但下面的几点值得进一步思考。(1)多元外在表征对数学理解影响的研究表明,学习者通过内化多元外在表征并与已有的内在表征发生相互作用,进而促进或影响学习者对数学的理解。这些研究主要是基于个案和定性描述的方法进行的,但多元外在表征究竟有多大程度影响数学理解,如何结合学习者的内在表征水平进行教学设计等研究有待深入研究。这些问题的研究需要在研究工具和研究方法上突破,才能得到解决。譬如,如何评估学习者数学理解的程度,如何刻画学习者的内在表征结构等问题,需要新的研究工具。我们认为借鉴新近发展的概念构图(Concept Mapping)<sup>[17]</sup>整体评估内在表征状况和数学理解程度可能是一种可取的工具。另外,大多研究方法单一,很少采用多种研究方法进行三角验证,既注重实证方法,也重视定性分析和个案分析,将多种研究方法结合起来对表征研究是重要的方法论取向。(2)关于多元外在表征对数学问题解决影响的研究,研究者主要来自认知科学、教育技术等领域,他们主要运用心理实验研究方法,这是一种值得借鉴的研究方法。但心理实验研究主要发生在严格意义的心理实验情境或基于多媒体系统的实验情境,被试样本数较小,生态效度、外推效度与理论概括性受到威胁。这预示今后需要在类似或日常教学情境下实验,以增加外推生态效度。(3)研究多元外在表征对学习的作用或影响,仅仅关注数学理解和问题解决等认知领域是很难全面评估多元表征的价值与意义的。考虑多元外在表征对学习非认知因素的影响是今后研究的一个视角。

### 4 多元外在表征的运用对数学学习的效果研究

尽管恰当的多元外在表征具有强大功能,直接或间接影响学习者的数学学习,但这毕竟是一种心理实验的结论或应然的结论。那么在真实教学情境中,运用多元外在表征进行教学对数学学习会产生哪些效果,有哪些因素影响学习效果等问题是很多数学教学实践者和教育研究者所关注的。研究者主要关注的是图形计算器、动态几何系统(Dynamic Geometry Systems, DGS, 譬如几何画板)、计算机代数系统(CAS)等动态软件的运用对数学学习的效果,因为这些软件是将数学可视化和多元外在表征集成于一体的平台。研究主要运用个案、(准)教学实验等方法。Ellington<sup>[18]</sup>就图形计算器被整合于教学的效果,对 54 个课堂教学实验(80%是随机实验)进行了元分析,指出整合的教学能够提高学习者成绩 10~20 个百分点,明显地提高了学习者数学理解和问题解决能力,对改善学习者的学习态度也产生了显著的作用。Khoju<sup>[19]</sup>就图形计算器的多元表征的动态数学功能对学习者代数学习的效果进行元分析,指出教学中运用图形计算器显著地提高了学习者的代数成绩。Goos<sup>[20]</sup>等研究表明,运用图形计算器能促进小组合作探究,提高数学理解水平,并指出教师对数学本质与教学法的理解是成功运用多元表征的关键。Ferrara, Laborde<sup>[21]</sup>等回顾了 30 多年来 PME 关于多元表征技术对数学学习领域(代数、微积分、几何等)的效果研究时指出,多元外在表征技术的运用产生应有的学

习效果,需要综合考虑4个维度:技术背景下的数学本质、技术如何支持数学认知、学习任务与教师的角色.这也实际上指出,技术背景下探讨多元外在表征运用的效果需要考虑多个因素的交互影响.

研究多元外在表征的运用对数学学习的效果主要发生在真实的教学情境中.研究者在证实多元外在表征的教学功能与价值.一方面,研究得到的结论主要有两个:(1)多元外在表征的运用对学习者的认知和非认知因素都产生了一定程度的影响,收到了较好的效果.(2)人们意识到教学是个复杂的系统,优化的、集成的多元外在表征的应然功能要产生应有的学习效果,需要考虑多种因素的影响,譬如教师是否能够整合各种学习理论,改变教学方法和策略就是一个十分重要的因素.但另一方面,下面的几点值得进一步思考:(1)就研究主题内容而言,研究者仅仅关注技术背景下集成多元表征的动态软件的功能与价值,探讨多元外在表征的运用对学习产生效果是很局限的.事实上,平常的学习环境充满多元外在表征,譬如教师的言语表征、书面的图形表征、学习者的动作表征等,教学如何优化和组合这些表征,提高学习效果等问题就很值得探讨.(2)就研究方法而言,研究者主要运用教学实验,研究者常常将教学方法和策略作为干预变量处理.这样就自然引起关于实验效果的问题:教学实验的效果究竟是由于教学方法和策略的改变引起的,还是由于多元外在表征的运用或本身功能引起的?也就是说,学习效果产生的“因果关系”难以确认.我们认为,证实多元表征的运用效果,不仅关注学习结果,更要关注学习过程.所以,教学实验尽管具有一定的生态效度,但证实多元表征运用的有效性,需要考虑多变量实验设计,并结合多种研究方法进行研究,才更有说服力.

## 5 数学学习中多元外在表征的研究基本趋势

从以上述评中看出,多元外在表征研究显示出了应然的理论价值和实际的教学指导意义与效果.综观已有的研究,除了上述的进一步思考外,目前无论是多元外在表征研究的理论基础问题,还是多元外在表征本身理论应用的研究取向问题,都是今后研究的主题.

就多元外在表征研究的理论基础而言,数学教育研究者主要基于数学表征的符号系统(Representational Semiotic Systems)<sup>[12]</sup>理论进行多元表征的研究.而其它领域的研究者主要持认知的信息加工观,认为至少源于信息加工理论的

认知负荷理论(Cognitive Load Theory)与多媒体认知理论(Multimedia Cognitive Theory)是多元外在表征研究的重要理论基础.另外,20世纪90年代中期出现的分布式认知观(Distributed Cognitive Theory)<sup>[22]</sup>是认知研究的新范式.该理论与最近认知神经科学关于工作记忆模型的最新研究成果、学习心理研究关于情境学习理论、教学研究关于合作学习的研究有异曲同工之理.我们认为仅仅基于某一种理论研究多元外在表征是有局限性的,需要基于多种理论解释或指导多元表征的研究.譬如,Mayer和Moreno<sup>[23]</sup>等基于多媒体认知理论,进行了大量实验,提出了避免注意分散、消解冗余、促进主动加工等9条原则和策略.再如,Sweller<sup>[24]</sup>等基于认知负荷理论,进行了大量实验,提出了很多降低无效认知负荷和增加有效认知负荷的教学原则或策略.这些理论与实验研究成果对运用多元外在表征进行教学有很强的指导价值.总之,运用单一的理论指导多元表征的研究是有局限的,这预示今后的理论研究取向将呈现多元化.各种理论相互渗透、相互补充,为数学学习中多元表征的深入研究提供了广阔的视角.

就多元外在表征本身理论的应用研究而言,研究者已经逐渐意识到,问题不在于多元外在表征与单一表征比较,是否对学习更有效,而是要全面考虑影响多元外在表征运用有效性的各种因素.研究主题逐渐从过去只关注实验情境中多元外在表征对学习影响的研究,转向在真实、日常教学情境中向多元表征学习(Learning from Multiple Representations)和用多元表征学习(Learning with Multiple Representations)的研究.研究关注的不仅仅是有效的学习结果,更重要的是学习过程与学习效率<sup>[10, 23-24]</sup>.

综上,我们认为目前下面两点将是数学学习中多元外在表征的研究主要趋势:(1)综合运用多种理论和多种研究方法,深入探讨多元外在表征研究对数学学习的价值与意义,建构数学学习中多元表征研究的基本理论.(2)系统思考各种因素探讨运用多元外在表征的教学设计,提高学习效率.这些因素至少包括数学学习任务的特点(数学多元外在表征的功能与特点)、学习者原有的内在表征水平(学习者多元内在表征的功能与水平)、学习者的认知风格维度(学习者对数学多元表征的偏好)、学习者的认知参与、行为表现和情感体验、数学信念等非认知因素(教学引起的学习者的学习参与).

## [参考文献]

- [1] Markman A, Dietrich E. In Defense of Representation [J]. Trends in Cognitive Sciences, 2000, (4): 470-475.
- [2] Janvier C. Representation and Understanding: The Notion of Function as an Example [M]. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1987.
- [3] Hiebert J, Carpenter T P. Learning and Teaching with Understanding [A]. In: Grouws. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning [C]. New York: Macmillan, 1992.
- [4] Kaput J J. Representations, Inscriptions, Descriptions and Learning: A kaleidoscope of Windows [J]. Journal of Mathematical Behaviour, 1998, 17 (2): 266-281.
- [5] Goldin G. Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics [J]. Journal of Mathematical Behavior, 1998, 17(2): 137-165.
- [6] Cuoco A A, Curcio F R. The Roles of Representation in School Mathematics [M]. Reston, VA: National Council of

- Teachers of Mathematics, 2001.
- [7] Schnotz W. Towards an Integrated View of Learning from Text and Visual Displays [J]. Educational Psychology Review, 2002, 14(1): 101–119.
- [8] Harada K, Gallou-Dumiel E, Nohda N. The Role of Figures in Geometrical, Proof-problem Solving-students' Cognitions of Geometrical Figures in France and Japan [R]. Proceedings of the Twenty-fourth PME Conference, 2000.
- [9] Keller B A, Hirsch C R. Student Preferences for Representations of Functions [J]. International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 1998, 29 (1): 1–17.
- [10] Ainsworth S. A Conceptual Framework for Considering Learning with Multiple Representations [J]. Learning and Instruction, 2006, 16: 183–198.
- [11] Hitt F. Representations and Mathematics Visualization [M]. Mexico: Cinvestav-IPN, 2002.
- [12] Duval R. Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking [R]. Proceedings of the 21st PME, 1999.
- [13] Zhang J. The Nature of External Representations in Problem Solving [J]. Cognitive Science, 1997, 21(2): 179–217.
- [14] Cary Melanie, Carlson, Richard A. Distributing Working Memory Resources During Problem Solving [J]. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 2001, 27(3): 836–848.
- [15] Lowrie T, Kay R. Relationship between Visual and Nonvisual Solution Methods and Difficulty in Elementary Mathematics [J]. The Journal of Educational Research, 2001, 94(4): 248–255.
- [16] Große C S, Renkl A. Effects of Multiple Solution Methods in Mathematics Learning [J]. Learning and Instruction, 2006, 16: 22–138.
- [17] Yin Yue, Shavelson, Richard J, et al. Comparison of Two Concept-mapping Techniques: Implications for Scoring, Interpretation, and Use [J]. Journal of Research in Science Teaching, 2005, 42(2): 166–184.
- [18] Ellington A J. A Meta-analysis of the Effects of Calculators on Students' Achievement and Attitude Levels in Precollege Mathematics Classes [J]. Journal for Research in Mathematics Education, 2003, 34(5): 433–463.
- [19] Khoju M, Jaciw A, Miller G I. Effectiveness of Graphing Calculators in K-12 Mathematics Achievement: A Systematic Review [M]. Palo Alto. CA: Empirical Education, 2005.
- [20] Goos, Merrilyn, Peter and Geiger, et al. Perspectives on Technology Mediated Learning in Secondary School Mathematics Classrooms [J]. Journal of Mathematical Behavior, 2003, 22(1): 73–89.
- [21] Gutierrez A, Boero. Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future[M]. Sense Publishers, 2006.
- [22] Zhang J J, Norman D A. Representations in Distributed Cognitive Tasks [J]. Cognitive Science, 1994, 18(1): 87–122.
- [23] Mayer R E, Moreno R. Nine Ways to Reduce Cognitive Load in Multimedia Learning [J]. Educational Psychologist, 2003, (38): 43–52.
- [24] Sweller J. Instructional Design Consequences of an Analogy between Evolution by Natural Selection and Human Cognitive Architecture [J]. Instructional Science, 2004, (32): 9–31.

### Synthesis of Researches on MERs in Mathematics Learning in Foreign

TANG Jian-lan<sup>1,2</sup>

(1. Mathematics and Computer Science Institute of Nanjing Normal University, Jiangsu Nanjing 210097, China;

2. Mathematics Institute of Guangxi Normal University, Guangxi Guilin 541004, China)

**Abstract:** Researches on multiple external representations (MERs) in mathematics learning had become flourishing topics in the last two decades. Based on recent researches on MERs in mathematics learning in foreign education, this paper synthesized the meanings, types, characteristics and functions of MERs in mathematics, the mechanisms of MERs influencing mathematics learning, effects of learning with MERs. And then the paper provided some considerations for future researches.

**Key words:** mathematics; multiple external representations; functions; effects

[责任编辑：陈汉君]