

2018-2019 学年度苏、锡、常、镇四市高三教学情况调查(一)

数学 II (加试)

注 意 事 项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 本试卷只有解答题, 供理工方向考生使用. 本试卷第 21 题有 A, B, C 三个小题供选做, 每位考生在 3 个选做题中选答 2 题. 若考生选做了 3 题, 则按选做题中的前 2 题计分. 第 22, 23 题为必答题. 每小题 10 分, 共 40 分. 考试时间 30 分钟. 考试结束后, 请将答题卡交回.
2. 答题前, 请您务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置.
3. 请在答题卡上按照顺序在对应的答题区域内作答, 在其他位置作答一律无效. 作答必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔. 请注意字体工整, 笔迹清楚.
4. 请保持答题卡卡面清洁, 不要折叠、破损. 一律不准使用胶带纸、修正液、可擦洗的圆珠笔.

21. 【选做题】本题包括 A, B, C 三小题, 每小题 10 分. 请选定其中两题, 并在相应的答题区域内作答. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

A. (选修 4—2: 矩阵与变换)

已知 $x, y \in \mathbf{R}$, $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ 的属于特征值 -1 的一个特征向量, 求矩阵 A 的另一个特征值.

B. (选修 4—4: 坐标系与参数方程)

在极坐标系中, 已知直线 $l: \rho \sin(\theta - \frac{\pi}{3}) = 0$, 在直角坐标系 (原点与极点重合, x 轴正

方向为极轴的正方向) 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} y = t + \frac{1}{4t}, \\ x = t - \frac{1}{4t} \end{cases}$ (t 为参数). 设 l 与 C 交于

A, B 两点, 求 AB 的长.



C. (选修4—5: 不等式选讲)

若不等式 $|x+1|+|x-a| \geq 5$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.



【必做题】第 22, 23 题, 每小题 10 分, 计 20 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

22. 从批量较大的产品中随机取出 10 件产品进行质量检测, 若这批产品的不合格率为 0.05, 随机变量 X 表示这 10 件产品中的不合格产品的件数.

(1) 问: 这 10 件产品中“恰好有 2 件不合格的概率 $P(X=2)$ ”和“恰好有 3 件不合格的概率 $P(X=3)$ ”哪个大? 请说明理由;

(2) 求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$.



23. 已知 $f(n) = \frac{C_4^2}{C_6^3} + \frac{C_6^3}{C_8^4} + \frac{C_8^4}{C_{10}^5} + \cdots + \frac{C_{2n}^{2n}}{C_{2n+2}^{n+1}}$, $g(n) = \frac{C_4^4}{C_6^3} + \frac{C_6^5}{C_8^4} + \frac{C_8^6}{C_{10}^5} + \cdots + \frac{C_{2n}^{n+2}}{C_{2n+2}^{n+1}}$, 其中

$n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$.

(1) 求 $f(2)$, $f(3)$, $g(2)$, $g(3)$ 的值;

(2) 记 $h(n) = f(n) - g(n)$, 求证: 对任意的 $m \in \mathbf{N}^*, m \geq 2$, 总有 $h(2^m) > \frac{m-1}{2}$.



数 学 I

注 意 事 项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 本试卷共 4 页, 包含填空题(第 1 题~第 14 题)、解答题(第 15 题~第 20 题). 本卷满分 160 分, 考试时间为 120 分钟. 考试结束后请将答题卡交回.
2. 答题前, 请您务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置.
3. 请在答题卡上按照题号顺序在对应的答题区域内作答, 在其他位置作答一律无效. 作答必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔. 请注意字体工整笔迹清楚.
4. 请保持答题卡卡面清洁, 不要折叠、破损. 一律不准使用胶带纸、修正液、可擦洗的圆珠笔.

一、填空题: 本大题共 14 小题, 每小题 5 分, 共 70 分. 不需要写出解答过程, 请把答案直接填在答题卡相应位置上.

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x | -1 < x < 1\}$, 则 $A \cap B = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

2. i 为虚数单位, 复数 $(1-2i)^2$ 的虚部为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

3. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

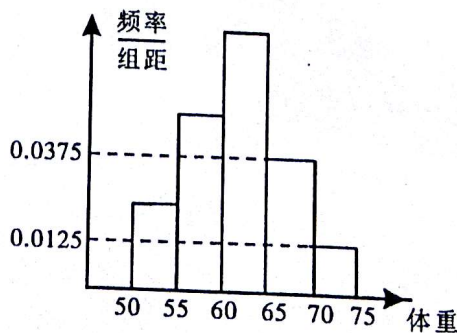
4. 箱子中有形状、大小都相同的 3 只红球、1 只白球, 一次摸出 2 只球, 则摸到的 2 只球颜色相同的概率为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

5. 如图是抽取某学校 160 名学生的体重频率分布直方图, 已知从左到右的前 3 组的频率成等差数列, 则第 2 组的频数为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

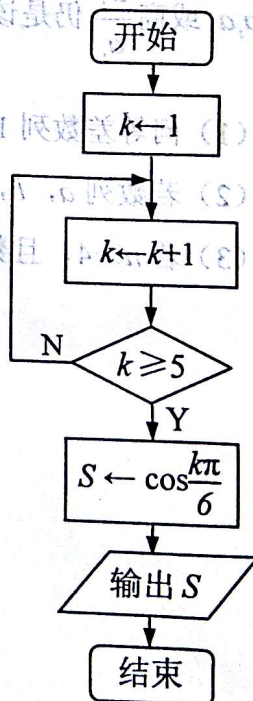
6. 如图是一个算法流程图,
则输出的 S 的值是 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(3-x), & x \leq 0, \\ 2^x - 1, & x > 0, \end{cases}$

若 $f(a-1) = \frac{1}{2}$, 则实数 $a = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.



(第 5 题)



(第 6 题)



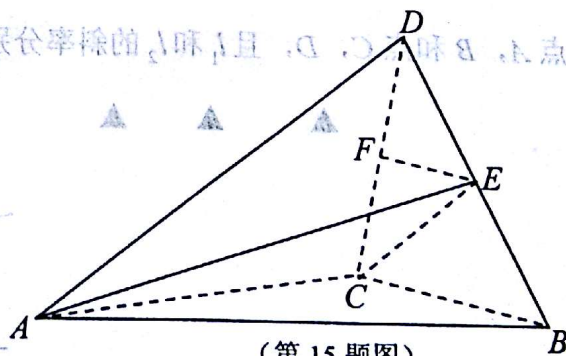
8. 中国古代著作《张丘建算经》有这样一个问题：“今有马行转迟，次日减半疾，七日止行七百里”，意思是说有一匹马行走的速度逐渐减慢，每天行走的里程是前一天的一半，七天一共行走了 700 里，那么这匹马在最后一天行走的里程数为 ▲。
9. 已知圆柱的轴截面的对角线长为 2，则这个圆柱的侧面积的最大值为 ▲。
10. 设定义在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的函数 $y = 3\sqrt{3}\sin x$ 的图象与 $y = 3\cos 2x + 2$ 的图象交于点 P ，则点 P 到 x 轴的距离为 ▲。
11. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $5a = 8b, A = 2B$ ，则 $\sin(A - \frac{\pi}{4}) =$ ▲。
12. 若直线 $l: ax + y - 4a = 0$ 上存在相距为 2 的两个动点 A, B ，圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上存在点 C ，使得 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形 (C 为直角顶点)，则实数 a 的取值范围为 ▲。
13. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB = 2, AC = 1, \angle BAC = 90^\circ$ ， D, E 分别为 BC, AD 的中点，过点 E 的直线交 AB 于点 P ，交 AC 于点 Q ，则 $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP}$ 的最大值为 ▲。
14. 已知函数 $f(x) = x^2 + |x - a|$ ， $g(x) = (2a - 1)x + a \ln x$ ，若函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = g(x)$ 的图象恰好有两个不同的交点，则实数 a 的取值范围为 ▲。

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 14 分)

如图，三棱锥 $D-ABC$ 中，已知 $AC \perp BC, AC \perp DC, BC = DC$ ， E, F 分别为 BD, CD 的中点。求证：

- (1) $EF \parallel$ 平面 ABC ；
- (2) $BD \perp$ 平面 ACE 。



16. (本小题满分 14 分)

已知向量 $a = (2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ ， $b = (\cos\alpha - \sin\alpha, \cos\alpha + \sin\alpha)$ 。

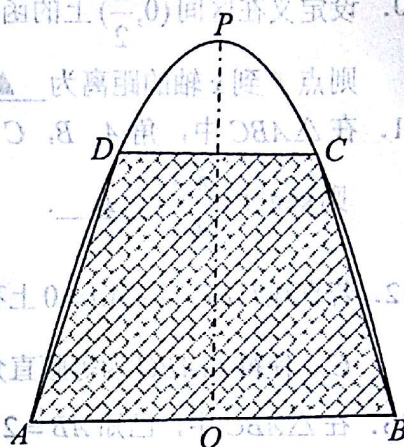
- (1) 求向量 a 与 b 的夹角；
- (2) 若 $(\lambda b - a) \perp a$ ，求实数 λ 的值。



17. (本小题满分 14 分)

某新建小区规划利用一块空地进行配套绿化. 已知空地的一边是直路 AB , 余下的外围是抛物线的一段弧, 直路 AB 的中垂线恰是该抛物线的对称轴(如图). 拟在这个空地上划出一个等腰梯形 $ABCD$ 区域种植草坪, 其中 A, B, C, D 均在该抛物线上. 经测量, 直路 AB 长为 40 米, 抛物线的顶点 P 到直路 AB 的距离为 40 米. 设点 C 到抛物线的对称轴的距离为 m 米, 到直路 AB 的距离为 n 米.

- (1) 求出 n 关于 m 的函数关系式;
- (2) 当 m 为多大时, 等腰梯形草坪 $ABCD$ 的面积最大? 并求出其最大值.

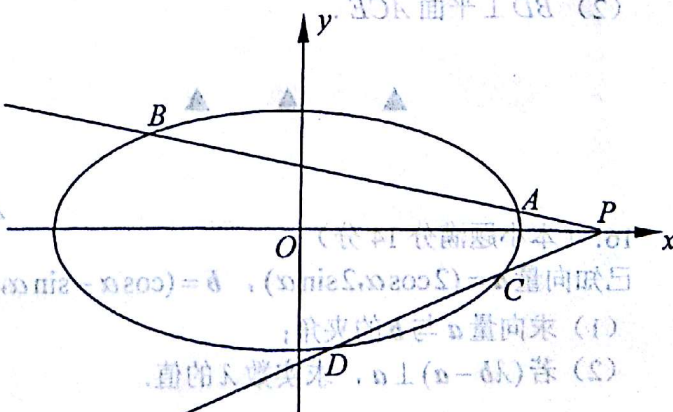
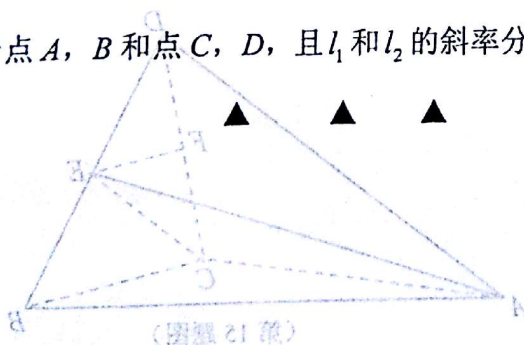


(第 17 题图)

18. (本小题满分 16 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 焦点到相应准线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

- (1) 求椭圆 E 的标准方程;
- (2) 已知 $P(t, 0)$ 为椭圆 E 外一动点, 过点 P 分别作直线 l_1 和 l_2 , 直线 l_1 和 l_2 分别交椭圆 E 于点 A, B 和点 C, D , 且 l_1 和 l_2 的斜率分别为定值 k_1 和 k_2 , 求证: $\frac{PA \cdot PB}{PC \cdot PD}$ 为定值.



(第 18 题图)



19. (本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x + ax (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x + y + b = 0$, 求实数 a, b 的值;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in [1, e]$ (其中 e 为自然对数的底数).

① 当 $a = -1$ 时, 求 $g(x)$ 的最大值;

② 若 $h(x) = \frac{g(x)}{e^x}$ 是单调递减函数, 求实数 a 的取值范围.

20. (本小题满分 16 分)

定义: 若有穷数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 同时满足下列三个条件, 则称该数列为 P 数列.

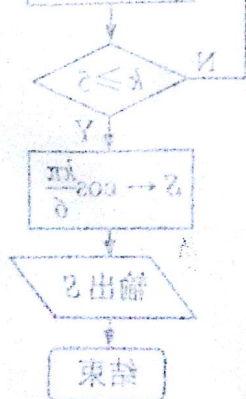
① 首项 $a_1 = 1$; ② $a_1 < a_2 < \dots < a_n$; ③ 对于该数列中的任意两项 a_i 和 $a_j (1 \leq i < j \leq n)$, 其积

$a_i a_j$ 或商 $\frac{a_j}{a_i}$ 仍是该数列中的项.

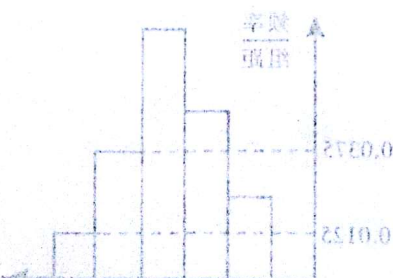
(1) 问等差数列 1, 3, 5 是否为 P 数列?

(2) 若数列 $a, b, c, 6$ 是 P 数列, 求 b 的取值范围;

(3) 若 $n > 4$, 且数列 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 是 P 数列, 求证: 数列 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 是等比数列.



(图 1 续)



(图 2 续)

