

美国中小学“估算”课程设计及其启示*

秦德生

摘要:估算是发展学生数感的重要途径,是数学基本技能之一。本文研究美国估算课程的五种设计类型:数值型、图示操作型、估算价值型、关联型和开放型课程,梳理课程设计特征,以期对我国的中小学数学估算课程设计有一定的借鉴意义。

关键词:估算;课程设计,美国中小学数学

作者简介:秦德生/东北师范大学数学与统计学院副教授(长春 130024)

当前,国际数学教学十分重视估算(Computational Estimation)能力的培养,估算课程设计与教学已经成为中小学数学教育的焦点问题之一。20世纪70年代起,美国的数学教育工作者开始正视估算教学。全美数学教师联合会(NCTM)于1980年将估算列为课程主题;1986年出版了《估算与心算》年鉴,鼓励教师 and 研究人员共同探索估算的教学与学习问题;在2000年的美国《学校数学教育的原则和标准》(Principles and Standards for School Mathematics)中强调要熟练地计算并进行合理的估算。^[1]在我国,估算内容是在20世纪90年代以后才首次引入到小学数学教学大纲和教科书中,2001年我国《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》明确提出:“估算在日常生活与数学学习中有着十分广泛的应用,培养学生的估算意识,发展学生的估算能力,让学生拥有良好的数感,具有重要的价值。”^[2]尽管估算被认为是基本的数学技能,但是,在实际教学中估算教学的实际情况不容乐观,造成“估算教学难”的一些本质性问题,尤其是学生的认知难点问题并没有得到很好地关注。本研究阐述了估算的内涵、分析了美国中小数学课程中估算课程的几种设计类型,梳理课程设计特征,以借鉴他国教材之长,希望对我国的中学数学估算课程设计有一定的借鉴意义。

一、估算的内涵

1989年美国中小学课程学习与评价标准(NCTM)中,把“估算”专门列为一个标准,并认为“估算是数学学习和理解的一个方面,估算应运用于那些使用数量、测量、计算和问题解决的情形中,特别是通过估算判断结果的合理性。”除了继续强调估算重要性之外,还建议加强估算教学,与数概念和空间观念相配合来帮助儿童加深对概念和过程的理解,增强学生应用数和测量的灵活性。”桑德(Sowder)将估算分为计算估算、测量估算和数量估算,^[3]而霍根(Hogan)和布热津斯基(Brezinski)将估算划分为数能力、数量推理、计算估算、测量估算、数量估算。^[4]

估算是计算能力的重要组成部分,是相对于精算而言的概念。估算是根据具体条件及有关知识对事物的数量或算式的结果作出的大概推断或估计,是对当前所面临情境的一种整体把握,估算通过合情推理,是对事物本质的直觉判断。因此,估算具有较强的直觉性、跳跃性和内隐化的特点。

二、估算课程设计基本类型

类型1:数值型估算课程

案例1:迈克的菜园里有84垄白菜。每一垄有57棵。则下列哪个选项最好地估计了这个菜园里总共有多少棵白菜?

* 本文系教育部专项课题“义务教育课程和教材国际比较研究”的研究成果。

A. $100 \times 50 = 5000$ B. $90 \times 60 = 5400$

C. $80 \times 60 = 4800$ D. $80 \times 50 = 4000$

案例 2: 估算平方根^[5]

操作性试验:

两人一个小组,在方格纸上画出包含不多于 40 个小方格的最大正方形;在方格纸上画出包含不少于 40 个小方格的最小正方形。

(1)那个包含不多于 40 个小方格的最大正方形的每一边有多少个方格?

(2)那个包含不少于 40 个小方格的最小正方形的每一边有多少个方格?

(3) $\sqrt{40}$ 的值在哪两个连续正整数之间?

例题:估算与 $\sqrt{83}$ 最靠近的那个整数。

由于小于 83 的第一个正整数(平方数)是 81,大于 83 的第一个正整数(平方数)是 100。

写一个不等式 $81 < 83 < 100$; 因为 $9^2 < 83 < 10^2$, 取每个数的算术平方根 $\sqrt{9^2} < \sqrt{83} < \sqrt{10^2}$, 化简 $9^2 < \sqrt{83} < 10$ 。因此, $\sqrt{83}$ 的值介于 9 和 10 之间。相对于 100 83 更靠近 81,因而,对 $\sqrt{83}$ 有最好估算的那个整数是 9。教材还要求学生通过估算将一些无理数描画在数轴上。

数值型估算课程强调估算的现实性和情境化,注重操作性试验,让学生体会估算的应用性。

类型 2: 图示操作型估算课程

案例 1(不规则图形面积的计算): 请同学们在网格纸上画出你的脚掌的大概轮廓。进行以下步骤: 第一步,首先数出脚掌轮廓区域内所有小正方形的个数。第二步,数出轮廓区域内和经过轮廓的所有小正方形的个数。第三步,用两个数得个数的平均数来估计一下你的脚掌的面积。^[4]

在解决这个问题的时候,学生一般首先会考虑到把脚掌图形在方格纸上进行无限分割,分割成为面积相等的小正方形,然后在用小正方形的格数进行脚掌面积的大小估测。于是便有了步骤 1 计算出的数值近似脚掌的面积略小,然而步骤 2 计算出的数值也近似脚掌面积略大。最后,学生会根据经验,以两者的平均数使结果更加贴近脚掌的面积。实际上,估算能力和精算能力在解决问题的过程中也相互影响,彼此交错。在精算前学生早已形成一些初级的关于数的概念,能够进行一些概略计算,这些为下一步形成精确的概念系统给出了必要的基础。^[4]

案例 2: 平均值的估算^[6]

图 1 显示的是 18 只老鼠 1 窝产仔的数目



图 2 是用图示的方式估算这些老鼠每窝平均产仔的数目



图示操作型课程强调使用直观化表征形式和数学问题情境,让学生从自己直觉的、非正规的、非形式化的算法进行估算,突出“数感”的直觉性。

类型3: 估算价值型课程

案例1: 保罗用\$5去购买牛奶、面包和鸡蛋。当他到达商店时,在下列哪种情况下使用估算比精算有意义[1]?

- A. 当保罗试图确定\$5是否够用的时候
- B. 当销售员将每一种食品的价钱输入收银机的时候
- C. 当保罗被告知应付多少钱的时候
- D. 当销售员数保罗所付的费用时候

案例2: 问题1: 姑姑准备接你和你的朋友去游玩,为了接你的朋友,她需要你朋友的地址,你觉得提供一个近似数行吗?

问题2: 你和两个朋友约好了上午10:45在入口的地方会面,你觉得把时间近似为11:00到达适合吗?

问题3: 你想要买3个0.5美元的游戏币,初次之外还想要买2.95美元的三明治,你一共有5美元,你需要求出精确值才能够进一步判断你的钱够不够吗?

美国的教材,在估算教学的开始就明确指出了近似数和精确数的概念以及两者之间的差别,使得学生在具体的情境中具体的理解“近似数”和“准确数”,从而完成自己的建构,让学生很清晰地知道“估算”在什么时候用,“精算”又在什么时候用。教材重视培养个体估算意识的首先性,要自觉地应用估算,必须建立在个体充分体会到估算的用途。而估算意识的产生基础是数学的直觉,它往往以高度浓缩的形式洞察估算问题的本质。这对学理性思考问题,建立新的猜想,最后形成估算的意识是有很大的益处的。

类型4: 关联型课程

案例: 建立公式^[8]

1、情境

(Bolivia)名叫鲁克瑞歇。他计划来美国游玩,他将要和克姆的家人住在一起。鲁克瑞歇在来美之前发了以下这封信给克姆(略)。

2、问题

(1) 估算鲁克瑞歇信中所提到的摄氏温度($^{\circ}\text{C}$)是多少华氏度($^{\circ}\text{F}$)?,右图



中的温度计同时标有摄氏温度和华氏温度的刻度)

(2)a. 如何通过这个温度计找到问题(1)的答案?

b. 检查你对问题(1)的估算,它们接近你根据温度计得到的结果么?

(3)a. 仔细观察温度计。如果摄氏温度增加10度,那么对应的华氏温度增加多少度?

b. 根据你对a的答案回答如下问题:如果摄氏温度增加1度,那么对应的华氏温度增加多少度?

c. 你能只根据温度计回答b的问题吗?请解释。

3、反思

(1) 你认为通过计算就能将摄氏温度转化为华氏温度吗?为什么能或为什么不能?

(2)a. 解释公式中的那些数字是怎么来的。

b. 使用箭头链(arrow string)表示该公式。

c. 描述你发现的模式,并作出图像。(其他方面略)

单元设计型估算课程的编排顺序从情境、问题、反思、小结、复习与回顾、检查你的学习和进一步的反思七方面,这种课程设计是真正的“问题中心”课程,注重探究式学习,是由“问题串”串成的教材系列,情境问题成为数学课程的支架和平台,美国教材中多样化的估算方法的体现特别突出,他们注重把估算的原理及算法渗入到不同的领域中。

类型5: 开放型估算课程

案例1: 约翰想在磁带上录5首歌。每首歌所用的时间如下所示:

第一首歌: 2分41秒,第二首歌: 3分10秒,第三首歌: 2分51秒,第四首歌: 3分,第五首歌: 3分32秒。请估计一下他录完这5首歌所需的时间,并解释你的答案。^[7]

本题解答可以将每段时间正确地按分钟取整。如: $3+3+3+3+4$ 或 $3+3+3+3+3$; 也可以将每段时间正确地近似到5、10、15或30秒,然后相加; 还有类似于“四舍五入”或“化为整分钟”的估算,或者将各段时间都按3分钟相加。然后用15分钟加上14秒等等,尽管这个问题可以给出精确答案,但是问题本身却要求学生对结果进行估计,所给的选项也都是一个估计值。由此可看出,题目本身就是考察学生的估算能力和估计策略了。

只要答案是合理的,就都可以采用。估算结果的不唯一性、开放性,也是估算与精算的评价方式的重要区别。借助多样化的估算策略,使得类比、直观感知、猜想、大胆假设进行问题假设的能力不断得到加强,以从而提高估算的技能。

案例2:在太平洋一艘航行的游船上,导航员称他的游船正行驶在地球上最深的水域——马里亚纳海沟上面。一与此同时,有一位游客一不小心,将一重量为5千克的水晶球掉进海里了。请进行猜想,要花多少时间这颗水晶球会沉到海底?^[6]

本案例,看似条件不足够,但是仔细观察,我们可以发现两个关键的条件——水晶球在海水中下降速度以及马里亚那海沟的深度。它的答案之一是:根据马里亚纳海沟深度大约是11千米,而且水晶球在水中下落的速度约3米/秒。就此我们可以估算出,水晶球大概需1个小时才能落到海底。学生们都知道地球的最高点——也就是珠穆朗玛峰的高度大概为9千米,再根据自然界当中普遍存在的“平衡律”,我们可以做出推测——地球的最低点深度的数量应当与最高点的高度大约相等,也是在10千米左右。最后再根据平时生活的经验:在3米深的泳池当中,一个重物要从水面落到池底大概要花1秒。本案例思维的最大特征就是从整体上把握估算的内容和方向,直接洞察答案的合理性,从而去找寻问题本质的规律,学生从整体结构上进行转换和调节,摆脱常规思维模式,最后迅速地对答案合理性进行判断。

三、估算课程设计与特点与启示

1、估算课程设计以问题情境为有效载体

估算是一种能够用于非常规问题解决情境的技能,是学习者能够用于问题解决的一种情景性工具。估算课程标准要求在情境中进行合理估算和判断结果的合理性,这也指明课程设计必须依赖于问题情境的现实性,也是估算课程学习的出发点。在解决现实为生活的问题时,纯粹从数学角度精确解答语时候不一定有现实意义,反而需要用符合现实情境的估算对精确解答进行“矫正”,结合生活经验建立直观感知,提升经验,增加体验,也是估算学习的归宿,利用问题情境帮助学生理解估算概念和培养估算意识。

2、估算课程课程设计遵循基于探索研究、渐进的数学化原则

问题解决是课程设计的核心,采用学生探究和讨论反思的方式,学习主线从非正式到预整式,最后到正式,每个估算课程结构都是始于问题情境中待解决的“焦点问题”,设计一系列的问题探究活动,终于问题反思。估算课程结构遵循着“ACE问题”模式:应用(Applications)、关联(Connections)、拓展(Extensions),^[8]以螺旋上升的理念认识估算,教材呈现方式以“情境、问题、反思、小结、复习与回顾、反思”等栏目设置支撑设计理念,应用使情景和问题探索相一致,让学生在活动中经历估计的过程,探究估算问题的本原;关联使不同情境、不同内容相联系,探索问题的外延,能够揭示隐藏的数学问题,建立与其他数学知识的关联;拓展估算知识,培养估算意识和数感。

3、估算课程强调关联性原则

数学思维包含找寻关联、建立联系和数学推理,关联是课程设计的关键特征,体现在“数学各个分支的关联、数学内容的关联与其他学科的关联、数学与现实生活问题的关联”。^[3]

估算教材在内容编排上注重关联,例如“建立公式”课程,建立了估算与公式之间的联系,通过估算探寻公式;表征方式上注重关联,“平均值的估算”课程设计在解决问题的过程中,让学生能选择合适的方法进行估算,学生挖掘图形、数字、符号、口头表达中的潜在信息,运用自己的语言和不同的表征方式解释估算过程。关联数学的内涵是使学生能够了解数学概念并具有关联这些概念的能力,通过课程设计能够了解估算概念相互关联的关系并藉此建立一个连贯的数学体系,学生学习数学时要寻找到连接点,发现数学思想之间的一致性,密切关注其中蕴含数学思想方法之间的联系。

4、估算课程设计的目标指向:积累估算经验,培养学生的估算观念

Onslow认为,估算有利于数意识的发展,这种技能是通过实践和反思而形成和发展的^[9]。估算是发展学生数感的重要渠道,但估算的学习有别于传统的数学知识,首先估算课程设计离不开问题情境,估算课程设计以案例分析为载体,积累学生的估算活动经验,有利于提高学生利用估算解决问题的能力,其次估算课程不宜列为单独的课

程内容,应当强调估算能力渗透在各个教学内容之中,强调知识关联,如果学生掌握了科学的估算方法,并能灵活运用,不仅能够增强学生的数感,培养学生的估算观念,而且对提高学生的分析、判断能力,培养学生思维的深刻性、灵活性和独创性都将起到积极的促进作用。

参考文献:

- [1] 全美数学教师联合会. 蔡金法等译(2004) [M]. 美国学校数学教育的原则和标准. 人民教育出版社. 2004: 34-35.
- [2] 中华人民共和国教育部制订,全日制义务教育数学课程标准(实验稿) [M]. 北京师范大学出版社. 2001: 66-68.
- [3] Sower, J.T, Estimation and numbersense. In:Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning:A Project of the National Council of Teachings of Mathematics. Newyork , NY, England, Macmilland Publishing Co, Inc,1992:371-389.
- [4] Hogan, T.P., & Brezinshi, K.L., Quantitative estimation:one, two or three abilities? Mathematical thinging and learning. 2003, 5(4):259-280.
- [5] Bailey, R., Day. R., Frey, P., Howard, A. C., Hutchens, D. T., McClain, K., Moore-Harris, B, Ott, J.M., Pelfrey, R., Price, J., Vielhaber, K.,, & Willard, T(2006c).Applications and concepts(teacher wraparound edition), course3. columbus, OH:The McGraw-Hill Company. 120.
- [6] National Center for Research in Mathematical Sciences Educational Staff at the University of Wisconsin-Madison, & Freudenthal Institute Staff at the University of Utrecht, 1998:24-25.
- [7] 聂必凯等. 美国现代数学教育改革 [M]. 人民教育出版社. 2010,124-125.
- [8] Wijers, M., Roodhardt, A., van Reeuwijk, M., Dekker, T., Burrill, G., Cole, B. R., & Pligge, M. A. (2006).Building formulas. In Wisconsin Center for Education Research & freudenthal Institute (Eds.)mathematics in conntext. Chicago, IL:Encyclopaedia Britannica, Inc: vi.116-132.
- [9] Onslow Barry&Nancy chappie..Esso Family Math(Grades2 — 5) (3th edition),2002. Reys, R. E., Prafton, P. R., Reys, B. B, &Zawojewski. J.Developing computational estimation materials for the middle grades[R].Final RePort of NSF Grant NO 81/13601.

‘Estimation’ of curriculum design In America School and Its Inspirations

Qin Desheng

Abstract: Estimation is an important way to develop students' number sense, is one of the basic skills in mathematics. Five design types of America estimate course in this paper: number operation type, Graphic operation,the estimate value, Relation and open course, Combing the coursedesign characteristics, in order to have the reference significance to our country school mathematics curriculum design of estimation.

Keywords: evaluation;curriculum design;mathematics in American school