# 2023年普通高等学校招生全国统一考试新课标Ⅰ卷数学

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1 已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x|x^2-x-6\geqslant 0\}$，则 $M\cap N=$ （　　）

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{-2\}$　　D. 2

2 已知 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}$，则 $z-\bar{z}=$ （　　）

A. $-\mathrm{i}$　　B. $\mathrm{i}$　　C. 0　　D. 1

3 已知向量 $\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(1,-1)$，若 $\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}+\mu\vec{b}\right)$，则 （　　）

A. $\lambda+\mu=1$　　B. $\lambda+\mu=-1$　　C. $\lambda\mu=1$　　D. $\lambda\mu=-1$

4 设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，则 $a$ 的取值范围是 （　　）

A. $(-\infty,-2]$　　B. $[-2,0)$　　C. $(0,2]$　　D. $[2,+\infty)$

5 设椭圆 $C_1$:$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，$C_2$:$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 $e_1,e_2$. 若 $e_2=\sqrt{3}e_1$，则 $a=$ （　　）

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

6 过点 $(0,-2)$ 与圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 相切的两条直线的夹角为 $\alpha$，则 $\sin\alpha=$ （　　）

A. 1　　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

7 记 $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，设甲：$\{a_n\}$ 为等差数列；乙：$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，则 （　　）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件　　B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件　　D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$，$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{6}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=()$.

A. $\dfrac{7}{9}$　　B. $\dfrac{1}{9}$　　C. $-\dfrac{1}{9}$　　D. $-\dfrac{7}{9}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9 有一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$，其中 $x_1$ 是最小值，$x_6$ 是最大值，则 （　　）

A. $x_2,x_3,x_4,x_5$ 的平均数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平均数

B. $x_2,x_3,x_4,x_5$ 的中位数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的中位数

C. $x_2,x_3,x_4,x_5$ 的标准差不小于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的标准差

D. $x_2,x_3,x_4,x_5$ 的极差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的极差

10 噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量声音的强弱，定义声压级 $L_p=20\times\lg\dfrac{p}{p_0}$，其中常数 $p_0$

$(p_0>0)$ 是听觉下限阈值，$p$ 是实际声压．下表为不同声源的声压级：

| 声源 | 与声源的距离 /$m$ | 声压级 /dB |
|---|---|---|
| 燃油汽车 | 10 | $60\sim90$ |
| 混合动力汽车 | 10 | $50\sim60$ |
| 电动汽车 | 10 | 40 |

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 $10m$ 处测得实际声压分别为 $p_1,p_2,p_3$，则　(　　)

A. $p_1\geqslant p_2$　B. $p_2>10p_3$　C. $p_3=100p_0$　D. $p_1\leqslant100p_2$

11 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，则　(　　)

A. $f(0)=0$　B. $f(1)=0$　C. $f(x)$ 是偶函数　D. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

12 下列物体中，能够被整体放入棱长为1(单位：m)的正方体容器(容器壁厚度忽略不计)内的有　(　　)

A. 直径为0.99 m的球体　B. 所有棱长均为1.4 m的四面体

C. 底面直径为0.01 m，高为1.8 m的圆柱体　D. 底面直径为1.2 m，高为0.01 m的圆柱体

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．**

13 某学校开设了4门体育类选修课和4门艺术类选修课，学生需从这8门课中选修2门或3门课，并且每类选修课至少选修1门，则不同的选课方案共有 ______ 种(用数字作答)．

14 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2,A_1B_1=1,AA_1=\sqrt{2}$，则该棱台的体积为 ______．

15 已知函数 $f(x)=\cos\omega x-1(\omega>0)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 有且仅有3个零点，则 $\omega$ 的取值范围是 ______．

16 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1,F_2$．点 $A$ 在 $C$ 上，点 $B$ 在 $y$ 轴上，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B},\overrightarrow{F_2A}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，则 $C$ 的离心率为 ______．

**四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

17 已知在 $\triangle ABC$ 中，$A+B=3C,2\sin(A-C)=\sin B$．

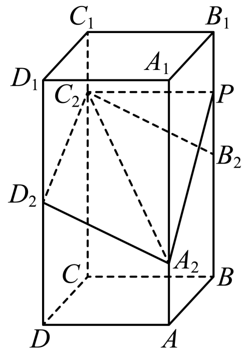
(1) 求 $\sin A$；

(2) 设 $AB=5$，求 $AB$ 边上的高．

18 如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=4$．点 $A_2,B_2,C_2,D_2$ 分别在棱 $AA_1,BB_1,CC_1,DD_1$ 上，$AA_2=1$，$BB_2=DD_2=2$，$CC_2=3$．

(1) 证明：$B_2C_2 /\!/ A_2D_2$；

(2) 点 $P$ 在棱 $BB_1$ 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 $150°$ 时，求 $B_2P$．




19 已知函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$．

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 证明：当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$．

20 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，且 $d>1$．令 $b_n=\dfrac{n^2+n}{a_n}$，记 $S_n,T_n$ 分别为数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和．

(1) 若 $3a_2=3a_1+a_3$，$S_3+T_3=21$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $S_{99}-T_{99}=99$，求 $d$．

21 甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮．无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为0.6，乙每次投篮的命中率均为0.8．由抽签确定第1次投篮的人选，第1次投篮的人是甲、乙的概率各为0.5．

(1) 求第2次投篮的人是乙的概率；

(2) 求第i次投篮的人是甲的概率；

(3) 已知：若随机变量$X_i$服从两点分布，且$P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则$E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}q_i$．记前$n$次（即从第1次到第$n$次投篮）中甲投篮的次数为$Y$，求$E(Y)$．

22 在直角坐标系$xOy$中，点$P$到$x$轴的距离等于点$P$到点$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$的距离，记动点$P$的轨迹为$W$．

(1) 求$W$的方程；

(2) 已知矩形$ABCD$有三个顶点在$W$上，证明：矩形$ABCD$的周长大于$3\sqrt{3}$．

# 2023年普通高等学校招生全国统一考试新课标Ⅱ卷数学

一、选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内,$(1+3\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$ 对应的点位于 ( )

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

2. 设集合 $A=\{0,-a\}$,$B=\{1,a-2,2a-2\}$,若 $A\subseteq B$,则 $a=$ ( )

A. 2　B. 1　C. $\frac{2}{3}$　D. $-1$

3. 某学校为了解学生参加体育运动的情况,用比例分配的分层随机抽样方法作抽样调查,拟从初中部和高中部两层共抽取60名学生,已知该校初中部和高中部分别有400名和200名学生,则不同的抽样结果共有 ( )

A. $C_{400}^{45}\cdot C_{200}^{15}$ 种　B. $C_{400}^{20}\cdot C_{200}^{40}$ 种　C. $C_{400}^{30}\cdot C_{200}^{30}$ 种　D. $C_{400}^{40}\cdot C_{200}^{20}$ 种

4. 若 $f(x)=(x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数,则 $a=$ ( )

A. $-1$　B. 0　C. $\frac{1}{2}$　D. 1

5. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 $F_1$,$F_2$,直线 $y=x+m$ 与 $C$ 交于 $A$,$B$ 两点,若 $\triangle F_1AB$ 面积是 $\triangle F_2AB$ 面积的2倍,则 $m=$ ( )

A. $\frac{2}{3}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$　D. $-\frac{2}{3}$

6. 已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增,则 $a$ 的最小值为 ( )

A. $\mathrm{e}^2$　B. $\mathrm{e}$　C. $\mathrm{e}^{-1}$　D. $\mathrm{e}^{-2}$

7. 已知 $\alpha$ 为锐角,$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$,则 $\sin\frac{\alpha}{2}=$ ( )

A. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$　B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$　C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$　D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

8. 记 $S_n$ 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和,若 $S_4=-5$,$S_6=21S_2$,则 $S_8=$ ( )

A. 120　B. 85　C. $-85$　D. $-120$

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分。

9. 已知圆锥的顶点为 $P$,底面圆心为 $O$,$AB$ 为底面直径,$\angle APB=120^\circ$,$PA=2$,点 $C$ 在底面圆周上,且二面角 $P-AC-O$ 为 $45^\circ$,则 ( )

A. 该圆锥的体积为 $\pi$　B. 该圆锥的侧面积为 $4\sqrt{3}\pi$

C. $AC=2\sqrt{2}$　　D. $\triangle PAC$ 的面积为 $\sqrt{3}$

**10** 设 $O$ 为坐标原点，直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，且与 $C$ 交于 $M,N$ 两点，$l$ 为 $C$ 的准线，则（　　）

A. $p=2$　　B. $|MN|=\frac{8}{3}$

C. 以 $MN$ 为直径的圆与 $l$ 相切　　D. $\triangle OMN$ 为等腰三角形

**11** 若函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}(a\neq 0)$ 既有极大值也有极小值，则（　　）

A. $bc>0$　　B. $ab>0$　　C. $b^2+8ac>0$　　D. $ac<0$

**12** 在信道内传输 0，1 信号，信号的传输相互独立．发送 0 时，收到 1 的概率为 $\alpha(0<\alpha<1)$，收到 0 的概率为 $1-\alpha$；发送 1 时，收到 0 的概率为 $\beta(0<\beta<1)$，收到 1 的概率为 $1-\beta$. 考虑两种传输方案：单次传输和三次传输．单次传输是指每个信号只发送 1 次，三次传输是指每个信号重复发送 3 次．收到的信号需要译码，译码规则如下：单次传输时，收到的信号即为译码；三次传输时，收到的信号中出现次数多的即为译码（例如，若依次收到 1，0，1，则译码为 1）.（　　）

A. 采用单次传输方案，若依次发送 1，0，1，则依次收到 $l$，0，1 的概率为 $(1-\alpha)(1-\beta)^2$

B. 采用三次传输方案，若发送 1，则依次收到 1，0，1 的概率为 $\beta(1-\beta)^2$

C. 采用三次传输方案，若发送 1，则译码为 1 的概率为 $\beta(1-\beta)^2+(1-\beta)^3$

D. 当 $0<\alpha<0.5$ 时，若发送 0，则采用三次传输方案译码为 0 的概率大于采用单次传输方案译码为 0 的概率

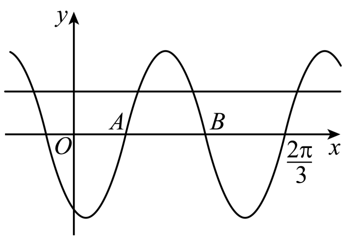
**三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。**

**13** 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}+\vec{b}|=|2\vec{a}-\vec{b}|$，则 $|\vec{b}|=$ ______.

**14** 底面边长为 4 的正四棱锥被平行于其底面的平面所截，截去一个底面边长为 2，高为 3 的正四棱锥，所得棱台的体积为 ______.

**15** 已知直线 $l:x-my+1=0$ 与 $\odot C:(x-1)^2+y^2=4$ 交于 $A,B$ 两点，写出满足"$\triangle ABC$ 面积为 $\frac{8}{5}$"的 $m$ 的一个值 ______.

**16** 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，如图 $A,B$ 是直线 $y=\frac{1}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 的两个交点，若 $|AB|=\frac{\pi}{6}$，则 $f(\pi)=$ ______.



四、解答题：本大题共6小题，共70分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

17 记$\triangle ABC$的内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，已知$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，$D$为$BC$中点，且$AD=1$.

(1) 若$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，求$\tan B$；

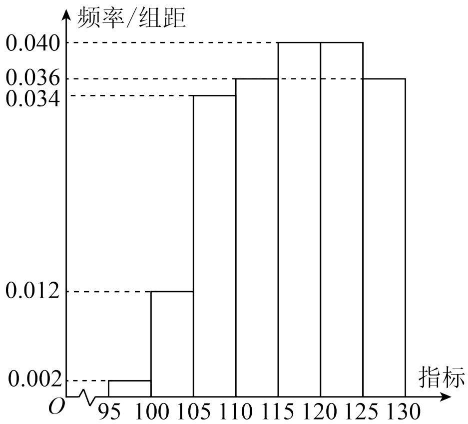
(2) 若$b^2+c^2=8$，求$b,c$.

18 $\{a_n\}$为等差数列，$b_n=\begin{cases}a_n-6, n\text{为奇数}\\2a_n, n\text{为偶数}\end{cases}$，记$S_n$，$T_n$分别为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前$n$项和，$S_4=32$，$T_3=16$.

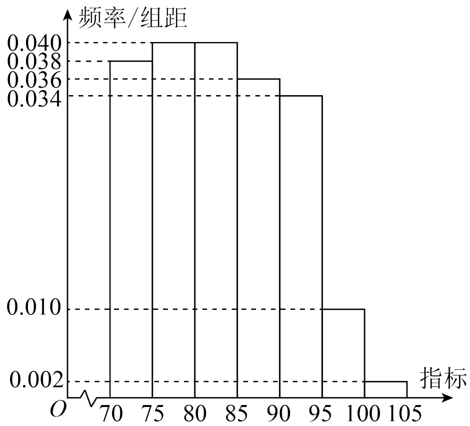
(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 证明：当$n>5$时，$T_n>S_n$.

19 某研究小组经过研究发现某种疾病的患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异，经过大量调查，得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图：



患病者



未患病者

利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值$c$，将该指标大于$c$的人判定为阳性，小于或等于$c$的人判定为阴性．此检测标准的漏诊率是将患病者判定为阴性的概率，记为$p(c)$；误诊率是将未患病者判定为阳性的概率，记为$q(c)$．假设数据在组内均匀分布，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率．

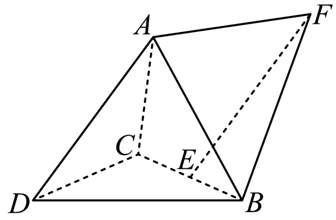
(1) 当漏诊率$p(c)=0.5\%$时，求临界值$c$和误诊率$q(c)$；

(2) 设函数$f(c)=p(c)+q(c)$，当$c\in[95,105]$时，求$f(c)$的解析式，并求$f(c)$在区间$[95,105]$的最小值．

**20** 如图，三棱锥 $A-BCD$ 中，$DA=DB=DC$，$BD\perp CD$，$\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$，$E$ 为 $BC$ 的中点.

(1) 证明：$BC\perp DA$；

(2) 点 $F$ 满足 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.




**21** 已知双曲线 $C$ 的中心为坐标原点，左焦点为 $(-2\sqrt{5},0)$，离心率为 $\sqrt{5}$.

(1) 求 $C$ 的方程；

(2) 记 $C$ 的左、右顶点分别为 $A_1$，$A_2$，过点 $(-4,0)$ 的直线与 $C$ 的左支交于 $M$，$N$ 两点，$M$ 在第二象限，直线 $MA_1$ 与 $NA_2$ 交于点 $P$. 证明：点 $P$ 在定直线上.

**22** (1)证明：当 $0<x<1$ 时，$x-x^2<\sin x<x$；

(2) 已知函数 $f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 $a$ 的取值范围.

# 2023年普通高等学校招生全国统一考试甲卷理科卷数学

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1 设集合 $A=\{x\mid x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$，$U$ 为整数集，$\complement_U(A\cup B)=$ （　　）

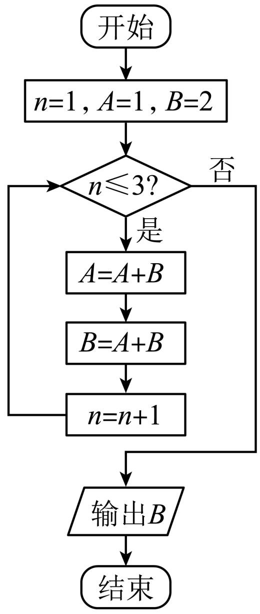
A. $\{x|x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$
B. $\{x\mid x=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$
C. $\{x\mid x=3k-2,k\in\mathbf{Z}\}$
D. $\varnothing$

2 若复数 $(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=2,a\in\mathbf{R}$，则 $a=$ （　　）

A. $-1$　B. 0·　C. 1　D. 2

3 执行下面的程序框图，输出的 $B=$ （　　）

A. 21　B. 34　C. 55　D. 89




4 向量 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=-1,|\vec{c}|=\sqrt{2}$，且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则 $\cos\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\rangle=$ （　　）

A. $-\frac{1}{5}$　B. $-\frac{2}{5}$　C. $\frac{2}{5}$　D. $\frac{4}{5}$

5 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$S_n$ 为 $\{a_n\}$ 前 $n$ 项和，$S_5=5S_3-4$，则 $S_4=$ （　　）

A. 7　B. 9　C. 15　D. 30

6 有60人报名足球俱乐部，60人报名乒乓球俱乐部，70人报名足球或乒乓球俱乐部，若已知某人报足球俱乐部，则其报乒乓球俱乐部的概率为 （　　）

A. 0.8　B. 0.4　C. 0.2　D. 0.1

7 “$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”是“$\sin\alpha+\cos\beta=0$”的 （　　）

A. 充分条件但不是必要条件
B. 必要条件但不是充分条件
C. 充要条件
D. 既不是充分条件也不是必要条件

8 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，其中一条渐近线与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 $A$，$B$ 两点，则 $|AB|=$ （　　）

A. $\frac{1}{5}$　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

9 有五名志愿者参加社区服务，共服务星期六、星期天两天，每天从中任选两人参加服务，则恰有1人连续参加两天服务的选择种数为 （　　）

A. 120　B. 60　C. 40　D. 30

10 已知 $f(x)$ 为函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位所得函数，则 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的交点个数为 （　　）

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

11 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=4, PC=PD=3, \angle PCA=45°$，则 $\triangle PBC$ 的面积为 (　　)

A. $2\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $5\sqrt{2}$

12 已知椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$，$F_1, F_2$ 为两个焦点，$O$ 为原点，$P$ 为椭圆上一点，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，则 $|PO|=$ (　　)

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{30}}{2}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{35}}{2}$

**二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13 若 $y=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数，则 $a=$ ______.

14 设 $x, y$ 满足约束条件 $\begin{cases}-2x+3y\leqslant 3\\3x-2y\leqslant 3\\x+y\geqslant 1\end{cases}$，设 $z=3x+2y$，则 $z$ 的最大值为 ______.

15 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$E, F$ 分别为 $CD, A_1B_1$ 的中点，则以 $EF$ 为直径的球面与正方体每条棱的交点总数为 ______.

16 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2, \angle BAC=60°, BC=\sqrt{6}$，$D$ 为 $BC$ 上一点，$AD$ 为 $\angle BAC$ 的平分线，则 $AD=$ ______.

**三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.**

**(一) 必考题：共 60 分.**

17 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，设 $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 前 $n$ 项和，$2S_n=na_n$.

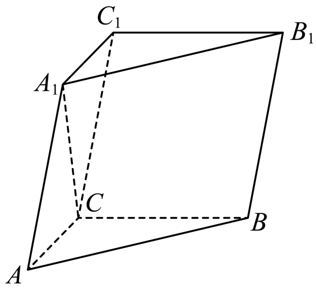
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n+1}{2^n}\right\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$.

**18** 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=2$，$A_1C\perp$ 底面 $ABC$，$\angle ACB=90°$，$A_1$ 到平面 $BCC_1B_1$ 的距离为1.

(1) 求证：$AC=A_1C$；

(2) 若直线 $AA_1$ 与 $BB_1$ 距离为2，求 $AB_1$ 与平面 $BCC_1B_1$ 所成角的正弦值.




**19** 为探究某药物对小鼠的生长抑制作用，将40只小鼠均分为两组，分别为对照组(不加药物)和实验组(加药物).

(1) 设其中两只小鼠中对照组小鼠数目为 $X$，求 $X$ 的分布列和数学期望；

(2) 测得40只小鼠体重如下(单位：$g$)：(已按从小到大排好)

对照组：17.3　18.4　20.1　20.4　21.5　23.2　24.6　24.8　25.0　25.4
　　　　26.1　26.3　26.4　26.5　26.8　27.0　27.4　27.5　27.6　28.3

实验组：5.4　6.6　6.8　6.9　7.8　8.2　9.4　10.0　10.4　11.2
　　　　14.4　17.3　19.2　20.2　23.6　23.8　24.5　25.1　25.2　26.0

(i) 求40只小鼠体重的中位数 $m$，并完成下面 $2\times2$ 列联表：

| | $<m$ | $\geqslant m$ |
|---|---|---|
| 对照组 | | |
| 实验组 | | |

($ii$) 根据 $2\times2$ 列联表，能否有95%的把握认为药物对小鼠生长有抑制作用.

参考数据：

| $k_0$ | 0.10 | 0.05 | 0.010 |
|---|---|---|---|
| $P(k^2\geqslant k_0)$ | 2.706 | 3.841 | 6.635 |

**20** 设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，直线 $x-2y+1=0$ 与 $C$ 交于 $A$，$B$ 两点，且 $|AB|=4\sqrt{15}$.

(1) 求 $p$；

(2) 设 $C$ 的焦点为 $F$，$M$，$N$ 为 $C$ 上两点，$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{NF}=0$，求 $\triangle MNF$ 面积的最小值.

21 已知 $f(x)=ax-\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

(1) 若 $a=8$，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)<\sin 2x$ 恒成立，求 $a$ 的取值范围.

(二) 选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22【选修 4－4：极坐标参数方程】

已知 $P(2,1)$，直线 $l$：$\begin{cases}x=2+t\cos\alpha\\y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），$l$ 与 $x$ 轴，$y$ 轴正半轴交于 $A$，$B$ 两点，$|PA|\cdot|PB|=4$.

(1) 求 $\alpha$ 的值；

(2) 以原点为极点，$x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求 $l$ 的极坐标方程.

23【选修 4－5：不等式选讲】

已知 $f(x)=2|x-a|-a, a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)<x$

(2) 若 $y=f(x)$ 与坐标轴围成 的 面积为 2，求 $a$.

# 2023年普通高等学校招生全国统一考试甲卷文科数学

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1 设全集$U=\{1,2,3,4,5\}$,集合$M=\{1,4\}$,$N=\{2,5\}$,则$N\cup \complement_U M=$ ( )

A. $\{2,3,5\}$　B. $\{1,3,4\}$　C. $\{1,2,4,5\}$　D. $\{2,3,4,5\}$

2 $\dfrac{5(1+\mathrm{i}^3)}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=$ ( )

A. $-1$　B. 1　C. $1-i$　D. $1+\mathrm{i}$

3 已知向量$\vec{a}=(3,1)$,$\vec{b}=(2,2)$,则$\cos\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\rangle=$ ( )

A. $\dfrac{1}{17}$　B. $\dfrac{\sqrt{17}}{17}$　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　D. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

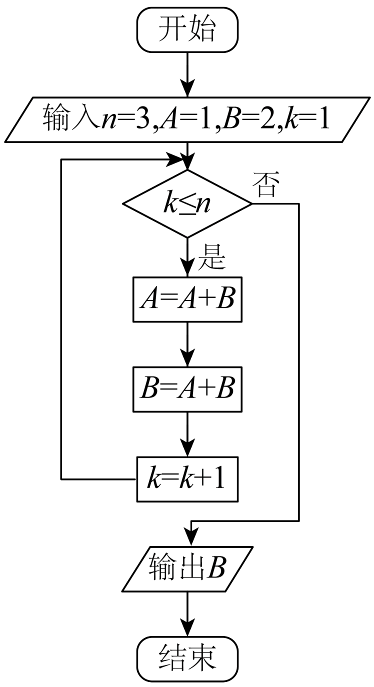
4 某校文艺部有4名学生,其中高一、高二年级各2名.从这4名学生中随机选2名组织校文艺汇演,则这2名学生来自不同年级的概率为 ( )

A. $\dfrac{1}{6}$　B. $\dfrac{1}{3}$　C. $\dfrac{1}{2}$　D. $\dfrac{2}{3}$

5 记$S_n$为等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和.若$a_2+a_6=10$,$a_4a_8=45$,则$S_5=$ ( )

A. 25　B. 22　C. 20　D. 15

6 执行下边的程序框图,则输出的$B=$ ( )




A. 21　B. 34　C. 55　D. 89

7 设$F_1,F_2$为椭圆$C:\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$的两个焦点,点$P$在$C$上,若$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,则$|PF_1|\cdot|PF_2|=$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 5

**8** 曲线 $y=\dfrac{e^x}{x+1}$ 在点 $\left(1,\dfrac{e}{2}\right)$ 处的切线方程为　（　）

A. $y=\dfrac{e}{4}x$　　B. $y=\dfrac{e}{2}x$　　C. $y=\dfrac{e}{4}x+\dfrac{e}{4}$　　D. $y=\dfrac{e}{2}x+\dfrac{3e}{4}$

**9** 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，其中一条渐近线与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 $A$，$B$ 两点，则 $|AB|=$　（　）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

**10** 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的 等边三角形，$PA=PB=2$，$PC=\sqrt{6}$，则该棱锥的体积为　（　）

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

**11** 已知函数 $f(x)=e^{-(x-1)^2}$. 记 $a=f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$b=f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$c=f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，则　（　）

A. $b>c>a$　　B. $b>a>c$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

**12** 函数 $y=f(x)$ 的图象由 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度得到，则 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ 的交点个数为　（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

**二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

**13** 记 $S_n$ 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和. 若 $8S_6=7S_3$，则 $\{a_n\}$ 的公比为 ______.

**14** 若 $f(x)=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数，则 $a=$ ______.

**15** 若 $x$，$y$ 满足约束条件 $\begin{cases}3x-2y\leqslant 3,\\-2x+3y\leqslant 3,\\x+y\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为 ______.

**16** 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$O$ 为 $AC_1$ 的中点，若该正方体的棱与球 $O$ 的球面有公共点，则球 $O$ 的半径的取值范围是 ______.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

(一) 必考题：共60分.

**17** 记$\triangle ABC$的内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，已知$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{\cos A}=2$.

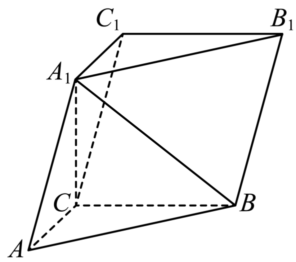
(1) 求$bc$；

(2) 若$\dfrac{a\cos B-b\cos A}{a\cos B+b\cos A}-\dfrac{b}{c}=1$，求$\triangle ABC$面积.

**18** 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$A_1C\perp$平面$ABC$，$\angle ACB=90°$.

(1) 证明：平面$ACC_1A_1\perp$平面$BB_1C_1C$；

(2) 设$AB=A_1B$，$AA_1=2$，求四棱锥$A_1-BB_1C_1C$的高.




**19** 一项试验旨在研究臭氧效应，试验方案如下：选40只小白鼠，随机地将其中20只分配到试验组，另外20只分配到对照组，试验组的小白鼠饲养在高浓度臭氧环境，对照组的小白鼠饲养在正常环境，一段时间后统计每只小白鼠体重的增加量(单位：g). 试验结果如下：

对照组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为

15.2　18.8　20.2　21.3　22.5　23.2　25.8　26.5　27.5　30.1

32.6　34.3　34.8　35.6　35.6　35.8　36.2　37.3　40.5　43.2

试验组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为

7.8　9.2　11.4　12.4　13.2　15.5　16.5　18.0　18.8　19.2

19.8　20.2　21.6　22.8　23.6　23.9　25.1　28.2　32.3　36.5

(1) 计算试验组的样本平均数；

(2) (ⅰ) 求40只小白鼠体重的增加量的中位数$m$，再分别统计两样本中小于$m$与不小于$m$的数据的个数，完成如下列联表

| | $<m$ | $\geqslant m$ |
|---|---|---|
| 对照组 | | |
| 试验组 | | |

(ⅱ) 根据(i)中的列联表，能否有95%的把握认为小白鼠在高浓度臭氧环境中与在正常环境中体重的增加量有差异？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

| $P(K^2\geqslant k)$ | 0.100 | 0.050 | 0.010 |
|---|---|---|---|
| $k$ | 2.706 | 3.841 | 6.635 |

**20** 已知函数 $f(x)=ax-\dfrac{\sin x}{\cos^2 x},x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(1) 当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)+\sin x<0$，求 $a$ 的取值范围.

**21** 已知直线 $x-2y+1=0$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于 $A,B$ 两点，$|AB|=4\sqrt{15}$.

(1) 求 $p$；

(2) 设 $F$ 为 $C$ 的焦点，$M,N$ 为 $C$ 上两点，且 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，求 $\triangle MFN$ 面积的最小值.

**(二) 选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.**

**22**【选修 4－4：极坐标参数方程】

已知点 $P(2,1)$，直线 $l:\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$ ($t$ 为参数)，$\alpha$ 为 $l$ 的倾斜角，$l$ 与 $x$ 轴正半轴、$y$ 轴正半轴分别交于 $A,B$，且 $|PA|\cdot|PB|=4$.

(1) 求 $\alpha$；

(2) 以坐标原点为极点，$x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求 $l$ 的极坐标方程.

**23**【选修 4－5：不等式选讲】

已知 $f(x)=2|x-a|-a,a>0$.

(1) 求不等式 $f(x)<x$ 的解集；

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 与 $x$ 轴所围成的图形的面积为 2，求 $a$.

# 2023年普通高等学校招生全国统一考试乙卷理科数学

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

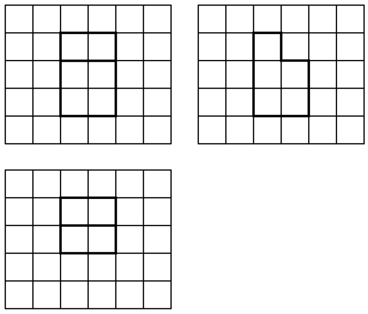
1 设 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^5}$，则 $\bar{z}=$ (　　)

A. $1-2\mathrm{i}$　　B. $1+2\mathrm{i}$　　C. $2-\mathrm{i}$　　D. $2+\mathrm{i}$

2 设集合 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x|x<1\}$，$N=\{x|-1<x<2\}$，则 $\{x|x\geqslant 2\}=$ (　　)

A. $\complement_U(M\cup N)$　　B. $N\cup\complement_U M$　　C. $\complement_U(M\cap N)$　　D. $M\cup\complement_U N$

3 如图，网格纸上绘制的一个零件的三视图，网格小正方形的边长为1，则该零件的表面积为 (　　)



A. 24　　B. 26

C. 28　　D. 30

4 已知 $f(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{ax}-1}$ 是偶函数，则 $a=$ (　　)

A. $-2$　　B. $-1$　　C. 1　　D. 2

5 设 $O$ 为平面坐标系的坐标原点，在区域 $\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 内随机取一点，记该点为 $A$，则直线 $OA$ 的倾斜角不大于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率为 (　　)

A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $\dfrac{1}{6}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

6 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 单调递增，直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 和 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图像的两条对称轴，则 $f\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)=$ (　　)

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7 甲乙两位同学从6种课外读物中各自选读2种，则这两人选读的课外读物中恰有1种相同的选法共有 (　　)

A. 30种　　B. 60种　　C. 120种　　D. 240种

8 已知圆锥 $PO$ 的底面半径为 $\sqrt{3}$，$O$ 为底面圆心，$PA$，$PB$ 为圆锥的母线，$\angle AOB=120^\circ$，若 $\triangle PAB$ 的面积等于 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$，则该圆锥的体积为 (　　)

A. $\pi$　　B. $\sqrt{6}\pi$　　C. $3\pi$　　D. $3\sqrt{6}\pi$

9 已知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$AB$ 为斜边，$\triangle ABD$ 为等边三角形，若二面角 $C-AB-D$ 为 $150^\circ$，则直线 $CD$ 与平面 $ABC$ 所成角的正切值为 (　　)

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$　　D. $\dfrac{2}{5}$

⑩ 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $\frac{2\pi}{3}$，集合 $S=\left\{\cos a_n \middle| n\in\mathbf{N}^*\right\}$，若 $S=\{a,b\}$，则 $ab=$ (　　)

A. $-1$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

⑪ 设 $A$，$B$ 为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 上两点，下列四个点中，可为线段 $AB$ 中点的是 (　　)

A. $(1,1)$　　B. $(-1,2)$　　C. $(1,3)$　　D. $(-1,-4)$

⑫ 已知 $\odot O$ 的半径为1，直线 $PA$ 与 $\odot O$ 相切于点 $A$，直线 $PB$ 与 $\odot O$ 交于 $B$，$C$ 两点，$D$ 为 $BC$ 的中点，若 $|PO|=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值为 (　　)

A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$　　C. $1+\sqrt{2}$　　D. $2+\sqrt{2}$

**二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

⑬ 已知点 $A(1,\sqrt{5})$ 在抛物线 $C$：$y^2=2px$ 上，则 $A$ 到 $C$ 的准线的距离为 ______.

⑭ 若 $x$，$y$ 满足约束条件 $\begin{cases}x-3y\leqslant -1\\x+2y\leqslant 9\\3x+y\geqslant 7\end{cases}$，则 $z=2x-y$ 的最大值为 ______.

⑮ 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_2a_4a_5=a_3a_6$，$a_9a_{10}=-8$，则 $a_7=$ ______.

⑯ 设 $a\in(0,1)$，若函数 $f(x)=a^x+(1+a)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $a$ 的取值范围是 ______.

**三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.**

**(一) 必考题：共 60 分.**

⑰ 某厂为比较甲乙两种工艺对橡胶产品伸缩率的处理效应，进行 10 次配对试验，每次配对试验选用材质相同的两个橡胶产品，随机地选其中一个用甲工艺处理，另一个用乙工艺处理，测量处理后的橡胶产品的伸缩率，甲、乙两种工艺处理后的橡胶产品的伸缩率分别记为 $x_i$，$y_i(\mathrm{i}=1,2,\cdots 10)$，试验结果如下：

| 试验序号 i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 伸缩率 $x_i$ | 545 | 533 | 551 | 522 | 575 | 544 | 541 | 568 | 596 | 548 |
| 伸缩率 $y_i$ | 536 | 527 | 543 | 530 | 560 | 533 | 522 | 550 | 576 | 536 |

记 $z_i=x_i-y_i(\mathrm{i}=1,2,\cdots,10)$，记 $z_1,z_2,\cdots,z_{10}$ 的样本平均数为 $\bar{z}$，样本方差为 $s^2$，

(1) 求 $\bar{z}$，$s^2$；

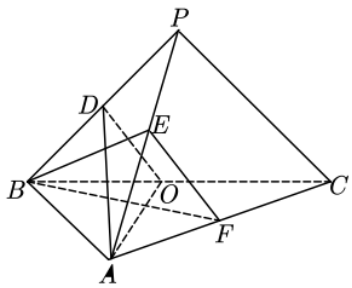
(2) 判断甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率是否有显著提高 (如果 $\bar{z}\geqslant 2\sqrt{\frac{s^2}{10}}$，则认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高，否则不认为有显著提高).

18 在$\triangle ABC$中，已知$\angle BAC=120^\circ$，$AB=2$，$AC=1$.

(1) 求$\sin\angle ABC$；

(2) 若$D$为$BC$上一点，且$\angle BAD=90^\circ$，求$\triangle ADC$的面积.

19 如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AB\perp BC$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$PB=PC=\sqrt{6}$，$BP$，$AP$，$BC$的中点分别为$D$，$E$，$O$，$AD=\sqrt{5}DO$，点$F$在$AC$上，$BF\perp AO$.




(1) 证明：$EF\parallel$平面$ADO$；

(2) 证明：平面$ADO\perp$平面$BEF$；

(3) 求二面角$D-AO-C$的正弦值.

20 已知椭圆$C$：$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，点$A(-2,0)$在$C$上.

(1) 求$C$的方程；

(2) 过点$(-2,3)$的直线交$C$于点$P$，$Q$两点，直线$AP$，$AQ$与$y$轴的交点分别为$M$，$N$，证明：线段$MN$的中点为定点.

21 已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{x}+a\right)\ln(1+x)$.

(1) 当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 是否存在 $a$，$b$，使得曲线 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x=b$ 对称，若存在，求 $a$，$b$ 的值，若不存在，说明理由.

(3) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在极值，求 $a$ 的取值范围.

**(二) 选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.**

22【选修 4－4：极坐标参数方程】

在直角坐标系 $xOy$ 中，以坐标原点 $O$ 为极点，$x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 $C_1$ 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，曲线 $C_2$：$\begin{cases}x=2\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$）.

(1) 写出 $C_1$ 的直角坐标方程；

(2) 若直线 $y=x+m$ 既与 $C_1$ 没有公共点，也与 $C_2$ 没有公共点，求 $m$ 的取值范围.

23【选修 4－5：不等式选讲】

已知 $f(x)=2|x|+|x-2|$.

(1) 求不等式 $f(x)\leqslant 6-x$ 的解集；

(2) 在直角坐标系 $xOy$ 中，求不等式组 $\begin{cases}f(x)\leqslant y\\x+y-6\leqslant 0\end{cases}$ 所确定的平面区域的面积.

# 2023年普通高等学校招生全国统一考试乙卷文科数学

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

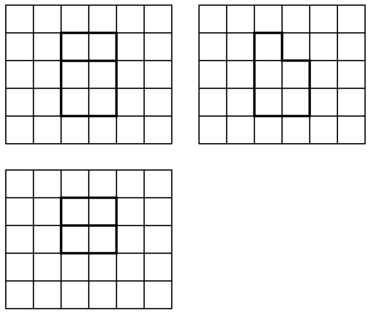
1. $|2+i^2+2i^3|=$ （　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. 5

2. 设全集 $U=\{0,1,2,4,6,8\}$，集合 $M=\{0,4,6\}$，$N=\{0,1,6\}$，则 $M\cup\complement_U N=$ （　　）

A. $\{0,2,4,6,8\}$　　B. $\{0,1,4,6,8\}$　　C. $\{1,2,4,6,8\}$　　D. $U$

3. 如图，网格纸上绘制的一个零件的三视图，网格小正方形的边长为1，则该零件的表面积为 （　　）



A. 24　　B. 26

C. 28　　D. 30

4. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 $A,B,C$ 的对边分别是 $a,b,c$，若 $a\cos B-b\cos A=c$，且 $C=\frac{\pi}{5}$，则 $\angle B=$ （　　）

A. $\frac{\pi}{10}$　　B. $\frac{\pi}{5}$　　C. $\frac{3\pi}{10}$　　D. $\frac{2\pi}{5}$

5. 已知 $f(x)=\frac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数，则 $a=$ （　　）

A. $-2$　　B. $-1$　　C. 1　　D. 2

6. 正方形 $ABCD$ 的边长是2，$E$ 是 $AB$ 的中点，则 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=$ （　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. 3　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 5

7. 设 $O$ 为平面坐标系的坐标原点，在区域 $\left\{(x,y)\middle|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\right\}$ 内随机取一点 $A$，则直线 $OA$ 的倾斜角不大于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为 （　　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

8. 函数 $f(x)=x^3+ax+2$ 存在3个零点，则 $a$ 的取值范围是 （　　）

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,-3)$　　C. $(-4,-1)$　　D. $(-3,0)$

9. 某学校举办作文比赛，共6个主题，每位参赛同学从中随机抽取一个主题准备作文，则甲、乙两位参赛同学抽到不同主题概率为 （　　）

A. $\frac{5}{6}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

10. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$ 单调递增，直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 和 $x=\frac{2\pi}{3}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图像的两条对称轴，则 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=$ （　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 已知实数 $x,y$ 满足 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$，则 $x-y$ 的最大值是　(　　)

A. $1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. 4　　C. $1+3\sqrt{2}$　　D. 7

12. 设 $A,B$ 为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 上两点，下列四个点中，可为线段 $AB$ 中点的是　(　　)

A. (1,1)　　B. (−1,2)　　C. (1,3)　　D. (−1, −4)

**二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13. 已知点 $A(1,\sqrt{5})$ 在抛物线 $C$：$y^2=2px$ 上，则 $A$ 到 $C$ 的准线的距离为 ______.

14. 若 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\theta=\frac{1}{2}$，则 $\sin\theta-\cos\theta=$ ______.

15. 若 $x$，$y$ 满足约束条件 $\begin{cases}x-3y\leqslant-1\\x+2y\leqslant9\\3x+y\geqslant7\end{cases}$，则 $z=2x-y$ 的最大值为 ______.

16. 已知点 $S,A,B,C$ 均在半径为 2 的球面上，$\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，$SA\perp$ 平面 $ABC$，则 $SA=$ ______.

**三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.**

**(一) 必考题：共 60 分.**

17. 某厂为比较甲乙两种工艺对橡胶产品伸缩率的处理效应，进行 10 次配对试验，每次配对试验选用材质相同的两个橡胶产品，随机地选其中一个用甲工艺处理，另一个用乙工艺处理，测量处理后的橡胶产品的伸缩率．甲、乙两种工艺处理后的橡胶产品的伸缩率分别记为 $x_i$，$y_i$($i=1,2,\cdots,10$)．试验结果如下：

| 试验序号 i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 伸缩率 $x_i$ | 545 | 533 | 551 | 522 | 575 | 544 | 541 | 568 | 596 | 548 |
| 伸缩率 $y_i$ | 536 | 527 | 543 | 530 | 560 | 533 | 522 | 550 | 576 | 536 |

记 $z_i=x_i-y_i$($i=1,2,\cdots,10$)，记 $z_1,z_2,\cdots,z_{10}$ 的样本平均数为 $\bar{z}$，样本方差为 $s^2$.

(1) 求 $\bar{z}$，$s^2$；

(2) 判断甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率是否有显著提高 (如果 $\bar{z}\geqslant2\sqrt{\frac{s^2}{10}}$，则认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高，否则不认为有显著提高)

**18** 记 $S_n$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，已知 $a_2=11, S_{10}=40$.

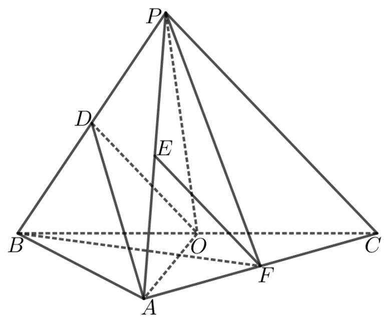
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$.

**19** 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$PB=PC=\sqrt{6}$，$BP, AP, BC$ 的中点分别为 $D, E, O$，点 $F$ 在 $AC$ 上，$BF\perp AO$.

(1) 求证：$EF$ // 平面 $ADO$；

(2) 若 $\angle POF=120°$，求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.




**20** 已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{x}+a\right)\ln(1+x)$.

(1) 当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(x))$ 处的切线方程.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，求 $a$ 的取值范围.

**21** 已知椭圆 $C:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，点 $A(-2,0)$ 在 $C$ 上.

(1) 求 $C$ 的方程；

(2) 过点 $(-2,3)$ 的直线交 $C$ 于 $P,Q$ 两点，直线 $AP,AQ$ 与 $y$ 轴的交点分别为 $M,N$，证明：线段 $MN$ 的中点为定点.

**(二) 选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.**

**22**【选修 4－4：极坐标参数方程】

在直角坐标系 $xOy$ 中，以坐标原点 $O$ 为极点，$x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 $C_1$ 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta\left(\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，曲线 $C_2$：$\begin{cases}x=2\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$）.

(1) 写出 $C_1$ 的直角坐标方程；

(2) 若直线 $y=x+m$ 既与 $C_1$ 没有公共点，也与 $C_2$ 没有公共点，求 $m$ 的取值范围.

**23**【选修 4－5：不等式选讲】

已知 $f(x)=2|x|+|x-2|$

(1) 求不等式 $f(x)\leqslant 6-x$ 的解集；

(2) 在直角坐标系 $xOy$ 中，求不等式组 $\begin{cases}f(x)\leqslant y\\x+y-6\leqslant 0\end{cases}$ 所确定的平面区域的面积.