一类定理及证明的统一与应用

邵亚明　邹小丹　（江苏省常州市新桥中学　213032）

文[1]给出了有关圆锥曲线的八个定理.这八个定理归纳出了圆锥曲线的一个统一性质,故猜想它们也应该有统一的表示形式,笔者通过钻研后对其进行总结,归纳出以下定理.

定理 1　设点 F 是圆锥曲线的一个焦点,过 F 的弦 AB(在双曲线中点 A,B 在同一支上)与焦点所在轴的夹角为 θ,$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,$|\overrightarrow{AF}|=\lambda|\overrightarrow{FB}|(\lambda>1)$,$e$ 是离心率,焦点 F 到对应准线的距离为 p,则 $e\cos\theta=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$,$AB=\frac{2ep}{1-\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^2}$;

若 A,B 分别在双曲线的两支上,则有 $e\cos\theta=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$,$AB=\frac{2ep}{\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^2-1}$.

文[1]中的结论十分优美,证明方法与过程也具有一定的巧妙性,利用公式能解决一部分有关焦点弦问题.但这一方法不易推广,对基础较为薄弱的学生来说,在考试时证明这一结论也是有一定困难的,且对八个结论公式的记忆难免会出现错误.笔者对其进行统一后,再给出它的更一般的证明方法.

证明　如图 1 的曲线表示圆锥曲线的一部分,F 是它的一个焦点,l 是它所对应的准线,m 是焦点所在对称轴,l 与 m 相交于点 E,过 F 的弦 AB 与曲线分别交于 A,B 两点,分别作点 A 在 l 与 m 上的射影为 M,N,则由题意可知 $\angle AFN=\theta$.

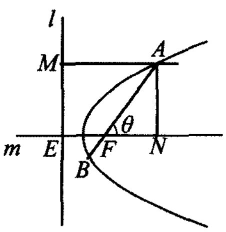

图 1

由圆锥曲线的第二定义得:

$AF=eAM=eEN=e(EF+FN)=e(p+AF\cos\theta)$,所以 $AF=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$.(*)

同理可得,$FB=\frac{ep}{1+e\cos\theta}$.(**)

由 $|\overrightarrow{AF}|=\lambda|\overrightarrow{FB}|$,得

$\frac{ep}{1-e\cos\theta}=\frac{\lambda ep}{1+e\cos\theta}$,

故 $(1+\lambda)e\cos\theta=\lambda-1$,即 $e\cos\theta=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$.

则 $AB=AF+FB=\frac{2ep}{1-(e\cos\theta)^2}=\frac{2ep}{1-\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^2}$.

同理可证点 A,B 分别在双曲线的两支上的情形.

在上述证明过程中,得出两个焦半径的长 AF 与 BF 的两个式子(*)与(**)看似极坐标方程,其实不然.在证明过程中并未建立极坐标系,甚至也没有建立直角坐标系,仅利用了圆锥曲线的统一定义,整个证明过程只是将圆锥曲线上的点到对应准线的距离平移转化到了焦点所在轴上,这是证明的关键;再通过其与焦点所在轴所成的角,能很容易表示出这里的各条线段长,进而使问题得以解决.这一方法更具普遍性与一般性.结论故然重要,但过程更为关键,它仅用了圆锥曲线的统一定义,更易让学生接受与掌握.利用这一定理的证明思想,在高考中解决与焦点弦长或焦半径的有关问题更是快捷、方便,可以真正做到迎刃而解.现举数例说明如下.

例 1　(2010·重庆)已知以 F 为焦点的抛物线 $y^2=4x$ 上的两点 A,B 满足 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$,则弦 AB 的中点到准线的距离为______.

分析　弦 AB 的中点 P 到准线的距离为 $\frac{1}{2}AB$.设 $\angle PFx=\alpha$(注意将 A,B 两点到对应准线距离平移到 x 轴上,以下相同,略),则易得 AF

$=\dfrac{ep}{1-e\cos\alpha}=\dfrac{2}{1-\cos\alpha}$，$BF=\dfrac{ep}{1+e\cos\alpha}=\dfrac{2}{1+\cos\alpha}$，则 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

所以$AB=AF+BF=\dfrac{16}{3}$. 故弦 AB 的中点到准线的距离为$\dfrac{8}{3}$.

例 2　(2011·四川理科) 椭圆有两顶点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，过其焦点 $F(0,1)$ 的直线 l 与椭圆交于 C，D 两点，并与 x 轴交于点 P. 直线 AC 与直线BD交于点Q. 当$CD=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$时，求直线l的方程.

分析　如图2，已知点 $F(0,1)$，要求直线 l 的方程，只需要求 l 的斜率即倾斜角. 设$\angle PFO=\alpha$，利用上述方法可以求得 $CF=\dfrac{ep}{1-e\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\cos\alpha}$ 与

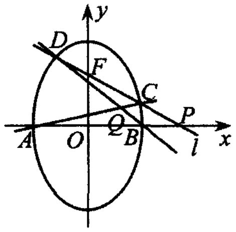

图 2

$DF=\dfrac{ep}{1+e\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\cos\alpha}$. 即 $CD=\dfrac{2\sqrt{2}}{2-\cos^2\alpha}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$，便可求出 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，进而可求出$l$的斜率 $k=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sqrt{2}$，则直线 l 的方程为 $y=-\sqrt{2}x+1$.

例 3　(2011·浙江理科) 设 F_1，F_2 分别为椭圆$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$的左、右焦点，点 A，B 在椭圆上，若$\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$，则点 A 的坐标是______.

分析　设$\angle AF_1x=\alpha$，由$\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$，可知 $F_1A\,/\!/\,F_2B$，即 $\angle BF_2x=\alpha$，所以 $F_1A=\dfrac{ep}{1-e\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\cos\alpha}$，$F_2B=\dfrac{ep}{1+e\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos\alpha}$，则 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

故 $x_A=x_{F_1}+F_1A\cdot\cos\alpha=-\sqrt{2}+\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=0$，$y_A=\pm F_1A\sin\alpha=\pm1$，即 $A(0,\pm1)$.

例 4　(2012·江苏) 如图3，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，已知点 $(1,e)$ 和 $\left(e,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 都在椭圆上，其中 e 为椭圆的离心率.

(1) 略.

(2) 设 A，B 是椭圆上位于 x 轴上方的两点，且直线 AF_1 与直线 BF_2 平行，AF_2 与 BF_1 交于点 P，

(ⅰ) 若 $AF_1-BF_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，求直线 AF_1 的斜率；

(ⅱ) 略.

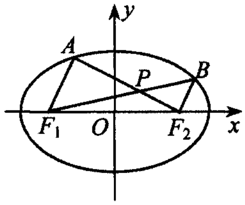

图 3

分析　(2)(ⅰ) 设$\angle xF_1A=\alpha\in(0,\pi)$，则 $AF_1=\dfrac{ep}{1-e\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\cos\alpha}$. 同理$BF_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\cos\alpha}$.

所以 $AF_1-BF_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\cos\alpha}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+\cos\alpha}=\dfrac{2\cos\alpha}{2-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

即 $\cos\alpha=\sqrt{6}$(舍) 或 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

因为 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $k=\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

当一个椭圆确定时，过其一个焦点的焦半径或焦点弦可由两个量来确定，一个是焦半径或焦点弦的一个端点坐标，这也就可以用大家所熟悉的焦半径公式来处理，另一个就是焦半径或焦点弦所在直线的斜率(或倾斜角) 来确定，这就是本文所阐述的方法来源，也是此法的灵魂所在. 而往往与焦半径或焦点弦长有关问题都可以用这一方法来处理，并得到事半功倍的效果，大家何乐而不为呢？当然这只是笔者一家之言，如有不当之处还请各位专家、同仁斧正.

参考文献

[1]　潘继军. 一个定理的引申及应用[J]. 数学通报，2012(7)：30-32.