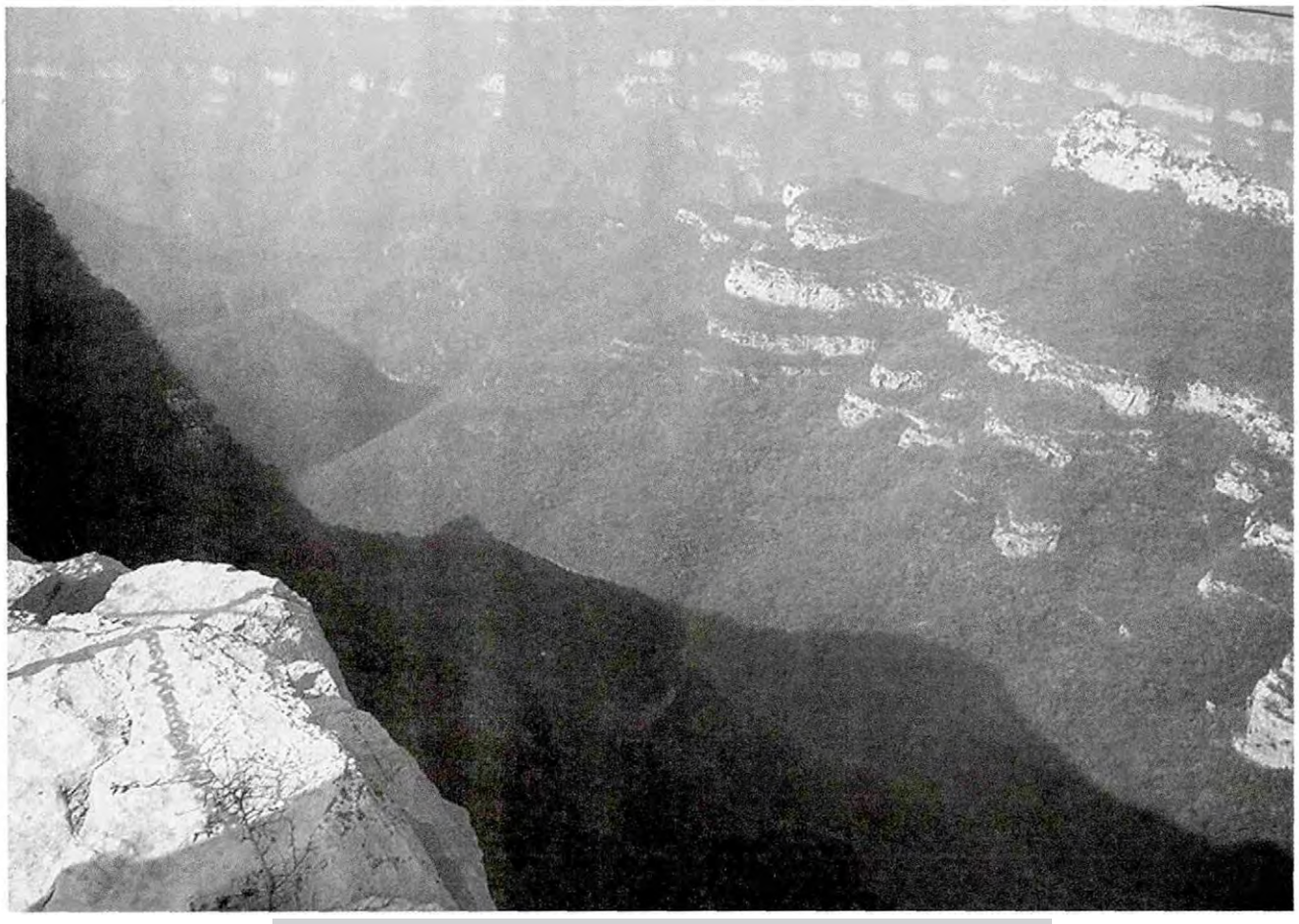

深入浅出，平易近人

——怎样测量长度、面积和体积

◇张奠宙

长度、面积和体积是最基本的度量几何学概念。这三者除了图形的维度不同，作为一种测量过程其本质是一样的。不过，目前的小学数学教科书中，并没有给予统一的处理。测量，不仅仅是拿刻度尺去量测一条线段的长短（那属于物理学范围），数学测量的本质是给每一条线段以合适的数。在这样的视角下，可以说，长度、面积、体积测量的数学意义很遗憾地在中小学教科书里被淹没了。那么，怎样深入理解数学本质，平易近人地浅近展示呢？

让我们从长度概念说起。小学数学教科书通常在二年级就有“长度单位”一节，但始终没有解释什么是长度，将它当作人人自明的一种直觉感知，这是很自然的。但是到了三年级，却要一本正经地“定义”什么是面积。大多数教科书都是说：“物体表面或封闭图形的大小就是它们的面积。”其中“面积”二字用粗体或者不同颜色加以突出强调，这看上去好像是一个定义。于是许多教案围绕这句话进行教学设计，反复地讨论什么是表面、什么是封闭，其实意义不大。面积和长度一样，也是人与生俱来的直觉。早在婴儿阶段人们就已经能辨别两块饼的大小。把“大小”作为面积，就如把“长短”作为长度一样，并没有实质性的解惑，都是同一个意思的简单重复。因此这种粗体字的所谓定义只是常识性的叙述而已，并不能帮助学生真正理解面积概念。

众所周知，数学学科讲究逻辑严谨。一些概念的严谨定义乃是一个大单元的出发点，教科书上将逻辑意义上的定义用粗体字显示，以期引起读者的注意，这自然是对的。不过，并非任何定义都是重要的。有些对象，可以基于直觉的感知，不必追求严格的定义。例如，《辞海》（第六版）里对汽车的定义是：“由自备的动力装置驱动，非轨道、无架线的运输车辆。”这样的定义，对于普通百姓来说，知道不知道并没有多大关系。什么是汽车，大家都明白，能够和电车、火车大致区别开来就行了。就数学教科书而言，也有许多并不重要的粗体字定义。小学数学里面积的定义就是其中之一。

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

关于面积的定义，《辞海》（第六版）里的解释是："几何学的基本度量之一。是用以度量平面或曲面上一块区域大小的正数。通常以边长为单位长的正方形的面积为度量单位。"（这里应该说"非负数"，因为图形的面积可以是0）

《辞海》（第六版）里的解释也不是严格的定义。但是它强调面积是一个数，这很重要。事实上，衡量一个事物的大小有多种方法。例如，衡量军阶的大小，有上将、中将、少将、大校……的区别，但它们并不是"数"。至于面积，则确确实实是一个数，不能回避。

为了印证《辞海》（第六版）里说法的科学性，我们不妨引用现代数学中的测度理论，看看如何严格地定义面积。

【面积】设Σ是一些封闭平面图形组成的集合。m是定义在Σ上取值于非负数的一个映射：$m(A)$，$A\in\Sigma$，且满足以下条件：

1.（有限可加性）若A，$B\in\Sigma$，A与B不相交，那么$m(A\cup B)=m(A)+m(B)$。

2.（运动不变性）如果图形$A\in\Sigma$，经过平移、旋转、反射的运动成为图形$A'\in\Sigma$，那么$m(A)=m(A')$。

3.（正则性）边长为1的正方形$I\in\Sigma$，且$m(I)=1$。

我们将映射m称为图形的面积。

面积的这个严谨定义说明，面积乃是对一些平面图形分别指定一个数（0或正数），而且指定的方法必须满足"有限可加性""运动不变性"和"正则性"三个条件。这三条也可以看作是"面积公理"。其实，其基本思想也适用于长度公理、体积公理，只要把Σ中的平面图形换作线段或立体图形就行了，关键是要满足那三条性质。

现在，让我们回到小学数学范围里来。小学数学当然不能将测度论的那一套搬过来。但是，我们是不是应该深入浅出地把面积理论的基本思想方法生动地呈现出来呢？数学中的"测量"并不是拿刻度尺量物体边缘的长度那样的一种物理学意义上的技能。数学意义上的面积测量，其实质是要对某些平面图形指定一个合适的数，并使之满足一些特性。以下就来谈谈我们如何在教科书中叙述。

一、关于长度概念

前已述及，二年级教科书中有"长度单位"一节。那里没有给长度下定义或给予任何说明。对儿童来说，长度就是长度。感知直线段或曲线弧的长度乃是人类的直觉本能，小学数学无须多做解释。

三年级教科书中有"测量"一节，可是内容只是介绍毫米、分米、米、千米、吨等单位，并没有介绍什么是测量、如何测量。

这样的内容，只涉及度量单位，包括使用毫米、厘米、分米、米、千米等标准。凡是有刻度的测量，都涉及测量的手段，机械的、光学的、原子物理学的等，从学科划分上属于物理学范畴。至于数学上的"测量"，如长度，其核心要求在于如何给每一条线段"指定"一个适当的数，并使之具有长度的三条性质。这三条性质，在我们"指定"的过程中不经意地使用了。

首先，"长度的有限可加性"。例如，在教科书中用塑料尺量课桌面的时候，由于尺短而课桌面长，因而要不重叠地量好几段才能量完，然后把几段长度加起来获得最后的结果。这蕴含着有限可加性。因此，为了强调"测量"的这一特点，我们不妨在教科书里加上一句：

要量不同的两条线段的长度，如果彼此不重叠，那么先分别量，然后加起来就行了。

这样的一句话，平易近人，却体现了"数学测量"的本质意义。

其次，测量过程隐含了长度的运动不变性。量课桌面长或宽的长度时，两段能彼此重合的线段，虽然位置不同，但长度是一样的。为了强调这一点，也不妨在练习题里出一道题：大扫除时把课桌搬动了一下，课桌面的长度有没有变化？

再次，测量时要使用长度单位，如厘米、分米、米等（这在教科书里已经充分强调）。数学和物理在这里和谐地链接起来了。

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

对小学生而言，这些长度的性质虽然不必给出特别的名词，但在度量过程中明确地指出、有意识地运用，无非是加上两句话，却对理解长度的意义十分有益。

二、关于面积的意义的教学

面积的教学，其核心是如何测量图形的大小，即如何给平面上的封闭图形一个恰当的数，能满足那三条基本性质。在教科书中，我们可以通过回顾长度的测量过程，将面积的测量过程与长度的测量过程进行类比，再次揭示测量的数学本质。以下是有关面积在教科书中如何设计的建议：

第 1 页：回忆长度的测量过程。有以下三步：

* 感知长度的相对性：物体有长短，人体有高矮。例如，小明比小英高。

* 用数字表示长度的测量过程：例如，小明有多高？小英有多高？如果从长度单位“厘米”出发，给每个人都量出身高就好了。例如结果是：小明身高 145 厘米，小英身高 141 厘米。

* 用数值计算量出的长度相差多少。例如，145−141=4，所以小明比小英高 4 厘米。

第 2 页：面积的意义。不妨这样写：

大家知道，物体表面是有大小的。例如邮票贴在信封上，我们就说邮票比信封小。那么，信封有多大？邮票有多小？我们能不能用数来表示它们的大小呢？

我们用一个数来度量平面或曲面上一块区域的大小，并把这个数叫作这一区域的面积。

类似于长度的测量过程，如果我们能从“平方厘米”这个单位出发，给出长方形的面积，那么我们就能测量出邮票的面积（例如 6 平方厘米）以及信封的面积（例如 30 平方厘米），并因而能用数值计算比较它们的大小了（例如信封比邮票大 24 平方厘米）。

这样叙述，就把“测量”的数学本质呈现出来了。

第 3 页：“求”长方形的面积。

我们用数方格的办法给长和宽都是自然数的长方形指定了相应的面积（“求”出了面积）。数方格的过程，蕴含了面积的有限可加性。此后，还要“求”平行四边形的面积，那里要把一个三角形切下来、搬过去凑成长方形，这是利用了面积的运动不变性。总之，所谓测量，就是“求”平面图形的面积，即设法给一个确定的数与之对应，并能够满足那三条性质。

最后，我们要问：小学数学里是不是能给面积、体积下一个严格的数学定义？我们提出以下建议，看看能否在一些学校里试行一下。至少，可以在教学参考资料以及小学数学教师培训教材中出现。

【面积】数 m 是一个平面图形 A 的面积，就是指能用 m 个单位正方形不重叠地恰好填满 A。

通过简单的数学活动，小学生可以得出：

* 重复认识：单位正方形的面积是 1。

* 长方形的长和宽分别是整数 a、b，则它的面积 $m=ab$。

* 长方形的长和宽分别是有限小数 a、b，则它的面积 $m=ab$。（这时要用边长为 0.1，0.01……的小正方形去填）

接着应该研究，长和宽分别为无限小数（循环或不循环）a、b 的情形。这涉及无限，要用极限方法处理。面积同样也是 $m=ab$。（此结论中小学都默认了，未加细究）

* 用出入相补原理可以将平行四边形的面积归结为长方形的面积（底乘高）。（边长是小数的平行四边形，其高可能是无理数。小学里也未加细究）

* 于是，三角形、多边形的面积也就可以求了。

* 圆的面积。这时无法绕开 π 是无理数的情形。实际上，我们用刘徽的割圆术直观地描述了这一极限过程，求得的圆面积为 πr^2。

* 由此可以求得扇形、环形等图形的面积。

小学里的面积教学到此为止。中学数学课程没有再对面积概念作进一步的探究，只是在高中阶段，将求面积、体积的度量几何学扩展到能够计算常见立体图形的体积：球体、锥体、台体。这就是说，中小学里的内容大量的是“求”一些常见平面图形的面积和物体的体积。

大家知道，对一般的曲边梯形的面积计算，属于微积分学的基本内容。定积分的定义过程，就是用分割以后“内填”“外包”的互不重叠的矩形面积之和无限逼近（填满）的结果。只在此时，才对边长为无理数的矩形面积、圆面积给予严格的论证。

综上可知，小学里的面积、体积概念，在微积分之前的中学数学里并没有得到深化。许多人脑子中的面积、体积概念，就只有小学里那一点点。可以说数学意义下的测量过程，还未能广泛地进入数学教学圈中人的视野。

求平面图形面积的过程，贯穿于整个数学发展史。从古希腊数学到 17 世纪的微积分、现代的测度论，乃至今天的分形理论，一直没有完结。如果更进一步学习，就会知道并非所有平面图形都有面积，那就涉及勒贝格测度等现代数学内容了。

联想开去，可知小学数学并不简单，甚至具有很高的学术含量。小学里有许多内容，需要高屋建瓴地从数学本质的揭示上进行梳理，仅就一些教育理念进行教学设计是走不远的。晚近以来，提倡 MPCK（数学内容的教学知识）研究，教师培训要在教学内容的理解上下功夫，乃是有的放矢的决策。与时俱进，高屋建瓴地讨论面积、体积的定义，只不过是一个小小的例子而已。

（作者系华东师范大学教授、博士生导师，《普通高中数学课程标准》研制组组长，本刊顾问） B

评论与建议

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net