数学表达：支持深度学习的关键能力

作者 陈静，南京市教师培训中心

来源 小学教育教学版2019年第9期

数学，是一门让人变得“严谨、缜密、有逻辑”的学科。数学学习的每一次思考，都蕴含着个体的数学理解。这些个性化见解，通过数学表达进行传递。这就意味着学生可以借助数学表达，互相理解彼此的想法和意见，并且通过对话交流，分享学习过程，借鉴学习经验，深化数学理解；教师则可以通过数学表达，对学生的学习状况进行分析、判断，从而对其施以有效的学习帮助。“倾听”“思考”“表达”这几个数学学习的重要维度，你中有我，我中有你，彼此关联，密不可分，呈现为一种闭环结构。其中，“表达”作为“倾听”与“思考”的外显形态，不仅是增进个体数学理解、交流同伴数学认识的重要途径，更是支持数学深度学习、发展数学高阶思维的重要渠道。由此可见，培养数学表达能力是数学教学的核心任务，培养学生有思考、有道理、有深度的数学表达应成为数学教育的追求目标，成为数学核心素养落地生根的关键支柱。

**追问：数学表达的内涵、意蕴与价值**

提及培养表达能力，人们通常会觉得这是文科教学的要求和任务。这种片面的认识也无可厚非：语文教学四大关键任务——“听”“说”“读”“写”，无一不与表达相关。“表达”一词通常可以这样理解：“是将思维所得的成果用语言、语音、语调、表情、动作等方式反映出来的一种行为。它以交际、传播为目的，以物、事、情、理为内容，以语言为工具，以听者、读者为接收对象。”可见，表达是把个体思维加工得到的对事物或问题的认识，通过外显的方式传递给他人，进行沟通与分享的一种行为。表达，一方面具有鲜明的个性特征，因为它是个体思维的产物；另一方面也具有公众性，因为它是为了与他人交流和沟通。

如何定义数学表达？近年来，随着对学生数学表达能力研究的不断升温，国内外学者也提出了关于数学表达的不同观点，以下尝试举出一些具有代表性的：

美国雪城大学教育学院院长路易丝·威尔金森这样解释“数学表达”：“是学生使用语言的多种表达方式，包括说话、书写、倾听、阅读等。数学表达不同于普通的语言表达，它使用的是一系列特定的数学词汇，如直径、斜边、垂直等……数学词汇很特殊，对问题的解释方式也是唯一的、不可替代的，这些都是数学表达的特点。”

王郢等人将“数学表达与交流能力”定义为：“将规范科学的数学语言灵活运用于个人言语，用最简明的能指表达内涵更为丰富的所指的能力。其中，数学语言包含数学符号、数学模型、数学图形语言，数学言语方式包括书面与口头方式，表达的对象包括内部的、自我的表达和外部的、对他人的表达。”

王珍等人将“数学表达”定义为：“将自己对数学的理解或在解决数学问题过程中的观点、思想、方法、过程等准确、流畅、有条理地运用恰当的形态表征出来的过程。这里的形式可以是语言（包括身体语言），也可以是文字、图形、符号等。”

潘小福将“数学表达”定义为：“以数学语言表达数学思维。数学语言可以归结为文字语言、符号语言和图形语言三类，而数学表达正是以这些语言形式为载体进行的书面语言活动或口头语言活动。”

综合以上观点不难发现，它们的表述方式或重点略有区别，但是对数学表达的理解则有如下趋于一致的共同特征：

**1.表征数学思维。**数学表达是一种交流与分享方式。个体在数学学习过程中产生的认识、观点，解决问题的思路、方法等都可以通过一定的外显形式进行传递，因此，数学表达蕴含着鲜明的个性特征，传递了个体的数学思考。

**2.以数学语言为主要载体。**数学表达是用语言传递思维，因此，在一般表达的基础上，更重要的是用符号、文字（书面或口头）、图形、表格等形式的数学语言展现数学思维。数学表达的过程，其实就是灵活运用数学语言并发展数学思维的过程。

**3.支持深度学习。**数学表达是将个体学习的所思所想，通过不同的表征形式分享、交流。这样的学习过程中有倾听、有思考、有评价、有质疑、有反思、有修正……因此，数学表达本身就是深度学习，不仅体现出理解性学习的特征，也蕴含着元认知思维、批判性思维、创造性思维等高阶思维的生长。

**4.培养表达能力。**数学表达培养的是学生熟练、灵活地运用数学语言表达数学思维的一种重要能力，是数学学科的关键能力。

可见，数学表达不仅是促使数学理解、数学思考走向深入的有效途径，更是深度学习的重要支撑，承载着分享观点、提升认识、发展能力的重要使命。通过表达有意识地培养学生的高阶思维能力，促使其有主次、有顺序、有逻辑地展开数学思考，学会多种方式表征，并能清晰、准确、连贯地向他人表达自己的观点；同时，在表达的过程中，通过分享他人意见，学会对不同观点分析判断、概括归纳，进行批判性思考，从而调整、修改、完善原有的数学认识。

**探索：数学表达的特征、维度与内核**

2019年6月3日，在“求真悟道”2019全国小学数学教育论坛现场，展开了一场关于“数学表达”的深度研讨：通过切片扫描式的名师课堂研究以及参与卷入式的沙龙讨论，围绕核心话题，对数学表达的特征、维度与内核等进行了全面而深入的探索与思考。

**寻找关键词：探讨数学表达的学科特征**

“数学，需要怎样的表达？”这个话题，聚焦于探索数学表达的独有特征。所有的表达都离不开语言，语言作为通用的表达载体和工具，必然具有普遍性，但是，作为一门以培养学生理性思维为重要目标的教育学科，数学表达理应拥有学科特征，需要重点关注对发展学生思维和凸显学科本质的追求。

**1.准确、简约。**

数学表达更要关注表达内容的确定性，比如，观点是否明晰，论点是否确定，结论是否准确等；数学表达更多地借助于数学语言传递信息，因此，数学语言所具有的简约、精练、抽象、严谨等特征也成为数学表达的独有特点。课堂教学中，教师要有意识地帮助学生准确、灵活、熟练地使用数学语言（符号、文字、图表等）表达数学知识、解题方法、思考过程等，并熟练地进行日常语言和数学语言的切换；帮助学生捕捉数学语言中蕴含的丰富数学信息，充实数学语言词库，从而提高数学表达能力和水平。例如，教学“确定位置”，随着所学内容的不断深入，教师应该要求学生尝试运用多种数学语言，准确描述物体在平面内的具体位置。如对于班级中某个学生的座位，可以用文字描述，如“第5排第2个”；可以用数对描述，如“（5,2）”；可以画方格图用平面上的点表示；还可以用方向、角度、距离描述；等等。

**2.条理、逻辑。**

数学表达还需要关注阐述内容的合理性，即要有顺序、有条理、符合逻辑。数学表达不同于日常表达，更加重视运用数学语言进行有序、有理的逻辑论述。举例来说，作为日常生活中的概念，人们只要知道某个面的形状是长方形即可，并不需要知道长方形更深层次的性质和特征；而作为数学表达，则不仅要从直观层面明确长方形的性质和特征，更需要从抽象层面把握长方形的性质和特征，比如“四个角都是直角”“对边平行且相等”；随着学习内容的加深，表达的层次也应该更加深入，比如“有一个角是直角的平行四边形”“对角线相等且互相平分的四边形”“长方形是轴对称图形”，从而能够熟练运用这些性质和特征准确判断并识别长方形。因此，数学表达更强调“言”之有序、“言”之有理、“言”之有道。这种关键能力需要教师持之以恒地加以培养。而小学生正处于具体形象思维向抽象逻辑思维过渡的关键时期，对其数学表达能力的要求应该根据年龄阶段的特点循序渐进，逐步养成。

**3.独创、深刻。**

美国国家研究理事会（National Research Council）在2012年的报告中，提出了促进深度学习的六大策略，其中一条为鼓励阐述、质疑和自我解释。可见，独创、深刻的表达是走向深度学习的重要途径。数学表达，首先强调自我思考、自我阐述、自我解释，其次重视伙伴之间的交流、讨论、质疑、争辩。通过自我思考，通常会产生独特、原创的个人观点，而通过彼此意见的交流碰撞，则会对个人观点产生补充、调整和完善，促进认识深入。因此，思维的独创性和深刻性也是数学表达的显著特征。

**发现落脚点：厘清数学表达的主要维度**

厘清数学表达的维度，有助于教师在教学中找准培养数学表达能力的落脚点。从数学表达的层次划分来看，主要有以下四个维度：（1）自我阐释，指学生解释思考过程，阐释观点、结论等，这个维度的表达主要是将个体的想法传递给别人；（2）汇报交流，指学生在一定范围内通过表达进行交流，可以是小组交流、大组汇报等，这个维度的表达主要是分享、沟通、理解彼此思考的过程；（3）讨论质疑，指在汇报交流后，学生对不同观点之间的比较与评价，这个维度的表达更重视在自我思考的基础上，结合不同的观点产生新的想法，是引发深度思考的重要一环；（4）理性思辨，指在讨论质疑后，学生通过思考和判断，重新生成对数学问题的深度认识，这个维度的表达往往伴随着高阶思维（如元认知思维、批判性思维、创造性思维等）的产生。

**明确发力点：聚焦数学表达的关键内核**

诚如斯托利亚尔所言：“数学教学也就是数学语言的教学。”从某种角度来看，数学教学的过程其实就是帮助学生掌握数学语言、进行数学表达的学习过程。数学语言是传递数学理解、交流数学思考的载体和工具。而数学表达是一种基于学习理解和数学思考并以数学语言为重要载体的交流与对话，其关键内核是其中蕴含的思维发展。因此，数学表达是有思考、有道理、有深度的表达。抓住思维发展的关键内核，就抓住了培养数学表达能力的发力点，有助于教师知道在什么地方需要花时间、值得下功夫。这样的认识将改变教师教学的理念和行为。例如，他们会更重视考查学生对数学问题的理解和解决问题的思考过程，通过不同形式的数学表达了解学生是否真正掌握了数学知识,以及能否灵活迁移应用等。因此，他们会更重视问题答案背后隐含的数学思考，会更多地采用“表达出你的思考过程，并且想办法让别的同学听明白”或者“你是如何理解的？请尝试用不同方式表达你的想法”等提问方式，进行数学表达能力的针对性训练和培养。

**尝试：培养数学表达能力的策略、方法与工具**

苏联教育家马卡连柯说过：“只有学会在脸色、姿态和声音的运用上做出20种风格韵调的时候，我才变成一个真正有技巧的人。”可见，言语表达是有技巧的，而作为沟通理解、交换思考的数学表达则更需要教师的刻意培养和巧妙引导。如何在日常教学中利用有限的教学时间培养学生的数学表达能力？有哪些策略、方法和工具？在“求真悟道”2019全国小学数学教育论坛现场，张齐华、罗鸣亮、吴贤等名师围绕此话题展开了深度研讨，并给出了培养学生数学表达能力的实用策略、方法和有效工具。

**提供范式：明确表达要求**

数学表达既含有个性表达特征，又需要注意共性表达规范。基于此，教师可以提供数学表达的规范样例，可以是教师示范或学生榜样；尤其是对一些较难掌握的数学表达，教师需要反复使用数学语言，给出表达样式，明确表达要求，再组织学生充分展开交流，强化数学表达。例如，张齐华老师非常擅长通过巧妙的引导把表达的要求和方式传递给学生，他经常这样说：“孩子们，通过思考你们已经有了自己的想法，你们更愿意立刻表达自己的观点，还是更愿意先和身边的小伙伴交流一下，以确保彼此对这个问题都有明确的认识？”“表达的时候，别光顾着自说自话，要想方设法让别的同学能听懂并理解你的想法哦！”“辩论的时候，不能光顾着说自己观点正确，而要说出支撑自己观点的主要论据；也不能凭空说对方观点错误，而要想办法找出能证明对方错误的理由……”

**营造氛围：鼓励表达愿望**

为培养学生的数学表达能力，教师在课堂上需要推动对话式学习，尝试运用一些实用的策略促进生生、师生之间的交流，为学生的数学表达创设氛围，鼓励学生大胆表达自己的想法。有些策略便能够很好地营造适合表达的交流氛围。例如，朱国荣老师教学《抽屉原理》一课时，在学生展开交流之前，意味深长地提醒他们：“既要大胆表达自己的想法，同时又要善于倾听和吸纳别人的观点。不过更要注意的是，个人的想法可能会带有偏见，交流之后可能会形成共识，也可能还会保留不同的意见，但是只要有道理，就是好的表达。”短短几句话，不仅鼓励学生勇于表达，同时也巧妙提出了注意倾听、尊重他人观点、选择性吸纳的要求，营造了数学课堂理性表达的良好氛围。

**创设情境：驱动数学表达**

良好的数学表达应该是基于任务驱动的，因此，创设良好的问题情境是唤起学生数学表达愿望的重要前提。驱动数学表达的任务情境有三个要素：（1）前置性表达要求，即在任务活动开始前，要明确表达主题，提出表达要求，并给予一些提示和建议，如“表达时要准确清晰，确保大家能听懂你的想法;其他同学认真倾听，努力听懂别人的表达，并和自己的方法进行比较，然后对不同的观点进行比较和调整”；（2）嵌入性表达任务，即将表达、交流的任务嵌入任务情境中，引导学生在解决问题的过程中，梳理自己的思考,开展汇报交流；（3）反思性表达总结，即在问题解决后，还要关注对表达内容、过程和效果的评价，如“你听懂他的表达了吗？对他的表达，你有怎样的评价？”“听了同学的表达后，你对自己的观点进行了哪些调整？”等。对表达的反思和总结不仅有助于学生掌握表达的方式、技巧，取长补短，培养表达能力，也是提升学生元认知思维的重要一环。例如，张齐华老师教学《图形中的秘密》一课时，以环环相扣的任务（见图1、图2和图3）驱动学生进行持续而深入、有思考且有价值的数学表达。

**突出对象与方式：丰富数学表达**

数学表达的对象是多维的：可以是对自我的表达，也可以是对他人的表达；可以是独立思考的内部表达，也可以是传递思想的外部表达。数学表达的方式也是多样的：可以是操作学具的直观表达，可以是通过演算获得结论的数据表达，也可以是借助推理进行思维的逻辑表达，还可以是利用符号、图表的抽象模型表达等。教学中，教师要提供内容多样的表达载体，创设多层次的表达任务，让学生通过充分的实验、操作、讨论、交流等活动，丰富表达的对象与方式，培养目中有人、心中有理、言之有据的高层次数学表达能力。

**关注倾听：支撑数学表达**

良好的表达离不开专注的倾听。这种专注需要集中思想，聆听别人的表达并及时转化为自己的思考。有效的倾听需要一定的技巧：保持安静，眼神和耳朵都专注于发言者；并且，在倾听的同时，对内容有一定的思考；此外，一边倾听一边可以思考更多的问题，如“我真的听懂他的表达了吗？”“他的观点和我的有何不同？他这样思考有道理吗？”“这些观点我是否全部认同？”等。与表达相关联的倾听往往更有针对性，更有利于深入的思考。

**提出质疑：深化数学表达**

思维发展的路径，无非是两条，即“质疑”和“释疑”。质疑是起始，也是关键。质疑是一种非常好的表达方式，通过质疑可以了解别人的想法，对比自己的观点，找出彼此观点的相同、差异甚至相悖之处，并激励自己进行更为深入的思考。因此，教师不仅要善于提出优质问题，更要鼓励学生大胆质疑，不断利用问题激发思维，在质疑、讨论、表达、释疑的过程中，引领深度学习，提升表达能力。

**强化反思：完善数学表达**

课堂教学中，教师更希望借助表达形成一种有利于学生思维发展的创造性对话氛围。为达到这一目标，需要不断引导学生关注表达，并学会对自己或他人的表达进行反思。这样一些提问可以引导学生对表达进行深度思考：“听完几位同学的表达，你觉得他们的观点有相同之处吗？不同之处又在哪里？”“如果让你对他的回答进行加工，你能比他表达得更准确、更有条理吗？”“你如何评价他的表达？”……小学生数学表达的元认知能力较弱，因此，不仅要培养他们的数学表达能力，更要让他们学会对比表达、评价表达、反思表达，从而不断提高数学表达的水平。