



国外“估算”案例析

□ 郜舒竹

自2012年第10期以来,本刊连续刊载了关于估算研究的一系列文章。主要内容包括估算方法与策略、估算的意义及其理解、估算教学困难的原因以及估算的育人功能。最后需要研究的是估算内容的课程设计及其教学方面的问题。

纵观国内外与估算有关的数学课程内容,大致来说有三种类型。第一种类型是在不数(音: shǔ)、不量(音: liáng)的情况下直观估计多少或大小,比如“教室里大约有多少人”或“教室的面积大约是多少平方米”等。第二种类型是把教学重点放在估算方法上,这样的方法大致来说有三种:数据重塑、算式转换和盈亏互补。^[1]第三种类型是利用估算解决问题。

值得注意的是,国外一些关于估算方法的课程内容是与标准算法的课程内容融合在一起的,学生是在不同算法的比较中进行学习的。在利用估算解决问题的课程中,有两点值得借鉴,第一是“问题”不仅包括所谓的实际问题,还有数学内部概念理解的问题;第二是问题解决过程中细致的思维活动设计。下面通过几则案例详细说明。

一、标准算法与估算相互融合

这里所说的标准算法(Standard Algorithm)指的是计算过程程序化的算法,通常所说的“竖式算法(Vertical Algorithm)”就是一种程序化的算法。这种程序化算法的特点是操作步骤清晰、确定,学习者只要记住了这样的操作步骤,就可以“即使不懂,也能做对”。而且经过反复训练,可以做到“又对又快”。这种教学的弊端在于,在追求结果的正确与过程的迅速的同时,减少了学生应当经历的思维活动,这样当然不利于学生的思维发展。^[2]在倡导“育人为本”教学理念的今天,就需要改变这种只通过

“结果”和“速度”评价学生计算水平的传统,为此在计算教学中应当提倡算法多样化,并且重视对不同算法的比较,扩充计算过程中的思维含量。

我国数学课程中也有所谓“先估后算”或“先算后估”的内容,但通常是对计算结果的比较或检验,缺少对不同算法的比较。那么怎样才能使估算与标准算法融为一体呢?下面以全美数学教师协会(NCTM)1986年题为《估算与心算》的年度报告中“ 437×8 ”的教学案例为例进行说明。这一教学案例中,针对“ 437×8 ”的计算给出了两个问题目标,一个是“求出准确结果”(见图1),另一个是“求出估算结果”(见图2)。

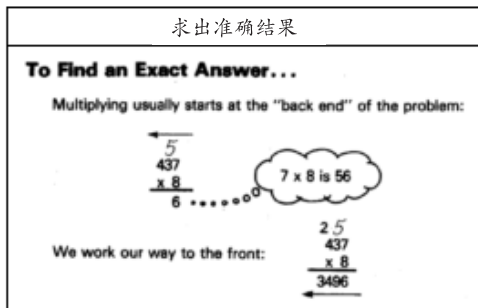


图1 竖式标准算法案例

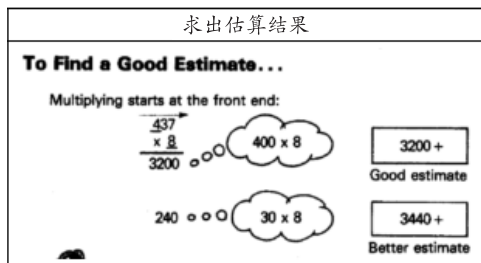


图2 估算过程案例

在图1“求出准确结果”的竖式标准算法过程中,强调思考顺序是“自右向左”,也就是从“ $7 \times 8 =$

56”开始计算,而且用箭头表示出这样的顺序。而在图2“求出估算结果”的计算过程中,指明思考顺序是“自左向右”,即首先计算的是“ $400 \times 8 = 3200$ ”,而且说明“3200”就是一个“好(Good)”的估算结果。在此基础上,如果继续计算出“ $30 \times 8 = 240$ ”,与前面的3200加起来所得到的3440,就成为了“更好(Better)”的估算结果。

这样对比式的教学对学生的学习来说至少有四点好处。第一是可以感受到标准算法与估算在思考顺序上的不同,前者是从最低位数字开始,后者往往是从最高位数字开始思考。第二是可以习得估算方法中数据重塑的高位策略(Front-end),并且渗透了估算区别于标准算法的两个特征,一是结果的开放性,二是方法的多元化。第三是可以加深对竖式标准算法算理的理解,这个算理实际上就是“位值制”。在“ 437×8 ”的竖式标准算法计算过程中,最后一步的计算通常会背诵口诀“四八三十二”,在估算过程中对“ $400 \times 8 = 3200$ ”的计算就暗示了竖式标准算法中这一步计算的不是“ $4 \times 8 = 32$ ”。第四是让学生感受到了算法多样化,对于过程与方法来说,没有最好,只有更好。

因此让估算与标准算法摆脱相互独立、非此即彼的对立状态,使之相互融合,应当是数学教学研究的一个课题。

二、估算用于概念理解

美国国家教育进步评价协会(National Assessment of Educational Progress)于1980年的一项针对13岁(相当于我国的初中一年级)和17岁(相当于我国的高中二年级)两个年龄组学生的测试中,有一个估算问题:“估算 $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$ 的结果更接近1、2、19、21中的哪一个数?”正确答案应当是“更接近2”。测试结果令人惊讶,13岁年龄组的正确率仅为24%,17岁年龄组的正确率也只有37%。^[3]测试中发现,许多学生都试图利用除法将分数化为小数解决问题。由此反映出学生学习过程中的两个问题,第一是估算意识不强,不管什么情况首先想到的是准确计算;第二是正确率低反映出学生对分数概念

以及分数大小关系的理解相对薄弱。因此如何将估算与对数学知识的理解有机结合,就成为了数学教学需要研究的问题。下面关于“分数大小分类”的教学案例就是针对这样的问题设计的(见图3)。

A fraction is close to...

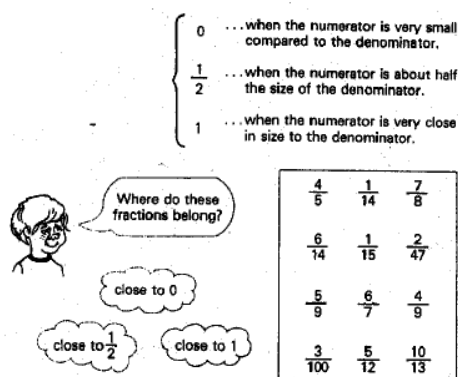


图3 “估算与分数大小分类”案例

图3案例的教学过程分为两个环节,第一个环节是告知学生关于估计分数大小的三条基本结论:

如果一个分数的分子相对于分母来说非常小,那么这个分数接近0;

如果一个分数的分子大约是分母的一半,那么这个分数接近 $\frac{1}{2}$;

如果一个分数的分子与分母很接近,那么这个分数接近1。

第二个环节是在方框内给出了12个分数,要求学生把这些分数归为“接近0、接近 $\frac{1}{2}$ 、接近1”三类。学生经历了这样的思考过程,一方面会逐步加深对分数概念以及分数大小比较的理解,另外也会逐步提高对估算作用的认识,同时也习得了数据重塑中“就近寻求简单数”的估算方法。与此类似的还有估算与小数大小认识的教学案例,比如给出三个小数,通过比较十分位数字可以知道:

0.245601更接近0;

0.47803更接近0.5;

0.91更接近1。

三、估算用于解决问题

估算用于解决实际问题的过程中学生需要经

历什么样的思维活动? 透过国外一些教科书中的案例可以发现,除了估算方法的多样化思考之外,还有一些可能没有引起我们重视的问题。由美国皮尔逊教育有限公司出版的一套名为《Scott Foresman—Addison Wesley Math》的数学教科书,其中五年级有一个“大象吃草”的问题^[4](见图4)。

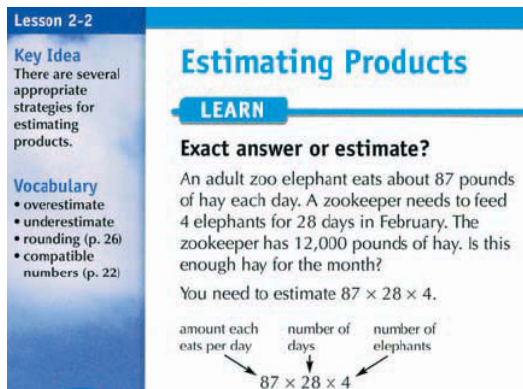


图4 “大象问题”的问题呈现画面

图4是教科书对“大象吃草”问题呈现的画面,其中包含了“主体”(画面右侧)和“辅助”(画面左侧)两个部分。主体部分自上而下又包括了三个内容,第一是课题名称和需要思考的问题,课题名称为“估算乘积(Estimating Products)”,思考的问题是“精确计算还是估算(Exact answer or estimate)?”第二是“大象问题”的叙述:“动物园中一头成年大象每天需要吃大约87磅草料,饲养员在2月份的28天中饲养了4头同样的大象。那么现有的12000磅草料够不够?”第三是给出需要计算的算式“ $87 \times 28 \times 4$ ”,并指明了算式中每一个数据在问题叙述中的含义。

辅助部分包括“核心想法(Key idea)”和思考过程需要用到的“术语(Vocabulary)”。核心想法是“估算乘积可以有许多不同的方法”。术语包括“大估(Overestimate)、小估(Underestimate)、凑十(Rounding)、匹配(Compatible Numbers)”,这些术语显然是对估算方法的提示。紧接着问题呈现画面之后,就是解决问题过程的画面(见图5)。

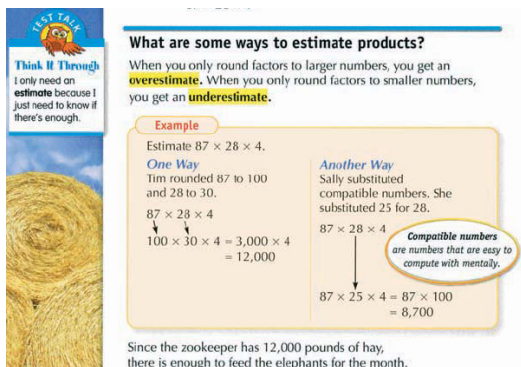


图5 “大象问题”解决过程画面

图5画面的辅助部分(图5左上),首先给出了前面画面中“精确计算还是估算”这一问题的思考结果:“只要估算,因为只需要知道够不够。”在画面主体部分包括了四项内容。第一是需要思考的问题“估算乘积有哪些方法”;第二是对前面术语中的“大估”和“小估”作出解释:“把算式中的因数变大,就是大估;把算式中的因数变小,就是小估。”第三是给出两种方法作为样例(Example),第一种方法是将“ $87 \times 28 \times 4$ ”中的“87”扩大为100,“28”扩大为30,这样得到估算结果为“ $100 \times 30 \times 4 = 12000$ ”;第二种方法是将“ $87 \times 28 \times 4$ ”中的“28”缩小为25,并特别注明了估算的“匹配(Compatible)”策略,也就是提示学生25与4的乘积为100,这样的匹配可以简化计算。两种方法样例之后是问题的结论,即答:“因为饲养员有12000磅草料,所以2月份的草料够。”“大象问题”的最后一幅画面是思考讨论的问题(见图6)。

Talk About It

1. Why did Sally adjust 28 to 25?
2. Which student arrived at an overestimate? How do you know?
3. Which student arrived at an underestimate? How do you know?

图6 “大象问题”的思考讨论画面

图6画面中的第一个问题是:“前面第二种方法为什么把28变为25?”第二个问题是:“哪一种方法是大估?你是怎么知道的?”第三个问题是:“哪一种方法是小估?你是怎么知道的?”

纵观“大象问题”的教科书画面可以发现,针对这一问题的教学过程中,学生至少应当经历如下



运用对立统一观点， 搞好有余数除法的教学

□ 肖鉴铨

“对立统一”是辩证唯物主义的一个基本观点，教师只有掌握这一辩证观点，才能正确地驾驭教材，搞好有余数除法的教学。在进行教学之前，教师首先要对“0”的双重意义进行一些探究。

在数学发展的历史中，0的出现比起其他自然数要晚得多，代表缺位符号的0直到公元6世纪才从印度引进：当某个数位上一个单位也没有时，便用0来表示。用近代集合论的观点来看，如果一个集合中只有 n 个元素，这个 n 就称为这个集合的基数。单元元素集中只有一个元素，所以单元元素集的基数便

是1。没有元素的集合称为空集，因而空集的基数便是0。所以，通常认为：非零自然数1, 2, 3, ...表示的是“有”，而0表示的是“无”。

然而，切莫把这种认识绝对化了，用辩证的观点看，0还有表示“有”的一面。如某天的气温是0℃，总不能说这天没有温度吧！因为0毕竟是一个确定的数呀！0℃比零上3℃低3℃，而又比零下1℃高1℃。0既不是正数，也不是负数，0是唯一的中性数。又如，在中学数学中我们还知道，一条直线 l 的倾斜角 α 的正切，称作这条直线 l 的斜率。0°角的正切

三个问题的思考：这个问题是否可以估算？有哪些方法可以用于估算？应当大估还是小估？事实上前面教科书中还缺少了一个对“估算结果是否合理”的思考和讨论。前面第二种估算方法实际上是将“ $87 \times 28 \times 4$ ”的结果缩小为“ $87 \times 25 \times 4 = 8700$ ”，此时得到大小关系为：

$$\bullet 8700 < 87 \times 28 \times 4$$

$$\bullet 8700 < 12000$$

从这两个大小关系并不能得到“ $87 \times 28 \times 4 < 12000$ ”的结论，所以应当说前面的第二种方法对这个问题的解决是无效的。如果在最后的思考讨论的画面中增加一个“哪一种方法更加有效”的问题，或许这个问题的教学设计就更加圆满了。

对比我国估算内容的课程与教学，所缺少的应当是对思考内容的细致设计。这样的内容主要反映在面对问题时的“能否估算”，解决问题过程中的“怎样估算”，以及针对估算结果的“是否合理”。因此在设计运用估算解决的问题时应当遵循如下原则，问题情境和问题目标应当有“无需准确”的

特征；解决问题的估算方法除了具有多样化的特点外，还应当体现出相对于准确计算的“追求简捷”；运用不同方法所得到的不同估算结果的合理性，应当以是否“达成意愿”作为判别依据。

参考文献：

[1] 郜舒竹. 估算方法知多少 [J]. 教学月刊, 2012.(10).

[2] 郜舒竹. 让计算慢下来 [M]. 小学数学, 人民教育出版社, 2012.2.

[3] Robert E. Reys, James F. Rybolt, Barbara J. Bestgen and J. Wendell Wyatt. Processes Used by Good Computational Estimators. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 13, No.3 (May, 1982), pp. 183~201.

[4] 引自：Phares O'Daffer, Randall Charles, Thomas Cooney, John Dossey, and Jane Schielack. Mathematics for Elementary School Teachers, Fourth Edition. Addison Wesley. Copyright © 2008 by Pearson Education, Inc.

(首都师范大学初等教育学院 100048)