

多元表征: 探寻数学智慧课堂的一把密钥

吕程^{1,2} 周莹² 唐剑岚²

(1. 南京师范大学附属中学新城小学 江苏南京 210014; 2. 广西师范大学数学科学学院 广西桂林 541004)

【摘要】将多元表征渗透到数学课堂教学中,一方面可以调动学生多感官的认知因素,促进知识的理解,培养学生的数学思维以及促进学生数学智慧的生长;另一方面通过对问题进行多元化的表征,为学生解决数学问题提供了新的平台,从而有助于提高学生对问题多角度的解释能力和创新能力。数学中多元表征的教学策略为:精深挖掘资源,探索数学表征的多元化;运用教育机智,达到多元表征的最优化。但要注意,多元表征不是每堂课都适用,也不是每个学生都能在课上得到最大的收获。

【关键词】多元表征; 数学学习; 认知负荷; 智慧课堂

【中图分类号】G623.5

【文献标志码】A

【文章编号】1674-6120(2012)06-0107-04

在日常的数学教学中或多或少发生着这样的一幕:一个看似很简单、生活中很常见的概念尤其是新授概念,或者一道数量关系并不复杂的问题,教师在课堂上反反复复说了很多遍,可学生在学习过程中,还是似懂非懂,最后教师没辙了,就强行学生进行模仿或者大量的机械训练从而达到正确解决问题的目的。如此的教学,从学习心理学角度,我们发现学生并没有从知识的本质角度去理解知识,更谈不上自己调用认知图式中的信息去主动建构知识;从课堂效益角度,这样的课堂是低效的,学生思维发展的空间受到极大的抑制,无法生成学生自己的数学智慧。多元表征是近年来国际数学教育大会上的主流话题,受到了教育心理学、人工智能和数学教育等领域的关注。笔者就数学表征及多元表征,数学教学中多元表征的教学策略以及对数学教学中多元表征的思考等方面展开讨论。

一、数学中多元表征的内涵

表征(representation)一词,在辞海中解释为“揭示、阐明”,也就是说对事物本质的揭示。在本文中,主要讨论的是认知心理学对表征的解释。表征是认知心理学中核心概念之一。Palme的观点认为:一般地,表征是指用某一种形式(物理的或心理的)将一种事、物、想法或知识重新表现出来^[1]。我国心理学家荆其诚先生认为表征指信息在心理活动中的表现和记载的方式^[2](P32)。从本质上说,表征就是在认知

对象不在的情况下,替代这个认知对象的任何符号或符号集。这里的符号不是狭义上的数字符号,而是心理学领域的信息符号。多元表征指的是信息如数学概念或数学问题,通过心像码的建构过程,对信息进行编码和形成多种转译,从而形成对信息的多元化的表征。数学教育的多元表征主要有两种主流的分类方式。Alex和Michal认为数学表征可以分为文字表征(verbal representation)、数字表征(numerical representation)、图形表征(graphical representation)和代数表征(algebraic representation)四类。徐斌艳认为数学表征可以分为形式化表征、图像化表征、动作化表征和语言化表征四类^[3](P141-142)。笔者认为就数学教学而言,可以将数学表征主要分为符号表征、言语表征、图像表征和体验表征。比如在中学数学教学研究中,抽象的函数可以常常表征为简约的函数解析式,也可以将函数与自变量列为表格进行表征,还可以用直观的函数图像的形式进行表征。小学数学尤其是低年段的教学中,常常会用图形实物如图1来表征数字8等。



图1

综上所述,基于多元表征的内涵,笔者尝试建立了图2所示的数学多元表征系统图。

【收稿日期】2012-02-22

【作者简介】吕程(1985—),男,南京师范大学附属中学新城小学,小学一级教师,广西师范大学数学科学学院硕士研究生。

周莹(1962—),女,广西师范大学数学科学学院教授,硕士生导师。

唐剑岚(1976—),男,广西师范大学数学科学学院副教授,博士,硕士生导师。

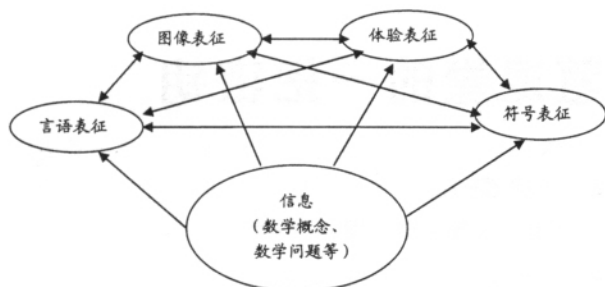


图2 数学多元表征系统图

图2表明对于一个数学概念或者数学问题,往往可以通过多元的形式来表征它。不同的表征形式是为了对概念或者问题进行不同的解释,即从不同的角度、不同的视角对其本质进行可视化或体验化的阐述,使学生获得更深刻的体验,从而达到对数学本质的感悟。其中,每一种表征形式都是基于信息本质的基础上,经过信息系统的加工处理从而生成的,使信息及其相关联的表征一起形成了一个表征系统。所以不同形式的表征不仅丰富了知识的内涵和外延,而且使每种表征形式之间相互补充、相互完善。譬如在教学一位小数比较大小的时候,按照传统的教学方式,从实际生活中的物品价格进行情境的创设,举出一根橡皮筋0.1元和一块橡皮0.5元,通过日常生活体验比大小得出0.1元小于0.5元,随即抽象出0.1小于0.5,对于这种教学是通过口耳相授,即言语化的表征。如果与此同时,我们再展示出图3:

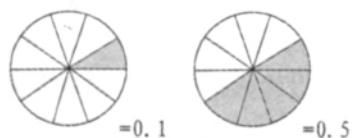


图3

通过图3阴影部分的大小比较,可以更加直观形象地比较小数大小,同时又可以再将分数与小数的联系再一次紧密相连,进一步强化小数与分数的转化关系,使知识之间建立实质性的联系,从而便于今后通过当前的知识和问题信息推论出新的知识信息。可见,图形的展示对知识形成了一种视觉化的表征,结合本身的言语化表征的教学,大大提高了学生形成新的认知图式的进程,从而实现课堂效益的优化。

二、多元表征对数学教学必要性的探究

21世纪初,美国全国数学教师协会在2000年公布了最新的《学校数学课程与评价标准》(简称NCTM2000),其中明确将表征作为标准提了出来,此外还要求教学中需要将表征多样化(即多元表征),

并对表征提出了总体目标。在2007年的新加坡基础教育课程改革中也提出了概念的表征,并要求在解决问题中运用多种表征进行解释。鉴于国外的教育背景,结合教育理论与我国的教育实际,笔者认为多元表征的教学必要性主要有三方面:

(一) 多元表征是认知负荷理论的必然结果

认知负荷理论是近年来澳大利亚心理学学者Sweller等人最先提出的,所谓认知负荷(cognitive load)就是指人在信息加工的过程中所需要的心理资源的总量^[4]。唐剑岚在研究中认为可以把认知负荷分为内在认知负荷、外在认知负荷和有效认知负荷^[5]。内在认知负荷是指工作记忆对认知任务本身所包含的信息元素(如概念、问题等)的数量及其交互性进行认知加工活动产生的负荷,来源于认知任务本身。有效认知负荷(以下简称有效负荷)是指工作记忆对认知任务进行实质性认知操作而承受的负荷。实质性认知操作是指形成图式建构与图式自动化的活动或与形成图式建构与图式自动化密切相关的活动,外在表现为有意义的认知过程与结果。认知负荷理论要求教师在教学中降低内在和外在负荷,增加有效负荷。数学学科本身具有复杂性、思维性和抽象性,仅仅从数学信息的字面进行言语表征,非但不利于学生理解新知,反而增加了学习过程中的无效负荷。而多元表征的创设,可以将复杂抽象的概念分解从而降低知识本身的内在负荷。另外以数学信息的本质为核心对其进行多样化的解释过程,有利于学生新旧知识的联系,为建构新的知识做好铺垫,从而降低外在负荷,增加有效负荷,最终释放学生学习过程中的总认知负荷,从而减轻学习负担,提高学习效率。

(二) 多元表征是数学智慧课堂的必然选择

数学的教学应是一种智慧的生长,在课堂上,学生习得的不应仅仅是知识本身,而应是探寻知识的过程中所萌发的智慧,即数学智慧。结合多方面的理论和实践研究,笔者认为数学智慧并不等于学生会做几道数学习题,不是外显的知识,而是属于缄默知识的范畴,以数学思维的生成、数学思想方法的领悟、数学解题中的灵感萌发作为其内隐的表达形式。要想学生产生丰富的数学智慧,其课堂就应该是“智慧数学”的课堂。陈士文在研究中提到,“智慧数学”的课堂应该具有“多向性”、“探索性”、“简洁性”、“和谐性”等特征^[6]。对数学信息的多元化的表征,就是对数学信息本身多角度、多方向解释的过程,同时以知识信息为核心,使不同的表征方式之间

形成一个和谐统一的表征系统。另外,多元化表征本身是以数学探索作为教学形式,又以探索知识及其生成数学智慧作为课堂教学的终极目标。值得注意的是,数学多元表征对知识进行多种形式的表征,看似形式上使课堂的教学设计变得复杂,其实不然。多元表征促进了数学智慧的生成,使学生培养数学思维和感悟数学思想的过程变得简约,使知识之间的联系更加密切从而使形成知识系统的过程变得简约,使学生在探究中调用认知结构中的信息元从而使建构新知识的过程变得简约。

(三) 多元表征为解决问题提供了新的平台

正确的问题表征是解决问题的必要前提。无论是解决生活中的数学问题,还是解决基于文字信息的数学问题,在处理时首先要通过感应器去提取认识结构中的相关联的已有信息对问题进行表征。不同的表征方式往往在解决问题的时候,会有不同的效果。数学问题具有复杂性和抽象性,所以在解决问题的时候,只用一种方式对问题进行表征,往往只对问题的表面进行了解释,或是只表征了问题的某一方面,导致对问题的本质没有进行透彻分析从而不能发现解决问题的命脉。通过多元化的表征方式,对问题进行不同角度的解释,如视觉化表征更加直观,更易于对问题核心的挖掘,使问题的本质得以凸显进而解决。

三、数学中多元表征的教学策略研究

(一) 精深挖掘资源,探索数学表征的多元化

数学是一门思维的学科,必然需要学习者运用自己的思维能力去建构新的知识,在建构知识的同时去培养学生的数学思维。根据教育心理学理论,当学习新知识的时候,学习者首先要对知识内容进行表征,如果新知识内容和原有的认知结构没有矛盾,学习者可以通过同化的方式将新知识纳入原有的认知结构中。当新知识与原有认知结构存在一定的差异或较少联系的时候无法通过同化将新知吸纳,学习者在对新知识进行表征的时候就表现得比较困难,需要重组和改造原有的认识结构才能获得新知,所以尤其对于此类新知的学习,采用多元化表征的方式方法去对问题和概念进行解释,将大大减少学习者的认知负荷从而减轻学习负担。所以追寻多元化的表征,需要教师对知识的核心本质内涵进行深刻的研究,运用开放性的思维广泛地开发出多样化的表征方式。例如教学认识“千米”的时候,教师往往会发现“千米”这个概念本身不难,但是学生对于选择单位进行填空的时候总是会出现错误,这

就说明学生对其概念的掌握不足。日常教学中,教师常常通过学校跑道的圈数以及百米赛跑圈数与1千米的关系,建立1千米等于1000米的等式。由于千米离学生日常生活经验较远,以单一的通过言语化表征以及符号表征很难让学生理解“千米”概念的本质。笔者根据多元表征理论对本节内容做了如下设计:在教学中试图课前先让学生走一走一千米的路程并记录所走的时间。课上教师再展示出学生行走一千米时的照片,唤醒学生走一千米时内在的身体感受,比如学生回答“很累”、“腿酸了”、“出了好多汗”等等,这就是笔者提到的对概念的体验化表征,是一种内隐形式的表征。此外展示学校附近的地图,标出学校到某处一公里的参照物,以此再让学生看地图感受自己家与学校距离是几千米,通过视觉化表征来进一步认识“千米”,巩固新的概念。结合以上两种结论之后,教师再通过言语化的表征讨论1千米与1000米。本课进行多元表征的方式可以从图4显示。

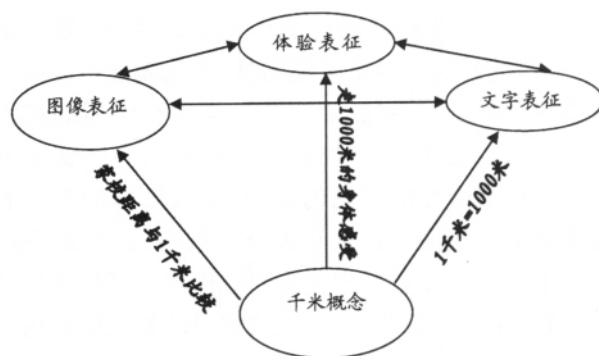


图4

三种不同的概念表征形式共同渗透于教学过程中,利用多感官的刺激,在激发学生内心体验的同时真正从本质上建构起新的知识。

所以在开发新的表征方式的时候,可以将知识内涵与有关实际生活紧密联系起来,或者试图联系过去的知识,但是需要注意的是,探寻表征的过程,思维一定要发散,尽量通过图形图像等视觉化的方式直观去表征,这样更利于学生对新知的习得。

(二) 运用教育机智,达到多元表征的最优化

教学需要机智,运用多元表征的时机不同或者组织方式不同,收到的效果不一样。我们的课堂应该给予学生数学智慧的课堂,这必然要求教师自身具有相当的教育教学智慧。比如一道解决问题题:小红12岁,她的年龄比爷爷少4倍,问爷爷多少岁。对于这个问题,有的教师仅仅从问题的字面出发,强调小红年龄比爷爷少4倍,反过来就是爷爷年龄比

小红多4倍,接着多4倍就是小红年龄的5倍,最后列出算式。表面上看解决问题的思路很清晰,可反反复复的说教后,学生似乎始终无法完全理解。对于三年级的学生,逻辑思维能力的培养并没有到达一定的程度,仅仅通过言语对问题进行表征,学生无法在短时间内调用认识图式中与问题相对应的信息。所以在此时,教师及时启发引导学生运用爷爷和小红年龄的线段图,利用图像对问题进行表征可以更直观、更形象地表达出问题中的数量关系,避免了言语表征复杂的逻辑关系。但是在教学本课的时候,学生是刚刚接触线段图,对这种视觉化表征方式的理解和运用都不足。所以可以试图利用问题链的方式,将本题进行样例的变式,从而将本题改变为如下题组:(1)小红12岁,妈妈的年龄是她的3倍还多2岁,问妈妈多少岁?(2)小红12岁,爸爸的年龄比他的年龄多3倍,问爸爸和小红一共多少岁?(3)小红12岁,她的年龄比爷爷少5倍,问爷爷多少岁?运用问题链的方式更加遵循了三年级儿童的认知发展规律,此外算数问题的图形化也体现了“数形结合”思想的妙用。但最重要的是,多元表征不应该只作为教师教学的手段,而应该让学生在学的过程中去领会多元表征的妙处,达到转化为内在认知的方式去解决今后的问题的目的,所以教师的多元表征需要的是实质的挖掘和表征的规范,而不是仅仅追求形式。多元表征为解决问题构建了多角度的平台,减轻了认知负荷,为学生数学思维的发展提供了成长的沃土。

四、对数学教学中多元表征的思考

(一) 多元表征不是每堂课都适用

近年来对多元表征的研究中,广大的理论工作者和基层教师都做了很多尝试,探索出多元表征的众多优点。既然如此,我们是否每堂数学课都应该将多元表征融入教学设计之中呢?笔者认为要对多元表征理论进行进一步的辩证思考。多元表征的本质是对信息进行多角度、多视角的解释,使学生建立新旧知识固着点的同时,便于调用原有认识结构中的信息使其对新信息进行加工从而建构知识。从学生的角度来说,结合小学生的认知发展规律,学生的逻辑思维尚未成熟以及对问题理解的元认识知识和自我监控能力都还有所欠缺,所以笔者认为以下几类问题可以尝试运用多元表征:(1)与学生生活经验较远、数量单位较大、难以感知的新授抽象概念;(2)数量关系复杂、难以从字面本身获取出题目信息或是题中出现多个易混淆的概念的解决问题;(3)中低

年段的计算教学;(4)与概率统计有关的分类讨论解决的实际问题。对于以上类型的课堂教学,我们发现运用多元表征对其目标进行多样的解释,可以收到意想不到的效果,体现出多元表征在教学中促进学生理解、增加对概念等信息强化的优势。比如对四年级新授三位数乘两位数笔算时,由于三年级已经学习过两位数乘两位数的笔算,新旧知识本质上联系紧密,学生的认识结构完全能够调用旧知的经验迁移到新知的学习中,利用多元表征反而将增加无效负荷,降低教学效益。

(二) 多元表征不是每个学生都能在课上得到最大的收获

在多元表征的探索研究中,要想教学中达到充满数学智慧的课堂,除了要考虑课程标准、教材等因素外,最不能忽视的是教学中占主体地位的学生。多元表征在教学中起到的巨大作用以及意义的重要性,在前文中已经详细阐述,但是2011年颁布的《义务教育数学课程标准(2011版)》提到:人人都能获得良好的数学教育,不同的人在数学上得到不同的发展。从教育学原理的角度,教师在教学中必须考虑到学生具有个别差异性,学生的认识方式和认知风格有所不同,此外固有的知识经验也有所不同。如果学生的实际知识能力无法领会某一种形式的表征,或者班级中多数的学生对信息不需要重新对认知结构进行组合,已经能够通过自己的知识经验去同化新的知识,那么就不需采用多元表征的形式了。多元表征的运用,需要结合班级学生的实际情况,合理选择适合的表征方式,使更多数的学生在表征系统中获取最大的收获。

总之,对多元表征的研究,我们感悟到多元表征在数学课堂中的渗透是为了促成新知识的生成,是为了构建联系新旧知识的系统,是培养学生数学思维、提高数学解决问题能力的有效途径,所以教师不能脱离知识本质的需要而盲目追求表征形式多样,同时还要考虑学生的认识能力和经验等多元表征教学的影响因素。探索多元表征的过程作为一种缄默知识为我们提供了一把钥匙,给充满数学智慧的课堂开启了新的大门。如果充分发挥主观能动性和深入挖掘教学资源,运用多元表征将其信息的本质合理外显化、丰富化,未来的每个数学教师都能拥有属于自己的智慧课堂。

【参考文献】

(下转第114页)

[8] Lung H W, Ching S C, Ping G. *The Chinese Input Challenges for Chinese as Second Language Learners in Computer-mediated Writing: An Exploratory Study* [J]. *The Turkish Online Journal of Educational Technology* 2011, 10(3): 233-248.

[9] J. Barrow. *A Writing Support Tool with Multiple Views* [J]. *Computers and the Humanities*, 1997, 31: 13-30.

[10] Matthew E. *E - Learning Pedagogy in the Primary School Classroom: the McDonaldization of Education* [J]. *Australian Journal of Teacher Education* 2008, 33(5): 29-54.

[11] 中华人民共和国教育部. 全日制义务教育语文课程标准(实验稿) [S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2001.

[12] Kellogg R T. *Training Writing Skills: A Cognitive Developmental Perspective* [J]. *Journal of Writing Research* 2008, 1(1): 1-26.

[13] Mustafa U. *The Role of Computers in Writing Process* [J]. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 2006, 5(4): 58-66.

[14] Wynne A S. *Young Children Using Computers to Make Discoveries About Written Language* [J]. *Early Childhood Education Journal*, 1997, 24(4): 253-259.

[15] Mike S, Malcolm E. *Computer Support for the Development of Writing Abilities* [J]. *Instructional Science*, 1992, 21: 99-108.

Computer Training Methods for Primary School Writing

Zhang Da-wei¹ Ju Rui² Zhang Peng³

(1. College of Computer and Information Technology in Liaoning Normal University, Dalian, Liaoning, 116029, China;

2. Wenyuan Primary School in Sahekou, Dalian, Liaoning, 116029, China;

3. College of Management in Liaoning Normal University, Dalian, Liaoning, 116029, China)

Abstract: There are many difficulties in writing for primary school students: it's difficult for them to write characters; it's hard for them to enrich the contents expression in words in a fluent way; it's also not easy for them to express their well-arranged thoughts and write down completely correct sentences. With the development of the computer technology, e-writing will be the mainly method of language expression, which must be a new challenge for future writing course. Therefore the paper proposes the computer training methods for primary school students' writing. The training methods include four phases: training oral expression abilities, inputting one's own oral expression into computer, self-modifying and improving in computer and instructors making comments to help students to make improvements.

Key words: Chinese learning; primary school writing; computer training

(上接第110页) [1] Ainsworth, Loizou. A. T. *The Effects of Self-explaining when Learning with Text or Diagrams* [J]. *Cognitive Science* 2003, 27(4): 669-681.

[2] 荆其诚. 简明心理学百科全书 [M]. 长沙: 湖南教育出版社, 1991.

[3] 徐斌艳. 数学教育展望 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2001.

[4] Sweller J, Van Merriënboer J. J. G, Paas F. *Cognitive Architecture and Instructional Design* [J]. *Educational Psychology Review*, 1998, 10(3): 251-296.

[5] 唐剑岚. 认知负荷理论及其研究的进展与思考 [J]. *广西师范大学学报*, 2008, 4(2): 75-77.

[6] 陈士文. 智慧数学的内涵及特质 [J]. *江苏教育*, 2011, 4(2): 7-8.

Multi Representation: a Key to Explore the Intelligence in Mathematical Teaching

Lv Cheng^{1,2} Zhou Yin² Tang Jian-lan²

(1. Xincheng Primary School, Nanjing Normal University Attached Middle School, Nanjing, Jiangsu, 210014, China;

2. College of Mathematics and Science of Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

Abstract: The penetration of multi representation into the mathematics teaching in class, on the one hand may mobilize students' multisensory cognitive factors to promote their understanding of knowledge and cultivate their mathematical thinking and improve their mathematical intelligence growth; on the other hand multi representation serves as a platform for students to solve mathematical problem, thereby contributing to the improvement of students' ability and innovative ability to solve problems from different angles. In mathematics, the teaching strategies of multi representation are: find teaching resources and explore the multi representations of mathematics; adopt pedagogical tact to achieve the optimization of multi representations. But teachers should be aware that multi representation can not be used in each class and meanwhile, not every student in class can get the most important knowledge.

Key words: multi representation; mathematics learning; cognitive load; intelligence classroom