

引领学生感悟测量的本质

朱震绯 (浙江省余姚市花园小学)

徐宽富 (浙江省余姚市瑞云学校)

一、“度量公理”引发的思考

1. 度量公理。

描述长度、面积、体积时,涉及大小、度量、物体、表面等普通名词,都是一种直观的描述。如果采用集合、对应、运动等原始的语言,度量公理可描述如下:

设 M 为集合, $X = \{G \mid G \text{ 为 } M \text{ 的某些子集}\}$, V 为 X 上的非负实值函数,若满足条件:

(1)(正则性)存在度量单位 G_0 , 而且 $V(G_0) = 1$;

(2)(有限可加性) $G_1, G_2 \in X$, G_1 与 G_2 无共同点, $G_1 \cup G_2 \in X$, 则 $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) + V(G_2)$;

(3)(运动不变性)对任意两个 $G_1, G_2 \in X$, 若 $G_1 \cong G_2$, 则 $V(G_1) = V(G_2)$ 。

则称 V 为 X 上的度量函数。

这里的度量公理,可以作为长度公理、面积公理或体积公理,决定于 M 是直线、平面或三维空间。相应地, G_0 分别是单位长度、单位正方形或单位正方体。

度量公理究竟意味着什么? 它传递给我们的信息是:什么才是数学意义上的“测量”。数学中的“测量”并不是拿刻度尺量物体边缘长度那样的一种物理学意义上的技能,数学意义上的“测量”其实质是对图形指定一个合适的数,并使之满足一些特性(正则性、有限可加性、运动不变性)。由此可以看出,长度、面积和体积这三者除了图形的维度不同,但对它们进行测量时,测量过程的本质是一样的。

2. 窥探教材中的“度量公理”。

度量公理看似高深,但如果仔细研读教材,还是可以从教材中窥探一番。

(1)“测量”从“度量单位”始。

在小学阶段,测量的对象主要是线

段、角、常见平面图形和立体图形,因此度量单位主要指长度单位、 1° 角、面积单位、体积单位。以苏教版小学数学教材为例,测量的引入皆从“度量单位”开始,具体分布如下:

二年级上册引入长度单位(如图1)。



图1

三年级下册引入面积单位(如图2)。



图2

六年级上册引入体积单位(如图3)。

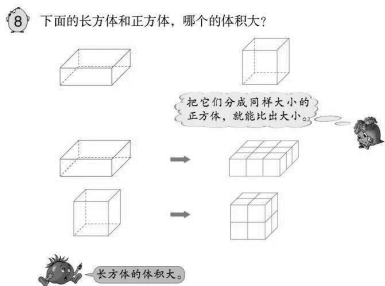


图3

三次单位引入有同有异。相同的都是从比较入手,突出度量单位的“测量”价值,突出建立统一单位的重要性,同时也指向度量的有限可加性。不同的是,引入长度单位和面积单位时,先着力引导学生利用已有的生活经验尝试着进行测量,并充分展示学生所能想到的各种测量方法,再启发他们通过交流、比较体会引入同一计量单位的必要性;而引入体积单位时,则启发学生利用计量长度和面积的已有经验,自己想到需要使用统一的单位来测量,以及选择什么样的图形作为度量单位比较合适。

(2)渗透“有限可加性、运动不变性”。

有限可加性:作为度量单位的小正方形(小正方体)的密铺的结果即为图形的面积(体积)(如图4)。

4. 下面的图形哪个面积最大? 为什么?

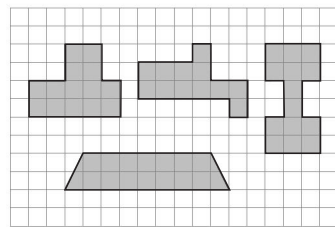


图4

运动不变性:面积单位移动但其个数不变时,不会引起面积的变化;图形形状的变化也不会引起面积的变化(如图5)。

6. 下面是用1平方厘米的正方形拼成的图形,它们的面积各是多少? 周长呢?



图5

二、引领学生感悟测量的本质

长度、面积和体积这三者除了图形的维度不同,但对它们进行测量时,测量过

程的本质是一样的。然而在学生眼里却并非这样:学生对长度的测量感受最深,因为可以有一个相对容易理解的操作过程;学习图形的面积或体积时,由于直接用面积单位或体积单位测量不是十分方便,因而往往更多地选择用某种方法进行计算,也就是通过长度的测量以及相应的计算来代替用面积单位或体积单位进行直接的测量。这无疑削弱了对面积和体积测量本质的感悟。

让学生感悟数学意义的测量,可以立足“度量单位”这个显性的抓手。“度量单位”是测量的首要基础。数学意义上的测量是对图形指定一个合适的数。而要指定一个合适的数,首先必须解决度量单位的问题,也就是确定一个单位,使它成为“1”。同时,度量公理的后面两条也是建立在规定度量单位的基础上。如何围绕度量单位展开教学,引导学生步步深入、层层递进地感悟测量的本质?以下是笔者的思考与实践。

1.创设情境,体会测量源自“差异比较的量化”。

为了比较两个事物某个方面的差异,往往需要对该方面的差异进行量化,借助某个量进行比较。为此,自然就要引出相应的度量。这句话的重点有两个:一是度量源自比较;二是差异需要量化时,要借助“中间量”。由此,我们可以看到:“度量单位”实质上是对差异进行量化时的一个中间量。这一点应该成为长度单位、面积单位、体积单位引入时的核心思想。

【教学片断1】长度单位的引入

请一高一矮两个学生上台比身高。让学生说一说谁高谁矮,并完成下面的填空。

王同学比李同学高()。

学生联系生活经验说出:一点点,半个头,一个拳头,10厘米。

提问:你喜欢哪一种说法?

1个头,1个拳头,1厘米,在这里,都是比较物。

出示教材主题图:仔细找一找,图中的比较物是什么?

说明:一拃、一个铅笔盒的长、一本数学书的长,这些也是比较物。它们有什么用呢?

小结:是的,要知道课桌究竟有多长,

用上这些比较物就能用数来表示了。

长度单位的教学起始于厘米的认识。在片断1中,笔者创设了一个学生熟悉的比高矮的活动情境,通过问题“王同学比李同学高()”,激起量化表达的需求。同时,通过这一朴素的活动,提取学生生活经验中对于“比较物”的感性认识,初步感悟对两个事物进行比较时,有比较物可以表达得更清楚,从而感悟度量单位作为中间量的价值所在。而对这样一种核心思想的感悟,仅仅依靠认识厘米时的一次活动是远远不够的。在此后的认识面积单位和体积单位的教学,同样需要设计相应的活动让学生进一步去感悟。

【教学片断2】面积单位的引入

在具体情境中指认面积,理解面积的含义后,出示两个长方形(如图6),提问:哪个图形的面积大?



图6

填空:①号长方形的面积比②号长方形的面积大()。

学生说,如果用②号长方形去铺①号长方形,①号长方形的面积比②号长方形的面积大3个②号长方形。

师:把②号长方形作为单位去测量,我们就能用数表示①号长方形的面积了。

……

【教学片断3】体积单位的引入

出示一个长方体和一个正方体(如图3)。

提问:这两个图形的体积哪个大哪个小?相差多少?

要让学生理解数学意义上的测量,就不能将测量仅仅定位于“比较大小”,而应上升到“差异比较的量化”。在教学中,“A比B大多少”应成为度量单位引入时的经常性问题。在不同度量单位的引入时,如果都能进行这样的引导,那么学生对于测量的数学意义的感悟必定会逐步地深入。

2.深入浅出,感悟度量单位的特性。

感悟度量单位的特性能帮助学生进一步从数学的角度认识测量。但度量单位的有限可加性和运动不变性绝不是靠简单讲解可以感悟的,更多地需要依靠一

些具有数学意义的学习活动,深入浅出地促进学生的理解。

(1)在对比与想象中理解运动不变性。

运动不变性反映的是度量单位的刚性运动。度量单位的移动或重新组合不会引起作为测量结果的“数”的变化。这样的感受可以通过对比与想象让学生有初步的感悟。

【教学片断4】比1厘米

提出要求:比一比学生尺上的1厘米和老师尺上的1厘米,你能发现什么?

和同桌比一比各人尺上的1厘米,你能发现什么?

想一想:余姚这里的1厘米和国外小朋友的1厘米也一样长吗?

“比1厘米”的活动有两个目的:一是体会1厘米就是一个标准,这个标准是不变的。它和部分与整体的关系不同,不会因为尺子长短不同而导致不同。二是当1厘米成为标准的比较物后,也就得到了全世界的公认。1厘米这个度量单位是不会随着地域的变化而变化的,它是国际上通用的。

【教学片断5】判断体积

出示一个体积是4立方厘米的长方体橡皮泥。

提问:为什么说这个橡皮泥的体积是4立方厘米?

教师将橡皮泥改变形状,现在橡皮泥的体积呢?

提问:如果将它变成一个正方体呢?变成其他的图形呢?

小结:一个物体形状无论怎么变化,它的体积不变。

上述两个教学活动的设置均指向“度量公理”中的运动不变性,有助于学生初步体会:度量单位在移动时,如果个数不变,不会引起测量结果的变化,形状的变化也不会引起测量结果的变化。

(2)在操作与观察中感悟有限可加性。

有限可加性指向度量单位的累积,同时说明用度量单位测量物体是可能的。下面以面积单位的引入为例具体加以说明。

【教学片断6】面积单位的引入

提问:数学书的封面有多大?请你想办法比一比、说一说。

学生提出可以用橡皮面、铅笔盒面、练习本面比一比。

指出:要知道数学书封面有多大,可以选一个面作单位去测量。

出示③号、④号长方形(如图7),哪个长方形大?大多少?请你比一比(给学生提供小圆片、小长方形、小正方形、小正三角形等学具)。



图7

有的学生将两个长方形叠在一起,在剩下的部分中摆小正方形。有的学生在图中直接摆小正方形,还有的学生在图中摆小圆形、小三角形或小长方形。

交流对比:仔细观察黑板上的几种比较方法,从哪一组同学的比较中容易看出几号长方形更大?大多少?

通过交流发现:用小圆形和小三角形测量两个长方形,不能密铺,无法比出到底大了多少;用小正方形测量,能够密铺,可以比出大小。

通过操作与观察,学生看到用小三角形、小圆形作为度量单位不能密铺,也就是这个中间量的面积大小总和并不能代表长方形的面积,体会到用小正方形作为面积单位的合理性。同时,铺摆的过程也反映出长方形的面积就是所有作为度量单位的小正方形密铺的结果。密铺的结果还能实现差异的量化——③号图形铺了12个小正方形,④号图形铺了8个小正方形,③号的面积比④号大了4个小正方形。这样的过程指向了测量的本质。

3.纵横联系,感悟测量的一致性。

教学仅仅依靠一些碎片化的活动是不够的。为了帮助学生进一步丰富认识、加深感悟,需要选择适当的时机将长度单位、面积单位、体积单位进行纵向沟通,形成整体的测量意识。同时,还可以横向联系角的度量,以不同测量对象和工具的比较促使学生进一步感悟测量的本质。

(1)纵向沟通。

体积单位是小学阶段最后学习的一个度量单位。在教学体积单位的认识时,有必要对曾经学过的度量单位进行必要的整理与沟通,以实现对度量单位的整体理解。

【教学片断7】体积单位的引入

师:我们已经知道,测量长度要用长度单位,测量面积要用面积单位。那么,测量体积应该用什么单位?

生:我觉得应该用体积单位。

师:测量面积时,我们用小正方形作为计量单位,那么,测量体积时,应该用什么样的图形作为计量单位呢?

生:小正方体。

师:好的,现在我们就用小正方体作为单位,来测量、比较下面这个长方体和正方体的体积。

出示图8:

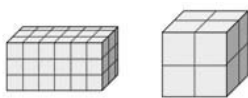


图8

提问:你们现在能比较这个长方体和这个正方体的大小吗?

生:不能。

师:为什么还是不能进行比较呢?

生:因为作为计量单位的小正方体的大小不一样,所以无法确定它们的大小。

师:那你认为我们应该怎样做?

生:可以先把它们分割成同样大小的小正方体,再数一数它们分别包含有多少个这样的小正方体。

师:是的,在测量体积的时候还是应该选择同样大小的正方体作为标准。也就是说,和测量长度、面积一样,测量体积时,仍然需要使用统一的计量单位,这样才便于对测量的结果进行比较和交流。

……

在引入体积单位时,笔者引导学生对长度单位和面积单位进行了回顾:测量线段的长度用线段,规定了长度单位后,就可以用一个数表示这条线段的长度了;测量面积的大小用小正方形,面积的大小就是小正方形的个数。体积的大小如何测量?用小正方体来测量。这个回答已经

无需教师再去指引,因为这是学生已有知识经验的自然生长,学生已经自动将长度、面积和体积的含义及其计量方法进行沟通。这样的沟通显然具有十分重要的意义。

(2)横向联系。

角的不封闭性注定使得角成为学生眼中的异类图形。将角的度量与封闭图形的度量进行横向联系,能够帮助学生进一步理解测量的本质。

【教学片断8】角的度量引入

提问:想知道线段有多长,怎么办?想知道物体的表面有多大呢?

要求:这是1平方分米,请你用它在黑板上的长方形中摆一摆,长方形的面积是()。

设问:这个角多大?要知道角的大小怎么办?这节课我们来学习角的度量。

提问:测量角的大小用什么单位?

学生比划1°的角,教师出示课件说明:1°的角有多大?把圆平均分成360份,其中的1份就是1°角。

上面的教学片断分为两个层次:第一个层次是横向联系线段和面积的测量,学生通过已有的知识经验能够领悟到:测量角的大小同样也需要一个作为标准的单位,而这个单位应该是一个指定了大小的角。由此,学生初步感悟度量单位与所测量图形之间的同质联系。第二个层次是介绍度量单位1°角的由来,并在此基础上带领学生感悟1°角的大小。这个过程与长度单位、面积单位的教学是相似的。相似的教学能够激发学生的记忆,帮助他们将角的度量与已有的测量经验顺利实现有效的对接,形成认知结构。

参考文献:

[1]张奠宙,孔凡哲,等.小学数学研究[M].北京:高等教育出版社,2009.

(责任编辑 侯正海)

