

中小学数学课程中的一条主线——度量

◇赵炯美 鲍建生

在绝大多数国家的中小学数学课程中,“度量(Measurement,也称为测量)”都是一条课程发展主线,和另外的四条发展主线“数与运算”“代数与函数”“几何”“数据处理与统计概率”相提并论。而在中国,与“度量”有关的教学内容却被分散在“图形与几何”与“数与代数”之中,这在一定程度上影响了“度量”中的数学基本思想的形成与发展。因此,本文在国际数学课程发展的视野下,梳理了“度量”的核心概念和思想方法,以便在现有的课程体系下,凸显“度量”这一条课程发展主线。

“度量”中的核心概念和思想方法

1.“度量”中的核心概念。

“度量”是指用一个带单位

的数值来描述可测量物体或现象的某一个属性,从而形成某个具有特殊含义的“量”,如长度、面积、容积、体积、角度、重量(质量)、方位、温度、时间、货币等。随着数学方法在各领域的广泛应用、测量技术与工具的日新月异,越来越多的物体与现象都被发现具有“可测量”的属性,如“雾霾指数”“绿色指标”等。中小学数学课程涉及的“量”主要描述可测物体的某种物理属性,其中包括“离散量”和“连续量”。

为了确定某个具有可测属性的量的大小,需要进行测量活动^[1]。测量活动的本质是比较,其中包括直观比较、直接比较和间接比较。比如,通过直观比较又细又长的多种物体并说出更长或更短的物体,学生可以直观地

认识物体的长度属性并形成长度的直观概念。在直观比较的过程中,学生可能会产生一些认识上的偏差,如认为弯弯曲曲的绳子比直直的绳子短,因此,往往需要用其他方法进行检验。直接比较过程中,学生用基准线来比较多种物体的长度,如把两支铅笔的一端摆齐后再看另一端的长短,这样能逐步积累按照物体的长短来排列的经验。间接比较是用中介物来比较不方便直观比较或直接比较的物体。比如,用一条绳子表示我们班的窗的高度,用另外一条绳子表示门的高度,用这两条绳子可以间接比较窗和门的高度。窗的高度转移到绳子的长度上,这利用了尺子等工具的传递性(Transitivity)^[2]。

用数学方法处理测量问题

的基础是构建或选择标准度量单位(unit),度量单位的选择与准确度(precision)概念有关。为了比较连续量的大小,需要一定的单位;如果需要更准确地测量,就需要进一步细分的单位。所以可以用多个数量表示某一个物体的测量结果。同样属性的测量单位往往不止一个,要培养学生选择自己所需要的单位与表記方式(单名数和复名数)的能力。比如,测量教室的长和宽,最方便的单位是“米”。但如果测量结果超过8米但不到9米,为了准确地表示,还需要“厘米”这样的单位,如用840厘米或8米40厘米来表示。这是培养学生“度量意识”的过程之一。同样属性不同系列的单位之间的换算,如英制与公制的换算,也是重要的测量技能。不仅像厘米和米这样的同系列单位之间的换算比较重要,实际生活中常用的传统单位和国际单位之间的换算也很重要。比如,表示体重一般使用的单位斤与国际单位千克的关系及其之间的换算等。除了像米、克、秒、度这样的基本度量单位,通过运算还可以产生一些复合单位,如平方米、米/秒等。

有了度量单位以后,就出现了各种不同的测量方法,如单位计数、利用工具、利用公式。单位计数是测量的基本活动,即通过复制(iteration)单位进行测量,这样就可以把连续量在一定程度上近似地用离散量来表示。利用工具是度量的核心技能。应该给学生充分的感知测量的意义与使用工具的机会,使他们能够体会工具上的刻度的单位属

性与精确度(accuracy)概念。利用公式是在测量情境中经常用的方法。但是,如果只有公式,省略测量的方法,就会失去测量的意义,也会引起学生的学习困难^[2]。

长度(距离)是数学中最重要的量。长度不仅可以表示其他的量(如角度的大小),还可以推广为更一般的度量概念,如测度、范数等,并由此构建各种度量(距离)空间(metric space),如欧几里得空间、内积空间、希尔伯特空间等。所有这些空间都满足下面的距离公理:

设 X 是一个非空集, X 被称为距离空间,是指在 X 上定义了一个二元实值函数,它满足以下三个条件:(1)(非负性) $p(x,y) \geq 0$,取等号的充要条件是 $x=y$;(2)(对称性) $p(x,y)=p(y,x)$;(3)(三角不等式) $p(x,y) \leq p(x,z)+p(z,y)$ 对于 X 中任意的 x,y,z 都成立。我们称 $p(x,y)$ 为 x,y 的距离,称 X 是以 p 为距离的“距离空间”。

虽然在中小学阶段我们还不能详细介绍距离空间的概念,但通过适当的教学,学生可以对距离公理形成一定的直观理解。

2.“度量”中的数学思想方法。

比、比率的概念与比例推理是度量的核心思想之一。在测量活动中同一属性的不同度量单位之间的换算,在几何中图形经过几何变换前后的度量变化,两个量之间的某些变化关系,等等,都与比例推理有关。例如,测量的基本方法是单位计数,也就是说表示单位的几倍,这样就有了“倍”的概念;两个单位组成的

复合单位(composed unit),如速度或密度,也有比的概念;单位换算时用进率乘除单位之间的数值;表示同样量的大单位的数量与小单位的数量是逆关系,即换算同样属性的量,单位越来越大,数逐渐变小^[3],如100厘米和1米。此外,地图的比例尺、几何变换(如相似变换)的度量性质等都涉及比例推理。

在实际测量活动中,无论测量工具多么精确,测量单位如何细化,实际得到的度量结果仍然是一个“近似值”,因此,很多时候需要“估计”方法的介入。在各国的中小学数学课程中,“估计”与“估算”通常都是与度量相关的^[4]。估计跟现实生活情境密切相关,是解决问题所需要的重要技能。在进行度量的估计时,学生不仅要考虑测量情境中的各种条件和要求,还要理解测量工具的特征并合理地选择度量单位、参照物、测量方法和计算公式。好的估计可以综合不同的数学思想方法(如对称性、多除少补、逼近等),还可以培养学生的几何直观。估计活动的重点不在于谁猜得对,而在于鼓励学生主动寻找估计方法和策略^{[1][5][6]}。

定量思维是数学的一个基本特征,也是现代公民所必备的素养之一。度量的结果用“数量”表示,即用数与计量单位表现物体的属性。“数量”与“数”的概念并不相同。比如,1千克与1米虽然用同样的“数”,但用不同的单位来表示“数量”。这两个量具有不同属性,不可以比较。在现实生活中,学生体会的这些数量都是带计量单位的,对10米与

10 千克的感受会不同。也就是说,不同属性形成不同“量感”。由于数量是带“数”的,所以度量活动当然也会培养“数感”。数量的表示方法有助于形成数概念。比如,计数过程有利于补充自然数概念,温度的表记与表示不够量的情境中需要负数。还有单名数和复名数(mixed unit)的表记过程中学生能感受小数的概念,尤其是单位换算的结果必然用到小数的数位概念。比如,单名数 3450g 可以用复名数 3kg 450g 表示,3450g 能换算成 3.45kg。

3.“度量”在数学学习中的意义。

在数学学科内,度量与其他数学概念有广泛的联系,如数的运算、几何形状、函数关系、统计量等。

如上所述,测量是用单位数值化的,能补充数与运算概念。比如,计数的对象由离散量扩展到连续量,给学生提供了发展“数”概念的机会。测量是用数来表示量的,同样单位的数量能够加减。比如,若测量的长度超过尺子的长度,首先表示尺子的长度,再测量另外的部分,两个数量相加可得要测的长度。比较两个人的体重,用减法可知相差多少千克。长方形的面积公式中包含乘法概念,学生先用计数面积单位(即数方格)的方法求面积,以后会找出沿长方形的一边每行可以摆几个面积单位并有几行,一般化为长度乘宽度的面积公式。同系列大小单位间的换算需要用乘法。

度量的其中一个作用是构建数形结合的桥梁。数轴是有代

表性的测量模型。线段是图形并且有长度的属性,能画刻度表示一个单位并表示数。刻度之间又能划分并表示更小的单位,数轴上也能表示测量的结果。面积和体积公式中包含数与运算和图形概念。虽然面积的初步认识是计数单位面积的个数,但求面积的方式逐渐变化,最终用长度与宽度的乘积表示长方形的面积。面积模型能帮助学生理解两位数乘两位数。比如, $75 \times 24 = (70+5) \times 24$ 。有些特殊图形的面积或体积能用图形之间的关系求解。比如,三角形的面积是等底等高平行四边形面积的一半^[1]。

测量的结果能用表格或图数据化,如温度的变化、每个月的下雨量等。有些数据之间会有函数关系,如植物的生长变化。也可以说度量是收集数据的基本工程,是交流或决策的主要工具。测量的过程中学生会经历不同的问题解决过程。比如,碰到度量铅笔的结果不能用厘米准确表示的情境,有些学生会想起“大约”的概念,有的学生会应用“四舍五入”概念,也有的会想起创建更小的单位的必要性。教师也能利用这些特征开发适合学生认知水平与提高学习兴趣的案例。

度量的研究对象是现实生活中常见的量,可提高学生的数学学习兴趣。对小学生来说,没有实际操作就很难理解并形成度量概念。度量活动容易引起学生的兴趣并让学生积极参与课堂活动。度量是课后生活中也很容易接触与应用的数学,所以学生容易感受“数学的有用性”。

各国中小学数学课程中的“度量”发展主线

中国的《义务教育数学课程标准(2011 年版)》中,“测量”属于“图形与几何”中的一个模块,包含长度、周长、面积、角度、体积(容积)的属性与公式、估计等。但其实第一学段“数与代数”的“常见的量”中有货币、时间、质量的度量,第二学段“数与代数”的“数的运算”中也有常见的数量关系,即总价=单价×数量、路程=速度×时间。

美国的《州际核心数学课程标准(Common Core State Standards for Mathematics, CCSSM)》中的度量出现在学前阶段(K)到5年级的小学阶段的“度量与数据”模块中。美国的度量内容有如下几个特点:描述与比较量的属性,用同样过程形成长度、面积、容积概念,联系加减法与数据概念,估计的结果用具体单位表示,问题解决与测量活动相联系等。

韩国的《中小学数学课程标准(2015 年修订)》中有单独的“测量”模块。韩国的数学课标内容是按照“年级群”来划分的,即1~2 年级群、3~4 年级群、5~6 年级群、中学 1~3 年级群,与中国的“学段”概念相似。韩国的度量内容出现在小学阶段。小学阶段共有五个模块,即数与运算、图形、测量、模式、数据与可能性,其中测量模块有两个核心概念,即量的测量、估计。成就标准(学生最终成就的标准,也可以说内容标准)中还表明,量的比较、测量、估计是测量过程中能够培养的主要技能。韩国度量的最大特

点在于估计。

英国的《义务教育数学课程标准(2014年版)》划分为四个关键阶段(key stage)。在第一阶段(1~2年级)和第二阶段(3~6年级)，“测量”是独立的模块；在第三阶段(7~9年级)和第四阶段(10~11年级)，测量属于“图形与测量”模块。

1.量的比较——度量的基础活动。

与美国、韩国和英国数学课程中的度量内容相比较，中国最明显的差异在于“量的比较”。在美国的K阶段，韩国的1~2年级群，英国的第一阶段，即测量的开头，都是用语言描述并比较可测量的物体属性。不管是直接比较还是间接比较，学生用“更长、更短”“更高、更低”“更大、更小”“更重、更轻”等词语来表示比较某个属性的结果，即长度、高度、容积、质量等。在用词语表示多种属性的过程中，学生比较的不只是一个属性，也会感受不同属性之间的差异及各自的特征。美国、韩国、英国的课程标准均要求学生认识可直接数数的连续量有哪些属性，并把用中介物间接测量的过程作为利用工具测量的前阶段。而在中国的数学课程中，度量的一部分属于“数”，另一部分属于“图形”，在一定程度上忽视了量的概念。虽然度量有数形结合的桥梁作用，但也不能忽略度量的探究对象是实际生活中的量(quantity)。

2.四则运算与单位换算——四则运算和单名数、复名数。

在中国的数学课程中，量与测量虽然属于不同的主线，但有

共同点：带单位、估计、单位换算，虽然有点儿分散，但度量的特点还存在。美国、英国、韩国的课程中有单独的测量模块，只是展现方式有所不同。美国课程中的度量属于“度量与数据”模块，模块内涉及的数学概念与活动比较多。比如，K阶段有两部分内容，即测量的“描述和比较可测物体的属性”与数据的“将物品分类，并数出不同类别物品的个数”。离散量的比较是通过计数，连续量的计数是通过比较，这两个活动都是比较物体的过程。4年级有“理解同一个单位系统内的单位的相对大小”，其中涉及用有序数对或表格表示单位之间的关系，如英尺与英寸的相对大小用(1,12)、(2,24)的函数方式来表示，学生容易发现单位之间的度量关系。

美国、韩国、英国的课程标准中均明确表示，要求学生利用四则运算解决测量问题。美国 and 英国的课程标准中有“利用四则运算解决涉及时间、容量、质量与货币的问题情境”，韩国在3~4年级群的时间、长度、容积、质量、角度内容中共同描述“通过问题情境理解某个属性的加法与减法”。美国和英国的课程中认识面积单位与长方形的面积公式描述特别仔细。如用两种方法认识面积：单位计数和利用公式计算。其中，利用公式求面积的过程中涉及加法和乘法的关系。

有关单名数与复名数的内容在“度量”中的数学思想方法中已经提过。帮助学生选择恰当的单位及培养量感，有利于形成

小数概念。韩国在3~4年级群的时间、长度、容积、质量、角度内容中共同描述“理解某属性的标准单位，能够用单名数与复名数表示其属性”。英国的课程在3年级的说明与指导中提及了复名数的标记方式，是培养学生选用适当的单位进行测量或记录的一种方法。

3.估计——估计单位、估计数量。

估计活动跟生活情境密切相关，尤其是测量活动。中国的课程中，提及估计的模块是“数与代数”与“图形与几何”，即第一学段“数与代数”中的“数的认识”“数的运算”“常见的量”，“图形与几何”中的“测量”，第二学段“数与代数”中的“数的认识”，“图形与几何”中的“测量”。其中“数的认识”“数的运算”中的估计是指估算生活中的大数，结合具体情境并选择适当的单位进行估算。从课程标准附录中的案例可以看到，要求学生“在计算的过程中，要合理利用数的单位和度量单位来减少位数”。“图形与几何”中的估计是猜出给定的或不规则图形的长度、面积、体积。即“数与代数”中的估计关注实际生活情境中的数量，调整数和单位将大数简化，“图形与几何”中的估计是通过长度、面积、体积的单位培养学生的量感。

美国 and 英国课程中描述的方式跟中国有所不同。美国的课标中有“用标准单位测量和估计，如英寸、英尺、厘米、米等”。课标中提及的估计是用长度、面积、体积与质量及其标准单位表

述的。英国的课标中也明确表示用具体的标准单位来估计时间、货币、面积、体积等。

韩国的课标中,估计是测量的两个核心概念之一。估计构成的两个内容要素为:数的范围、估计方法。在韩国1~2年级群提及的“约”或“大约”是表示数范围的基础概念。现实生活中的测量结果是近似值,只用一个数值表示测量或估计的结果其实不够准确,其测量结果存在于某个范围内。韩国的课程中提出用“以上、以下、超过、不到”等词语表示数的范围,也提到了“进一法、截位近似、四舍五入”的估计方法以及在实际生活中的应用。

4.文化差异——传统单位与国际单位、货币。

由于度量基于现实生活并可反映社会文化背景,所以各国的课程呈现的内容必然有差异。生活中常用的单位有两种:传统单位和国际单位。比如,美国和英国的传统单位是英制单位。单位换算应该有两种:同系列内单位间的换算,传统单位与国际单位间的换算。比如,1米=100厘米是大的单位换算成小的单位,1英寸=2.54厘米是英制和公制之间的换算。

这种差异在“货币”部分尤为突出。中国的货币单位是元、角、分,它们之间的进率是10,如1元=10角=100分,直接联系十进制的整数与小数概念。美国的货币基本用美元(dollar),但硬币的单位比较复杂,如cent(1美分)、dime(10美分)、quarter(25美分)。1美元=100美分,25美分在美国是常用的单位,表

示1美元的四分之一,还能联系分数概念。英国的货币单位是英镑(Pound)和便士(penny),1英镑=100便士。韩国现行课程中没有货币的内容,第一次到第三次课程标准(1955—1981年)中有货币的换算和1、5、10、50、100、500元韩币的实际应用,但第四次课程改革时删掉了,并且现在的韩国消费情况有变化,超市或商场一般用的单位是1000、10000元韩币,学大数后才能应用。

货币单位的应用是学生每天遇到的现实情境。根据各国的生活情境与货币单位,可以补充适合的数概念与运算。但货币的价值(汇率)不是固定的,同样的货币价值可以用不同的单位来表示。比如,1元和10角的价值是相等的,但表示的数量不同,所以,货币也属于度量。

综上所述,度量是用单位探究现实生活中存在的量,包含许多数学概念与数学思想,因此很容易提高学生的数学学习兴趣。与美国、韩国、英国的课程相比较,中国的度量融入“数与代数”和“图形与几何”两个模块里,描述的内容也有差异。由于各国的生活方式和文化有差异,实际生活中所需要的度量可能不同,如货币,会影响各国数学课程的内容。但是,无论如何,也不能忽略度量的概念和意义。中国的度量融入“数”和“形”的模块中,但忽视了量的概念。由于没有量的概念,所以缺失了度量模块。小学生的探究对象主要来源于实际生活,其中不只有数与形,量也是数学的研究对象。所以,我们

认为,度量应该成为中小学数学课程中的一条主线。

参考文献:

[1]Reys R E, Lindquist M M, Lambdin D V, Smith N L, Suydam M N. *Helping children learn mathematics* [M]. John Wiley & Sons Inc, 2004:389~418.

[2]Kennedy L M, Tipps S, Johnson A. *Guiding Children's Learning of Mathematics. Eleventh Edition* [M]. Wadsworth Pub, Co, 2008:437~487.

[3]Joanne L, Amy B E. *Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions, and Proportional Reasoning for Teaching Mathematics: Grades 6-8* [J]. National Council of Teachers of Mathematics, 2010, 16(4):88.

[4]鲍建生.估计——数学教育面临的新课题[J].教育研究, 1997(10).

[5]Karen K, Janet C, Bay Williams J. *Developing Essential Understanding of Addition and Subtraction for Teaching Mathematics in Pre-K-Grade 2* [J]. National Council of Teachers of Mathematics, 2011:84.

[6]Albert D O, Janet H C, Cheryl A L, Sarah W H. *Developing Essential Understanding of Multiplication and Division for Teaching Mathematics in Grades 3-5* [J]. National Council of Teachers of Mathematics, 2011:84.

[作者赵炯美(CHOHYOUNG MI)系华东师范大学数学系博士研究生,来自韩国;鲍建生系华东师范大学数学系教授]