

将探究进行到底

——“最小覆盖圆”的探究教学实录与思考

224200 江苏省东台市实验中学教育集团 李长春

1 引言

与接受性学习相比,探究性学习更注重方法的传授、情感的体验和探究能力的培养,体现学生为主体、教师为主导、问题为主线的教学理念,本文以苏科版《义务教育课程标准教科书九年级数学综合与实践》“最小覆盖圆”的探究为案例的形式呈现,谈谈探究性学习的过程及思考.

2 教学片段实录与点评

2.1 创设情境 导入新课

如图1,小明的牛仔裤不小心被铁钉钩了一个划口,要用一块圆形的布料将此划口补上(接缝处不计).如何补呢?



图1

点评 通过此情境的设置进行导入,能激发起学生的好奇心和求知欲,为本节课的探究性学习打下良好的基础.

2.2 动手操作 理解概念

教师拿出如图1中所示的牛仔裤和一些备用的圆形布料(其中,只有一部分圆形布料能覆盖划口),请学生上台从中选用一块圆形布料将牛仔裤上面的划口覆盖上.然后其他同学用老师发给的细白条贴纸贴在自己的裤子上,当做划口,再用其它颜色的圆形纸片进行覆盖.

点评 让学生都动手“做”一遍,通过实际操作,使学生获得亲身的体验和感受,同时又激发其学习兴趣,然后老师顺势进行引导,定义覆盖圆.

设问:什么是平面图形的覆盖圆?

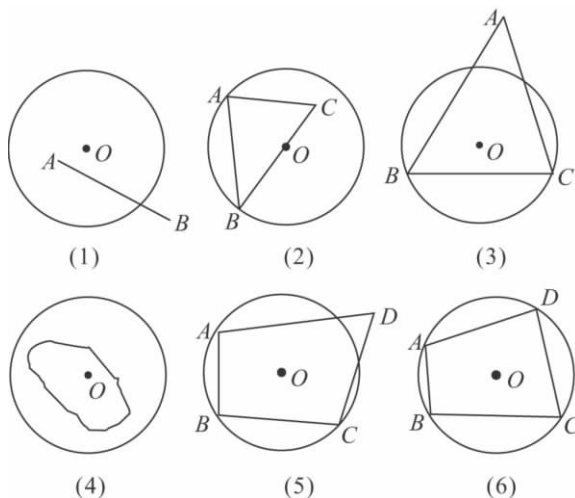
问题提出后讨论、交流,通过对刚才这位同学演示的理解,运用自己的语言描述什么是平面图形的覆盖圆.教师穿梭于学生之间,不时地对学生进行语言组织上的提示和点拨,尤其要对口头表达有困难的学生进行指导.

师生共同归纳出覆盖圆的定义.

对于平面图形 A ,如果存在一个 $\odot O$,使图形 A 上的任意一点到圆心的距离都不大于 $\odot O$ 的半径,则称平面图形 A 被 $\odot O$ 覆盖. $\odot O$ 称为图形 A 的覆盖圆.

巩固练习1

观察下列图形是否被 $\odot O$ 覆盖?



点评 通过练习,巩固覆盖圆的定义,同时,也能增强学生对覆盖圆这个知识点的理解.

2.3 小组合作 探究结论

教师再顺势拿出图1中的牛仔裤和备用的圆形布料,请同学们进行下面的探究.

探究1 小明的牛仔裤被铁钉钩的这个划口,要用一块圆形的布料补上,想一想:有多少种不同的补法?怎样剪这个圆形的布料最省料?

经过各小组的充分讨论,结果基本一致:有无数种补法.如果把图1中的划口看成一条线段,那么要使布料最省,则该圆既要能把线段覆盖,又要使半径尽可能的小,即以该线段为直径的圆.

教师接着引导同学们归纳出最小覆盖圆的定义:

平面图形 A 的覆盖圆有无数个,在这无数个覆盖圆中,半径最小的圆称为平面图形 A 的最小覆盖圆.

结论1 线段的最小覆盖圆就是以这条线段为直径的圆.

探究2 如图2,假如小明的牛仔裤不小心被铁钉钩了一个直角三角形的划口,你能否剪一块最省料的圆形布料将此划口补上(接缝处不计)?

问题刚出示,各小组的探究学习就有了行动,有些同学展开了热烈的讨论;有的小组的同学用直角三角形

贴纸和圆形纸片在自己裤子上做覆盖实验;还有的小组的同学正在用尺规作图,忙得不亦乐乎.

教师请小组代表发言,归纳出探究结论:

直角三角形的最小覆盖圆是它的外接圆(如图3).

此时,学生的学习热情已被充分调动起来了,教师再鼓励一下:同学们能够互相合作、认真探索,表现很好,想不想继续探究?

学生异口同声:想!

探究3 如果划口是个锐角三角形呢?

不一会儿,学生就探究出结论:锐角三角形的最小覆盖圆也是它的外接圆(如图4).

老师再接着探究2和探究3抛出问题:

探究4 如果划口是个钝角三角形呢?

有少数同学受思维定势的影响,脱口而出:外接圆;也有同学持不同意见.

此时,教者不慌不忙,“请大家别急着说结论,再探究探究,看看结论有没有改变?”此时教者的轻轻一点,有四两拨千斤之效,其结论已经水到渠成.

一学生代表发言:钝角三角形的最小覆盖圆不是它的外接圆,应该是以钝角所对的边为直径的圆(如图5).

结论2 锐角三角形、直角三角形的最小覆盖圆是它的外接圆;钝角三角形的最小覆盖圆是以钝角所对的边为直径的圆.

巩固练习2

1. 线段 $AB = 2\text{cm}$, 则该线段的最小覆盖圆的面积是 cm^2 .

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 满足下列条件时, 它的最小覆盖圆是怎样的圆?

(1) 若 $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$;

(2) 若 $\angle A = 90^\circ$;



图2

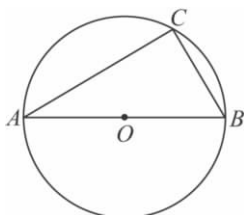


图3

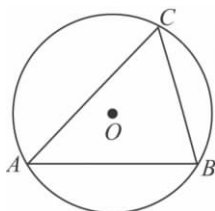


图4

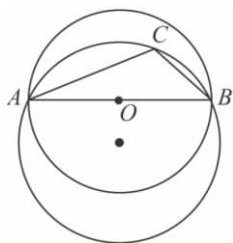


图5

(3) 若 $\angle A = 110^\circ$;

点评 通过练习, 检测学生对结论1和结论2的理解与运用.

我们已经探究了线段和三角形的最小覆盖圆问题, 如果小明的牛仔裤不小心被铁钉钩了一个四边形的划口(如图6), 怎样剪一块最省料的圆形布料将此划口补上呢(接缝处不计)? 学生接到此问题可能觉得无从下手, 此时, 可让学生带着问题去探究下面的问题.



图6

探究5 已知锐角 $\triangle ABD$ 及其最小覆盖圆 $\odot O$,

(1) 如图7, 在 $\odot O$ 上任取一点 C , 使点 C 与点 A 在线段 BD 的异侧, 分别连接 BC, CD , 构成四边形 $ABCD$, $\angle A + \angle C$ 与 180° 有怎样的数量关系? $\odot O$ 是四边形 $ABCD$ 的最小覆盖圆吗?

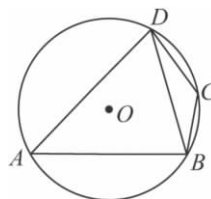


图7

(2) 如图8, 在 $\odot O$ 内任取一点 C , 使点 C 与点 A 在线段 BD 的异侧, 分别连接 BC, CD , 构成四边形 $ABCD$, $\angle A + \angle C$ 与 180° 有怎样的数量关系? $\odot O$ 是四边形 $ABCD$ 的最小覆盖圆吗?

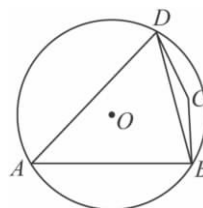


图8

点评 由于要探究四边形的最小覆盖圆问题, 因此, 我们可以考虑在三角形最小覆盖圆上或圆内再添一点, 形成四边形. 探究四边形最小覆盖圆问题, 即可反过来思考, 首先要看原来的三角形最小覆盖圆问题. 而三角形又分锐角三角形、直角三角形、钝角三角形, 所以添加一点也分别在三种情况下进行讨论.

在图7中, 由于 $\odot O$ 是锐角 $\triangle ABD$ 的最小覆盖圆, 所以在 $\odot O$ 上任取一点 C , 使点 C 与点 A 在线段 BD 的异侧, 此时, $\angle A + \angle C = 180^\circ$, 且 $\odot O$ 是四边形 $ABCD$ 的最小覆盖圆.

在图8中, 因为点 C 在 $\odot O$ 内, 故 $\angle A + \angle C > 180^\circ$, 因为 $\odot O$ 至少要覆盖 $\triangle ABD$, 然后又覆盖点 C , 所以 $\odot O$ 是四边形 $ABCD$ 的最小覆盖圆.

探究6 (如图9, 图10) 如果将上述的锐角三角形改为直角 $\triangle ABD$ ($\angle A$ 为直角) 及其最小覆盖圆 $\odot O$, 那么结论又如何呢?

(如图11, 图12) 如果把锐角三角形改为钝角 $\triangle ABD$

($\angle A$ 为钝角) 及其最小覆盖圆 $\odot O$, 那么结论又如何呢?

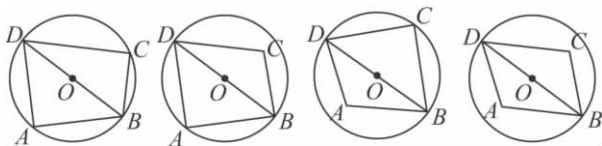


图9 图10 图11 图12

点评 在学生完成探究5的基础上, 再进行探究6, 其

目的是培养学生的类比能力、分析问题和解决问题的能力.

2.4 归纳结论 形成技能

请学生归纳, 填写表格:

其中一组对角的关系	图形	最小覆盖圆
$\angle A + \angle C = 180^\circ$		$\triangle ABD$ (或 $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle ACD$) 的外接圆
$\angle A + \angle C > 180^\circ$	一个锐角、一个钝角 	含锐角或直角的 $\triangle ABD$ 的外接圆
	一个直角、一个钝角 	
	两个角均为钝角 	以这两个钝角所对的公共边 BD 为直径的圆

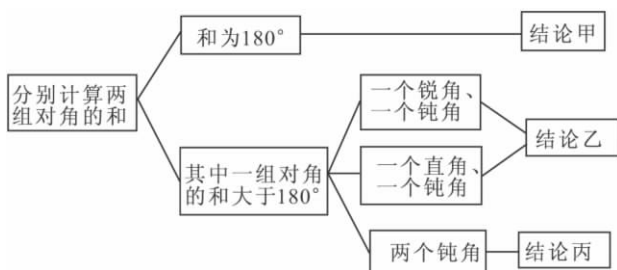
设问: 如果 $\angle A$ 与 $\angle C$ 的和小于 180° , 怎么找出这样的四边形的最小覆盖圆呢?

点评 设计此问的目的是要使学生能适应由特殊到一般的情形, 渗透转化的数学思想, 以达到运用自如的目的. 事实上, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A + \angle C < 180^\circ$ 可转化为 $\angle B + \angle D > 180^\circ$, 然后再看 $\angle B$ 和 $\angle D$ 属于①一锐一钝、②一直一钝、③两个钝角这三种中的哪一类型.

设问: 你能归纳出确定一个四边形的最小覆盖圆的一般步骤吗?

点评 通过归纳, 让学生回忆所学知识, 并进行汇总、小结, 使所学知识形成技能.

结论3 确定一个四边形的最小覆盖圆的步骤如下列树状图所示.



注: 结论甲、结论乙、结论丙分别对应上述表格中的最小覆盖圆的结论.

巩固练习3

在四边形 $ABCD$ 中, 满足下列条件时, 它的最小覆盖圆是怎样的圆?

- (1) $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 110^\circ$;
- (2) $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 120^\circ$;
- (3) $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 110^\circ$;
- (4) $\angle A = 100^\circ$, $\angle C = 120^\circ$;
- (5) $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 100^\circ$.

点评 通过练习, 巩固确定四边形的最小覆盖圆的方法, 使学生达到能灵活运用之目的.

2.5 运用结论 解决问题

某地有四个村庄 E, F, G, H (其位置如图13所示), 现拟建一个电视信号中转站, 为了使这四个村庄的居民都能接收到电视信号, 且使中转站所需发射功率最小 (距离越小, 所需功率越小), 此中转站应建在何处? 请说明理由.

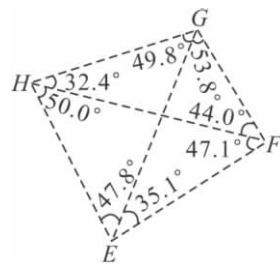


图13

让学生充分讨论, 引导学生运用结论4来解决这个问题, 选一学生代表发言:

先计算四边形 $EFGH$ 中的两组对角的和: $\angle HEF + \angle HGF = 186.5^\circ > 180^\circ$, $\angle EHG + \angle EFG = 173.5^\circ < 180^\circ$, 从而讨论 $\angle HEF, \angle HGF$ 的情况,

$\therefore \angle HEF = 82.9^\circ < 90^\circ$, $\angle HGF = 103.6^\circ > 90^\circ$,
 \therefore 属于两对角和大于 180° , 且一锐一钝的情形,
 \therefore 其最小覆盖圆是含锐角 $\angle HEF$ 在内的 $\triangle EFH$ 的外接圆 (如图14).

\therefore 中转站建在 $\triangle EFH$ 的外接圆圆心处, 能够符合题中要求.

点评 通过本题的练习, 不但能检测学生本节课的学习情况, 更体现了数学来源于生活, 又服务于生活的理念, 体现了数学的应用价值.

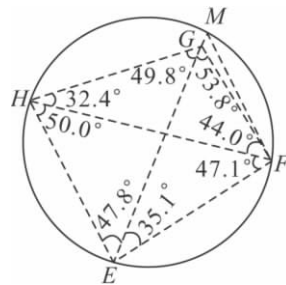


图14

3 教学内容的简略分析

探究欲望是一种内在的东西,它解决的是“想与不想”探究的问题.在本节课中,教者的任务就是激发和调动学生的探究欲望,使学生一直处于一种积极探究的冲动之中.本节课的导入问题起源于学生身边的一个问题——用一块圆形的布料把划口补上.事实证明,学生对身边的这个“补划口”问题很感兴趣,他们也很想弄清楚这个问题.学生有较强的探究欲望.在课堂上,学生首先用细白条贴纸贴在自己裤子上,当做划口,用其它颜色的圆形纸片进行覆盖,然后再用三角形的白色贴纸贴在自己裤子上,当做划口,用其它颜色的圆形纸片进行覆盖.通过这样的活动,使全班学生都能积极参与,亲身体验,动手操作,学有所获,并使学生的思维得到发展,能力得到自然的提升.另外,以“打补丁”作为引入情境,倡导学生保持艰苦朴素的优良作风,反对奢侈浪费,也有一定的教育意义.

探究的问题难度要适中,如果太难或太简单都没有探究的价值.要让学生“跳一跳、摘桃子”,事先设计的探究问题要落在学生的“最近发展区”.本课例中一系列探究问题均由浅入深,先探究线段的最小覆盖圆,学生容易理解,也很容易上手;接着再分别探究直角三角形、锐角三角形、钝角三角形的最小覆盖圆问题;在此研究的基础上继续探究四边形的最小覆盖圆的问题,最后运用学生自己总结出的四边形最小覆盖圆的结论解决实际问题.经历这样一个发现问题、分析问题、解决问题的过程,学生自然就能体验到一种成功的喜悦.而且,每一个问题的深入都是建立在前面问题的基础之上,问题层层推进,同时又保持了适当的“距离”,学生既不能轻易“得手”,又不觉得无计可施,使探究更具有操作性.

本节课教学难点是四边形的最小覆盖圆的探究,通过归纳,让学生回忆所学知识,并进行汇总、小结,使所学知识形成技能.教者引导学生用列表和画树状图两种方法归纳确定一个四边形的最小覆盖圆的步骤,简单易行,一目了然.

4 教学方法的理论依据

任何教学模式不管自觉与否都是以一定的教学理论为依托或在一定的教学理论指导下形成的.没有一定的教学理论作指导,就不可能有相应的教学模式的建立.从某种意义上说,教学模式是一定的教学理论在教学实践中的运用和具体化.因此,可以说教学理论是教学模式的灵魂.

探究教学的思想渊源可以追溯到20世纪初.当时,

针对脱离儿童生活经验、纯知识灌输的美国传统教育,著名实用主义教育家杜威提出以儿童为中心、从做中学的主张.杜威认为,科学教育不仅仅是让学生记忆百科全书式的知识,也是一种过程和方法.他主张教学应当遵循以下步骤:设置疑难情境、确定问题、提出假设、制定解决问题的方案并实施等.仔细分析便可以发现,这种教学模式与我们今天所说的科学探究有着密切联系.这种蕴涵探究思想的教学模式不仅对美国科学教育产生了深远影响,也为探究教学的提出奠定了基础.

以探究的方式进行教学,有着深厚理论基础的支撑,让学生通过对问题的不断深入探究,不但能够让学生学会合作,学会探究,而且能够使学生学会一种分析和解决问题的方式,为学生的终身发展指明方向.

5 随感随想

本节课通过对线段、三角形的最小覆盖圆的探索,进而类比探索四边形的最小覆盖圆问题,其中蕴涵着分类思想、数形结合、从特殊到一般、化归思想等,从中可以体会到数学知识探究的全过程.整堂课的教学以学生探究为主,并在探究形成结论的基础上,引导学生予以归纳和应用.在整个教学过程中,教师扮演的角色始终是“导演”,学生是“演员”;教师是“教练”,学生是“运动员”;教师是学生学习的合作者、倾听者,每时每刻关注着每一位学生的思维变化和探究过程,真正做到了让学生自己去探究、让学生通过小组合作去学习,在不知不觉中知识和能力渐渐形成.

当然,数学的学习应该是以思维活动为核心的学习,在数学教学过程中,教师的重要任务就是培养和激发学生的探究欲望,寻求问题的发展、解决过程.以探究方式组织好学生的学习应该是一种比较高效的学习方式.怎样使学生能经常处于一种积极探究的活动之中,让学生在探究中有效地学习,是我们每一位教育工作者为之而努力的目标.课堂上我们只有让学生自主学习、合作探究,思维才得以拓展,灵感才得以激发,我们的教学才能精彩纷呈.

参考文献

- 1 杨裕前,董林伟.义务教育课程标准教科书九年级数学综合与实践[M].南京:江苏科学技术出版社,2008
- 2 曹才翰,章建跃.中学数学教学概论[M].北京:北京师范大学出版社,2008
- 3 涂荣豹,季素月.数学课程与教学论新编[M].南京:江苏教育出版社,2007

(收稿日期:20110106)