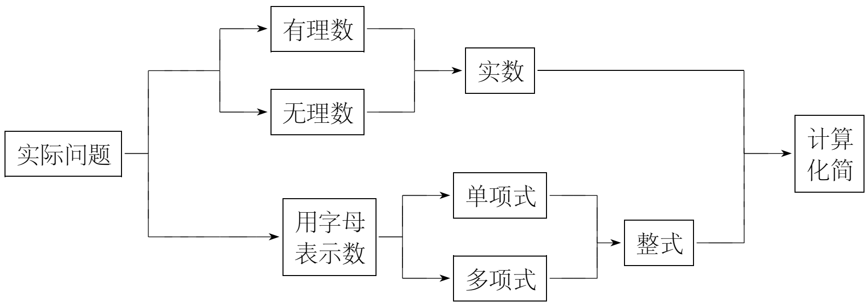
初中毕业升学考试指导
数学

本书编写组　编写

江蘇鳳凰教育出版社
Phoenix Education Publishing, Ltd

第一单元　实数与整式

知识脉络



知识要点

（一）实数的分类和几个有关的概念

1. 实数的分类

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
  - 无理数——无限不循环小数

或

- 实数
  - 正实数
    - 正有理数
      - 正整数
      - 正分数
    - 正无理数
  - 零
  - 负实数
    - 负有理数
      - 负整数
      - 负分数
    - 负无理数

2. 数轴　规定了原点、正方向和单位长度的一条直线叫做**数轴**.实数与数轴上的点一一对应.

3. 相反数　符号不同、绝对值相同的两个数互为**相反数**.a 的相反数是 $-a$，0 的相反数是 0.数轴上在原点两旁且与原点距离相等的两个点所对应的两个实数互为相反数.当 a 与 b 互为相反数时，有 $a+b=0$.

4. 实数 a 的绝对值

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

$|a|$ 是非负实数，在数轴上表示数 a 的点与原点的距离.

5. 倒数　当 $a\neq 0$ 时，a 与 $\frac{1}{a}$ 互为**倒数**.当 a 与 b 互为倒数时，有 $ab=1$. 0 没有倒数.

（二）实数的大小比较

数轴上的两个点所表示的实数中，右边的点所表示的实数大于左边的点所表示的实数.由此可知：正数大于 0；负数小于 0；正数大于负数；两个负数中，绝对值大的反而小.

（三）实数的运算

1. 运算法则　（略）.

2. 运算定律　交换律、结合律、分配律.

3. 运算顺序　先乘方、开方，然后乘除，最后加减，同级运算从左到右依次进行，有括号的先算括号里面的.

4. 零指数幂和负指数幂　当 $a\neq 0$ 时，$a^0=1$，$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$（p 是正整数）.

5. 科学记数法　把一个数表示成 $a\times 10^n$（$1\leqslant |a|<10$，n 为不等于 0 的整数）的形式的方法叫做**科学记数法**.

6. 近似数　一个近似数四舍五入到哪一位，就称这个数精确到哪一位.

（四）代数式

1. 定义　用运算符号（加、减、乘、除、乘方、开方）把数或表示数的字母连接而成的式子叫做**代数式**.

2. 代数式的值　用数值代替代数式里的字母，按照代数式中的运算关系，计算后所得的结果叫做**代数式的值**.

（五）整式

1. 定义　单项式和多项式统称**整式**.

2. 单项式　数与字母的积所组成的代数式叫做**单项式**. 单独一个数或字母也是单项式. 单项式中的数字因数叫做单项式的**系数**. 单项式中所有字母的指数和叫做单项式的**次数**.

3. 多项式　几个单项式的和叫做**多项式**.

4. 同类项　所含字母相同，并且相同字母的指数也分别相同的项叫做**同类项**.

（六）整式的运算

1. 整式的加减　有括号先去括号，再合并同类项.

2. 整式的乘法

（1）幂的运算法则（m，n 均为正整数）：

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；　$a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq 0,\ m>n)$；

$(a^m)^n=a^{mn}$；　$(ab)^n=a^nb^n$.

（2）整式乘法常见类型：单项式×单项式；单项式×多项式；多项式×多项式. 它们都是以幂的运算法则和运算律为基础的，要熟练掌握整式乘法的计算.

（3）乘法公式：

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；　$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

3. 整式的除法　除法是乘法的逆运算，要熟练掌握单项式除以单项式及多项式除以单项式的运算法则.

复习导引

§1.1　实数

【基础训练】

1. -3 的相反数是________，绝对值是________，倒数是________.

2. 数轴上点 A 表示 -3，点 B 表示 1，则 A，B 两点间的距离是________.

3. 在 π，$\dfrac{22}{7}$，$\sqrt{(-3)^2}$，3.14，$\sqrt[3]{-8}$，$\sin 30^\circ$，0，$\sqrt{24}$，0.121 121 112… 各数中，无理数是______________________________.

4. $\sqrt{13}$ 的整数部分是________.

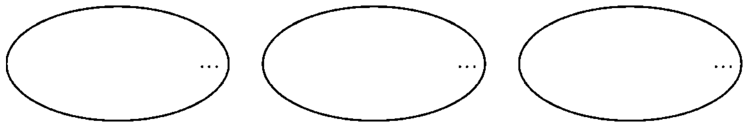
5. 比较大小：-0.1 ________ 0，$-\dfrac{3}{4}$ ________ $-\dfrac{4}{5}$，$-\left|-\dfrac{3}{8}\right|$ ________ -0.375.

6. 生态文明建设功在当代，利在千秋，经过数十年的努力，某林场的林地面积达到 1 120 000 亩，用科学记数法表示 1 120 000 是________.

【典例解析】

例 1　将下列各数填入如图 1－1 所示的相应集合圈内，并用“<”号将它们连接起来.

$$0,\ 2,\ \frac{\pi}{3},\ -\left|-\frac{1}{2}\right|,\ -\sqrt{4},\ -\sqrt[3]{\frac{8}{27}},\ \sin 30^\circ.$$



① 整数集合　　② 有理数集合　　③ 无理数集合

图 1－1

解　略.

例 2　实数 a，b 在数轴上对应点的位置如图 1－2 所示，下列各式正确的是　　(　　)

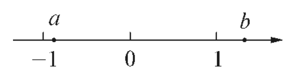


图 1－2

A. $a+b<0$　　B. $a-b<0$

C. $a\cdot b>0$　　D. $\frac{a}{b}>0$

解　由数轴可知 $a<0$，$b>0$，$|a|<|b|$.

所以 $a+b>0$；$a-b<0$；$a\cdot b<0$；$\frac{a}{b}<0$. 故选 B.

例 3　计算：

(1) $1\frac{1}{2}\times\frac{5}{7}-\left(-\frac{5}{7}\right)\times 2\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{7}$；

(2) $\left|-\frac{7}{9}\right|\div\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{3}\times(-4)^2$；

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-\left|\left(-\frac{1}{5}\right)^0\right|-0.25^{2\,005}\times 4^{2\,005}$.

解　(1) 原式 $=\frac{3}{2}\times\frac{5}{7}+\frac{5}{7}\times\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{5}{7}=\frac{5}{7}\times\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{\cancel{7}}\times\frac{\cancel{7}}{2}=\frac{5}{2}$.

(2) 原式 $=\frac{\cancel{7}}{9}\times\frac{15}{\cancel{7}}-\frac{16}{3}=-\frac{11}{3}$.

(3) 原式 $=4-1-(0.25\times 4)^{2\,005}=4-1-1=2$.

例 4　如图 1－3，在数轴上，点 A 表示 1，现将点 A 沿 x 轴做如下移动，第一次点 A 向左移动 3 个单位长度到达点 A_1，第二次点 A_1 向右移动 6 个单位长度到达点 A_2，第三次点 A_2 向左移动 9 个单位长度到达点 A_3，按照这种移动规律移动下去，第 n 次移动到达点 A_n. 如果点 A_n 与原点的距离不小于 20，那么 n 的最小值是________.

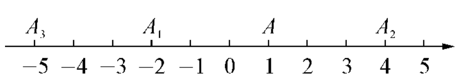


图 1－3

分析　当 n 为奇数时，点 A_n 在点 A 的左边，所表示的数依次减少 3；当 n 为偶数时，点 A_n 在点 A 的右边，所表示的数依次增加 3. 由此规律得点 A_{12} 表示的数为 19，点 A_{13} 表示的数为 −20，即可求出 n 的最小值.

解 设点 A_n 表示的数为 a_n，则 $a_1=1-3=-2$，$a_2=-2+6=4$，$a_3=4-9=-5$，$a_4=-5+12=7$，$a_5=7-15=-8$，

由此得 $a_6=10$，$a_8=13$，$a_{10}=16$，$a_{12}=19$，$a_{14}=22$，

$a_7=-11$，$a_9=-14$，$a_{11}=-17$，$a_{13}=-20$，$a_{15}=-23$.

根据以上规律，点 A_n 与原点的距离不小于 20，n 的最小值是 13.

【巩固练习】

1. 填空题

(1) $-\frac{1}{4}$的倒数是________；若 a 与-5 互为相反数，则 $a=$________.

(2) 在实数$-\frac{2}{3}$，$\sqrt{3}$，$0.\dot{6}$，$\sqrt{4}$，2π，0.101 001…(相邻两个 1 之间 0 的个数逐次加 1)中，无理数共有________个.

(3) 肥皂泡的泡壁厚度大约是 0.000 000 71 m，0.000 000 71 用科学记数法表示为________.

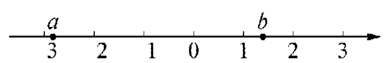
(4) 按一定规律排列的一列数依次为$\frac{2}{3}$，1，$\frac{8}{7}$，$\frac{11}{9}$，$\frac{14}{11}$，$\frac{17}{13}$，…，按此规律，这列数中的第 100 个数是________.

2. 选择题

(1) 大米包装袋上(10±0.1)kg 的标识表示此袋大米重 (　　)

A. (9.9～10.1)kg　　B. 10.1 kg　　C. 9.9 kg　　D. 10 kg

(2) 实数 a，b 在数轴上的对应点的位置如图所示，则正确的结论是 (　　)



第 2(2)题

A. $a>-2$　　B. $a<-3$　　C. $a>-b$　　D. $a<-b$

3. 计算：

(1) $\left(-\frac{5}{9}+\frac{7}{12}\right)\div\left(-\frac{1}{36}\right)$；　　(2) $-3^2+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+(-2)^2$；

(3) $|-2-(-3)^0|+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$；　　(4) $[(-2)^{-3}-8^{-1}\times(-1)^{-2}]\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\times(\pi-2)^0$.

4. 观察下面的运算过程：

计算：$1+2+2^2+\cdots+2^{10}$.

解：设 $S=1+2+2^2+\cdots+2^{10}$，　①

①×2，得 $2S=2+2^2+2^3+\cdots+2^{11}$，　②

②－①，得 $S=2^{11}-1$，

所以 $1+2+2^2+\cdots+2^{10}=2^{11}-1$.

运用上面的计算方法计算：$1+3+3^2+\cdots+3^{2\,020}$.

§1.2　整式的有关概念及加减运算

【基础训练】

1. 在代数式 0，x，$\frac{1}{a}$，$\frac{ab}{4}$，$\frac{x}{2}+1$，a^2b^3 中，单项式有________个，其中系数为 1 的单项式为________________，次数为 1 的单项式为________________.

2. 化简：$3x-[5x-(2x-1)]=$ ________.

3. 若单项式 $2x^3y^4$ 与 $-\frac{1}{7}y^2z^{n+2}$ 次数相同，则 $n=$ ________.

4. 若 $-\frac{1}{2}x^{m+3}y$ 与 $2x^4y^{n+3}$ 是同类项，则 $(m+n)^{2017}$ 的值为________.

5. 某商店经销某种品牌的洗衣机，其中某一型号的洗衣机每台进价为 a 元，商店将进价提高 20%后作为零售价进行销售. 一段时间后，商店又以 9 折优惠价促销，这时该型号的洗衣机的零售价为________元.

【典例解析】

例 1　求 $5(3a^2b+ab^2)-4(ab^2+3a^2b)$ 的值，其中 $a=\frac{1}{3}$，$b=-3$.

分析　求代数式的值，应先将原式化简后再把数值代入计算，这样可以减少运算量. 化简时要注意找准同类项进行合并，代入数值时要注意将省略的乘号添上，对于分数、负数的运算有时要添加括号.

解　原式 $=15a^2b+5ab^2-4ab^2-12a^2b=3a^2b+ab^2$，

当 $a=\frac{1}{3}$，$b=-3$ 时，原式 $=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times(-3)+\frac{1}{3}\times(-3)^2=-1+3=2$.

例 2　如果规定“Φ”为一种新的运算：$a\,\Phi\,b=ab+a^2-b^2$. 例如：$3\,\Phi\,4=3\times4+3^2-4^2=12+9-16=5$. 请仿照例题计算：

(1) $-2\,\Phi\,3$；

(2) $[4\,\Phi\,(-3)]\,\Phi\,1$.

分析　此类新定义运算问题需要读懂新定义，结合新定义的运算法则，仿照例题代入数值计算.

解　(1) 根据题中的新定义得 $-2\,\Phi\,3=-2\times3+(-2)^2-3^2=-6+4-9=-11$.

(2) 根据题中的新定义得 $4\,\Phi\,(-3)=4\times(-3)+4^2-(-3)^2=-12+16-9=-5$，

$[4\,\Phi\,(-3)]\,\Phi\,1=(-5)\,\Phi\,1=(-5)\times1+(-5)^2-1^2=-5+25-1=19$.

例 3　(1) 若代数式 $2x^2+3x+7$ 的值为 8，求代数式 $4x^2+6x-9$ 的值；

(2) 若 x 为实数，说明代数式 $3x^2-6x+8$ 的值大于 0.

分析　(1)由条件可知 $2x^2+3x=1$，可将 $2x^2+3x=1$ 作为整体求 $4x^2+6x$ 的值，即可得 $4x^2+6x-9$ 的值；(2)运用配方法可确定代数式的值的正负.

解　略.

说明　(1) 注意整体思想在代数式求值中的应用；

(2) 配方法是常见的数学方法，在验证代数式的值、根的判别式、二次函数化成顶点式等情形中有较为广泛的应用.

例 4　将一些相同的“○”按如图 1－4 所示的规律依次摆放，观察每个“龟图”中“○”的个数，若第 n 个“龟图”中有 245 个“○”，则 n 等于　(　　)

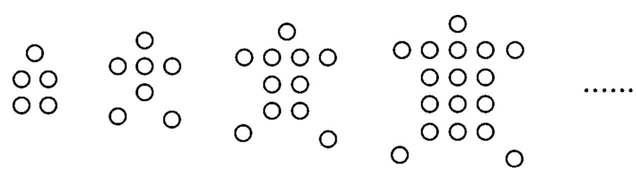


图 1－4

A. 14　　B. 15　　C. 16　　D. 17

分析　依次观察前 4 个图形中“○”的个数，然后得出图形中“○”的个数与位置序号的关系.

解 观察发现

第一个图形中“○”的个数是 5；

第二个图形中“○”的个数是 $7 = 2 \times (2-1) + 5$；

第三个图形中“○”的个数是 $11 = 3 \times (3-1) + 5$；

第四个图形中“○”的个数是 $17 = 4 \times (4-1) + 5$；

……

由此，第 n 个图形中“○”的个数是 $n \times (n-1) + 5$.

令 $n \times (n-1) + 5 = 245$，解得 n 的值为 16 或 -15（舍去），故选择 C.

【巩固练习】

1. 填空题

(1) 化简：$(1-x)^2 + 2x =$ ________.

(2) 若 $\frac{1}{2}a^4b^{m-1}$ 与 $-3a^{2n}b^3$ 是同类项，则 $m =$ ________，$n =$ ________.

(3) 已知 $x = m$ 时，多项式 $x^2 + 2x + n^2$ 的值为 -1，则 $x = -m$ 时，该多项式的值为________.

2. 选择题

(1) 若 $\square \times 3xy = 3x^2y$，则 $\square$ 内应填的单项式是 ( )

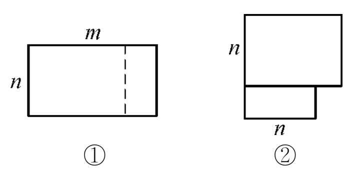
A. xy　　B. $3xy$　　C. x　　D. $3x$

(2) 已知 a 是一个两位数，b 是一个三位数，把 a 放在 b 的前面，所组成的五位数是 ( )

A. ab　　B. $a+b$

C. $100a+b$　　D. $1\,000a+b$

(3) 如图①，把一个长为 m、宽为 n 的长方形（$m>n$）沿虚线剪开，拼接成图②，成为一个在一角去掉一个小正方形的大正方形，则去掉的小正方形的边长为 ( )



（第 2(3) 题）

A. $\frac{m-n}{2}$　　B. $m-n$

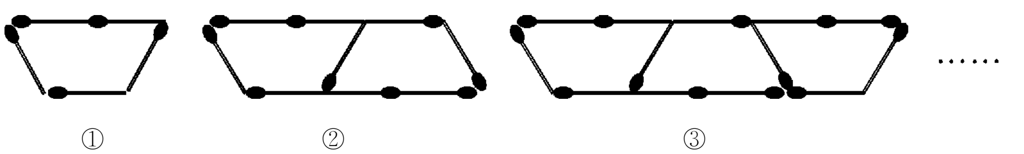
C. $\frac{m}{2}$　　D. $\frac{n}{2}$

3. 计算：

(1) $(x^2 - y^2) - 4(2x^2 - 3y^2)$；

(2) 当 $a = 5$ 时，求 $(a^2 - a) - (a^2 - 2a + 1)$ 的值.

4. 用火柴棒按图中的方式搭图形.



（第 4 题）

(1) 按图示规律填表：

图形标记	①	②	③	④	⑤
火柴棒根数					

(2) 按照这样的方式搭下去，搭第 n 个图形需________根火柴棒.

§1.3　整式的乘除运算

【基础训练】

1. $a^6 \cdot a^2 =$ ________，$(ab)^2 =$ ________，$m^3 \div m^2 =$ ________.

2. $(-2xy)^2 \cdot x^2 =$ ________.

3. $(2a-b)(b+2a) =$ ________.

4. $(1-a)^2-(a+2)^2 =$ ________.

【典例解析】

例 1　计算：

(1) $(-2xy^2)^2 \cdot 3x^2y \div (-x^3y^4)$；

(2) $(a-1)^2-(1-a)(a+1)$；

(3) $(x-2y+1)(x+2y-1)$.

解　(1) 原式 $=4x^2y^4 \cdot 3x^2y \div (-x^3y^4) = -12xy$.

(2) 原式 $= a^2-2a+1-(1-a^2) = a^2-2a+1-1+a^2 = 2a^2-2a$.

(3) 原式 $=[x-(2y-1)][x+(2y-1)] = x^2-(2y-1)^2$

$= x^2-(4y^2-4y+1) = x^2-4y^2+4y-1$.

说明　对于(3)不能直接运用平方差公式，需要通过添加括号进行恰当的转化.

例 2　计算：

(1) $(2a+b)^2+5a(a+b)-(3a-b)^2$；

(2) $(2a-3)^2-(2a+1)(2a-1)+2$.

解　(1) 原式 $=4a^2+4ab+b^2+5a^2+5ab-9a^2+6ab-b^2$

$=(4a^2+5a^2-9a^2)+(4ab+5ab+6ab)+(b^2-b^2)$

$=15ab$.

(2) 原式 $=4a^2-12a+9-4a^2+1+2$

$=(4a^2-4a^2)-12a+(9+1+2)$

$=-12a+12$.

例 3　如图 1－5，有一块长 a^2+a、宽 $2a$ 的矩形铁片，将其四个角分别剪去一个边长为 $\dfrac{a-1}{2}$ 的正方形，剩余的部分可制成一个无盖的长方体铁皮盒(焊接处损失忽略不计)，求这个铁皮盒的体积.

图 1－5

分析　要求铁皮盒的体积，首先要得出铁皮盒的长、宽、高.

解　铁皮盒的长为 $(a^2+a)-(a-1) = a^2+1$，宽为 $2a-(a-1) = a+1$，高为 $\dfrac{a-1}{2}$.

这个铁皮盒的体积为

$$(a^2+1)(a+1)\left(\frac{a-1}{2}\right) = \frac{1}{2}(a^2+1)[(a+1)(a-1)] = \frac{(a^2+1)(a^2-1)}{2} = \frac{a^4-1}{2}.$$

【巩固练习】

1. 填空题

(1) $a(a-1) =$ ________，$\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)^2 =$ ________，$4a^2b(3ab^2c-2ac) =$ ________.

(2) $(2-x)^2 =$ ________，$(1-x)(-x-1) =$ ________.

2. 选择题

(1) 下列运算中正确的是　　(　　)

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$　　B. $a^8 \div a^4 = a^2$

C. $a^3 + a^3 = 2a^6$　　D. $(a^3)^2 = a^6$

(2) $(-a^2)^3$ 的运算结果是　（　　）

A. $-a^6$　　B. a^6　　C. $-a^5$　　D. a^5

(3) 计算 $(3a+b)(-3a-b)$，结果是　（　　）

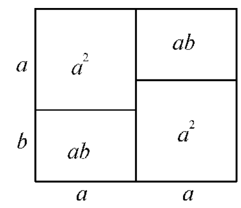
A. $9a^2-6ab-b^2$　　B. $-b^2-6ab-9a^2$

C. b^2-9a^2　　D. $9a^2-b^2$

(4) 通过计算几何图形的面积可表示一些代数恒等式，如图可表示的代数恒等式是　（　　）

A. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$　　B. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

C. $2a(a+b) = 2a^2+2ab$　　D. $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$



（第 2(4)题）

3. 计算：

(1) $4^{-2}x^5 \cdot (2^3x^{-2})^2$；

(2) $(2x^2)^3 - 3x^4(x^2-x)$；

(3) $9 \times 3^n \times 3^{n-1}$；

(4) $(2x-3y)^2-(y+3x)(3x-y)$；

(5) $[(x-y)^2+(x+y)^2](x^2-y^2)$.

4. 先化简，再求值：$(a+2b)^2+(b+a)\cdot(b-a)$，其中 $a=-1$，$b=2$.

5. 观察下列各个等式的规律：

第一个等式：$\dfrac{2^2-1^2-1}{2}=1$；

第二个等式：$\dfrac{3^2-2^2-1}{2}=2$；

第三个等式：$\dfrac{4^2-3^2-1}{2}=3$……

请用上述等式反映出的规律解决下面的问题：

(1) 直接写出第四个等式；

(2) 猜想第 n 个等式（用含 n 的代数式表示），并证明你猜想的等式是正确的.

习题一

1. 填空题

(1) a 的相反数是________.

(2) 若 $a^2-3b=5$,则 $6b-2a^2+2\,015=$ ________.

(3) 已知 $x+y=6$, $xy=7$,则 $x^2+y^2=$ ________, $x^2y+xy^2=$ ________.

(4) 若 $0<x<1$,则 x^2, x, $\frac{1}{x}$ 的大小顺序是________.

(5) 对于实数 x,我们规定 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数,例如:$[1.2]=1$, $[3]=3$, $[-2.5]=-3$. 若 $\left[\frac{x+4}{10}\right]=5$,则 x 能取的最大整数是__________.

2. 选择题

(1) 环境空气质量问题已经成为人们日常生活所关心的重要问题,我国新修订的《环境空气质量标准》中增加了 PM 2.5 检测指标,“PM 2.5”是指大气中危害健康的直径小于或等于 2.5 μm 的颗粒物,2.5 μm 即 0.000 002 5 m. 用科学记数法表示 0.000 002 5 为 (　　)

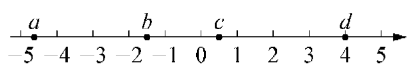
A. 2.5×10^{-5}　　B. 2.5×10^{5}　　C. 2.5×10^{-6}　　D. 2.5×10^{6}

(2) 下列运算中正确的是 (　　)

A. $2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$　　B. $x^6\div x^3=x^2$

C. $2^{-1}=-2$　　D. $a^3\cdot(-a^2)=-a^5$

(3) 实数 a, b, c, d 在数轴上的对应点的位置如图所示,则下列结论正确的是 (　　)



(第 2(3)题)

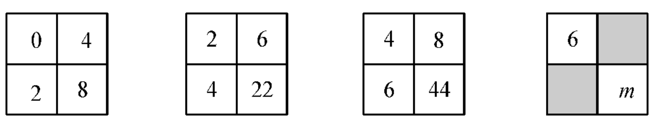
A. $a>-4$　　B. $bd>0$　　C. $|a|>|d|$　　D. $b+c>0$

(4) 若方程 $(x-5)^2=19$ 的两根为 a 和 b,且 $a>b$,则下列结论正确的是 (　　)

A. a 是 19 的算术平方根　　B. b 是 19 的平方根

C. $a-5$ 是 19 的算术平方根　　D. $b+5$ 是 19 的平方根

(5) 如图,各正方形中的四个数之间都有相同的规律,根据此规律,m 的值是 (　　)



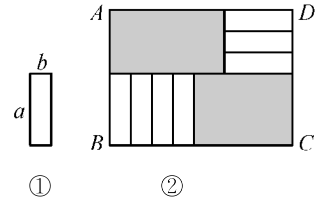
(第 2(5)题)

A. 38　　B. 52　　C. 66　　D. 74

(6) 7 张如图①所示的长为 a、宽为 $b(a>b)$ 的小长方形纸片,按图②所示的方式不重叠地放在矩形 $ABCD$ 内,未被覆盖的部分(两个矩形)用阴影表示. 设左上角与右下角的阴影部分的面积的差为 S,当 BC 的长度变化时,按照同样的放置方式,S 始终保持不变,则 a, b 应满足 (　　)

A. $a=b$　　B. $a=3b$

C. $a=4b$　　D. $a=5b$



(第 2(6)题)

3. 计算：

(1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2\times(-3)^3-(-1)^9\div\left(\frac{1}{2}\right)^3$；　　(2) $(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-5\div(2\,003-\pi)^0$.

4. 化简：

(1) $(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)$；

(2) 先化简，再求值：$x^2(x-1)-x(x^2+x-1)$，其中 $x=\frac{1}{2}$；

(3) 先化简，再求值：$2(a+1)^2+(a+1)(1-2a)$，其中 $a=-\frac{1}{3}$.

5. **【发现】**任意五个连续整数的平方和是5的倍数.

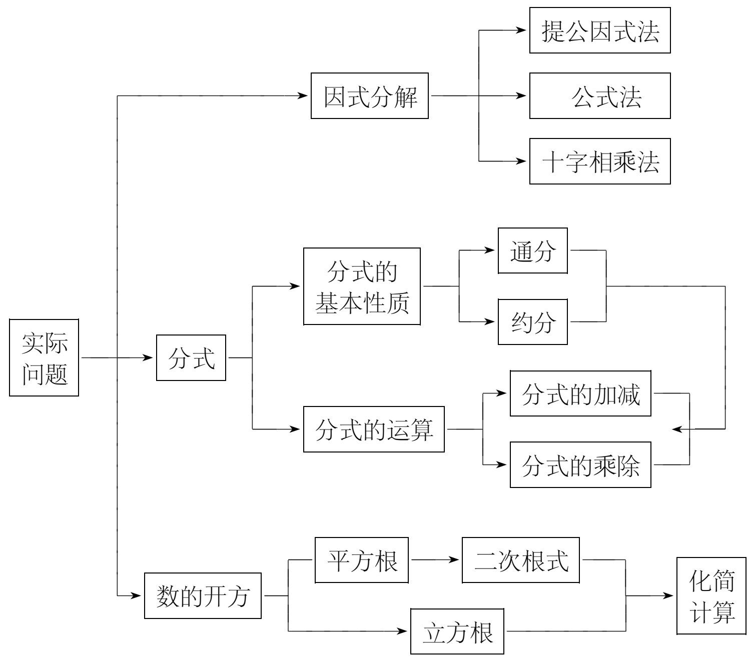
【验证】(1) $(-1)^2+0^2+1^2+2^2+3^2$ 的结果是5的几倍？

(2) 设五个连续整数的中间数为 n，写出它们的平方和，并说明是5的倍数.

【延伸】(3) 任意三个连续整数的平方和被3除的余数是几呢？请写出理由.

第二单元 因式分解、分式、数的开方

知识脉络



知识要点

(一)因式分解

1. 概念　把一个多项式化为几个整式的乘积形式叫做**因式分解**,也叫做**分解因式**.

2. 常用方法

(1) 提公因式法:$ma+mb+mc=m(a+b+c)$.

(2) 公式法:$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$;

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

*(3) 十字相乘法:$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$.

(二)分式

1. 有关概念

(1) 形如$\frac{A}{B}$(A, B是整式,且B中含有字母,$B\neq 0$)的式子叫做**分式**,整式和分式统称**有理式**.

(2) 如果分式中的分母为零,那么分式就没有意义;也就是说,要使分式有意义,分母必须不为零.

(3) 在分式$\frac{A}{B}$中,如果$A=0$,且$B\neq 0$,则$\frac{A}{B}=0$.

2. 基本性质　$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}$, $\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$(其中 M 是不为零的整式).

3. 运算　分式的运算与分数的运算相仿.

(三) 数的开方

1. 平方根与立方根

(1) 如果一个数的平方等于 a,那么这个数就叫做 a 的**平方根**,记作 $\pm\sqrt{a}$. 正数 a 的正的平方根,叫做 a 的**算术平方根**,0 的算术平方根是 0. 非负数 a 的算术平方根记作 $\sqrt{a}$.

(2) 如果一个数的立方等于 a,那么这个数就叫做 a 的**立方根**,记作 $\sqrt[3]{a}$.

2. 二次根式

(1) 几个概念

① 形如 $\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 的式子叫做**二次根式**.

② 如果一个二次根式满足下列条件:被开方数的因数是整数、因式是整式;被开方数中不含能开得尽方的因数或因式. 这样的二次根式叫做**最简二次根式**.

③ 当几个二次根式化成最简二次根式以后,如果被开方数相同,那么这几个二次根式叫做**同类二次根式**.

④ 把分母中的根号化去,叫做**分母有理化**.

(2) 几个性质

$\sqrt{a}\geqslant 0(a\geqslant 0)$; $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$; $\sqrt{a^2}=|a|$;

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0, b\geqslant 0)$; $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0, b>0)$.

(3) 运算

二次根式的加减运算与整式的加减运算类似,只需对同类二次根式进行合并.

二次根式的乘除法是二次根式性质的逆向运用.

二次根式运算结果中的每一项都应是最简二次根式.

复习导引

§2.1　因式分解

【基础训练】

1. $-3xy+6x^2y^2-9x^3y^3=-3xy($__________$)$.

2. $(a+b)^2+($______$)=(a-b)^2$.

3. 直接写出下列多项式分解因式的结果:

(1) $3a^2-9ab=$__________;

(2) $25x^2-16y^2=$__________;

(3) $x^2+4xy+4y^2=$__________.

4. 多项式 mx^2-m 和多项式 x^2-2x+1 的公因式是　　(　　)

A. $x-1$　　B. $x+1$　　C. x^2-1　　D. $(x-1)^2$

【典例解析】

例 1　把下列各式分解因式:

(1) $3x^2-9x$;

(2) $-8a^2b^2-4a^2b+2ab$;

(3) $m^3(a-2)+m(2-a)$.

解　(1) 原式 $=3x\cdot x-3x\cdot 3=3x(x-3)$.

(2) 原式 $=-(8a^2b^2+4a^2b-2ab)$

$=-(2ab\cdot 4ab+2ab\cdot 2a-2ab)$

$=-2ab(4ab+2a-1)$.

(3) 原式 $=m(a-2)\cdot m^2-m(a-2)\cdot 1$

$=m(a-2)(m^2-1)$

$=m(a-2)(m+1)(m-1)$.

说明　多项式首项的系数是负数,一般要提出"$-$"号.第(2)题结果中的"-1"不能漏写.

例 2　把下列各式分解因式:

(1) $18a^2-50$;

(2) $2x^2y-8xy+8y$;

(3) $a^2(x-y)-b^2(x-y)$.

解　(1) 原式 $=2(9a^2-25)=2(3a+5)(3a-5)$.

(2) 原式 $=2y(x^2-4x+4)=2y(x-2)^2$.

(3) 原式 $=(x-y)(a^2-b^2)=(x-y)(a+b)(a-b)$.

例 3　已知 $a^2-a-1=0$,求 $a^3-a^2-a+2\,016$ 的值.

解　因为 $a^2-a-1=0$,所以 $a^3-a^2-a+2\,016=a(a^2-a-1)+2\,016=0+2\,016=2\,016$.

说明　求某些代数式的值,有时可以将代数式进行适当的分解、变形,再代入求值.

例 4　已知 $x^2+y^2-4x+6y+13=0$,求 x, y 的值.

分析　将已知等式利用完全平方公式变形后,根据非负数的性质可求出 x 与 y 的值.

解　由 $x^2+y^2-4x+6y+13=(x-2)^2+(y+3)^2=0$,可得 $x-2=0$, $y+3=0$,则 $x=2$, $y=-3$.

【巩固练习】

1. 填空题

(1) 如果 $x^2-ax+\dfrac{1}{4}$ 是一个完全平方式,那么 $a=$________.

(2) 如果 $2x^2+mxy+ny^2=(x+y)(2x-y)$,那么 $m=$ ________, $n=$ ________.

2. 选择题

(1) 下列四个等式从左至右的变形中,属于因式分解的是　(　　)

A. $(a+1)(a-1)=a^2-1$　　B. $(x-y)(m-n)=(y-x)(n-m)$

C. $ab-a-b+1=(a-1)(b-1)$　　D. $m^2-2m-3=m\left(m-2-\dfrac{3}{m}\right)$

(2) 分解因式 x^4-1 的结果是　(　　)

A. $(x^2-1)(x^2+1)$　　B. $(x+1)^2(x-1)^2$

C. $(x-1)(x+1)(x^2+1)$　　D. $(x-1)(x+1)^3$

3. 把下列各式分解因式:

(1) $3x(x-y)+2y(x-y)$;　　(2) $(a+1)(a+3)+1$;

(3) $x^2(x-y)-(x-y)$;　　(4) $a^4b^4-8a^2b^2+16$.

4. 利用因式分解计算:

(1) $1.7\times 5.14+6.1\times 5.14+2.2\times 5.14$;

(2) $34\times 101^2-99^2\times 34$.

5. 已知 $a-b=3$, $ab=-2$,求代数式 $a^3b+ab^3-2a^2b^2$ 的值.

6. 已知实数 a, b 满足 $a^2+1=\dfrac{1}{a}$, $b^2+1=\dfrac{1}{b}$,求 $2\,015^{|a-b|}$ 的值.

§2.2　分式

【基础训练】

1. 下列式子：$\frac{b}{2a}$，$2a+b$，$-\frac{2}{3x}$，$\frac{2x}{3}$，$\frac{a}{\pi}$，$\frac{2}{3-x}$，其中分式是____________________.

2. 当 x 取何值时，下列分式无意义.

（1）$\frac{2x}{x+1}$：__________；　　　　（2）$\frac{1}{x^2-4}$：__________.

3. 计算 $\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x}$ 的结果是________.

4. 如果分式 $\frac{x^2+x-2}{x-1}$ 的值为 0，那么 $x=$________.

【典例解析】

例 1　（1）当 x 满足什么条件时，分式 $\frac{2}{x-1}$ 有意义？

（2）当 x 取何值时，分式 $\frac{3}{x-2}$ 无意义？

（3）当 x 取何值时，分式 $\frac{x^2-2x}{|x|-2}$ 的值为零？

分析　当分式的分母的值为零时，分式无意义；当分式的分母的值不为零时，分式有意义；在分式有意义的前提下，分子的值为零时，分式的值为零.

解　（1）当分母不为零时，分式有意义，所以 $x-1\neq 0$，故当 $x\neq 1$ 时，分式 $\frac{2}{x-1}$ 有意义.

（2）当分母为零时，分式无意义，所以 $x-2=0$，故当 $x=2$ 时，分式 $\frac{3}{x-2}$ 无意义.

（3）因为分式 $\frac{x^2-2x}{|x|-2}$ 的值为零，所以 $x^2-2x=0$ 且 $|x|-2\neq 0$，故当 $x=0$ 时，分式 $\frac{x^2-2x}{|x|-2}$ 的值为零.

例 2　计算：

（1）$\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{2x-4}$；　　　　（2）$\frac{x-2}{x^2}\div\left(1-\frac{2}{x}\right)$.

解　（1）原式 $=\frac{2}{(x+2)(x-2)}-\frac{1}{2(x-2)}=\frac{4}{2(x+2)(x-2)}-\frac{x+2}{2(x-2)(x+2)}=\frac{2-x}{2(x+2)(x-2)}=-\frac{1}{2(x+2)}$.

（2）原式 $=\frac{x-2}{x^2}\div\frac{x-2}{x}=\frac{x-2}{x^2}\cdot\frac{x}{x-2}=\frac{1}{x}$.

例 3　先化简 $\left(\frac{a^2}{a+2}-a+2\right)\div\frac{4a}{a^2-4}$，再从 -2，2，$\sqrt{2}$ 中选择一个合适的数作为 a 的值代入求值.

解　原式 $=\frac{a^2-(a+2)(a-2)}{a+2}\div\frac{4a}{(a+2)(a-2)}=\frac{4}{a+2}\cdot\frac{(a+2)(a-2)}{4a}=\frac{a-2}{a}$. 因为 $a\neq\pm 2$，所以当 $a=\sqrt{2}$ 时，原式 $=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$.

说明　在选取一个合适的数作为 a 的值时，a 的取值应使得原式有意义.

例 4　A 玉米试验田是边长为 a m 的正方形中减去面积为 1 m^2 的蓄水池后余下的部分；B 玉米试验田是边长为 $(a-1)$ m 的正方形. 两块试验田的玉米都收获了 500 kg，哪块试验田的单位面积产

量高?

解　A 玉米试验田的面积是 (a^2-1) m^2,单位面积产量是 $\dfrac{500}{a^2-1}$ $\mathrm{kg/m^2}$;

B 玉米试验田的面积是 $(a-1)^2$ m^2,单位面积产量是 $\dfrac{500}{(a-1)^2}$ $\mathrm{kg/m^2}$.

因为 $(a^2-1)-(a-1)^2=2(a-1)$,而 $a-1>0$,所以 $(a^2-1)-(a-1)^2>0$,

所以 $0<(a-1)^2<a^2-1$,所以 $\dfrac{500}{a^2-1}<\dfrac{500}{(a-1)^2}$.

故 B 玉米试验田的单位面积产量高.

【巩固练习】

1. 填空题

(1) 当 $x=$________时,分式 $\dfrac{x+3}{x-2}$ 无意义.

(2) 若分式 $\dfrac{|x|-1}{x-1}$ 的值为 0,则 x 的值等于________.

(3) 计算:① $\left(\dfrac{m^2}{m-1}+\dfrac{1}{1-m}\right)\cdot\dfrac{1}{m+1}=$________;

② $\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)\div\dfrac{x-2}{x^2-1}=$________.

(4) 甲、乙两港分别位于长江的上、下游,相距 s km,一艘游轮往返其间. 若游轮在静水中的速度为 a km/h,水流速度为 b km/h $(b<a)$,那么该游轮往返两港的时间差是________h.

2. 选择题

(1) 把分式 $\dfrac{a}{b+c}$ 中的 a, b, c 的值都扩大为原来的 3 倍,那么分式的值　(　　)

A. 不变　　B. 变为原来的 3 倍

C. 变为原来的$\dfrac{1}{3}$　　D. 变为原来的$\dfrac{1}{6}$

(2) 下列运算中正确的是　(　　)

A. $\dfrac{y}{-x-y}=-\dfrac{y}{x-y}$　　B. $\dfrac{2x+y}{3x+y}=\dfrac{2}{3}$

C. $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}=x+y$　　D. $\dfrac{y-x}{x^2-y^2}=-\dfrac{1}{x+y}$

3. 计算:

(1) $\dfrac{2m}{m^2-4}-\dfrac{1}{m+2}$;

(2) $x-y+\dfrac{2y^2}{x+y}$;

(3) $\left(a-\dfrac{2a-1}{a}\right)\div\dfrac{a^2-1}{a}$.

4. (1) 先化简,再求值:$\dfrac{a-3}{3a^2-6a}\div\left(a+2-\dfrac{5}{a-2}\right)$,其中 $a^2+3a-1=0$.

(2) 已知 $x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$,求 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 的值.

(3) 已知 $a+2b=0$,求$\dfrac{a^2+2ab-b^2}{2a^2+ab+b^2}$ 的值.

5. 观察下列各式:

$\dfrac{1}{1\times2}=1-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2\times3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{3\times4}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$……

(1) 计算：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}=$________.

(2) 探究：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=$________(用含有 n 的式子表示).

(3) 若 $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 的值为$\frac{17}{35}$,求 n 的值.

§2.3 数的开方与二次根式

【基础训练】

1. 若二次根式 $\sqrt{3x-6}$ 有意义,则 x 的取值范围是________.

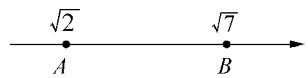
2. $(-2)^2$ 的平方根是________,$\sqrt{16}$的算术平方根是________,-27 的立方根是________.

3. $\sqrt{3}$ 的倒数是________.

4. 当 $x<\frac{1}{2}$ 时,$\sqrt{(2x-1)^2}=$___________.

5. 若实数 a,b 满足 $|a+2|+\sqrt{b-3}=0$,则 a^b 的值是________.

6. 如图,数轴上点 A 与点 B 之间的整数是________.



（第6题）

【典例解析】

例1 要使根式 $\sqrt{2x+1}$ 有意义,则 x 的取值范围是________.

解 由 $2x+1\geqslant0$,得 $x\geqslant-\frac{1}{2}$,所以填 $x\geqslant-\frac{1}{2}$.

例2 化简：

(1) $\sqrt{160}$；　　　　(2) $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

解 (1) $\sqrt{160}=\sqrt{16\times10}=\sqrt{16}\times\sqrt{10}=4\sqrt{10}$.

(2) $\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

例3 计算：

(1) $2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$；　　　　(2) $\left(2\sqrt{12}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\times\sqrt{6}$；

(3) $(\sqrt{3}-2\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$；　　　　(4) $(1-2\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})^2$.

解 (1) 原式 $=2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{3}+\sqrt{2}$.

(2) 原式 $=2\sqrt{12\times6}-\sqrt{\frac{1}{3}\times6}=12\sqrt{2}-\sqrt{2}=11\sqrt{2}$.

(3) 原式 $=\sqrt{3}\times2\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{2}-2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}+2\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

$=6-\sqrt{6}-4\sqrt{6}+4=10-5\sqrt{6}$.

(4) 原式 $=1^2-(2\sqrt{3})^2-(1+2\sqrt{3}+3)$

$=1-12-4-2\sqrt{3}=-15-2\sqrt{3}$.

说明 二次根式的加减运算,首先要把每一个二次根式化简,再合并同类二次根式;二次根式的乘除运算,只需将被开方数进行乘除.二次根式的运算结果应尽可能化简.

例 4　【阅读与计算】

斐波那契(约 1170—1250)是意大利数学家,他研究了一列数,这列数非常奇妙,被称为斐波那契数列(按照一定顺序排列着的一列数称为数列).后来人们在研究它的过程中,发现了许多意想不到的结果,在实际生活中,很多花朵(如梅花、飞燕草、万寿菊等)的瓣数恰好是斐波那契数列中的数.斐波那契数列还有很多有趣的性质,在实际生活中也有广泛的应用.

图 2 - 1

斐波那契数列中的第 n 个数可以用 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$表示.

请根据以上材料,通过计算求出斐波那契数列中的第 1 个数和第 2 个数.

解　第 1 个数:当 $n=1$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}=1.$$

第 2 个数:当 $n=2$ 时,

方法一:$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\times1\times\sqrt{5}=1.$

方法二:$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}-\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}=1.$

【巩固练习】

1. 填空题

(1) $\sqrt{8}-\sqrt{2}=$________.

(2) 在$\sqrt{12}$,$\sqrt{34}$,$\sqrt{48}$,$\sqrt{6}$中,$\sqrt{3}$的同类二次根式有__________.

2. 选择题

(1) 若 $\sqrt{16-a^2}=\sqrt{4-a}\cdot\sqrt{4+a}$,则 a 的取值范围是　(　　)

A. $-4\leqslant a\leqslant4$　　B. $a>-4$

C. $a\leqslant4$　　D. $-4<a<4$

(2) 给出下列计算:① $\sqrt{3}+\sqrt{4}=\sqrt{7}$;② $2+3\sqrt{5}=5\sqrt{5}$;③ $3\sqrt{a}-2\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$;④ $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{75}}{3}=\sqrt{4}+\sqrt{25}=2+5=7$.其中正确计算的个数为　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 计算:

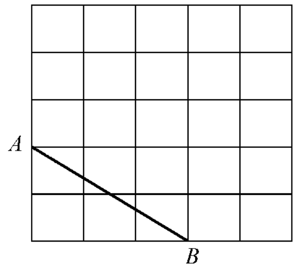
(1) $(\sqrt{6}-\sqrt{3}+1)\times2\sqrt{3}$;　　(2) $\sqrt{1\frac{1}{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{12}$;

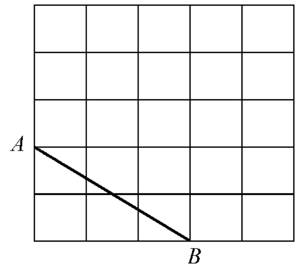
(3) $\sqrt{32}-3\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}$;　　(4) $(1-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+1)+(2\sqrt{3}-1)^2$.

4. 如图,已知图中的每个小方格都是边长为 1 的小正方形,在此方格纸中有一条线段 AB,线段 AB 的两个端点均在小正方形的顶点上.请在图①②中各画一个三角形,使它们的顶点均在小正方形的顶点上,且满足以下要求:

(1) 在图①中以 AB 为斜边画 Rt△ABC;

（2）在图②中以 AB 为边画等腰三角形 ABD，且$\triangle ABD$ 的两条边长为无理数.


①


②

（第 4 题）

5.【阅读与应用】

阅读 1：已知 a，b 为实数，且 $a>0$，$b>0$. 因为$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$，所以 $a-2\sqrt{ab}+b\geqslant 0$，从而 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$（当 $a=b$ 时取等号）.

阅读 2：若函数 $y=x+\frac{m}{x}$（$m>0$，$x>0$，m 为常数），由阅读 1 中结论可知 $x+\frac{m}{x}\geqslant 2\sqrt{m}$，所以当 $x=\frac{m}{x}$，即 $x=\sqrt{m}$ 时，函数 $y=x+\frac{m}{x}$ 取最小值 $2\sqrt{m}$.

阅读理解上述内容，解答下列问题：

（1）已知一个矩形的面积为 4，其中一边长为 x，则另一边长为 $\frac{4}{x}$，周长为 $2\left(x+\frac{4}{x}\right)$，则当 $x=$________ 时，周长的最小值为________.

（2）已知函数 $y_1=x+1(x>-1)$ 与函数 $y_2=x^2+2x+10(x>-1)$，当 $x=$________ 时，$\frac{y_2}{y_1}$ 的最小值为________.

（3）某民办学校每天的支出总费用包含以下三个部分：一是教职工工资 4 900 元；二是学生生活费成本 10 元/人；三是其他费用. 其中，其他费用与学生人数的平方成正比，比例系数为0.01. 当学校的学生人数为多少时，该校每天生均投入最低？最低费用是多少？（生均投入＝支出总费用÷学生人数）

习题二

1. 填空题

(1) 把 $a^3+ab^2-2a^2b$ 分解因式的结果是__________.

(2) 等式 $|x-y|=\sqrt{(x+y)^2+(\quad)}$ 中的括号里应填入__________.

(3) 已知 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=4$,则$\frac{a-2ab-b}{2a-2b+7ab}$ 的值等于__________.

(4) 若 $m=2n+1$,则 $m^2-4mn+4n^2$ 的值等于________.

(5) 二次根式 $-4\sqrt{5x}$ 与 $\sqrt{3ax}$ 的和是一个二次根式,则正整数 a 的最小值为________,其和为________.

(6) 观察下列各式:$2\times\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}$;$3\times\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$;$4\times\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{4+\frac{4}{15}}$……

则依次第四个式子是____________________,用含 $n(n\geqslant 2)$ 的等式表达所观察得到的规律应是____________________.

2. 选择题

(1) 下列多项式不能用完全平方公式分解的是 (　　)

A. x^2+4x+4　　B. y^4-8y^2+16

C. x^2-2x+4　　D. $4y^2-12y+9$

(2) 已知分式 $\frac{x^2-1}{3x+3}$ 的值等于零,则 x 的值是 (　　)

A. 1　　B. -1　　C. ±1　　D. $\frac{1}{2}$

(3) 下列计算中正确的是 (　　)

A. $\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{27}-\sqrt{12}}{3}=\sqrt{9}-\sqrt{4}=1$

C. $(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=1$　　D. $\frac{6-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

(4) 已知甲、乙两人同时从 A 地出发到 B 地,如果甲的速度 v 保持不变,而乙先用$\frac{1}{2}v$ 的速度到达中点,再用 $2v$ 的速度到达 B 地,则下列结论中正确的是 (　　)

A. 甲、乙同时到达 B 地　　B. 甲先到达 B 地

C. 乙先到达 B 地　　D. 谁先到达 B 地与速度 v 有关

(5) 已知$\sqrt{63n}$是整数,则正整数 n 的最小值是 (　　)

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

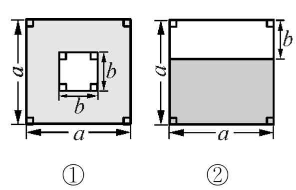
(6) 如图,设 $k=\frac{\text{图①中阴影部分的面积}}{\text{图②中阴影部分的面积}}(a>b>0)$,则有 (　　)

A. $k>2$

B. $1<k<2$

C. $\frac{1}{2}<k<1$

D. $0<k<\frac{1}{2}$



(第 2(6)题)

3. 把下列各式分解因式：

(1) m^3n-4mn；　　(2) $6xy^2-9x^2y-y^3$；

(3) $64a^4-4$；　　(4) $(2a-b)^2+8ab$.

4. 计算(或化简)：

(1) $\dfrac{3-m}{2m-4}\div\left(m+2-\dfrac{5}{m-2}\right)$；

(2) $-1^2-|3-\sqrt{10}|+2\sqrt{5}\sin 45°-(\sqrt{2\,017}-1)^2$；

(3) $(3+2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^2$.

5. 先化简，再求值：

(1) $\left(1-\dfrac{3}{x+2}\right)\div\dfrac{x^2-1}{x+2}$，其中 x 是不等式组 $\begin{cases}x-2>0,\\2x+1<8\end{cases}$ 的整数解；

(2) $\left(\dfrac{x^2}{x-1}-x+1\right)\div\dfrac{4x^2-4x+1}{1-x}$，其中 x 满足 $x^2+x-2=0$.

6. 有这样一类题目：将 $\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$ 化简，如果能找到两个数 m，n，使 $m^2+n^2=a$ 且 $mn=\sqrt{b}$，则可将 $a\pm2\sqrt{b}$ 变成 $m^2+n^2\pm2mn$，即变成 $(m\pm n)^2$，从而将 $\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$ 化简.

例如，化简 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$：

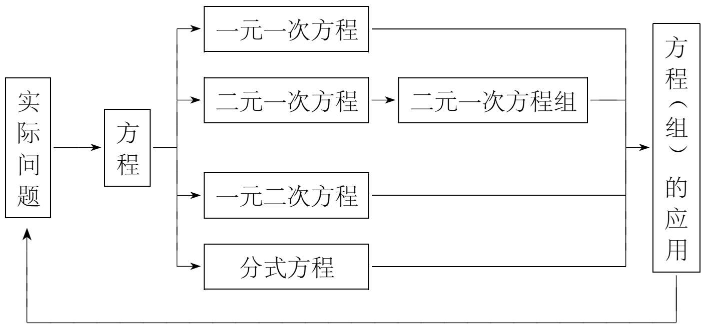
$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{4+3+2\sqrt{4\times3}}=\sqrt{(\sqrt{4})^2+(\sqrt{3})^2+2\times\sqrt{4}\times\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}.$$

请仿照上例的方法化简：(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$；(2) $\sqrt{7-\sqrt{40}}$；(3) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

7. 已知三角形的三边长分别为 a，b，c，如何求其面积？中外数学家曾经针对此问题进行过深入研究. 古希腊的几何学家海伦给出“海伦公式”：$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$；我国南宋时期的数学家秦九韶曾提出“秦九韶公式”：$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}$. 若一个三角形的三边长分别为 2，3，4，求其面积.

第三单元 方程(组)及其应用

知识脉络



知识要点

(一)方程和方程组

1. 方程的有关概念

含有未知数的等式叫做*方程*.能使方程两边的值相等的未知数的值叫做*方程的解*,只含有一个未知数的方程的解也叫做*根*.求方程的解的过程叫做*解方程*.

2. 一元一次方程

(1) 只含有一个未知数,且未知项的次数是 1 的整式方程,叫做*一元一次方程*,它的标准形式是 $ax+b=0(a\neq0)$.

(2) 一元一次方程的解法,其基本思想是将原方程化为标准形式.

3. 二元一次方程(组)

(1) 含有两个未知数,且未知项的次数都是 1 的整式方程,叫做*二元一次方程*.

(2) 由几个方程所组成的一组方程叫做*方程组*.方程组里各个方程的公共解叫做这个*方程组的解*.求方程组的解的过程叫做*解方程组*.

(3) 含有两个未知数,且未知项的次数都是 1,由这样的几个整式方程所组成的方程组,叫做*二元一次方程组*.

(4) 二元一次方程组的解法,其基本思想是消元,基本方法是代入消元法和加减消元法.

4. 一元二次方程

(1) 只含有一个未知数,且未知项的最高次数是 2 的整式方程,叫做*一元二次方程*.它的一般形式为 $ax^2+bx+c=0(a,b,c$ 是常数,$a\neq0)$. ax^2, bx 分别叫做二次项、一次项;a, b, c 分别叫做二次项系数、一次项系数、常数项.

(2) 一元二次方程的解法,其基本思想是降次,常用方法是直接开平方法、配方法、因式分解法、公式法、十字相乘法.

(3) 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a,b,c$ 是常数,$a\neq0)$ 的*根的判别式*$(\Delta=b^2-4ac)$:

当 $\Delta>0$ 时,一元二次方程有两个不相等的实数根;

当 $\Delta=0$ 时,一元二次方程有两个相等的实数根;

当 $\Delta<0$ 时,一元二次方程没有实数根.

以上结论,反之亦成立.

(4) 一元二次方程的**根与系数的关系**(韦达定理):若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$(a, b, c 是常数,$a\neq0$) 的两根为 x_1, x_2,则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

5. 分式方程

(1) 分母中含有未知数的方程叫做**分式方程**.

(2) 分式方程的解法,其基本思想是将分式方程转化为整式方程,常用方法是运用等式性质在方程两边同乘以最简公分母. 解分式方程必须验根.

(二) 列方程(组)解应用题的一般步骤

列方程(组)解应用题的一般步骤:①审清题意;②找出等量关系;③设直(间)接未知数;④列出方程(组);⑤解方程(组);⑥验方程(组)的根;⑦根据实际情况作答.

复习导引

§3.1 一元一次方程、二元一次方程组

【基础训练】

1. 当 $x=$ ________ 时,代数式 $4x+2$ 与 $3x-9$ 的值互为相反数.

2. 已知关于 x 的方程 $2x+a+5=0$ 的解是 $x=1$,则 a 的值为________.

3. 把方程 $2x-y=8$ 化成用含 x 的代数式表示 y 的形式,则 $y=$ ________.

4. 方程组 $\begin{cases}x+y=8,\\x-y=3\end{cases}$ 的解为________.

5. 已知 $\begin{cases}x=a,\\y=b\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}x-2y=0,\\2x+y=5\end{cases}$ 的解,则 $3a-b=$ ________.

【典例解析】

例 1 解下列方程:

(1) $\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}(x-1)+2\right]=5x$;　　(2) $\frac{0.1x-0.3}{0.2}-\frac{3x+1}{2}=1$.

分析 第(1)小题的方程宜先去括号,再去分母. 去括号时,注意括号内各项符号的变化;去分母时,没有分母的项也要乘以各分母的最小公倍数. 第(2)小题宜先把分子、分母中的小数化为整数,再求解. 其中,去分母时,分子若为多项式,要添加括号.

解 (1) $x=\frac{1}{2}$. (2) $x=-3$.

例 2 解下列方程组:

(1) $\begin{cases}2x+3y=16, & ①\\x+4y=13; & ②\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3x+2y+z=13, & ①\\x+y+2z=7, & ②\\2x+3y-z=12. & ③\end{cases}$

分析 (1) 因为方程②中的 x 的系数为 1,所以可把方程②变形为 $x=13-4y$,然后把它代入方程①,求出 y 后,再求 x 即可.

(2) 三个未知数的系数中,最简单的是 z 的系数,故考虑先消去 z,而消去 z 的方法有 ①+③; ②+③×2; ①×2-②. 我们选择 ①+③ 和 ②+③×2,消去同一个未知数 z,就可以得到关于 x 与 y 的二元一次方程组,然后解此二元一次方程组.

解 (1) 略.

(2) ①＋③，得 $5x+5y=25$，即 $x+y=5$.　④

②＋③×2，得 $5x+7y=31$.　⑤

④与⑤组成方程组 $\begin{cases}x+y=5,\\5x+7y=31,\end{cases}$ 解这个方程组，得 $\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$

把 $x=2$，$y=3$ 代入①，得 $3\times2+2\times3+z=13$，所以 $z=1$.

所以原方程组的解是 $\begin{cases}x=2,\\y=3,\\z=1.\end{cases}$

说明　第(1)小题也可运用加减消元法；第(2)小题也可先消去 x 或 y.

例 3　已知满足方程组 $\begin{cases}3x+5y=m+2, & ①\\2x+3y=m & ②\end{cases}$ 的 x，y 的值的和等于 2，试求 m 的值.

分析　本题实际上含有三个未知数、三个方程，解决这类问题的关键是通过代入或加减的方法逐步消元，然后求出未知数的值.

解　①－②，得 $x+2y=2$，与 $x+y=2$ 组成方程组 $\begin{cases}x+2y=2,\\x+y=2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=0.\end{cases}$

把 $x=2$，$y=0$ 代入①，得 $m=4$.

【巩固练习】

1. 把方程 $\dfrac{x+2}{0.3}-\dfrac{0.3x-1}{0.7}=2$ 的分母化为整数，结果应为　　（　　）

A. $\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{3x-1}{7}=2$　　B. $\dfrac{10x+20}{3}-\dfrac{3x-10}{7}=20$

C. $\dfrac{10x+20}{3}-\dfrac{3x-10}{7}=2$　　D. $\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{3x-1}{7}=20$

2. 已知 $(3x-y-4)^2+\sqrt{4x+y-3}=0$，则 $x=$ ________，$y=$ ________.

3. 以方程组 $\begin{cases}y=2x+2,\\y=-x+1\end{cases}$ 的解为坐标的点 (x, y) 在第________象限.

4. 如果实数 x，y 满足方程组 $\begin{cases}x+y=4,\\2x-2y=1,\end{cases}$ 那么 $x^2-y^2=$ ________.

5. 解下列方程(组)：

(1) $\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{5x-1}{6}=1$；　　(2) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}-\dfrac{y+1}{3}=1,\\3x+2y=10.\end{cases}$

§3.2　分式方程

【基础训练】

1. 当 x ________ 时，分式 $\dfrac{x+1}{x-2}$ 有意义；当 $x=$ ________ 时，分式 $\dfrac{x-2}{2x+5}$ 的值为 0.

2. 方程 $\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{3}{x}$ 的解是________.

3. 解分式方程 $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x+2}{1-x}=3$ 时，去分母后变形为　　（　　）

A. $2+(x+2)=3(x-1)$　　B. $2-x+2=3(x-1)$

C. $2-(x+2)=3(1-x)$　　D. $2-(x+2)=3(x-1)$

4. 已知关于 x 的方程 $\dfrac{2x+m}{x-2}=3$ 的解是正数，则 m 的取值范围是____________.

5. 若方程 $\dfrac{5+m}{x-2}+1=\dfrac{1}{x-2}$ 无解，则 $m=$ _________.

【典例解析】

例 1 解方程：$\dfrac{x}{x-3}=2-\dfrac{3}{3-x}$.

解 方程两边同乘 $x-3$，得 $x=2(x-3)+3$.

解这个方程，得 $x=3$.

检验：当 $x=3$ 时，$x-3=0$，所以 $x=3$ 是增根.

所以原方程无解.

例 2 解方程：$\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{5}{2x+1}$.

解 略.

说明 解分式方程应注意：(1)解分式方程的基本思想是“转化思想”，即把分式方程转化为整式方程求解；(2)解分式方程一定要验根.

例 3 解方程：$\dfrac{6}{x^2-1}-\dfrac{3}{x-1}=1$.

解 原方程变形为 $\dfrac{6}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{3}{x-1}=1$.

方程两边同乘最简公分母 $(x+1)(x-1)$，得 $6-3(x+1)=(x+1)(x-1)$.

整理，得 $x^2+3x-4=0$.

解上述方程，得 $x_1=-4$，$x_2=1$.

检验：$x_2=1$ 是原方程的增根.

所以原方程的根是 $x=-4$.

说明 解分式方程的关键是确定正确的最简公分母和检验. 尤其要注意在去分母时不要遗漏没有分母的项.

【巩固练习】

1. 填空题

(1) 方程 $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x}=0$ 的解是_________.

(2) 已知分式 $\dfrac{7}{x-2}$ 与 $\dfrac{x}{2-x}$ 的和为 4，则 x 的值为__________.

2. 选择题

(1) 方程 $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}=1$ 的解是 ( )

A. $-\dfrac{5}{2}$　　B. -2　　C. $-\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

(2) 若关于 x 的方程 $\dfrac{3x-2}{x+1}=2+\dfrac{m}{x+1}$ 无解，则 m 的值为 ( )

A. -8　　B. -5　　C. -2　　D. 5

3. 解下列分式方程：

(1) $\dfrac{3+x}{4-x}=\dfrac{1}{2}$；　(2) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{4}{1-x^2}=1$；　(3) $\dfrac{1}{x-2}-3=\dfrac{x-1}{2-x}$.

§3.3　一元二次方程

【基础训练】

1. 方程 $x^2-1=0$ 的解是________.
2. 若方程 $2x-4=0$ 的解也是关于 x 的方程 $x^2+mx+2=0$ 的一个解，则 m 的值为________.
3. 用配方法解方程 $x^2+8x+7=0$，则原方程可变形为 $(x+4)^2=$ ________.
4. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2\sqrt{3}x-k=0$ 有两个相等的实数根，则 k 的值为________.
5. 如果关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2+(2m+1)x+m^2-1=0$ 的一个根为 0，那么 m 的值为________.

【典例解析】

例 1　解下列方程：

(1) $x^2-6x+7=0$；　　(2) $3x(x-1)=2-2x$.

解　(1) 这里 $a=1$，$b=-6$，$c=7$.

因为 $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times7=8$，

所以 $x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{8}}{2\times1}=3\pm\sqrt{2}$，

即 $x_1=3+\sqrt{2}$，$x_2=3-\sqrt{2}$.

(2) 原方程可化为 $3x(x-1)+2(x-1)=0$，即 $(x-1)(3x+2)=0$，

所以 $x-1=0$ 或 $3x+2=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=-\dfrac{2}{3}$.

说明　一般而言，公式法是解一元二次方程最基本的方法，但我们可以根据方程的特征，灵活选用其他方法.

例 2　用适当的方法解下列方程：

(1) $(x-1)^2+2x(x-1)=0$；　　(2) $9(x-3)^2-4(x-2)^2=0$；

(3) $-2y^2+3=\dfrac{1}{2}y$；　　(4) $x^2+2\sqrt{2}x-4=0$.

分析　方程(1)中各项含有公因式 $x-1$，所以可选用因式分解法；方程(2)的左边是平方差形式，所以可以用平方差公式进行分解；方程(3)选用公式法较为方便；方程(4)用配方法较简便.

解　略.

例 3　已知关于 x 的方程 $mx^2-(m+2)x+2=0(m\neq0)$.

(1) 求证：方程总有两个实数根；

(2) 若方程的两个实数根都是整数，求正整数 m 的值.

解　(1) 因为 $m\neq0$，

$\Delta=(m+2)^2-4m\times2=m^2-4m+4=(m-2)^2$，而 $(m-2)^2\geqslant0$，即 $\Delta\geqslant0$，

所以方程总有两个实数根.

(2) 原方程可化为 $(x-1)(mx-2)=0$，

即 $x-1=0$ 或 $mx-2=0$，

所以 $x_1=1$，$x_2=\dfrac{2}{m}$.

当 m 为正整数 1 或 2 时，x_2 为整数，即方程的两个实数根都是整数，

所以正整数 m 的值为 1 或 2.

说明　一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$：当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根.

【巩固练习】

1. 一元二次方程 $4x^2-2x+\frac{1}{4}=0$ 的根的情况是（　　）

A. 有两个不相等的实数根　　B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根　　D. 无法判断

2. 若 $a^2-2a+1=0$，则 $2a^2-4a=$ ________.

3. x^2+3x+ ____ $=(x+$ ____ $)^2$，$2x^2+5x+$ ____ $=2(x+$ ____ $)^2$.

4. 已知关于 x 的方程 $x^2+ax-3=0$ 的一根为 1，则 $a=$ __________，另一根为__________.

5. 以 -3 和 7 为根且二次项系数为 1 的一元二次方程是________________________.

6. 解下列方程：

(1) $x^2-x=5$；　(2) $3x(x-1)=2(x-1)$；　(3) $(x+4)(3x-2)+11=0$.

§3.4　方程(组)的应用(1)

【基础训练】

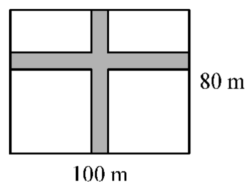
1. 如图，在长为 100 m、宽为 80 m 的矩形场地上修建两条宽度相等且互相垂直的道路，剩余部分进行绿化. 要使绿化面积为 7 644 m^2，则道路的宽应为多少米？设道路的宽为 x m，则可列方程为（　　）

A. $100\times80-100x-80x=7\,644$

B. $(100-x)(80-x)+x^2=7\,644$

C. $(100-x)(80-x)=7\,644$

D. $100x+80x=356$



（第 1 题）

2. 为了节约用水，某市规定：每户居民用水不超过 20 m^3，按 2 元/m^3 收费；超过 20 m^3，则超出部分按 4 元/m^3 收费. 某户居民五月份缴水费 72 元，则该户居民五月份实际用水为__________m^3.

3. A，B 两地相距 450 km，甲、乙两车分别从 A，B 两地同时出发，相向而行. 已知甲车速度为 120 km/h，乙车速度为 80 km/h，经过 t h 两车相距 50 km，则 t 的值是________.

4. 动物园的门票售价：成人票每张 50 元，儿童票每张 30 元. 某日动物园售出门票 700 张，共得 29 000元，则该日到动物园游玩的儿童有________人.

【典例解析】

例 1　试根据图 3－1 中信息，解答下列问题：

(1) 购买 6 根跳绳需________元，购买 12 根跳绳需________元.

(2) 小红比小明多买 2 根跳绳，付款时小红反而比小明少付 5 元，你认为有这种可能吗？若有，请求出小红购买跳绳的根数；若没有，请说明理由.

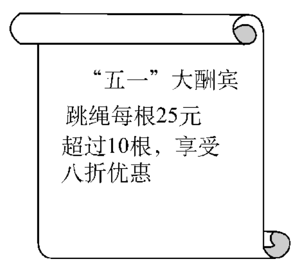


图 3－1

分析　图表型问题.

(1) 根据总价 ＝ 单价 × 数量，现价 ＝ 原价 × 0.8，列式计算即可求解；

(2) 设小红购买跳绳 x 根，根据等量关系：小红比小明多买 2 根跳绳，付款时小红反而比小明少付 5 元，列出方程求解即可.

解　略.

说明　解一元一次方程的应用题，关键是要读懂题目的意思，根据题目给出的条件，找出合适的等量关系列出方程.

例 2　随着互联网的迅速发展，某购物网站的年销售额从 2015 年的 200 万元增长到 2017 年的 392 万元. 求该购物网站平均每年销售额增长的百分率.

分析　增长率问题，一般用增长后的量＝增长前的量×(1＋增长率)^n(n 指年数). 本题中，如果设

平均每年的增长率为 x，根据"从 2015 年的 200 万元增长到 2017 年的 392 万元"，即可列出方程.

解　设该购物网站平均每年销售额增长的百分率为 x.

根据题意，得 $200(1+x)^2=392$.

解得 $x_1=0.4$，$x_2=-2.4$（不符合题意，舍去）.

答：该购物网站平均每年销售额增长的百分率为 40%.

例 3　某超市为促销，决定对 A，B 两种商品进行打折出售. 打折前，买 6 件 A 商品和 3 件 B 商品需要 54 元，买 3 件 A 商品和 4 件 B 商品需要 32 元. 打折后，买 50 件 A 商品和 40 件 B 商品仅需 364 元，这比打折前少花多少钱？

分析　设打折前 A 商品的单价为 x 元，B 商品的单价为 y 元，根据"买 6 件 A 商品和 3 件 B 商品需要 54 元，买 3 件 A 商品和 4 件 B 商品需要 32 元"列出方程组，求出 x，y 的值，然后再计算出买 50 件 A 商品和 40 件 B 商品共需要的钱数即可.

解　设打折前 A 商品的单价为 x 元，B 商品的单价为 y 元.

根据题意，得 $\begin{cases}6x+3y=54,\\3x+4y=32,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=8,\\y=2.\end{cases}$

$50\times8+40\times2=480$，$480-364=116$，

则打折前需要 480 元，打折后比打折前少花 116 元.

答：打折后比打折前少花 116 元.

说明　本题考查了利用二元一次方程组解决现实生活中的问题. 解题的关键是要理解题意，根据题目所给的条件，找出合适的等量关系，列出方程组.

【巩固练习】

1. 朵朵幼儿园的阿姨给小朋友分苹果，如果每人 3 个还差 3 个，如果每人 2 个又多 2 个，那么小朋友的人数为　（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 10　　D. 12

2. 有大、小两种货车，3 辆大车与 4 辆小车一次可以运货 22 t，2 辆大车与 6 辆小车一次可以运货 23 t. 请根据以上信息，提出一个能用方程（组）解决的问题，并写出这个问题的解答过程.

3. 某地地震牵动着全国人民的心，某单位开展了"一方有难，八方支援"赈灾捐款活动，第一天收到捐款 10 000 元，第三天收到捐款 12 100 元.

(1) 如果第二天、第三天收到捐款的增长率相同，求捐款增长率.

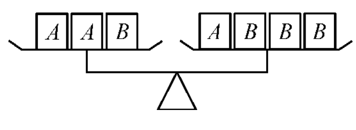
(2) 按照(1)中收到捐款的增长速度，第四天该单位能收到多少捐款？

4. 小丽为校合唱队购买某种服装时，商店经理给出了如下优惠条件：如果一次性购买不超过 10 件，单价为 80 元；如果一次性购买多于 10 件，那么每增加 1 件，购买的所有服装的单价降低 2 元，但单价不得低于 50 元. 按此优惠条件，小丽一次性购买这种服装付了 1 200 元，则她购买了多少件这种服装？

§3.5　方程（组）的应用（2）

【基础训练】

1. 图中标有相同字母的物体的质量相同，若 A 的质量为 20 g，当天平处于平衡状态时，B 的质量为________g.



（第 1 题）

2. 一艘轮船在静水中的最大航速为 35 km/h，它以最大航速沿江顺流航行 120 km 所用时间与以最大航速逆流航行 90 km 所用时间相等. 设江水的流速为 v km/h，则可列方程为____________.

3. 为配合“我读书,我快乐”读书节活动,某书店推出一种优惠卡,每张卡售价 20 元,凭卡购书可享受 8 折优惠. 小慧同学到该书店购书,她先买优惠卡再凭卡付款,结果节省了 10 元. 若此次小慧同学不买卡直接购书,则她需付款__________元.

4. 某企业决定投资不超过 20 万元建造 A, B 两种类型的温室大棚. 经测算,投资 A 种类型的大棚 6 万元/个、B 种类型的大棚 7 万元/个,那么最优的建造方案有 ( )

A. 2 种　　B. 3 种　　C. 4 种　　D. 5 种

【典例分析】

例 1 为打造运河风光带,现有一段长为 180 m 的河道整治任务,由 A, B 两个工程队先后接力完成. 若 A 工程队每天整治 12 m,B 工程队每天整治 8 m,共用时 20 天.

(1) 根据题意,甲、乙两位同学分别列出了尚不完整的方程组如下:

甲:$\begin{cases} x+y=\boxed{}, \\ 12x+8y=\boxed{}. \end{cases}$　　乙:$\begin{cases} x+y=\boxed{}, \\ \dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{8}=\boxed{}. \end{cases}$

根据甲、乙两位同学所列的方程组,请你分别指出未知数 x, y 表示的意义,然后在方框中补全甲、乙两位同学所列的方程组.

甲:x 表示________,y 表示________. 乙:x 表示________,y 表示________.

(2) 求 A, B 两工程队分别整治河道的长度.(写出完整的解答过程)

分析 本题包含两个基本数量关系:

A 工程队用的时间 $+$ B 工程队用的时间 $=$ 20 天,

A 工程队整治河道的长度 $+$ B 工程队整治河道的长度 $=$ 180 m,由此进行解答即可.

解 略.

例 2 某地供电公司在断电期间积极组织抢修,抢修车装载着所需材料先从供电公司出发,15 min 后,电工乘吉普车从同一地点出发,结果他们同时到达抢修工地. 已知供电公司距离抢修工地 15 km,吉普车的速度是抢修车速度的 1.5 倍,分别求这两车的速度.

分析 本题的等量关系:抢修车行驶时间 $-$ 吉普车行驶时间 $=$ 15 min.

解 设抢修车每小时行 x km,则吉普车每小时行 $1.5x$ km.

根据题意,得 $\dfrac{15}{x}-\dfrac{15}{1.5x}=\dfrac{15}{60}$.

解这个方程,得 $x=20$.

经检验,$x=20$ 是所列方程的解.

所以 $1.5x=30$.

答:抢修车每小时行 20 km,吉普车每小时行 30 km.

例 3 为了进一步落实“节能减排”措施,冬季供暖来临前,某单位决定对 7 200 m^2 的“外墙保温”工程进行招标. 现有甲、乙两个工程队参与投标,比较这两个工程队的标书发现乙队每天完成的工程量是甲队的 1.5 倍,这样乙队单独干比甲队单独干能提前 15 天完成任务,那么甲队每天完成多少平方米?

分析 本题是工程问题. 设甲队每天完成 x m^2,则乙队每天完成 $1.5x$ m^2,可依据“乙队单独干比甲队单独干能提前 15 天完成任务”列出方程.

解 设甲队每天完成 x m^2,则乙队每天完成 $1.5x$ m^2.

根据题意,得 $\dfrac{7\,200}{x}-\dfrac{7\,200}{1.5x}=15$.

解这个方程,得 $x=160$.

经检验,$x=160$ 是所列方程的解.

答:甲队每天完成 160 m^2.

说明 解分式方程的应用题应注意几点:(1)寻找合适的等量关系列出方程;(2)必须检验,以防增根;(3)对于应用题,解出的结果要符合实际意义.

【巩固练习】

1.《孙子算经》是中国古代重要的数学著作，其中有一段文字的大意如下：甲、乙两人各有若干钱，如果甲得到乙所有钱的一半，那么甲共有钱 48 文；如果乙得到甲所有钱的$\frac{2}{3}$，那么乙也共有钱 48 文. 甲、乙两人原来各有多少钱？若设甲原有 x 文钱，乙原有 y 文钱，可列方程组为____________.

2. 某水果店销售 50 kg 香蕉，第一天售价为 9 元/kg，第二天降为 6 元/kg，第三天再降为 3 元/kg，三天全部售完，共计所得 270 元. 若该店第二天销售香蕉 t kg，则第三天销售香蕉________kg.（用含 t 的代数式表示）

3. 某市为了促进经济发展，增强对外贸易的竞争力，把距离港口420 km的普通公路升级成了同等长度的高速公路，结果汽车行驶的平均速度比原来提高了 50%，行驶时间缩短了 2 h. 求汽车原来的平均速度.

4. 某地大力发展经济作物，其中果树种植已初具规模. 今年受气候、雨水等因素的影响，樱桃较去年有小幅度的减产，而枇杷有所增产.

（1）该地某果农今年收获樱桃和枇杷共 400 kg，其中枇杷的产量不超过樱桃产量的 7 倍，则该果农今年收获樱桃至少多少千克？

（2）该果农今年又把收获的樱桃、枇杷的一部分运往市场销售. 他去年樱桃的市场销售量为 100 kg，销售均价为 30 元/kg，今年樱桃的市场销售量比去年减少了 $m\%$，销售均价与去年相同；他去年枇杷的市场销售量为 200 kg，销售均价为 20 元/kg，今年枇杷的市场销售量比去年增加了 $2m\%$，但销售均价比去年减少了 $m\%$. 该果农今年运往市场销售的这部分樱桃和枇杷的销售总金额与他去年樱桃和枇杷的市场销售总金额相同，求 m 的值.

习题三

1. 填空题

(1) 方程 $(x-1)^2=4$ 的解是________.

(2) 分式方程 $\frac{2x+1}{3-x}=\frac{3}{2}$ 的解是________.

(3) 已知 $x=1$ 是一元二次方程 $x^2+mx+n=0$ 的一个根,则 $m^2+2mn+n^2$ 的值为________.

(4) 某班有 40 名同学去看演出,购买甲、乙两种票共用去 370 元,其中甲种票每张 10 元,乙种票每张 8 元.设购买了甲种票 x 张,乙种票 y 张,由此可列出方程组:____________________.

(5) 对于任意实数 a, b,定义关于"$\otimes$"的一种运算如下:$a\otimes b=2a-b$.例如:$5\otimes 2=2\times 5-2=8$,$(-3)\otimes 4=2\times(-3)-4=-10$.若 $3\otimes x=-2\,011$,则 $x=$ ________.

(6) 若关于 x 的方程 $x^2+(k-2)x+k^2=0$ 的两个根互为倒数,则 $k=$________.

(7) 已知 $x^2-8x+9=0$,则 $2x^2-\frac{32x}{x^2-8x+11}=$ ________.

2. 选择题

(1) 已知方程 $x^2-5x+2=0$ 的两个解分别为 x_1, x_2,则 $x_1+x_2-x_1\cdot x_2$ 的值为 ( )

A. -7　B. 7　C. -3　D. 3

(2) 某饮料厂今年一月份的产量是 500 t,三月份上升到 720 t,设平均每月增长的百分率是 x,根据题意可得方程 ( )

A. $500(1+2x)=720$　B. $500+500(1+x)+500(1+x)^2=720$

C. $720(1+x)^2=500$　D. $500(1+x)^2=720$

(3) 若 $x=3$ 是分式方程 $\frac{a-2}{x}-\frac{1}{x-2}=0$ 的根,则 a 的值是 ( )

A. -5　B. 5　C. -3　D. 3

(4) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+3k=0$ 有两个不相等的实数根,则 k 的取值范围是 ( )

A. $k<\frac{1}{3}$　B. $k>-\frac{1}{3}$

C. $k<\frac{1}{3}$ 且 $k\neq 0$　D. $k>-\frac{1}{3}$ 且 $k\neq 0$

(5) 2017 年,在创建文明城市的进程中,某市为美化城市环境,计划种植树木 30 万棵,由于志愿者的加入,实际每天植树比原计划多 20%,结果提前 5 天完成任务.设原计划每天植树 x 万棵,可列方程为 ( )

A. $\frac{30}{x}-\frac{30}{(1+20\%)x}=5$　B. $\frac{30}{x}-\frac{30}{20\%x}=5$

C. $\frac{30}{20\%x}+5=\frac{30}{x}$　D. $\frac{30}{(1+20\%)x}-\frac{30}{x}=5$

(6) 某车间有 27 名工人,生产某种由一个螺栓与两个螺母配套的产品,每人每天生产螺母 16 个或螺栓 22 个.若分配 x 名工人生产螺栓,其他工人生产螺母,恰好使每天生产的螺栓和螺母配套,则下列所列方程正确的是 ( )

A. $22x=16(27-x)$　B. $16x=22(27-x)$

C. $2\times 16x=22(27-x)$　D. $2\times 22x=16(27-x)$

3. 已知 $x_1=-1$ 是方程 $x^2+mx-5=0$ 的一个根,求 m 的值及方程的另一根 x_2.

4. 设 a, b 是一个直角三角形两条直角边的长,且 $(a^2+b^2)(a^2+b^2+1)=12$,求这个直角三角形的斜边长.

5. 已知下列 n(n 为正整数)个关于 x 的一元二次方程.

① $x^2-1=0$； ② $x^2+x-2=0$； ③ $x^2+2x-3=0$；… ⓝ …

(1) 上述一元二次方程的解为① ________，② ________，③ ________；

(2) 猜想:第 n 个方程为________,其解为________；

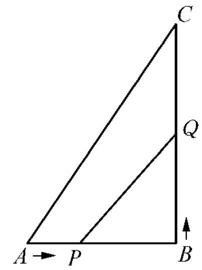
(3) 请你指出这 n 个方程的根有什么共同的特点,写出一条即可.

6.《九章算术》中有一道阐述“盈不足术”的问题,原文如下:今有人共买物,人出八,盈三;人出七,不足四.问人数、物价各几何?译文如下:现有一些人共同买一个物品,每人出 8 元,还盈余 3 元;每人出 7 元,则还差 4 元.共有多少人?这个物品的价格是多少?

7. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B=90°$,$AB=6$ cm,$BC=8$ cm.点 P 从点 A 开始沿边 AB 向点 B 以 1 cm/s 的速度移动,与此同时,点 Q 从点 B 开始沿边 BC 向点 C 以2 cm/s的速度移动.如果点 P,Q 分别从点 A,B 同时出发,当点 Q 运动到点 C 时,两点停止运动,问:

(1) 经过几秒,$\triangle PBQ$ 的面积等于 8 cm²?

(2) $\triangle PBQ$ 的面积会等于 10 cm² 吗?若会,请求出此时的运动时间;若不会,请说明理由.

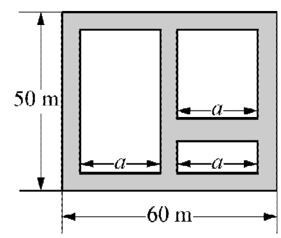


（第 7 题）

8. 如图,某市近郊有一块长为 60 m、宽为 50 m 的矩形荒地.地方政府准备在此建一个综合性休闲广场,其中阴影部分为通道,通道的宽度均相等,中间的三个矩形(它们的一边长均为 a m)区域将铺设塑胶地面作为运动场地.

(1) 设通道的宽度为 x m,则 $a=$ ________(用含 x 的代数式表示).

(2) 若塑胶运动场地总占地面积为 2 430 m²,则通道的宽度为多少米?



（第 8 题）

9. 某电厂规定:该厂家属区的每户居民一个月的用电量不超过A kW·h,那么这个月这户居民只需要交 10 元用电费;如果超过 A kW·h,那么这个月除了仍要交 10 元用电费外,超出部分要按每千瓦时$\dfrac{A}{100}$元交费.

(1) 若某户居民 2 月份用电 90 kW·h,超过规定的 A kW·h,则超过部分的电费是多少元?(用含 A 的代数式表示)

(2) 下表是这户居民 3 月、4 月的用电情况和交费情况:

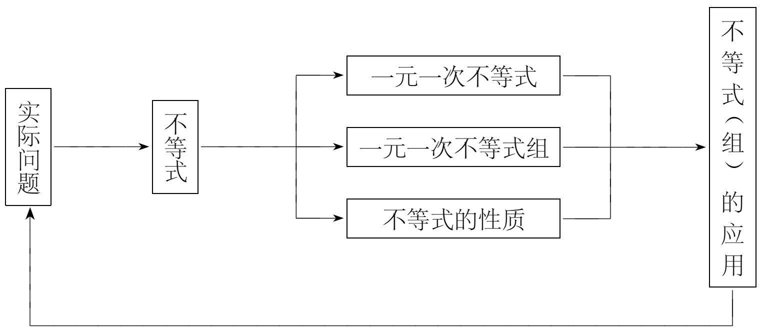
月份	用电量/(kW·h)	交电费总金额/元
3	80	25
4	45	10

根据上表数据,该厂规定的 A kW·h 为多少?

10. 某商店购进 600 个旅游纪念品,进价为每个 6 元,第一周以每个 10 元的价格售出 200 个.第二周若按每个 10 元的价格销售仍可售出 200 个,但商店为了适当增加销量,决定降价销售(根据市场调查,单价每降低1 元,可多售出 50 个,但售价不得低于进价).单价降低x 元销售一周后,商店对剩余旅游纪念品清仓处理,以每个 4 元的价格全部售出.如果这批旅游纪念品共获利 1 250 元,那么第二周每个旅游纪念品的销售价格为多少元?

第四单元　不等式(组)及其应用

知识脉络



知识要点

(一) 不等式和不等式组

1. 不等式的有关概念

(1) 用不等号表示不等关系的式子叫做**不等式**.

(2) 使不等式成立的未知数的值叫做**不等式的解**.

(3) 不等式的所有的解,组成这个不等式的解的集合,简称为这个不等式的**解集**.

(4) 求不等式的解集的过程叫做**解不等式**.

2. 不等式的基本性质

(1) 不等式的性质 1

不等式的两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式,不等号的方向不变.即:

如果 $a>b$, 那么 $a+c>b+c$.

(2) 不等式的性质 2

不等式的两边都乘以(或除以)同一个正数,不等号的方向不变.即:

如果 $a>b$, 并且 $c>0$, 那么 $ac>bc$.

(3) 不等式的性质 3

不等式的两边都乘以(或除以)同一个负数,不等号的方向改变.即:

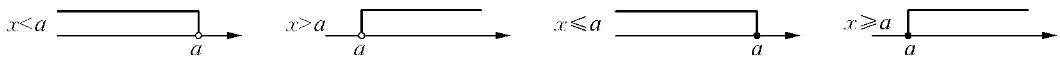
如果 $a>b$, 并且 $c<0$, 那么 $ac<bc$.

3. 一元一次不等式

(1) 只含有一个未知数,且含未知数的式子是整式,未知数的最高次数是 1,像这样的不等式叫做**一元一次不等式**.

(2) 解一元一次不等式与解一元一次方程相类似,不等式的变形要注意与方程的变形相对照,特别要注意不等式的性质 3:不等式两边同乘以(或除以)同一个负数,不等号的方向**必须**改变.

（3）一元一次不等式的解集在数轴上直观表示如图 4－1 所示：



①　　　②　　　③　　　④

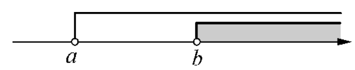
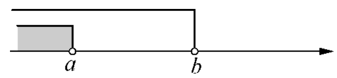
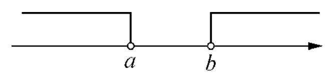
图 4－1

4. 一元一次不等式组

（1）含有相同未知数的若干个一元一次不等式所组成的不等式组叫做**一元一次不等式组**.

（2）解不等式组一般先分别求出不等式组中各个不等式的解集并表示在数轴上，再找出它们的公共部分就得到不等式组的解集.

（3）由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集，可分为以下四种情形：(以下假设 $a<b$)

一元一次不等式组	解　集	图　示
$\begin{cases} x>a, \\ x>b. \end{cases}$	$x>b$	
$\begin{cases} x<a, \\ x<b. \end{cases}$	$x<a$	
$\begin{cases} x>a, \\ x<b. \end{cases}$	$a<x<b$	
$\begin{cases} x<a, \\ x>b. \end{cases}$	无解	

（二）不等式(组)的应用

列不等式(组)解应用题的步骤：

（1）找出实际问题中的不等关系，设定未知数，列出不等式(组)；

（2）解不等式(组)；

（3）从不等式(组)的解集中求出符合题意的答案.

复习导引

§4.1　不等式(组)的解法

【基础训练】

1. 用不等式表示：

（1）4.5 与 p 的 3 倍的和大于 16 ____________；

（2）m 的 7 倍与 3 的 $\frac{1}{n}$ 的差是非负数____________.

2. 已知 $a>b$，用“$<$”或“$>$”填空：

（1）$a-3$ ____ $b-3$；　　（2）$\frac{a}{2}$ ____ $\frac{b}{2}$；

（3）$-4a$ ____ $-4b$；　　（4）ma ____ mb $(m<0)$；

（5）$2a$ ____ $a+b$；　　（6）$-ac^2$ ____ $-bc^2$ $(c\neq 0)$.

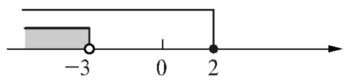
3.（1）不等式 $2x>3-x$ 的解集是____________；

（2）不等式 $2x-7<5-2x$ 的正整数解有____________.

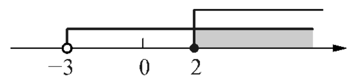
4. 填写下表：

不等式组	$\begin{cases}x-2<0,\\x-3<0.\end{cases}$	$\begin{cases}x-2>0,\\x-3>0.\end{cases}$	$\begin{cases}x-2>0,\\x-3<0.\end{cases}$	$\begin{cases}x-2<0,\\x-3>0.\end{cases}$
解　　集				

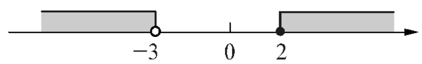
5. 不等式组 $\begin{cases}x>-3,\\x\leqslant 2\end{cases}$ 的解集在数轴上表示为 （　　）



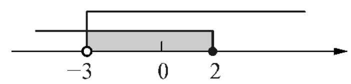
A.



B.



C.



D.

6. 不等式组 $\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\3(1-x)>2(x+9)\end{cases}$ 的解集是____________.

7. 若关于 x 的不等式 $x-b>0$ 恰有两个负整数解，则 b 的取值范围是 （　　）

A. $-3<b<-2$　　B. $-3<b\leqslant-2$　　C. $-3\leqslant b\leqslant-2$　　D. $-3\leqslant b<-2$

【典例解析】

例 1　解不等式 $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1$，并把它的解集在数轴上表示出来.

解　去分母，得 $2x-3(x-1)\leqslant 6$.

去括号，得 $2x-3x+3\leqslant 6$.

移项，得 $2x-3x\leqslant 6-3$.

合并同类项，得 $-x\leqslant 3$.

系数化为 1，得 $x\geqslant -3$.

这个不等式的解集在数轴上表示如下(图 4－2)：

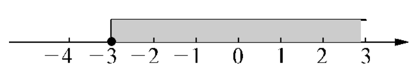


图 4－2

例 2　解不等式组 $\begin{cases}3(x+1)>4x+2, & ①\\ \dfrac{x}{2}\geqslant\dfrac{x-1}{3}. & ②\end{cases}$ 并写出不等式组的整数解.

解　解不等式①，得 $x<1$.

解不等式②，得 $x\geqslant -2$.

在数轴上表示不等式①②的解集(图 4－3).

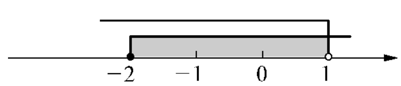


图 4－3

所以这个不等式组的解集是 $-2\leqslant x<1$，则不等式组的整数解为 -2，-1，0.

例 3　解不等式：$-3<2x-1<1$.

解　原不等式相当于不等式组 $\begin{cases}2x-1>-3, & ①\\ 2x-1<1. & ②\end{cases}$

解不等式①，得 $x>-1$.

解不等式②，得 $x<1$.

所以原不等式组的解集为 $-1<x<1$.

例 4　若关于 x 的不等式组 $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{x+1}{3}>0,\\ 3x+5a+4>4(x+1)+3a\end{cases}$ 恰有三个整数解，求 a 的取值范围.

分析　本题是有关一元一次不等式组的整数解的问题.首先利用 a 表示出不等式组的解集，然后根据解集中恰有三个整数解，即可确定 a 的值.

解　解 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x+1}{3}>0$，得 $x>-\dfrac{2}{5}$.

解 $3x+5a+4>4(x+1)+3a$，得 $x<2a$.

所以不等式组的解集为 $-\dfrac{2}{5}<x<2a$.

因为此不等式组恰有三个整数解，所以 $2<2a\leqslant 3$，

解得 $1<a\leqslant\dfrac{3}{2}$.

说明　求不等式组的解集，应遵循以下原则：同大取较大，同小取较小，小大大小中间找，大大小小解不了.

【巩固练习】

1. 填空题

(1) 不等式 $x>\dfrac{1}{2}x+1$ 的解集是________.

(2) 不等式组 $\begin{cases}x+2>0,\\ 2x-1\leqslant 0\end{cases}$ 的所有整数解是________.

(3) 若关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases}x-a>0,\\ 1-x>x-1\end{cases}$ 无解，则 a 的取值范围是________.

2. 选择题

(1) 若 $3x>-3y$，则下列不等式一定成立的是　　（　　）

A. $x+y>0$　　B. $x-y>0$

C. $x+y<0$　　D. $x-y<0$

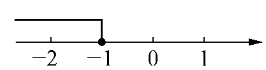
(2) 满足 $2(x-1)\leqslant x+2$ 的正整数 x 的个数为　　（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

(3) 关于不等式 $-2x+a\geqslant -2$ 的解集如图所示，则 a 的值是　　（　　）

A. -4　　B. -2

C. 0　　D. 2



（第 2(3) 题）

(4) 如果不等式 $(a-1)x>a-1$ 的解集是 $x<1$，那么 a 的取值范围是　　（　　）

A. $a\leqslant 1$　　B. $a>1$　　C. $a<1$　　D. $a<0$

(5) 若关于 x 的不等式 $x-\dfrac{a}{2}<1$ 的解集为 $x<1$，则关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+1=0$ 的根的情况是　　（　　）

A. 有两个相等的实数根　　B. 有两个不相等的实数根

C. 无实数根　　D. 无法确定

3. 解下列不等式,并把其解集在数轴上表示出来.

(1) $1-3(x-1)<8-x$;　　(2) $2x-1>\dfrac{3x-1}{2}$.

4. 解下列不等式组:

(1) $\begin{cases}3x-2>x+2,\\ \dfrac{1}{2}x-1\leqslant 7-\dfrac{3}{2}x;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2-x\leqslant 2(x+4),\\ x<\dfrac{x-1}{3}+1,\end{cases}$ 并写出该不等式组的最大整数解.

5. 已知关于 x 的不等式 $\dfrac{2m-mx}{2}>\dfrac{1}{2}x-1$.

(1) 当 $m=1$ 时,求该不等式的解集.

(2) 当 m 取何值时,该不等式有解? 并求出解集.

§4.2　不等式在实际问题中的应用

【基础训练】

1. 当 x 满足条件________时,长度为 3, 5, x 的三条线段可以围成一个三角形.

2. 班委会决定元旦晚会上给每一位同学赠送音乐贺卡或鲜花. 已知音乐贺卡每张 5 元,鲜花每束 2 元,全班共 40 人,班长用 150 元钱最多只能买________张音乐贺卡.

3. 某电脑用户计划使用不超过 530 元的资金购买单价为 70 元的单片软件和 80 元的盒装磁盘,根据需要,软件至少买 3 片,磁盘至少买 2 盒,不同的选购方式有________种.

【典例解析】

例 1　幼儿园将若干件玩具分给小朋友. 如果每人分 3 件,那么还余 59 件;如果每人分 5 件,那么最后一人还少几件. 该幼儿园有多少件玩具? 有多少个小朋友?

解　设幼儿园的小朋友有 x 人,则有 $\begin{cases}3x+59>5(x-1), & ①\\ 3x+59<5x. & ②\end{cases}$

解不等式①,得 $x<32$; 解不等式②,得 $x>29.5$.

所以 $29.5<x<32$.

因为 x 是整数,所以 $x=30$ 或 31.

当 $x=30$ 时, $3x+59=149$; 当 $x=31$ 时, $3x+59=152$.

答:该幼儿园有小朋友 30 人,玩具 149 件,或有小朋友 31 人,玩具 152 件.

例 2　为支援地震灾区,某市民政局组织募捐了 240 t 救灾物资,现准备租用甲、乙两种货车,将这批救灾物资一次性运往灾区,两种货车的载货量和租金如下表:

	甲种货车	乙种货车
载货量/(t/辆)	45	30
租金/(元/辆)	400	300

如果计划租用 6 辆货车,且租车的总费用不超过 2 300 元,求最省钱的租车方案.

分析　设租用甲种货车 x 辆,则租用乙种货车 $(6-x)$ 辆. 要一次性把 240 t 救灾物资运走,就必须

保证租用的 6 辆车载货量之和不小于 240 t，由此得出不等式，进而就可求出最省钱的方案.

解　设租用甲种货车 x 辆，则租用乙种货车$(6-x)$辆.

根据题意，得 $45x+30(6-x)\geqslant 240$，

解得 $x\geqslant 4$.

故租车方案为甲 4 辆，乙 2 辆，租车总费用为 2 200 元；甲 5 辆，乙 1 辆，租车总费用为 2 300 元；甲 6 辆，乙 0 辆，租车总费用为 2 400 元(超过 2 300 元，舍去).

因此最省钱的租车方案是租用甲货车 4 辆，乙货车 2 辆.

说明　此题主要考查了一元一次不等式的应用，根据已知条件列出不等式是解题的关键.

例 3　我们用$[a]$表示不大于 a 的最大整数，例如：$[2.5]=2$，$[3]=3$，$[-2.5]=-3$；用$\langle a\rangle$表示大于 a 的最小整数，例如：$\langle 2.5\rangle=3$，$\langle 4\rangle=5$，$\langle -1.5\rangle=-1$. 解决下列问题：

(1) $[-4.5]=$ ________，$\langle 3.5\rangle=$ ________.

(2) 若 $[x]=2$，则 x 的取值范围是________；若$\langle y\rangle=-1$，则 y 的取值范围是________.

(3) 已知 x，y 满足方程组 $\begin{cases}3[x]+2\langle y\rangle=3,\\3[x]-\langle y\rangle=-6,\end{cases}$ 求 x，y 的取值范围.

分析　本题是一元一次不等式组的应用问题，其中还涉及新定义，难度较大.

(1) 根据题目所给信息求解.

(2) 根据 $[2.5]=2$，$[3]=3$，$[-2.5]=-3$，可得$[x]=2$ 中的 x 应满足 $2\leqslant x<3$；根据$\langle a\rangle$表示大于 a 的最小整数，可得$\langle y\rangle=-1$ 中的 y 应满足 $-2\leqslant y<-1$.

(3) 先求出$[x]$和$\langle y\rangle$的值，然后再求 x 和 y 的取值范围.

解　(1) 根据题意，得 $[-4.5]=-5$，$\langle 3.5\rangle=4$.

(2) 因为 $[x]=2$，所以 x 的取值范围是 $2\leqslant x<3$；

因为 $\langle y\rangle=-1$，所以 y 的取值范围是 $-2\leqslant y<-1$.

(3) 解方程组，得 $\begin{cases}[x]=-1,\\\langle y\rangle=3,\end{cases}$

所以 x，y 的取值范围分别为 $-1\leqslant x<0$，$2\leqslant y<3$.

说明　解这类一元一次不等式组的应用问题，关键是读懂题意，根据题目所给的信息进行解答.

【巩固练习】

1. 填空题

(1) 某次知识竞赛共设有 20 道题，对于每一道题答对了得 10 分，答错了或不答扣 5 分，则至少答对________道题才能超过 80 分.

(2) 一堆苹果共有 38 个，将它们分给若干学生，每人 7 个有剩余，每人 8 个又不够，则学生的人数为________.

2. 选择题

(1) 已知小明家距离学校 10 km，而小王家距离小明家 3 km. 如果小王家到学校的距离是 d km，则 d 满足　（　　）

A. $3<d<10$　　B. $3\leqslant d\leqslant 10$　　C. $7<d<13$　　D. $7\leqslant d\leqslant 13$

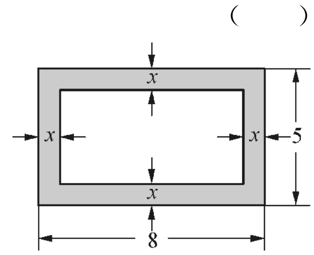
(2) 如图，长方形木框内、外边长的总和不超过 45，则 x 的取值范围是　（　　）

A. $0<x<\frac{5}{2}$

B. $1<x<\frac{5}{2}$

C. $\frac{7}{8}\leqslant x<2$

D. $\frac{7}{8}\leqslant x<\frac{5}{2}$



（第 2(2)题）

（3）某大型超市从生产基地购进一批水果，运输过程中质量损失 10%，假设不计超市其他费用，如果超市想要至少获得 20%的利润，那么这种水果在进价的基础上至少提高（　　）

A. 30%　　B. 33.3%　　C. 33.4%　　D. 40%

3. 某地举办乒乓球比赛，其费用包含两个部分：比赛场地租用费 800 元；另一部分费用与参加比赛的人数有关，每位选手需花费 40 元. 承办此次比赛的组委会筹集到经费 6 250 元，那么这次比赛最多可邀请多少名选手参赛？

4. 高斯函数$[x]$也称为取整函数，即$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如：$[2.3]=2$，$[-1.5]=-2$. 给出下列结论：

① $[-2.1]+[1]=-2$；② $[x]+[-x]=0$；③ 若$[x+1]=3$，则 x 的取值范围是 $2\leqslant x<3$；④ 当 $-1\leqslant x<1$ 时，$[x+1]+[-x+1]$的值为 0，1，2.

其中正确的结论有__________（填序号）.

5. 为倡导健康生活，推进全民健身，某社区购进 A，B 两种型号的健身器材若干套. 已知 A，B 两种型号健身器材的购买单价分别为每套 310 元，460 元，且每种型号健身器材必须整套购买.

（1）若购买 A，B 两种型号的健身器材共 50 套，且恰好支出 20 000 元，则 A，B 两种型号健身器材各购买多少套？

（2）若购买 A，B 两种型号的健身器材共 50 套，且支出不超过 18 000 元，则 A 种型号健身器材至少要购买多少套？

6. 由于雾霾天气频发，市场上防护口罩出现热销. 某药店准备购进一批口罩，已知 1 个 A 型口罩和 3 个 B 型口罩共需 26 元；3 个 A 型口罩和 2 个 B 型口罩共需 29 元.

（1）1 个 A 型口罩和 1 个 B 型口罩的售价各是多少元？

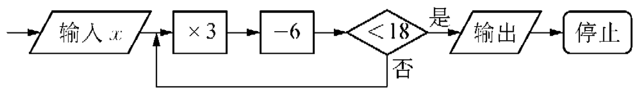
（2）药店准备购进这两种型号的口罩共 50 个，其中 A 型口罩的数量不少于 35 个，且不多于 B 型口罩的 3 倍，有哪几种购买方案？哪种方案最省钱？

习题四

1. 填空题

（1）已知 x 的 3 倍大于 5，x 的一半与 1 的差不大于 2，则 x 的取值范围是________.

（2）运行程序如图所示，从“输入实数 x”到“结果是否<18”为一次程序操作，若输入 x 后程序操作仅进行了一次就停止了，则 x 的取值范围是________.



（第 1(2)题）

2. 选择题

（1）若 $a<b$，则下列各式中一定成立的是　　（　　）

A. $a-1<b-1$　　B. $\frac{a}{3}>\frac{b}{3}$

C. $-a<-b$　　D. $ac<bc$

（2）不等式 $\begin{cases}-2x<6,\\-2+x>1\end{cases}$ 的解集是　　（　　）

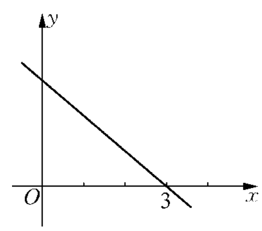
A. $x>-3$　　B. $x>3$

C. $-3<x<3$　　D. 无解

（3）如图，直线 $y=kx+b(k<0)$ 与 x 轴交于点$(3,0)$，则关于 x 的不等式 $kx+b>0$ 的解集是　　（　　）

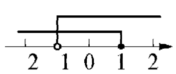
A. $x<3$　　B. $x>3$

C. $x<0$　　D. $x>0$

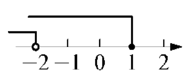


（第 2(3)题）

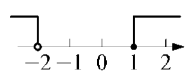
（4）不等式组 $\begin{cases}\frac{2x+1}{3}-\frac{3x+2}{2}>1,\\3-x\geqslant 2\end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是　　（　　）



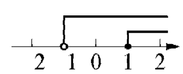
A.



B.



C.



D.

（5）小刚准备用自己节省的零花钱购买一台 MP4 来学习英语，他已存有 50 元，并计划从本月起每月节省 30 元，直到他至少有 280 元. 设 x 个月后小刚至少有 280 元，则可列计算月数的不等式为　　（　　）

A. $30x+50>280$　　B. $30x-50\geqslant 280$

C. $30x-50\leqslant 280$　　D. $30x+50\geqslant 280$

（6）若不等式 $x+3a>0$ 的负整数解有 2 个，则 a 的取值范围是　　（　　）

A. $a<\frac{2}{3}$　　B. $\frac{2}{3}<a<1$

C. $a>\frac{2}{3}$　　D. $\frac{2}{3}<a\leqslant 1$

3. x 取哪些整数值时，不等式 $5x+2>3(x-1)$ 与 $\frac{1}{2}x\leqslant 2-\frac{3}{2}x$ 都成立？

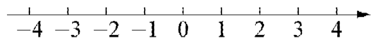
4. 解不等式组 $\begin{cases} -2x \leqslant 6, & ① \\ x > -2, & ② \\ 3(x-1) < x+1. & ③ \end{cases}$

请结合题意，完成本题的解答.

（1）解不等式①，得________，依据是______________.

（2）解不等式③，得________.

（3）把不等式①②③的解集在数轴上表示出来.



（第4题）

（4）从图中可以找出三个不等式解集的公共部分，得出不等式组的解集为________.

5. 先阅读理解下面的例题，再按要求解答.

例题：解一元二次不等式 $(x-6)(x+5)>0$.

解：由有理数的乘法法则“两数相乘，同号得正”，有

① $\begin{cases} x-6>0, \\ x+5>0 \end{cases}$ 或 ② $\begin{cases} x-6<0, \\ x+5<0. \end{cases}$

解不等式组①，得 $x>6$；

解不等式组②，得 $x<-5$.

故不等式 $(x-6)(x+5)>0$ 的解集为 $x>6$ 或 $x<-5$.

请根据上面的解法解不等式：$(x+2)(4x-5)<0$.

6. 某次篮球联赛初赛阶段，每队有 10 场比赛，每场比赛都要分出胜负，每队胜一场得 2 分，负一场得 1 分，积分超过 15 分才能获得参加决赛的资格.

（1）已知甲队在初赛阶段的积分为 18 分，求甲队在初赛阶段胜、负各多少场.

（2）如果乙队要获得参加决赛的资格，那么乙队在初赛阶段至少要胜多少场？

7. 在推进城乡义务教育均衡发展工作中，某区政府通过公开招标的方式为辖区内全部乡镇中学采购了某型号的学生用电脑和教师用笔记本电脑. 其中，A 乡镇中学更新学生用电脑 110 台和教师用笔记本电脑 32 台，共花费 30.5 万元；B 乡镇中学更新学生用电脑 55 台和教师用笔记本电脑 24 台，共花费 17.65 万元.

（1）该型号的学生用电脑和教师用笔记本电脑的单价分别是多少万元？

（2）经统计，全部乡镇中学需要购进的教师用笔记本电脑的台数比购进的学生用电脑台数的 $\frac{1}{5}$ 少 90，在两种电脑的总费用不超过预算 438 万元的情况下，至多能购进学生用电脑和教师用笔记本电脑各多少台？

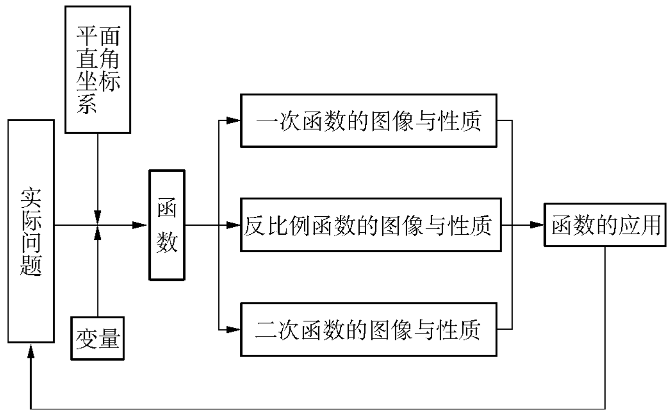
8. 某中学为落实市教育局提出的“全员育人，创办特色学校”的会议精神，决心打造“书香校园”，计划用不超过 1 900 本科技类书籍和 1 620 本人文类书籍，组建中、小型两类图书角共 30 个. 已知组建一个中型图书角需科技类书籍 80 本，人文类书籍 50 本；组建一个小型图书角需科技类书籍 30 本，人文类书籍 60 本.

（1）符合题意的组建方案有多少种？请你帮学校设计出来.

（2）若组建一个中型图书角的费用是 860 元，组建一个小型图书角的费用是 570 元，试说明(1)中哪种方案费用最低？最低费用是多少元？

第五单元 函数及其应用

知识脉络



知识要点

（一）平面直角坐标系

1. 平面直角坐标系的有关概念

平面上两条原点重合、互相垂直且具有相同单位长度的数轴建立了**平面直角坐标系**.其中水平的一条数轴叫做**x 轴或横轴**,取向右为正方向;铅直的一条数轴叫做**y 轴或纵轴**,取向上为正方向;两条数轴的交点 O 叫做**坐标原点**.平面直角坐标系所在的平面叫**坐标平面**.

2. 坐标与象限

坐标平面中,点 P 的坐标记作 $P(x, y)$,点 P 的横坐标为 x,纵坐标为 y,并且点 P 的坐标与有序实数对 (x, y) 是一一对应的.其中点 $P(x, y)$ 在第一象限内时,$x>0$, $y>0$;在第二象限内时,$x<0$, $y>0$;在第三象限内时,$x<0$, $y<0$;在第四象限内时,$x>0$, $y<0$.特别地,x 轴上点的坐标记作 $(x, 0)$,y 轴上点的坐标记作 $(0, y)$.

（二）函数

1. 与函数有关的几个概念

（1）如果在一个变化过程中,有两个变量 x 和 y,对于 x 的每一个值,y 都有唯一的值与之对应,我们就说 x 是**自变量**,y 是**因变量**,此时也称 y 是 x 的**函数**.

（2）函数常用的表示方法:解析法、列表法、图像法.

（3）求自变量的取值范围时,应使表达式有意义.如分式的分母不能为零,二次根式的被开方数(式)应为非负数等,实际问题中还要使实际问题有意义.

2. 一次函数(正比例函数)、反比例函数的图像和性质

函数	一次函数			反比例函数
表达式	$y=kx+b(k\neq 0)$			$y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$
图像	直线			双曲线
性质		$b\neq 0$	$b=0$(正比例函数)	
	$k>0$	直线经过第一、二、三象限($b>0$)或第一、三、四象限($b<0$). y随x的增大而增大	直线经过原点和第一、三象限. y随x的增大而增大	双曲线的两个分支分别在第一、三象限内,在每个象限内y随x的增大而减小
	$k<0$	直线经过第一、二、四象限($b>0$)或第二、三、四象限($b<0$). y随x的增大而减小	直线经过原点和第二、四象限. y随x的增大而减小	双曲线的两个分支分别在第二、四象限内,在每个象限内y随x的增大而增大

3. 二次函数的概念及表达式

(1) 形如$y=ax^2+bx+c$(a, b, c为常数,$a\neq 0$)的函数叫做**二次函数**,其图像为抛物线.

(2) 二次函数的三种表达式:

① 一般式:$y=ax^2+bx+c$(a, b, c为常数,$a\neq 0$). 当已知抛物线上三个点的坐标时,通常设一般式求表达式.

② 顶点式:$y=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$, (h, k)为抛物线的顶点坐标. 当已知与抛物线的顶点有关的条件时,通常设顶点式求表达式.

③ 交点式:$y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$, x_1, x_2为抛物线与x轴交点的横坐标. 当已知抛物线与x轴的两个交点坐标时,通常设交点式求表达式. 由于交点式不具有一般性(抛物线与x轴不一定有交点),所以最终应将交点式化成一般式或顶点式.

4. 二次函数的图像和性质

(1) 二次函数的图像为抛物线,是轴对称图形.

(2) 通常从开口方向、对称轴、顶点坐标、最值及增减性五个方面研究二次函数的图像和性质.

① 开口方向:当$a>0$时,抛物线开口向上;当$a<0$时,抛物线开口向下.

② 对称轴和顶点坐标如下表:

表达式	对称轴	顶点坐标	备注
$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$	直线$x=-\frac{b}{2a}$	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	与y轴的交点为$(0, c)$
$y=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$	直线$x=h$	(h, k)	
$y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$	直线$x=\frac{x_1+x_2}{2}$	略	与x轴的交点为$(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$

③ $y=ax^2+bx+c$(a, b, c为常数,$a\neq 0$)的最值及增减性如下表:

		$a>0$	$a<0$
增减性	$x\leqslant -\frac{b}{2a}$	y随x的增大而减小	y随x的增大而增大
	$x\geqslant -\frac{b}{2a}$	y随x的增大而增大	y随x的增大而减小
最值		当$x=-\frac{b}{2a}$时,$y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$	当$x=-\frac{b}{2a}$时,$y_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$

复习导引

§5.1　平面直角坐标系、函数

【基础训练】

1. 点 $P(1, 2)$关于 x 轴的对称点 P_1 的坐标是________，点 $P(1, 2)$关于原点 O 的对称点 P_2 的坐标是________.

2. 已知点 $P(0, m)$在 y 轴的负半轴上，则点 $M(-m, -m+1)$在第________象限.

3. 函数 $y=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$ 的自变量 x 的取值范围是________；函数 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 的自变量 x 的取值范围是________.

4. 若汽车开始行驶时油箱中有油 36 L，如果每小时耗油 4 L，那么油箱中剩余油量 y(L)与工作时间 t(h)之间的函数关系式是________，自变量 t 的取值范围是________.

【典例解析】

例 1　已知点 $P(a, b)$在第二象限，且到 x 轴的距离为 5，到 y 轴的距离为 4，求 a，b 的值.

解　根据题意，得 $|a|=4$，$|b|=5$，即 $a=\pm 4$，$b=\pm 5$.

又因为点 $P(a, b)$ 在第二象限，

所以 $a<0$，$b>0$，所以 $a=-4$，$b=5$.

说明　整个坐标平面被坐标轴分为四个象限：第一象限、第二象限、第三象限及第四象限. 设点 $P(a, b)$，若 $a>0$，$b>0$，则点 P 在第一象限；若 $a<0$，$b>0$，则点 P 在第二象限；若 $a<0$，$b<0$，则点 P 在第三象限；若 $a>0$，$b<0$，则点 P 在第四象限. 反之亦然. 坐标轴上的点不属于任何象限.

例 2　求下列各函数自变量 x 的取值范围：

(1) $y=\sqrt{5-3x}$；　　(2) $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$；

(3) $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-9}$.

解　略.

说明　自变量的取值范围应使表达式有意义：分母不能为零，二次根式的被开方数为非负数.

例 3　甲、乙两同学骑自行车从 A 地沿同一条路到 B 地，已知甲做匀速运动，乙比甲先出发，他们离出发地的距离 s(km)和骑车行驶时间 t(h)之间的函数关系如图 5－1 所示. 给出下列说法：

① 他们都骑车行驶了 20 km；

② 乙在途中停留了 0.5 h；

③ 甲、乙两人同时到达目的地；

④ 相遇后，甲的速度小于乙的速度.

根据图像信息，以上说法错误的是________(填序号).

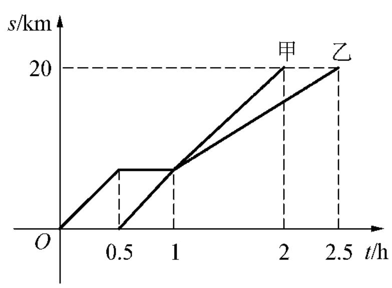


图 5－1

解　① 甲、乙都是骑自行车从 A 地沿同一路线到离 A 地20 km 的 B 地，所以①正确；

② 乙出发 0.5 h 后停留了 0.5 h，所以②正确；

③ 乙出发 2.5 h 到达目的地，而甲比乙早到 0.5 h，所以③不正确；

④ 图像相交后甲的图像都在乙的上方，说明甲的速度比乙的要大，所以④不正确.

故以上说法错误的是③④.

例 4　如图 5－2，在▱$ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=5$，AB 边上的高为 4，建立适当的直角坐标系，并写出各顶点的坐标.

解　以点 A 为坐标原点，以 AB 所在的直线为 x 轴，以过点 A 且与 AB 垂直的直线为 y 轴建立直角坐标系.

所以 $A(0,0)$，$B(6,0)$，$C(9,4)$，$D(3,4)$.

说明 可以建立各种不同的坐标系，写出在不同坐标系中各点的坐标，并加以比较，找出它们之间的联系，如坐标系如何平移了，点的坐标相应如何变化了.

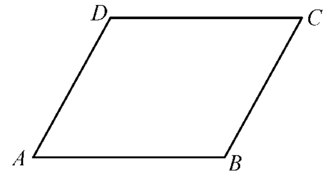


图 5-2

【巩固练习】

1. (1) 若点 $(a, a+2)$ 在第二象限，则 a 的取值范围是________；

(2) 已知点 $P(x,-1)$，$Q(2,y)$关于 y 轴对称，则 $x=$________，$y=$________.

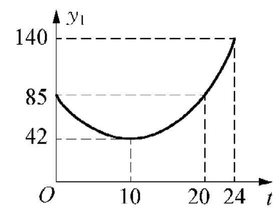
2. 已知线段 AB 的两个端点 $A(4,-1)$，$B(1,1)$，将线段 AB 平移后得到线段 $A'B'$. 若 A'的坐标为 $(-2,2)$，则点 B'的坐标为________.

3. 求下列各函数自变量 x 的取值范围：

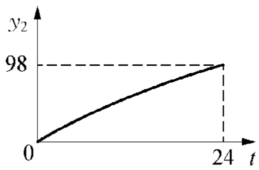
(1) $y=\sqrt{2x+5}$；　　(2) $y=\sqrt{x+1}-\dfrac{1}{x-2}$.

4. 如果点 $P(m+1, 3m-5)$ 到 x 轴的距离与到 y 轴的距离相等，试求 m 的值.

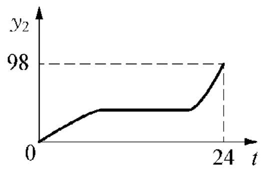
5. 随着时代的进步，人们对 PM2.5(空气中直径小于或等于 2.5 μm 的颗粒)的关注日益密切. 某市一天中 PM2.5 的值 y_1(μg/m^3)随时间 t(h)的变化如图所示. 设 y_2 表示 0 时到 t 时 PM2.5 的值的极差(即 0 时到 t 时PM2.5 的最大值与最小值的差)，则 y_2 与 t 的函数关系大致是　　(　　)



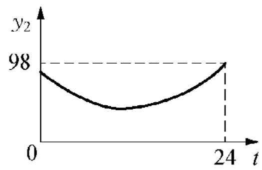
(第 5 题)



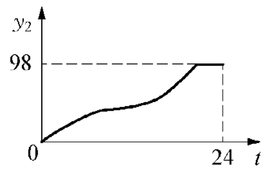
A.



B.

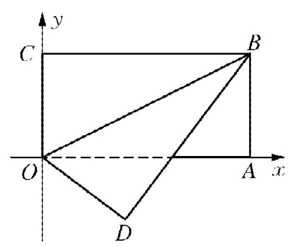


C.



D.

6. 如图，四边形 $OABC$ 是矩形，点 A 的坐标为$(8,0)$，点 C 的坐标为$(0,4)$，把矩形 $OABC$ 沿 OB 折叠，点 C 落在点 D 处，则点 D 的坐标为________.



(第 6 题)

§5.2　一次函数、正比例函数、反比例函数

【基础训练】

1. 一次函数 $y=2x+6$ 的图像与 x 轴的交点坐标为________，与 y 轴的交点坐标为________.

2. 若 $y+1$ 与 $x-2$ 成正比，且当 $x=3$ 时，$y=2$，则 y 与 x 的函数关系式为________________.

3. 已知关于 x 的一次函数 $y=kx+4k-2(k\neq 0)$. 若其图像经过原点，则 $k=$________；若 y 随 x 的增大而减小，则 k 的取值范围是________.

4. 若反比例函数 $y=\dfrac{m+1}{x}$的图像在每个象限内的函数值 y 随 x 的增大而增大，则 m 的取值范围是________.

5. 已知正比例函数 $y=ax(a\neq 0)$ 的图像与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 图像的一个交点坐标为 $(-1,-1)$，则另一个交点坐标是________.

6. 若点 A 是反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 图像上的一点且在第一象限，$AB\perp x$ 轴，垂足为 B，若以点 A，B 和坐标原点 O 为顶点的三角形的面积为 4，则这个反比例函数的关系式为________________.

【典例解析】

例 1　已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $(1,-2)$，$(0,-4)$.

(1) 求这个一次函数的表达式；

(2) 画出这个一次函数的图像；

(3) 观察图像，求当 x 取何值时，$y<0$.

解　(1) 根据题意，得 $\begin{cases}k+b=-2,\\ b=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\ b=-4.\end{cases}$

所以这个一次函数的表达式是 $y=2x-4$.

(2) 列表：

x	0	2
y	-4	0

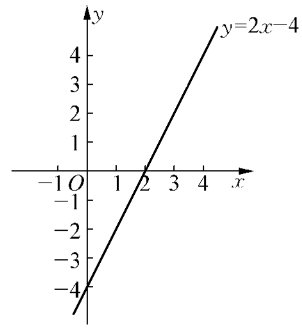


图 5－3

过点 $(0,-4)$，$(2,0)$ 作直线，此直线即为函数 $y=2x-4$ 的图像，如图 5－3 所示.

(3) 观察图 5－3 可知，当 $x<2$ 时，$y<0$.

说明　画一次函数的图像时，一般可取坐标轴上的点.

例 2　如图 5－4，已知一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图像与 x 轴、y 轴分别交于 A，B 两点，且与反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}(m\neq 0)$ 的图像在第一象限交于点 C，CD 垂直于 x 轴，垂足为 D，$OA=OB=OD=1$.

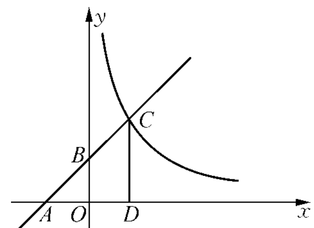


图 5－4

(1) 写出点 A，B，D 的坐标；

(2) 求一次函数和反比例函数的表达式；

(3) 求这两个函数图像的另一个交点的坐标；

(4) 根据图像写出在第一象限内使反比例函数的值大于一次函数的值的 x 的取值范围.

分析　A，B，D 三点在坐标轴上以及 $OA=OB=OD=1$，三点的坐标就确定了. 再用待定系数法可求出两个函数的表达式. 联立表达式得方程组，可求得另一个交点的坐标.

解　(1) $A(-1,0)$，$B(0,1)$，$D(1,0)$.

(2) 因为点 A，B 在一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图像上，

所以 $\begin{cases}-k+b=0,\\ b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\ b=1.\end{cases}$

所以一次函数的表达式为 $y=x+1$.

又因为点 C 在一次函数 $y=x+1$ 的图像上，且 $CD\perp x$ 轴，

所以点 C 的坐标为 $(1,2)$.

因为点 C 在反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}$ $(m\neq 0)$ 的图像上，

所以 $m=2$.

所以反比例函数的表达式为 $y=\dfrac{2}{x}$.

(3) 解 $\begin{cases}y=x+1,\\ y=\dfrac{2}{x},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=-2,\\ y_1=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1,\\ y_2=2.\end{cases}$

所以另一个交点的坐标为 $(-2,-1)$.

(4) 在第一象限内使反比例函数的值大于一次函数值的 x 的取值范围是 $0<x<1$.

说明　(1) 会根据已知条件用待定系数法求函数的表达式；

(2) 会根据函数的表达式，用解方程组的方法求交点坐标；

(3) 会根据图像，用数形结合的思想方法比较函数值的大小.

例 3 如图 5－5，矩形 $OABC$ 的顶点 A，C 分别在 x 轴和 y 轴上，点 B 的坐标为 $(-4,\ 6)$，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x<0)$ 的图像经过 BC 的中点 D，且与 AB 交于点 E.

(1) 求反比例函数的表达式和点 E 的坐标；

(2) 若 F 是 OC 上一点，且以 $\angle OAF$ 和 $\angle CFD$ 为对应角的 $\triangle AFO$，$\triangle FDC$ 相似，求点 F 的坐标.

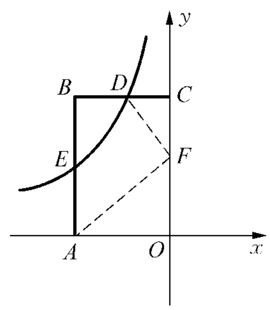


图 5－5

分析 (1) D 为 BC 中点，根据点 B 的坐标确定出点 D 的坐标，代入反比例函数表达式求出 k 的值，确定出反比例函数的表达式. 将 $x=-4$ 代入反比例函数表达式求出 y 的值，确定出点 E 的坐标.

(2) 如图 5－5，设 $F(0,\ y)$，根据以 $\angle OAF$ 和 $\angle CFD$ 为对应角的 $\triangle AFO$，$\triangle FDC$ 相似，列出比例式，求出 y 的值，即可确定出点 F 的坐标.

解 略.

说明 (1) 熟练掌握待定系数法求函数表达式；

(2) 运用数形结合、分类讨论的思想方法解决问题.

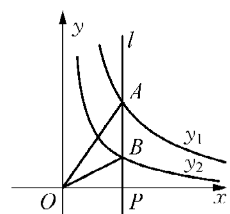
【巩固练习】

1. 填空题

(1) 若反比例函数 $y=(k-1)x^{k^2-5}$ 的图像经过第二、四象限，则 $k=$________.

(2) 若一次函数 $y=(2k-3)x+2-k$ 的图像与 y 轴的交点在 x 轴的上方，且 y 随 x 的增大而增大，则 k 的取值范围为________.

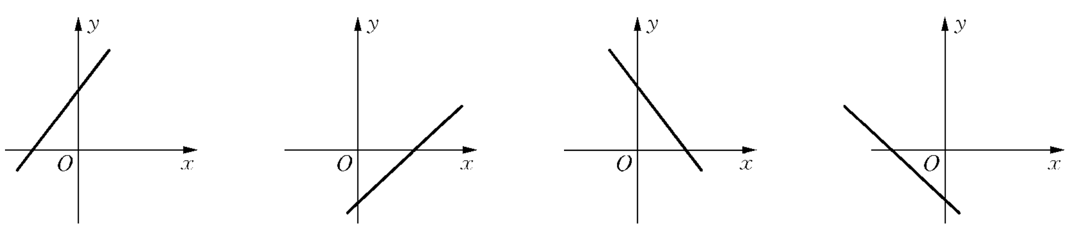
(3) 如图，直线 $l\perp x$ 轴于点 P，且与反比例函数 $y_1=\dfrac{k_1}{x}(x>0)$ 及 $y_2=\dfrac{k_2}{x}(x>0)$ 的图像分别交于点 A，B，连接 OA，OB. 已知 $\triangle OAB$ 的面积为 2，则 $k_1-k_2=$________.



(第 1(3) 题)

2. 选择题

(1) 已知正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$ 的函数值随 x 的增大而增大，则一次函数 $y=-kx+k$ 的图像大致是 ( )



A. B. C. D.

(2) 已知函数 $y=\dfrac{m}{x}$ 的图像如图所示，给出以下结论：

① $m<0$；

② 在每个分支上 y 随 x 的增大而增大；

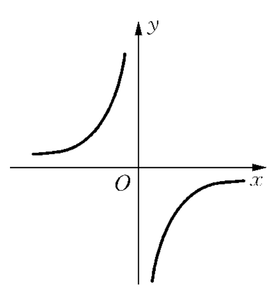
③ 若点 $A(-1,\ a)$，$B(2,\ b)$ 在图像上，则 $a<b$；

④ 若点 $P(x,\ y)$ 在图像上，则点 $P_1(-x,\ -y)$ 也在图像上.

其中正确结论的个数是 ( )

A. 1 B. 2

C. 3 D. 4



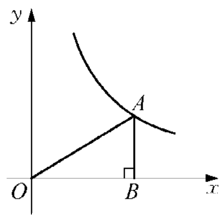
(第 2(2) 题)

(3) 如图，过反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图像上一点 A 作 $AB\perp x$ 轴于点 B，连接 AO. 若 $S_{\triangle AOB}=2$，则 k 的值为 ( )

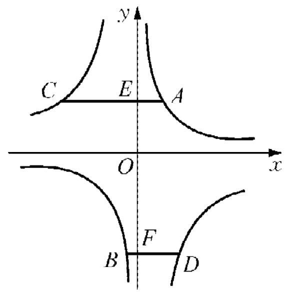
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

（4）如图，A，B 两点在反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}$ 的图像上，C，D 两点在反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图像上，$AC\perp y$ 轴于点 E，$BD\perp y$ 轴于点 F，且 $AC=2$，$BD=1$，$EF=3$，则 k_1-k_2 的值为（　　）

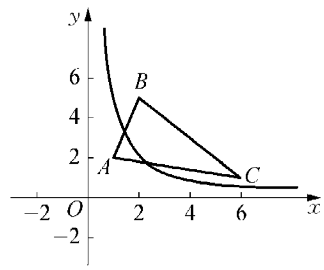
A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6



（第 2(3) 题）



（第 2(4) 题）



（第 2(5) 题）

（5）如图，$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(1,2)$，$B(2,5)$，$C(6,1)$. 若函数 $y=\frac{k}{x}$ 在第一象限内的图像与 $\triangle ABC$ 有交点，则 k 的取值范围是（　　）

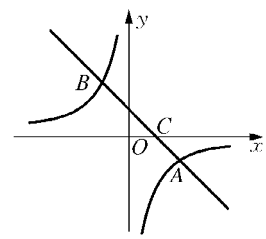
A. $2\leqslant k\leqslant\frac{49}{4}$　　B. $6\leqslant k\leqslant 10$　　C. $2\leqslant k\leqslant 6$　　D. $2\leqslant k\leqslant\frac{25}{2}$

3. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=k_1x+b$ 的图像与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图像交于 $A(4,-2)$，$B(-2,n)$ 两点，与 x 轴交于点 C.

（1）求 k_2，n 的值；

（2）请直接写出不等式 $k_1x+b<\frac{k_2}{x}$ 的解集；

（3）将 x 轴下方的图像沿 x 轴翻折，点 A 落在点 A' 处，连接 $A'B$，$A'C$，求 $\triangle A'BC$ 的面积.



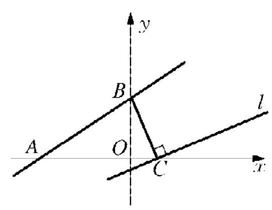
（第 3 题）

4. 如图，一次函数 $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 的图像与 x 轴、y 轴分别交于 $A(-9,0)$，$B(0,6)$ 两点，过点 $C(2,0)$ 作直线 l 与 BC 垂直，点 E 在直线 l 位于 x 轴上方的部分.

（1）求一次函数 $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 的表达式；

（2）若 $\triangle ACE$ 的面积为 11，求点 E 的坐标；

（3）当 $\angle CBE=\angle ABO$ 时，点 E 的坐标为________.

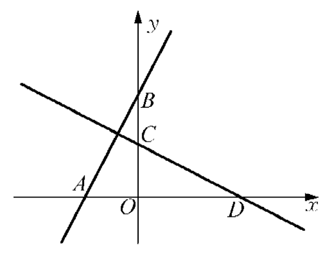


（第 4 题）

5. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，过点 $A(-2,0)$ 的直线交 y 轴正半轴于点 B，将直线 AB 绕着点 O 顺时针旋转 90° 后，分别与 x 轴、y 轴交于点 D，C.

（1）若 $OB=4$，求直线 AB 的函数表达式；

（2）连接 BD，若 $\triangle ABD$ 的面积是 5，求点 B 的运动路径长.



（第 5 题）

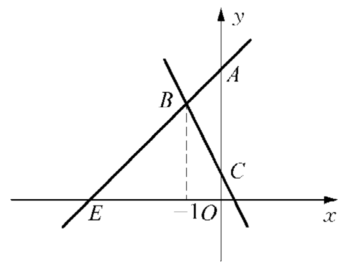
6. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=kx+4(k\neq 0)$ 与 y 轴交于点 A.

(1) 如图，直线 $y=-2x+1$ 与直线 $y=kx+4(k\neq 0)$ 交于点 B，与 y 轴交于点 C，点 B 的横坐标为 -1.

① 求点 B 的坐标及 k 的值；

② 直线 $y=-2x+1$、直线 $y=kx+4$ 与 y 轴所围成的 $\triangle ABC$ 的面积等于________.

(2) 直线 $y=kx+4(k\neq 0)$ 与 x 轴交于点 $E(x_0,\ 0)$，若 $-2<x_0<-1$，求 k 的取值范围.



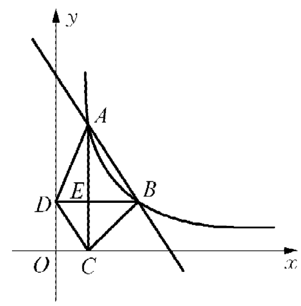
（第 6 题）

7. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0,\ k$ 是常数$)$ 的图像经过点 $A(2,\ 6)$，$B(m,\ n)$，其中 $m>2$. 过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为 C，过点 B 作 y 轴的垂线，垂足为 D，AC 与 BD 交于点 E，连接 AD，DC，CB.

(1) 若 $\triangle ABD$ 的面积为 3，求 k 的值和直线 AB 的函数表达式；

(2) 求证：$\dfrac{DE}{CE}=\dfrac{BE}{AE}$；

(3) 若 $AD\ /\!/\ BC$，求点 B 的坐标.



（第 7 题）

§5.3 二次函数(1)

【基础训练】

1. 填表题

抛 物 线	开 口 方 向	对 称 轴	顶 点 坐 标
$y=-4x^2+1$			
$y=-3(x-2)^2$			
$y=\dfrac{1}{3}(x-1)^2-4$			

2. 填空题

(1) 二次函数 $y=-x^2+4x+5$ 图像的顶点坐标是________，与 x 轴的交点坐标是________，与 y 轴的交点坐标是________.

(2) 如果点 $A(a,\ 5)$ 在抛物线 $y=x^2+x-1$ 上，那么 $a=$ ________.

(3) 如果抛物线 $y=a(x+h)^2+k$ 过原点，顶点在第二象限，那么 a ________ 0，h ________ 0，k ________ 0.

(4) 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $(0,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(1,\ 1)$，那么 $a=$________，$b=$________，$c=$________.

(5) 将抛物线 $y=(x+2)^2+3$ 先向下平移 2 个单位长度，再向左平移 1 个单位长度后，得到的抛物线的表达式为________.

【典例解析】

例 1 函数 $y=-x^2+(m-1)x+m$ 的图像与 y 轴交于点 $(0,\ 3)$.

(1) 求 m 的值.

(2) 求该函数的图像与 x 轴的交点和顶点坐标.

(3) 画出该函数的图像.

(4) x 取什么值时,该函数的图像在 x 轴上方?

(5) x 取什么值时,y 随 x 的增大而减小?

解　(1) 由函数 $y=-x^2+(m-1)x+m$ 的图像与 y 轴交于点(0, 3),得 $m=3$.

(2) 由 $-x^2+2x+3=0$,解得 $x_1=-1$, $x_2=3$,

所以该函数的图像与 x 轴的交点为(−1, 0), (3, 0).

因为 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$,

所以该函数图像的顶点坐标为(1, 4).

(3) 图像如图 5-6 所示.

(4) 由图像可知,当 $-1<x<3$ 时,该函数的图像在 x 轴上方.

(5) 由图像可知,当 $x>1$ 时,y 随 x 的增大而减小.

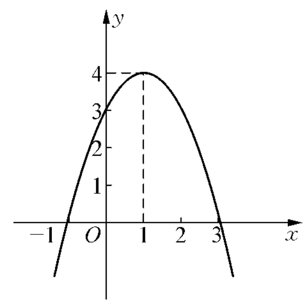


图 5-6

例 2　(1) 若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像如图 5-7 所示,则 abc ________ 0, b^2-4ac ________ 0.

(2) 已知点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 在二次函数 $y=x^2-6x+4$ 的图像上,若 $x_1<x_2<3$,则 y_1 ________ y_2(填“>”“=”或“<”).

解　(1) 因为抛物线开口向下,所以 $a<0$;

因为抛物线与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴上,所以 $c>0$;

因为抛物线的对称轴在 y 轴的右侧,所以 $-\dfrac{b}{2a}>0$, 又 $a<0$, 所以 $b>0$.

所以 $abc<0$.

因为抛物线与 x 轴有两个交点,所以 $b^2-4ac>0$.

(2) 二次函数图像的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-6}{2\times1}=3$,

因为 $a=1>0$,所以当 $x<3$ 时,y 随 x 的增大而减小.

因为 $x_1<x_2<3$,所以 $y_1>y_2$.

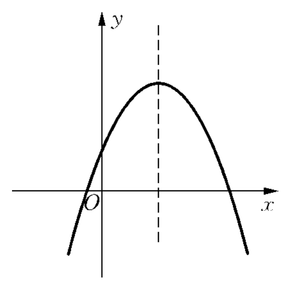


图 5-7

说明　在二次函数的表达式与图像之间,存在一系列对应关系:$a>0\Leftrightarrow$ 抛物线开口向上;$c=0\Leftrightarrow$ 抛物线过原点;$\begin{cases}a<0,\\ b>0\end{cases}\Rightarrow-\dfrac{b}{2a}>0\Leftrightarrow$ 抛物线的对称轴在 y 轴的右侧. 学习函数及其图像,必须重视“数”与“形”之间的相互转化.

例 3　如图 5-8,已知二次函数 $y=ax^2-4x+c$ 的图像经过点 A 和点 B.

(1) 求该二次函数的表达式;

(2) 写出该抛物线的对称轴及顶点坐标;

(3) 点 $P(m, m)$ 与点 Q 均在该函数的图像上(其中 $m>0$),且这两点关于抛物线的对称轴对称,求 m 的值及点 Q 的坐标.

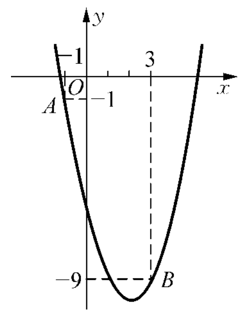


图 5-8

解　(1) 将(−1, −1), (3, −9)分别代入 $y=ax^2-4x+c$,得

$$\begin{cases}-1=a\times(-1)^2-4\times(-1)+c,\\ -9=a\times3^2-4\times3+c.\end{cases}$$

解上述方程组,得 $\begin{cases}a=1,\\ c=-6.\end{cases}$

所以二次函数的表达式为 $y=x^2-4x-6$.

(2) 因为 $y=x^2-4x-6=(x-2)^2-10$,

所以该抛物线的对称轴为 $x=2$,顶点坐标为(2, −10).

(3) 将 (m, m) 代入 $y=x^2-4x-6$,得 $m=m^2-4m-6$.

解上述方程,得 $m_1=-1$, $m_2=6$.

因为 $m>0$,所以 $m=6$,所以点 P 的坐标为(6, 6).

因为点 P 与点 Q 关于对称轴 $x=2$ 对称,所以点 Q 的坐标为(−2, 6).

【巩固练习】

1. 填空题

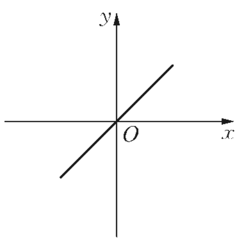
(1) 填表：

抛 物 线	开 口 方 向	对 称 轴	顶 点 坐 标
$y=x^2-4x+1$			
$y=-5(x+2)(x-4)$			

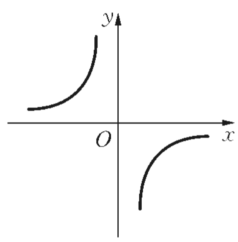
(2) 把抛物线 $y=x^2+bx+c$ 先向右平移 3 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度，所得图像的表达式为 $y=x^2-3x+5$，则 $b=$________，$c=$________.

2. 选择题

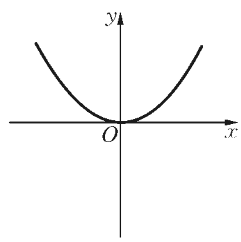
(1) 已知点 $A(-1, m)$，$B(1, m)$，$C(2, m+1)$在同一个函数的图像上，这个函数的图像可以是 (　　)



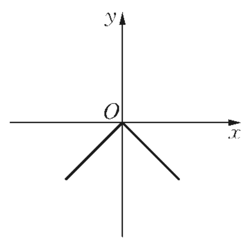
A.



B.



C.



D.

(2) 已知一次函数 $y_1=kx+m(k\neq 0)$ 和二次函数 $y_2=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的自变量和对应函数值如下表：

x	…	-1	0	2	4	…
y_1	…	0	1	3	5	…

x	…	-1	1	3	4	…
y_2	…	0	-4	0	5	…

当 $y_2>y_1$ 时，自变量 x 的取值范围是 (　　)

A. $x<-1$　　B. $x>4$　　C. $-1<x<4$　　D. $x<-1$ 或 $x>4$

3. 根据条件求下列抛物线的表达式：

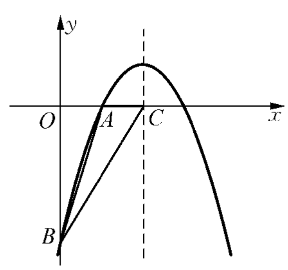
(1) 二次函数的图像经过点(0, 1)，(2, 1)和(3, 4)；

(2) 抛物线的顶点坐标是(−2, 1)，且过点(1, −2).

4. 如图，已知二次函数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+bx+c$ 的图像经过 $A(2, 0)$，$B(0, -6)$两点.

(1) 求这个二次函数的表达式；

(2) 设该二次函数图像的对称轴与 x 轴交于点 C，连接 BA，BC，求 $\triangle ABC$ 的面积.

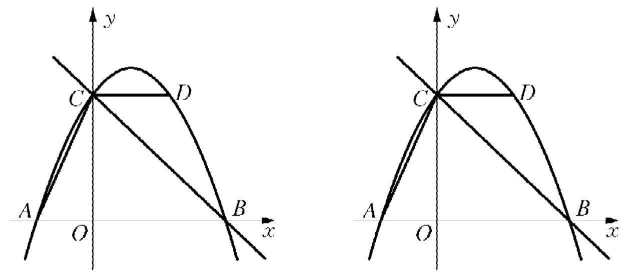


（第 4 题）

5. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点$A(-2, 0)$，$B(4, 0)$，$D(2, 4)$，与 y 轴交于点 C，作直线 BC，连接 AC，CD.

(1) 求抛物线的函数表达式；

（2）E 是抛物线上的点，求满足 $\angle ECD = \angle ACO$ 的点 E 的坐标.

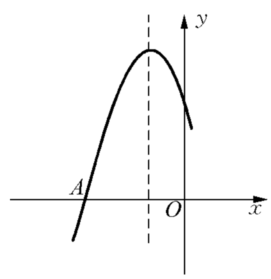


备用图

（第 5 题）

§5.4　二次函数(2)

【基础训练】



（第 4 题）

1. 二次函数 $y=-x^2+2x-3$ 图像的顶点坐标是________.

2. 已知二次函数 $y=2x^2-x$，当 x ________时，y 随 x 的增大而增大，当 x ________时，y 随 x 的增大而减小.

3. 已知抛物线 $y=x^2-\frac{1}{2}x+c$ 的顶点在 x 轴上，则 $c=$________.

4. 如图所示是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图像的一部分，图像过点 $A(-3,0)$，对称轴为 $x=-1$. 给出四个结论：① $b^2-4ac>0$；② $2a+b=0$；③ $a+b+c<0$；④ $a-b+c>0$. 其中正确的结论是________（填序号）.

【典例解析】

例 1　已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的 x 与 y 的部分对应值如下表：

x	…	-1	0	1	2	…
y	…	0	3	4	3	…

则下列关于该函数的判断中不正确的是　　　　（　　）

A. 抛物线开口向下　　　　B. 抛物线的对称轴为直线 $x=1$

C. $x=-2$ 时的函数值小于 $x=5$ 时的函数值　　　　D. 当 $-1<x<3$ 时，$y>0$

解　略.

例 2　已知抛物线 $y=ax^2+bx$ 经过点 $A(-3,-3)$ 和点 $P(t,0)$，且 $t\neq 0$.

（1）若抛物线的对称轴经过点 A，如图 5－9 所示，请通过观察图像，指出此时 y 的最小值，并写出 t 的值；

（2）若 $t=-4$，求 a，b 的值，并指出此时抛物线的开口方向；

（3）直接写出使该抛物线开口向下的 t 的一个值.

解　略.

说明　第(1)小题的关键是看清隐含条件(即对称轴经过点 A). 第(3)小题具有开放性，抛物线开口向下，只需 $a<0$，此时 t 的取值只需满足 $a<0$.

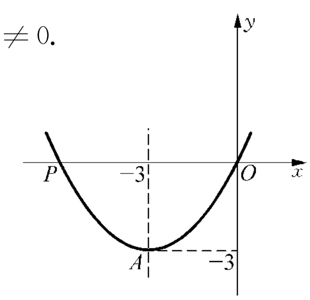


图 5－9

例 3　已知二次函数 $y=-3x^2-6x+5$.

（1）求这个函数图像的顶点坐标、对称轴以及函数的最大值.

（2）若直线 $y=-x-k$ 与上述抛物线只有一个公共点，求 k 的值；若直线 $y=-x-k$ 与上述抛物线有两个公共点，求 k 的取值范围.

解　略.

说明　有关图像的交点问题，通常转化成方程组的解的问题. 若转化后的整式方程为一元二次方程，则 $\Delta>0$ 时，有两个交点；$\Delta=0$ 时，有一个交点；$\Delta<0$ 时，无交点.

例 4　如图 5 - 10，已知二次函数 $y=x^2-2x-1$ 图像的顶点为 A. 二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图像与 x 轴交于原点 O 及另一点 C，它的顶点 B 在函数 $y=x^2-2x-1$ 图像的对称轴 l 上.

(1) 求点 A 与点 C 的坐标；

(2) 当四边形 $AOBC$ 为菱形时，求函数 $y=ax^2+bx$ 的表达式.

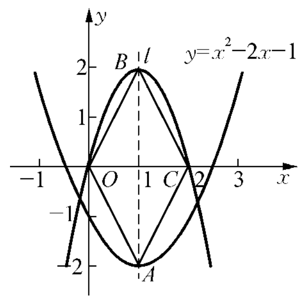


图 5 - 10

解　(1) 因为 $y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$，所以顶点 A 的坐标为 $(1,-2)$.

因为二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图像经过原点，且它的顶点在二次函数 $y=x^2-2x-1$ 图像的对称轴 l 上，所以点 C 和点 O 关于直线 l 对称，所以点 C 的坐标为 $(2,0)$.

(2) 因为四边形 $AOBC$ 为菱形，所以点 B 和点 A 关于直线 OC 对称，因此点 B 的坐标为 $(1,2)$.

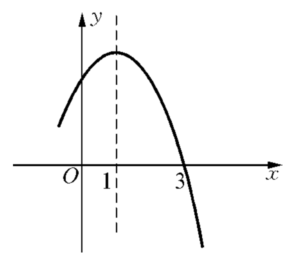
因为二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图像经过点 $B(1,2)$，$C(2,0)$，所以 $\begin{cases}a+b=2,\\4a+2b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\b=4.\end{cases}$ 所以二次函数 $y=ax^2+bx$ 的表达式为 $y=-2x^2+4x$.

【巩固练习】

1. 填空题

(1) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下，顶点坐标为 $(2,-3)$，那么该抛物线有最________值________.

(2) 若二次函数 $y=-x^2+2x+k$ 的部分图像如图所示，则关于 x 的一元二次方程 $-x^2+2x+k=0$ 的一个解 $x_1=3$，另一个解 $x_2=$________.



(第 1(2)题)

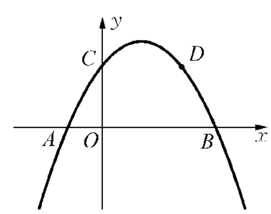
(3) 已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的 x 与 y 的部分对应值如下表：

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	7	2	-1	-2	m	2	7

则 m 的值为________.

(4) 如果二次函数 $y=x^2-4x+c$ 的图像与 x 轴没有公共点，其中 c 为整数，写出一个满足条件的 c 的值：________.

(5) 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴相交于点 A，$B(m+2,0)$，与 y 轴相交于点 C，点 D 在该抛物线上，坐标为 (m,c)，则点 A 的坐标为________.



(第 1(5)题)

2. 选择题

(1) 函数 $y=(x-1)^2+1$ 图像的顶点坐标是　(　　)

A. $(1,1)$　　B. $(-1,1)$　　C. $(1,-1)$　　D. $(-1,-1)$

(2) 对于二次函数 $y=-\frac{1}{4}x^2+x-4$，下列说法中正确的是　(　　)

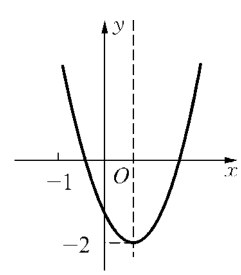
A. 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大

B. 当 $x=2$ 时，y 有最大值 -3

C. 图像的顶点坐标为 $(-2,-7)$

D. 图像与 x 轴有两个交点

(3) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像如图所示，并且关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c-m=0$ 有两个不相等的实数根. 给出下列结



(第 2(3)题)

论：①$b^2-4ac<0$；②$abc>0$；③$a-b+c<0$；④$m>-2$. 其中正确结论的个数是（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

3. 已知二次函数 $y=ax^2-2$ 的图像经过点$(1,-1)$，求这个二次函数的表达式，并判断该函数的图像与 x 轴的交点的个数.

4. 已知二次函数 $y=-x^2+2x+3$.

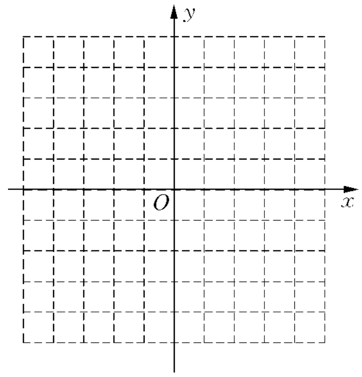
(1) 求抛物线的对称轴和顶点的坐标.

(2) 画出函数的图像.

(3) 根据图像：

① 写出函数值 y 为正数时，自变量 x 的取值范围；

② 写出当 $-2<x<2$ 时，函数值 y 的取值范围.

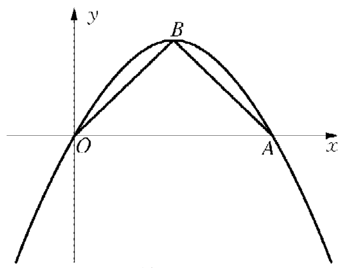


（第 4 题）

5. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx$ 的图像过点 $A(4,0)$，顶点为 B，连接 AB，BO.

(1) 求二次函数的表达式；

(2) 若 C 是 BO 的中点，点 Q 在线段 AB 上，设点 B 关于直线 CQ 的对称点为 B'，当$\triangle OCB'$为等边三角形时，求 BQ 的长度.



（第 5 题）

§5.5　函数的应用

【基础训练】

1. 一辆摩托车由甲城驶往相距 240 km 的乙城，它的速度为 40 km/h，则摩托车行驶的路程 s(km)与行驶时间 t (h)之间的函数关系式为__________，时间 t 的取值范围为__________.

2. 将一条长为 20 cm 的铁丝剪成两段，并以每一段铁丝的长度为周长各做成一个正方形，则这两个正方形面积之和的最小值是__________cm^2.

3. 某市出租车收费规定如下：行驶路程为 3 km 及 3 km 以内，收费 10 元；行驶路程超过 3 km，超过部分以 1.8 元/km 计费. 某乘客的车费 y(元)与行驶路程 x(km) $(x>3)$ 之间的函数关系式为__________.

【典例解析】

例 1　某医药研究所开发了一种新药，在试验药效时发现，如果成人按规定剂量服用，那么服药后 2 h 时血液中含药量最高，达每毫升 6 μg(1 $\mu g=10^{-6}$ g)，接着逐步衰减，10 h 时血液中含药量为每毫升 3 μg，每毫升血液中含药量 $y(\mu g)$随时间 x(h)的变化如图 5－11 所示. 当成人按规定剂量服药后：

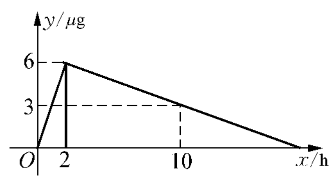


图 5－11

(1) 分别求出 $x\leqslant 2$ 和 $x\geqslant 2$ 时，y 与 x 之间的关系式.

(2) 如果每毫升血液中含药量为 4 μg 或 4 μg 以上时在治疗疾病时是有效的，那么这个有效时间多长?

分析　由图像可知，当 $x\leqslant 2$ 时，正比例函数的图像经过点$(2,6)$；当 $x\geqslant 2$ 时，一次函数的图像经过点$(2,6)$，$(10,3)$.

解　(1) 当 $x\leqslant 2$ 时，设 $y=kx$.

把$(2,6)$代入 $y=kx$，解得 $k=3$.

所以当 $x\leqslant 2$ 时，$y=3x$.

当 $x \geqslant 2$ 时，设 $y = k'x + b$.

把(2，6)，(10，3)代入 $y = k'x + b$，解得 $k' = -\dfrac{3}{8}$，$b = \dfrac{27}{4}$.

所以当 $x \geqslant 2$ 时，$y = -\dfrac{3}{8}x + \dfrac{27}{4}$.

(2) 把 $y = 4$ 代入 $y = 3x$ 中，得 $x_1 = \dfrac{4}{3}$.

把 $y = 4$ 代入 $y = -\dfrac{3}{8}x + \dfrac{27}{4}$ 中，得 $x_2 = \dfrac{22}{3}$.

$t = x_2 - x_1 = \dfrac{22}{3} - \dfrac{4}{3} = 6$.

所以这个有效时间是 6 h.

例 2 已知某水产公司有一种海产品共 2 104 kg，为寻求合适的销售价格，该公司进行了 8 天试销，试销情况如下：

	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天	第 6 天	第 7 天	第 8 天
售价 x/(元/kg)	400		250	240	200	150	125	120
销售量 y/kg	30	40	48		60	80	96	100

观察表中数据，发现可以用反比例函数刻画这种海产品每天的销售量 y(kg)与销售价格 x(元/kg)之间的关系. 现假定在这批海产品的销售中，每天的销售量 y(kg)与销售价格 x(元/kg)之间都满足这一关系.

(1) 写出这个反比例函数的表达式，并补全表格.

(2) 在试销 8 天后，公司决定将这种海产品的销售价格定为 150 元/kg，并且每天都按这个价格销售，那么余下的这些海产品预计再用多少天可以全部售出?

(3) 在按(2)中定价继续销售 15 天后，公司发现剩余的这些海产品必须在不超过 2 天内全部售出，此时需要重新确定一个销售价格，使后面两天都按新的价格销售，那么新确定的价格最高不超过每千克多少元才能完成销售任务?

解 (1) 函数表达式为 $y = \dfrac{12\,000}{x}$.

填表如下：

	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天	第 6 天	第 7 天	第 8 天
售价 x/(元/kg)	400	300	250	240	200	150	125	120
销售量 y/kg	30	40	48	50	60	80	96	100

(2) 因为 $2\,104 - (30 + 40 + 48 + 50 + 60 + 80 + 96 + 100) = 1\,600$，

即 8 天试销后，余下的海产品还有 1 600 kg.

当 $x = 150$ 时，$y = \dfrac{12\,000}{150} = 80$，$1\,600 \div 80 = 20$，

所以余下的这些海产品预计再用 20 天可以全部售出.

(3) $1\,600 - 80 \times 15 = 400$，$400 \div 2 = 200$，即如果正好用 2 天售完，那么每天需要售出 200 kg.

当 $y = 200$ 时，$x = \dfrac{12\,000}{200} = 60$，所以新确定的价格最高不超过 60 元/kg 才能完成销售任务.

例 3 我市某化工材料经销公司购进一种化工原料若干千克，价格为每千克 30 元. 物价部门规定其销售单价不高于每千克 60 元，不低于每千克 30 元. 经市场调查发现日销售量 y(kg)是销售单价 x(元)的一次函数，且当 $x = 60$ 时，$y = 80$，当 $x = 50$ 时，$y = 100$. 在销售过程中，每天还要支付其他费用 450 元.

(1) 求出 y 与 x 之间的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围.

(2) 求该公司销售该原料日获利 W(元)与销售单价 x(元)之间的函数关系式.

（3）当销售单价为多少元时，该公司日获利最大？最大获利是多少元？

分析　（1）根据 y 是 x 的一次函数，设 $y=kx+b$，把 x 与 y 的两对值分别代入求出 k 与 b 的值，即可确定出 y 与 x 的关系式.

（2）根据利润＝（售价－进价）×销售量－其他支出，可求出 W 与 x 之间的函数关系式.

（3）利用二次函数的性质可求出当 x 为何值时，W 取得最大值.

解　（1）设 $y=kx+b$，根据题意，得 $\begin{cases}80=60k+b,\\100=50k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=200.\end{cases}$

所以 $y=-2x+200\ (30\leqslant x\leqslant 60)$.

（2）$W=(x-30)(-2x+200)-450=-2x^2+260x-6\,450=-2(x-65)^2+2\,000$.

（3）$W=-2(x-65)^2+2\,000$，

因为 $30\leqslant x\leqslant 60$，

所以当 $x=60$ 时，W 有最大值为 1 950 元.

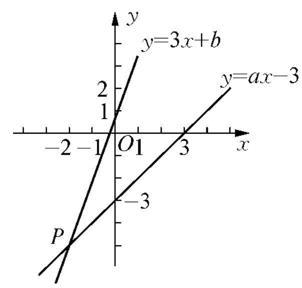
答：当销售单价为 60 元时，该公司日获利最大，最大获利为 1 950 元.

【巩固练习】

1. 填空题

（1）我们知道，海拔高度每上升 1 km，温度下降 6℃. 某时刻，某地地面温度为 20℃，设高出地面 x km 处的温度为 y℃，则 y 与 x 之间的函数关系式为________；某山峰高出地面约 500 m，这时山顶的温度大约是______℃.

（2）如图，已知函数 $y=3x+b$ 和 $y=ax-3$ 的图像交于点 $P(-2,-5)$，则根据图像可得不等式 $3x+b>ax-3$ 的解集是______.



（第 1(2) 题）

2. 某种型号汽车的油箱容量为 40 L，每行驶 100 km 耗油 10 L. 设一辆加满油的该型号汽车行驶路程为 x km，行驶过程中油箱内剩余油量为 y L.

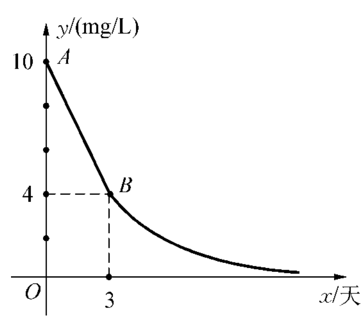
（1）求 y 与 x 之间的函数关系式.

（2）为了有效延长汽车使用寿命，厂家建议每次加油时油箱内剩余油量不低于油箱容量的 $\frac{1}{4}$. 按此建议，求该辆汽车最多行驶的路程.

3. 环保局对某企业排污情况进行检测，结果显示所排污水中硫化物的浓度超标，即硫化物的浓度超过最高允许的 1.0 mg/L. 环保局要求该企业立即整改，在 15 天以内（含 15 天）排污达标. 整改过程中，所排污水中硫化物的浓度 y(mg/L) 与时间 x(天) 的变化规律如图所示，其中线段 AB 表示前 3 天的变化规律，从第 3 天起，所排污水中硫化物的浓度 y 与时间 x 成反比例关系.

（1）求整改过程中硫化物的浓度 y 与时间 x 之间的函数关系式.

（2）该企业所排污水中硫化物的浓度能否在 15 天以内不超过最高允许的 1.0 mg/L？为什么？



（第 3 题）

4. 某网店销售某款童装，每件售价 60 元，每星期可卖 300 件. 为了促销，该店决定降价销售，市场调查反映每降价 1 元，每星期可多卖 30 件. 已知该款童装每件成本价为 40 元. 设该款童装每件售价为 x 元，每星期的销售量为 y 件.

（1）求 y 与 x 之间的函数关系式.

（2）当每件售价定为多少元时，每星期的销售利润最大？最大利润是多少？

（3）若该网店每星期想要获得不低于 6 480 元的利润，每星期至少要销售该款童装多少件？

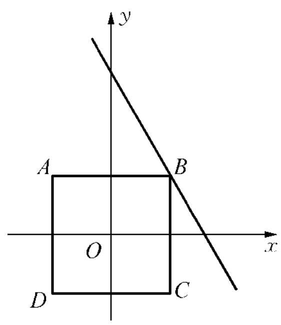
习题五

1. 填空题

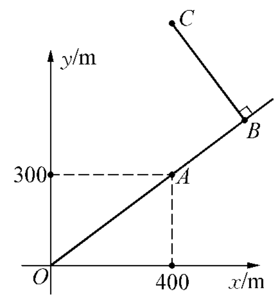
(1) 点$(-2, 1)$在第________象限,它关于x轴的对称点在第________象限.

(2) 若反比例函数$y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$的图像经过点$(1, -3)$,则一次函数$y=kx-k$的图像经过第________象限.

(3) 如图,在平面直角坐标系中,正方形$ABCD$的对称中心与原点O重合,并且顶点A的坐标为$(-1, 1)$,顶点B在第一象限.若点B在直线$y=kx+3$上,则k的值为________.



(第1(3)题)



(第1(4)题)

(4) 如图所示是根据某公园的平面示意图建立的平面直角坐标系,公园的入口位于坐标原点O,古塔位于点$A(400, 300)$,从古塔出发沿射线OA方向前行300 m是盆景园B,从盆景园B向左转90°后直行400 m到达梅花阁C,则点C的坐标是________.

(5) 一次函数$y=\frac{4}{3}x+4$的图像分别交x轴、y轴于A,B两点,在x轴上取一点C,使$\triangle ABC$为等腰三角形,则这样的点C最多有________个.

(6) 已知平面直角坐标系内有四个点$O(0, 0)$,$A(3, 0)$,$B(1, 1)$,$C(x, 1)$,若以O,A,B,C为顶点的四边形是平行四边形,则$x=$________.

(7) 已知实数x,y满足$x^2+3x+y-3=0$,则$x+y$的最大值为________.

2. 选择题

(1) 坐标平面上,在第二象限内有一点P,点P到x轴的距离是4,到y轴的距离是5,则点P的坐标为 (　　)

A. $(-5, 4)$　　B. $(-4, 5)$

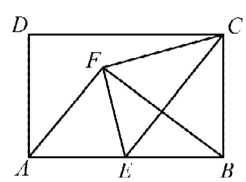
C. $(4, 5)$　　D. $(5, -4)$

(2) 若式子$\frac{\sqrt{a+2}}{a}$有意义,则a的取值范围是 (　　)

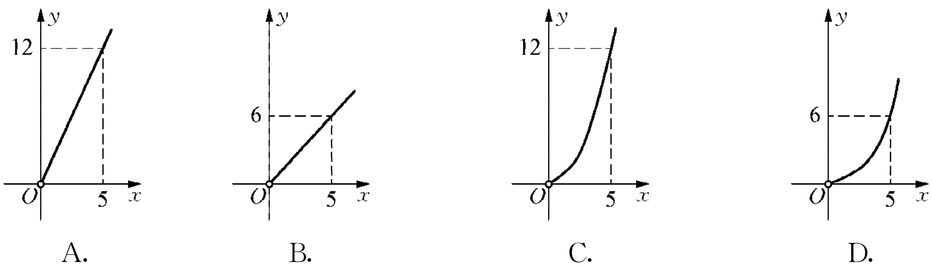
A. $a\neq 0$　　B. $a>-2$且$a\neq 0$

C. $a>-2$或$a\neq 0$　　D. $a\geqslant -2$且$a\neq 0$

(3) 如图,在矩形$ABCD$中,E是AB的中点,将$\triangle BCE$沿CE翻折,点B落在点F处,$\tan\angle DCE=\frac{4}{3}$.设$AB=x$,$\triangle ABF$的面积为$y$,则$y$与$x$的函数图像大致为 (　　)



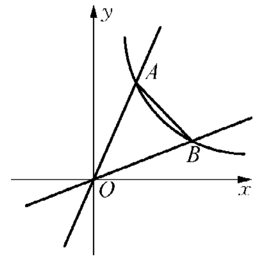
(第2(3)题)



（4）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}$（$x>0$）的图像与正比例函数 $y=kx$，$y=\dfrac{x}{k}$（$k>1$）的图像分别交于点 A，B. 若 $\angle AOB=45°$，则 $\triangle AOB$ 的面积为（　　）

A. 2　　　　B. 3

C. 4　　　　D. 5

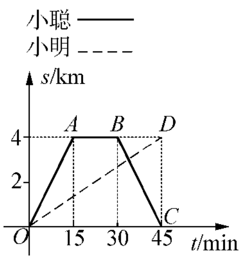

（第 2(4) 题）

3. 小聪和小明沿同一条路同时从学校出发到宁波天一阁查阅资料，学校到天一阁的路程是 4 km，小聪骑自行车，小明步行. 当小聪从原路回到学校时，小明刚好到达天一阁，图中折线 $O-A-B-C$ 和线段 OD 分别表示两人离学校的距离 s(km)与所经过的时间 t(min)之间的函数关系. 请根据图像回答下列问题.

（1）小聪在天一阁查阅资料的时间为________min，小聪返回学校的速度为________km/min.

（2）请求出小明离学校的距离 s(km)与所经过的时间 t(min)之间的函数关系.

（3）当小聪与小明迎面相遇时，他们离学校的路程是多少千米？



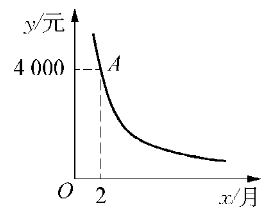
（第 3 题）

4. 李先生参加了新月电脑公司推出的分期付款购买电脑活动，他购买的电脑价格为 1.2 万元，交了首付之后每月付款 y 元，用 x 个月结清余款. y 与 x 的函数关系如图所示，试根据图像所提供的信息回答下列问题.

（1）确定 y 与 x 之间的函数关系式，并求出首付款的数目.

（2）李先生若用 4 个月结清余款，每月应付多少元？

（3）如果打算每月付款不超过 500 元，李先生至少用几个月才能结清余款？



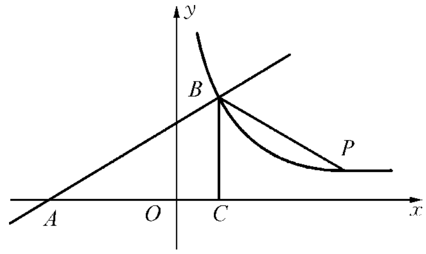
（第 4 题）

5. 某蓝莓种植生产基地产销两旺，采摘的蓝莓部分加工销售，部分直接销售，且当天都能销售完，直接销售是 40 元/kg，加工销售是 130 元/kg(不计损耗). 已知基地雇佣 20 名工人，每名工人只能参与采摘和加工中的一项工作，每人每天可以采摘 70 kg 或加工 35 kg，设安排 x 名工人采摘蓝莓，剩下的工人加工蓝莓.

（1）若基地一天的总销售收入为 y 元，求 y 与 x 之间的函数关系式；

（2）试求如何分配工人，才能使一天的销售收入最大，并求出最大值.

6. 如图，一次函数 $y=kx+b$ 的图像与 x 轴交于点 A，与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ $(x>0)$ 的图像交于点 $B(2,n)$，过点 B 作 $BC\perp x$ 轴于点 C，$P(3n-4,1)$ 是该反比例函数图像上的一点，且 $\angle PBC=\angle ABC$，求反比例函数和一次函数的表达式.

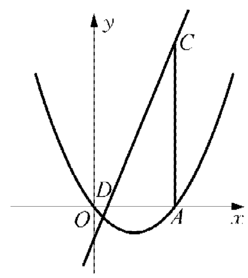


（第 6 题）

7. 如图，抛物线 $y=ax^2-\frac{3}{2}x+c$ 经过原点 O 与 $A(6,0)$ 两点，过点 A 作 $AC\perp x$ 轴，交直线 $y=2x-2$ 于点 C，且直线 $y=2x-2$ 与 x 轴交于点 D.

(1) 求抛物线的表达式，并求出点 C 和点 D 的坐标；

(2) 求点 A 关于直线 $y=2x-2$ 的对称点 A' 的坐标，判断点 A' 是否在抛物线上，并说明理由.



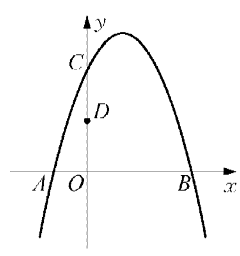
（第 7 题）

8. 如图，二次函数 $y=-x^2+bx+3$ 的图像与 x 轴交于点 A，B，与 y 轴交于点 C，点 A 的坐标为 $(-1,0)$，点 D 为 OC 的中点，点 P 在抛物线上.

(1) $b=$________.

(2) 若点 P 在第一象限，过点 P 作 $PH\perp x$ 轴，垂足为 H，PH 与 BC，BD 分别交于点 M，N. 是否存在这样的点 P，使得 $PM=MN=NH$？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

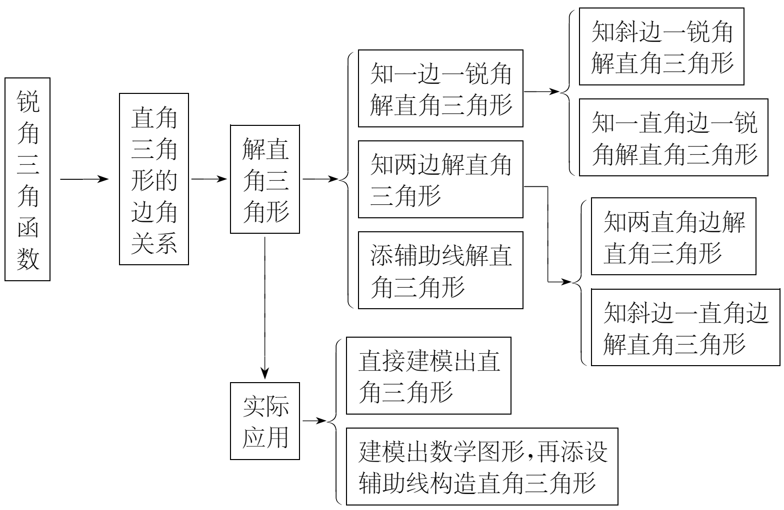
(3) 若点 P 的横坐标小于 3，过点 P 作 $PQ\perp BD$，垂足为 Q，直线 PQ 与 x 轴交于点 R，且 $S_{\triangle PQB}=2S_{\triangle QRB}$，求点 P 的坐标.



（第 8 题）

第六单元　锐角三角函数

知识脉络



知识要点

(一) 测量

测量是最基本的数学活动,要学会利用解直角三角形的知识和相似三角形的知识设计测量方案,通过测量和计算,解决一些不可直接测量的问题(如物体的高度等).

(二) 勾股定理及其逆定理

1. 勾股定理　直角三角形中,两直角边的平方和等于斜边的平方.

即如果直角三角形的两条直角边分别为 a, b,斜边为 c,那么有 $a^2+b^2=c^2$.

2. 勾股定理的逆定理　如果三角形的一条边的平方等于另外两条边的平方和,那么这个三角形是直角三角形.

(三) 锐角三角函数

1. 锐角三角函数的定义

如图 6-1,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$所对的边分别为a, b, c,则 $\sin A=\dfrac{a}{c}$, $\cos A=\dfrac{b}{c}$, $\tan A=\dfrac{a}{b}$.

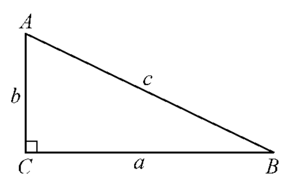


图 6-1

2. 锐角 α 的三角函数值的范围:

$$0<\sin\alpha<1,\ 0<\cos\alpha<1,\ \tan\alpha>0.$$

3. 特殊角的三角函数值

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

4. 在直角三角形中,如果一个锐角等于 30°,那么它所对的直角边等于斜边的一半.

5. 用计算器求锐角三角函数值时,应先了解计算器的使用功能,根据计算器的说明按步骤求已知锐角的三角函数值和由三角函数值求出对应的锐角.

6. 斜坡的坡度=坡角的正切值.

(四) 解直角三角形

1. 解直角三角形的依据

(1)三边之间的关系;(2)两锐角之间的关系;(3)边角之间的关系.

2. 解决实际问题的关键在于建立数学模型,要善于把实际问题的数量关系转化为解直角三角形的问题. 在解直角三角形的过程中,常会遇到近似计算,应根据题目要求的精确度确定答案.

复习导引

§6.1 锐角三角函数

【基础训练】

1. 在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$, $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $\angle A=$ ________.

2. 在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,根据下列条件填空:

(1) $a=2$, $b=1$,则 $\sin A=$ ________;(2) $a=4$, $\tan A=\frac{3}{2}$,则 $b=$ ________;

(3) $3a=\sqrt{3}b$,则 $\sin A=$ ________.

3. 化简 $\sqrt{(\sin 60°-1)^2}+|1-\tan 30°|$ 的结果是________.

4. 等腰三角形的底边为 10 cm,周长为 36 cm,则其底角的正切值是________.

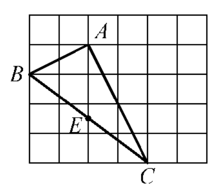
5. 如图,在边长为 1 的小正方形组成的网格中,△ABC 的三个顶点均在格点上.

(1) 画线段 $AD \parallel BC$ 且使 $AD=BC$,连接 CD;

(2) 线段 AC 的长为________,CD 的长为________,AD 的长为________;

(3) △ACD 为________三角形,四边形 $ABCD$ 的面积为________;

(4) 若 E 为 BC 的中点,则 $\tan\angle CAE$ 的值是________.



(第 5 题)

【典例解析】

例 1 计算:$\sin 30°+\sin^2 45°-\frac{1}{3}\tan^2 60°$.

解 原式 $=\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\times(\sqrt{3})^2=0$.

例 2　如图 6－2，CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，$AC=5$，$BC=12$. 求 $\tan A$，$\sin B$，$\cos\angle ACD$.

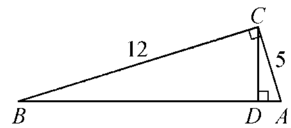


图 6－2

解　在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{12}{5}$.

斜边 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，

所以 $\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{5}{13}$.

因为 CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，所以 $CD=\dfrac{AC\cdot BC}{AB}=\dfrac{60}{13}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\cos\angle ACD=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{12}{13}$.

说明　本题还可以根据 $\angle ACD=\angle B$，直接求出 $\cos\angle ACD$.

例 3　如图 6－3，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 上的高，$\tan B=\cos\angle DAC$.

(1) 求证：$BD=AC$；

(2) 若 $\sin C=\dfrac{12}{13}$，$BC=12$，求 AD 的长.

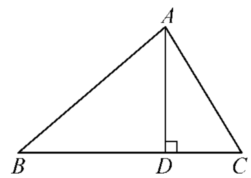


图 6－3

解　(1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\tan B=\dfrac{AD}{BD}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\cos\angle DAC=\dfrac{AD}{AC}$.

因为 $\tan B=\cos\angle DAC$，所以$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AD}{AC}$，所以 $BD=AC$.

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\sin C=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{12}{13}$.

设 $AD=12x$，则 $AC=13x$，

则 $CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{(13x)^2-(12x)^2}=5x$.

因为 $BD=AC=13x$，$BC=12$，所以 $5x+13x=12$，所以 $x=\dfrac{2}{3}$.

故 $AD=12\times\dfrac{2}{3}=8$.

例 4　如图 6－4，在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=6$，D 是边 AC 上一点. 若 $\tan\angle DBA=\dfrac{1}{5}$，求 AD 的长.

解　如图，过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E.

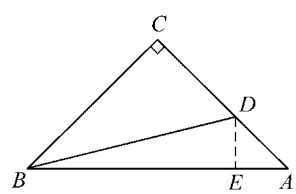


图 6－4

因为 $\tan\angle DBA=\dfrac{1}{5}=\dfrac{DE}{BE}$，所以 $BE=5DE$.

因为 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

所以 $\angle A=45°$，从而 $AE=DE$，所以 $BE=5AE$.

又因为 $AC=6$，所以 $AB=6\sqrt{2}$，

从而有 $AE+BE=AE+5AE=6\sqrt{2}$，

所以 $AE=\sqrt{2}$.

在等腰直角三角形 ADE 中，由勾股定理，得 $AD=\sqrt{2}AE=2$.

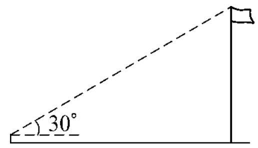
说明　本题考查等腰直角三角形的性质及解直角三角形. 解题的关键是作辅助线构造直角三角形，运用三角函数的定义建立关系式，然后求解.

【巩固练习】

1. 填空题

(1) 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$, $\sin A=\frac{3}{5}$,则 $\tan A=$________.

(2) 如图,升国旗时,某同学站在离旗杆 24 m 处行注目礼,当国旗升到旗杆顶端时,这位同学的视线的仰角为 30°. 若双眼离地面 1.5 m,则旗杆高度为________m.(用含根号的式子表示)

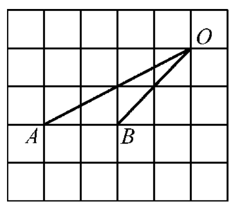


(第 1(2) 题)

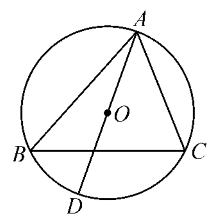
2. 选择题

(1) 如图,在边长为 1 的小正方形组成的网格中,点 A, B, O 都在格点上,则$\angle AOB$ 的正弦值是 (　　)

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$



(第 2(1) 题)



(第 2(2) 题)

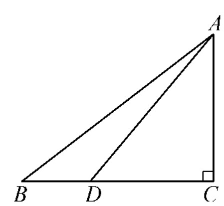
(2) 如图,$\odot O$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆,AD 是$\odot O$ 的直径. 若$\odot O$ 的半径为$\frac{3}{2}$, $AC=2$,则 $\sin B$ 的值是 (　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

3. 计算:

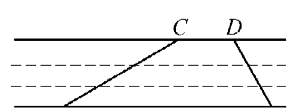
(1) $\sqrt{2}(2\cos 45^\circ-\sin 60^\circ)+\frac{\sqrt{24}}{4}$;　　(2) $|\sin 60^\circ-1|+\sqrt{(2-\tan 30^\circ)^2}$.

4. 如图,在$\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$,点 D 在 BC 上,$BD=4$, $AD=BC$, $\cos\angle ADC=\frac{3}{5}$. (1) 求 DC 的长; (2) 求 $\sin B$ 的值.



(第 4 题)

5. 京杭大运河是世界历史文化遗产. 综合实践活动小组为了测出某段运河的河宽(岸沿是平行的),在岸边分别选定了点 A, B 和点 C, D(如图),先用卷尺量得 $AB=160$ m, $CD=40$ m,再用测角仪测得 $\angle CAB=30^\circ$, $\angle DBA=60^\circ$,求该段运河的河宽.



(第 5 题)

§6.2　解直角三角形

【基础训练】

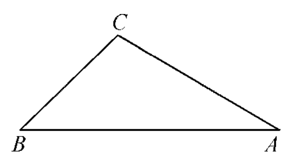
1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，根据已知量，填出下表中的未知量：

a	b	c	$\angle A$	$\angle B$
$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{15}$			
	6		30°	
		10		45°

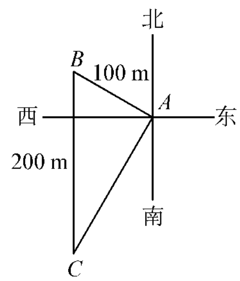
2. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，$\sin B=\dfrac{5}{13}$，$BC=24$，则 $AC=$________.

3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=30^{\circ}$，$\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$AC=2\sqrt{3}$，则 $AB=$________.

4. 在离大楼 15 m 的地面上看大楼顶部仰角为 65°，则大楼高约________m.（精确到 1 m；参考数据：$\sin 65^{\circ}\approx 0.9$，$\cos 65^{\circ}\approx 0.4$，$\tan 65^{\circ}\approx 2.1$）



（第 3 题）



（第 5 题）

5. 如图，王英同学从 A 地沿北偏西 60°方向走 100 m 到 B 地，再从 B 地向正南方向走 200 m 到 C 地，此时王英同学离 A 地________m.

【典例解析】

例 1　某段笔直的限速公路上，规定汽车的最高行驶速度不能超过 60 km/h$\left(\text{即}\dfrac{50}{3}\text{ m/s}\right)$. 交通管理部门在离该公路 100 m 处设置了一速度监测点 A，在如图 6－5 所示的坐标系中，点 A 位于 y 轴上，测速路段 BC 在 x 轴上，点 B 在点 A 的北偏西 60°方向上，点 C 在点 A 的北偏东 45°方向上.

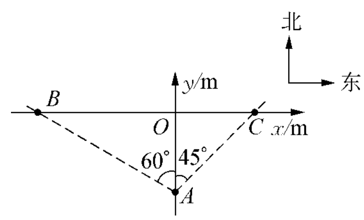


图 6－5

（1）请在图 6－5 中画出表示北偏东 45°方向的射线 AC，并标出点 C 的位置；

（2）点 B 的坐标为________，点 C 的坐标为________；

（3）一辆汽车从点 B 行驶到点 C 所用的时间为 15 s，请通过计算，判断该汽车在限速公路上是否超速行驶.（$\sqrt{3}$取 1.7）

解　（1）如图 6－5.

（2）$(-100\sqrt{3},0)$，$(100,0)$.

（3）$BC=BO+OC\approx 270$ m，$270\div 15=18$，

因为 $18>\dfrac{50}{3}$，所以这辆车在限速公路上超速行驶了.

例 2 图 6－6①②分别是某种型号跑步机的实物图与示意图，已知踏板 CD 长为 1.6 m，CD 与地面 DE 的夹角$\angle CDE$ 为 12°，支架 AC 长为 0.8 m，$\angle ACD$ 为 80°，求跑步机手柄的一端 A 的高度 h.

（精确到 0.1 m；参考数据：$\sin 12^\circ = \cos 78^\circ \approx 0.21$，$\sin 68^\circ = \cos 22^\circ \approx 0.93$，$\tan 68^\circ \approx 2.48$）

① ②

图 6－6

分析 过点 C 作 $FG \perp AB$ 于点 F，交 DE 于点 G. 在 Rt$\triangle ACF$ 中，根据三角函数可求 CF. 在 Rt$\triangle CDG$ 中，根据三角函数可求 CG. 再根据 $FG = FC + CG$ 即可求解.

解 如图 6－7，过点 C 作 $FG \perp AB$ 于点 F，交 DE 于点 G.

因为 CD 与地面 DE 的夹角$\angle CDE$ 为 12°，$\angle ACD$ 为 80°，

所以 $\angle ACF = 90^\circ + 12^\circ - 80^\circ = 22^\circ$，

所以 $\angle CAF = 68^\circ$.

在 Rt$\triangle ACF$ 中，$CF = AC \cdot \sin\angle CAF \approx 0.744$ m，

在 Rt$\triangle CDG$ 中，$CG = CD \cdot \sin\angle CDE \approx 0.336$ m.

所以 $FG = FC + CG \approx 1.1$ m.

答：跑步机手柄的一端 A 的高度 h 约为 1.1 m.

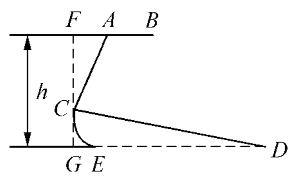


图 6－7

说明 本题考查了解直角三角形的应用，主要是三角函数的基本概念及运算，关键是用数学知识解决实际问题.

例 3 如图 6－8，一艘轮船自西向东航行，在 A 处测得北偏东 68.7°方向有一座小岛 C，继续向东航行 60 n mile(海里)到达 B 处，测得小岛 C 此时在轮船的北偏东 26.5°方向上. 之后，轮船继续向东航行多少海里距离小岛 C 最近？

（参考数据：$\sin 21.3^\circ \approx \dfrac{9}{25}$，$\tan 21.3^\circ \approx \dfrac{2}{5}$，$\sin 63.5^\circ \approx \dfrac{9}{10}$，$\tan 63.5^\circ \approx 2$）

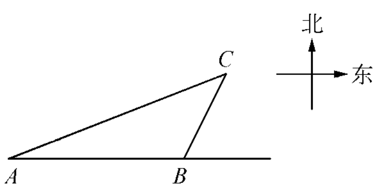


图 6－8

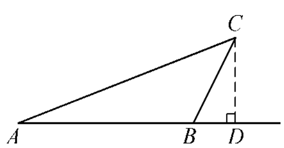


图 6－9

分析 找出距离小岛 C 的最近距离，通过两个直角三角形解答.

解 如图 6－9，过点 C 作 $CD \perp AB$，交 AB 的延长线于点 D，得到 Rt$\triangle ACD$ 与 Rt$\triangle BCD$.

设 $BD = x$ n mile，

在 Rt$\triangle BCD$ 中，$\tan\angle CBD = \dfrac{CD}{BD}$，而 $\angle CBD = 63.5^\circ$，所以 $CD = x \cdot \tan 63.5^\circ$.

在 Rt$\triangle ACD$ 中，$AD = AB + BD = (60 + x)$ n mile，$\tan A = \dfrac{CD}{AD}$，而 $\angle A = 21.3^\circ$，

所以 $CD = (60 + x) \cdot \tan 21.3^\circ$.

所以 $x \cdot \tan 63.5° = (60+x) \cdot \tan 21.3°$，即 $2x = \frac{2}{5}(60+x)$.

解得 $x=15$.

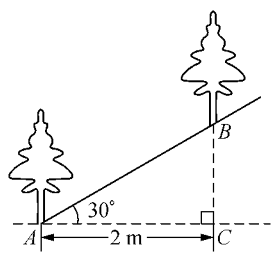
答：轮船继续向东航行 15 n mile 距离小岛 C 最近.

说明　本题涉及方位角的问题，引导学生画图是本题的要点，找到两个直角三角形的公共边，利用方程思想是解决此类问题的关键，在复习中应及时归纳总结由两个直角三角形构成的各种情形.

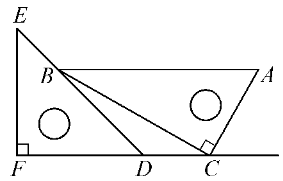
【巩固练习】

1. 等边三角形的边长为 a，则一边上的高为________，面积等于________.

2. 如图，沿倾斜角 30°的山坡植树，要求相邻两棵树的水平距离 AC 为 2 m，那么相邻两棵树的斜坡距离 AB 为________m.（答案保留根号）



（第 2 题）



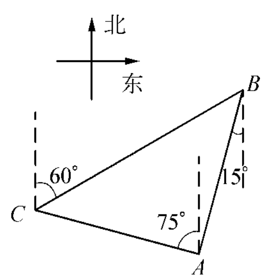
（第 3 题）

3. 一副直角三角板如图所示放置，点 C 在 FD 的延长线上，$AB \parallel CF$，$\angle F = \angle ACB = 90°$，$\angle E = 45°$，$\angle A = 60°$，$AC = 10$，则 $CD =$ ________.

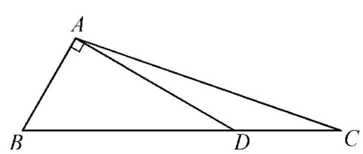
4. 如图，在某监测点 B 处发现一艘正在作业的渔船在南偏西 15°方向的 A 处，若渔船沿北偏西 75°方向以 40 n mile/h 的速度航行，航行半小时后到达 C 处，在 C 处观测到 B 在 C 的北偏东 60°方向上，则 B，C 之间的距离为　（　　）

A. $10\sqrt{3}$ n mile　　B. 20 n mile

C. $20\sqrt{2}$ n mile　　D. 30 n mile



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在 Rt$\triangle BAD$ 中，延长斜边 BD 至点 C，使 $DC = \frac{1}{2}BD$，连接 AC. 若 $\tan B = \frac{5}{3}$，则 $\tan\angle CAD$ 的值为　（　　）

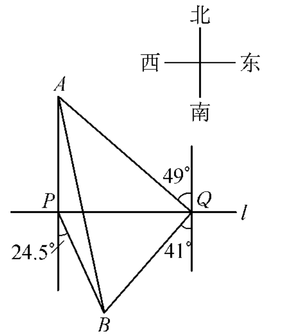
A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{3}$

6. 如图，自来水厂 A 和村庄 B 在小河 l 的两侧，现要在 A，B 间铺设一条输水管道，为了搞好工程预算，需测算出 A，B 间的距离. 一小船在点 P 处测得 A 在正北方向，B 位于南偏东 24.5°方向，前行 1 200 m 到达点 Q 处，测得 A 位于北偏西 49°方向，B 位于南偏西 41°方向.

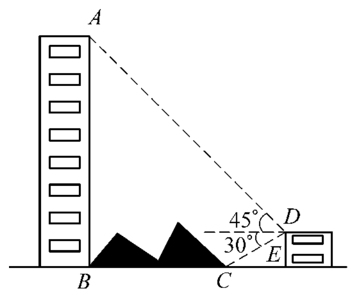
(1) 线段 BQ 与 PQ 是否相等？请说明理由.

(2) 求 A，B 间的距离.(参考数据：$\cos 41^\circ \approx 0.75$)



（第 6 题）

7. 如图，大楼 AB 的右侧有一障碍物，在障碍物的旁边有一幢小楼 DE，在小楼的顶端 D 处测得障碍物边缘点 C 的俯角为 30°，测得大楼顶端 A 的仰角为 45°(点 B，C，E 在同一水平直线上). 已知 $AB=80$ m，$DE=10$ m，求障碍物 B，C 两点间的距离.(精确到 0.1 m；参考数据：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$)

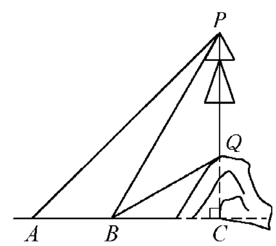


（第 7 题）

8. 如图，为了测量山坡上一棵树 PQ 的高度，小明在点 A 处利用测角仪测得树顶 P 的仰角为 45°，然后他沿着正对树 PQ 的方向前进 10 m 到达点 B 处，此时测得树顶 P 和树底 Q 的仰角分别是 60° 和 30°，设 $PQ\perp AB$，垂足为 C.

(1) 求 $\angle BPQ$ 的度数；

(2) 求树 PQ 的高度.(精确到 0.1 m，$\sqrt{3}\approx 1.73$)



（第 8 题）

习题六

1. 填空题

(1) 在 Rt△ABC 中，$\angle B=90^\circ$，$AB=6$，$BC=8$，则 $\sin A=$ ________.

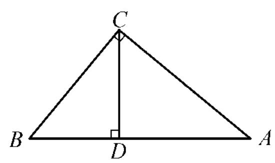
(2) 在 Rt△ABC 中，$\angle B=90^\circ$，边 AC 上的中线 $BD=5$，$AB=8$，则 $\tan A=$ ________.

(3) 等腰三角形中，腰长为 5 cm，底边长为 6 cm，则它的底角的余弦值是________.

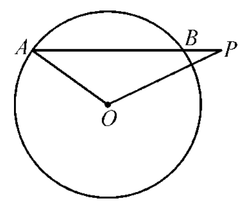
(4) 菱形的两条对角线长分别为 $2\sqrt{3}$ 和 6，则菱形较小的内角的度数为________.

(5) 小明沿着坡度 $i=1:\sqrt{3}$ 的坡面向下走了 50 m，那么他的位置沿垂直方向下降了________m.

(6) 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$BC=4$，$AC=5$，$CD\perp AB$，则 $\sin\angle ACD$ 的值是________，$\tan\angle BCD$ 的值是________.



（第 1(6)题）



（第 1(7)题）

(7) 如图，已知⊙O 的半径为 5 cm，弦 AB 的长为 8 cm，P 是 AB 延长线上一点，$BP=2$ cm，则 $\tan\angle OPA=$ ________.

2. 选择题

(1) 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\tan A=\dfrac{4}{3}$，$BC=8$，则 AC 的长度为　（　　）

A. 6　　B. 10　　C. $\dfrac{32}{3}$　　D. 12

(2) 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，如果 $\tan A=\dfrac{5}{12}$，那么 $\sin B$ 的值为　（　　）

A. $\dfrac{5}{13}$　　B. $\dfrac{12}{13}$　　C. $\dfrac{5}{12}$　　D. $\dfrac{12}{5}$

(3) 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，当已知$\angle A$ 和 a 时，求 c，应选择的关系式是　（　　）

A. $c=\dfrac{a}{\sin A}$　　B. $c=\dfrac{a}{\cos A}$

C. $c=a\cdot\tan A$　　D. $c=a\cdot\sin A$

(4) 在△ABC 中，若 $\tan A=1$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，你认为最确切的判断是　（　　）

A. △ABC 是等腰三角形

B. △ABC 是等腰直角三角形

C. △ABC 是直角三角形

D. △ABC 是一般锐角三角形

(5) 身高相同的三个小朋友甲、乙、丙放风筝，他们放出的线长分别为 300 m、250 m、200 m，线与地面所成的角度分别为 30°、45°、60°(假设风筝线是拉直的)，则三人所放的风筝　（　　）

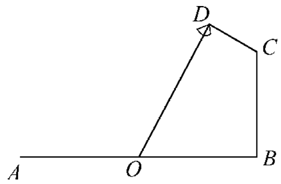
A. 甲的最高　　B. 乙的最低

C. 丙的最低　　D. 乙的最高

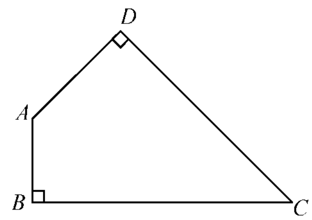
(6) 如图,要在宽为 22 m 的大道两边安装路灯,路灯的灯臂 CD 长 2 m,且与灯柱 BC 成 120°角,路灯采用圆锥形灯罩,灯罩的轴线 DO 与灯臂 CD 垂直. 当灯罩的轴线 DO 通过公路路面的中心线时照明效果最佳,此时路灯的灯柱 BC 高度应该设计为 ( )

A. $(11-2\sqrt{2})$m　　B. $(11\sqrt{3}-2\sqrt{2})$m

C. $(11-2\sqrt{3})$m　　D. $(11\sqrt{3}-4)$m



(第 2(6)题)



(第 2(7)题)

(7) 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A=135^\circ$, $\angle B=\angle D=90^\circ$, $BC=2\sqrt{3}$, $AD=2$,则四边形 $ABCD$ 的面积是 ( )

A. $4\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. 4　　D. 6

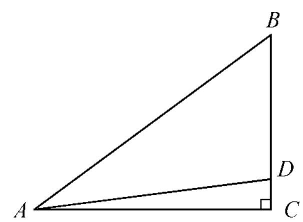
3. 计算:

(1) $\sqrt{3}\cos 30^\circ+\sqrt{2}\sin 45^\circ$;　　(2) $6\tan^2 30^\circ-\sqrt{3}\sin 60^\circ-2\cos 45^\circ$.

4. 如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\sin B=\dfrac{4}{5}$, $AC=8$, D 为边 BC 上一点,并且 $CD=2$.

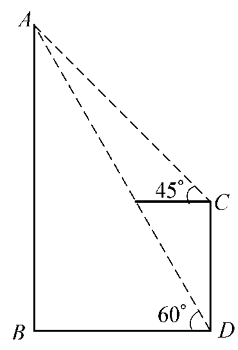
(1) 求 BD 的值;

(2) 求 $\cos\angle DAC$ 的值.



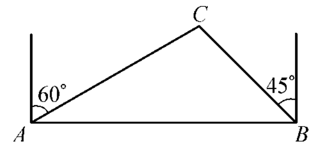
(第 4 题)

5. 如图,塔 AB 和楼 CD 的水平距离为 80 m,从楼顶 C 处及楼底 D 处测得塔顶 A 的仰角分别为 45° 和 60°. 试求塔高和楼高.



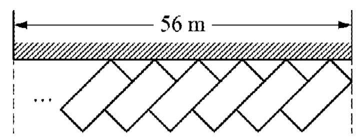
(第 5 题)

6. 某省将在相距 2 km 的 A，B 两地之间修一条笔直公路(即线段 AB)，经测量，在 A 地的北偏东 $60°$方向、B 地的北偏西 $45°$方向的 C 处有一个半径为 0.7 km 的公园. 计划修筑的这条公路是否会穿过公园？为什么？



(第 6 题)

7. 为解决停车难的问题，在如图所示的一段长 56 m 的路段开辟停车位，每个车位是长 5 m、宽 2.2 m 的矩形，矩形的边与路的边缘成 $45°$角，那么这个路段最多可以划出多少个这样的停车位？($\sqrt{2}\approx 1.4$)



(第 7 题)

8.【问题呈现】

如图①，在边长为 1 的正方形网格中，连接格点 D，N 和 E，C，DN 和 EC 相交于点 P，求 $\tan\angle CPN$ 的值.

【方法归纳】

求一个锐角的三角函数值，我们往往需要找出(或构造出)一个直角三角形. 观察发现问题中 $\angle CPN$ 不在直角三角形中，我们常常利用网格画平行线等方法解决此类问题，比如连接格点 M，N，可得 $MN \parallel EC$，则 $\angle DNM=\angle CPN$，连接 DM，那么$\angle CPN$ 就变换到 $\mathrm{Rt}\triangle DMN$ 中.

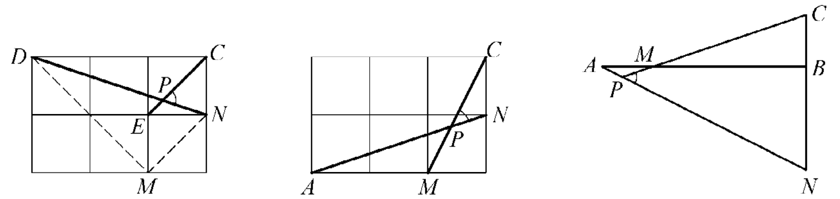
【问题解决】

(1) 直接写出图①中 $\tan\angle CPN$ 的值为________；

(2) 如图②，在边长为 1 的正方形网格中，AN 与 CM 相交于点 P，求 $\cos\angle CPN$ 的值.

【思维拓展】

(3) 如图③，$AB\perp BC$，$AB=4BC$，点 M 在 AB 上，且 $AM=BC$，延长 CB 到点 N，使 $BN=2BC$，连接 AN，交 CM 的延长线于点 P，用上述方法构造网格求$\angle CPN$ 的度数.



①　　②　　③

(第 8 题)

参考答案

第一单元　实数与整式

§1.1

【基础训练】

1. 3，3，$-\frac{1}{3}$.　**2.** 4.　**3.** π、$\sqrt{24}$、0.121 121 112….　**4.** 3.　**5.** <，>，=.　**6.** 1.12×10^{6}.

【巩固练习】

1.（1）-4，5.　（2）3.　（3）7.1×10^{-7}.　（4）$\frac{299}{201}$.　**2.**（1）A.　（2）D.　**3.**（1）-1.　（2）-3.　（3）12.　（4）-1.　**4.** 令 $S=1+3+3^2+\cdots+3^{2\,020}$　①，①×3，得 $3S=3+3^2+3^3+\cdots+3^{2\,021}$　②. ②−①，得 $2S=3^{2\,021}-1$，所以 $S=\frac{3^{2\,021}-1}{2}$，即 $1+3+3^2+\cdots+3^{2\,020}=\frac{3^{2\,021}-1}{2}$.

§1.2

【基础训练】

1. 4，x、a^2b^3，x.　**2.** -1.　**3.** 3.　**4.** -1.　**5.** $1.08a$.

【巩固练习】

1.（1）x^2+1.　（2）4，2.　（3）3.　**2.**（1）C.　（2）D.　（3）A.　**3.**（1）$-7x^2+11y^2$.　（2）$a-1$，4.　**4.**（1）5，9，13，17，21.　（2）$4n+1$.

§1.3

【基础训练】

1. a^8，a^2b^2，m.　**2.** $4x^4y^2$.　**3.** $4a^2-b^2$.　**4.** $-6a-3$.

【巩固练习】

1.（1）a^2-a，$\frac{1}{4}a^2b^4$，$12a^3b^3c-8a^3bc$.　（2）$4-4x+x^2$，x^2-1.　**2.**（1）D.　（2）A.　（3）B.　（4）C.　**3.**（1）$4x$.　（2）$5x^6+3x^5$.　（3）3^{2n+1}.　（4）$-5x^2-12xy+10y^2$.　（5）$2x^4-2y^4$.　**4.** $5b^2+4ab$，12.　**5.**（1）$\frac{5^2-4^2-1}{2}=4$.　（2）$\frac{(n+1)^2-n^2-1}{2}=n$，因为$\frac{(n+1)^2-n^2-1}{2}=\frac{n^2+2n+1-n^2-1}{2}=\frac{2n}{2}=n$，所以猜想的等式是正确的.

习题一

1.（1）$-a$.　（2）2 005.　（3）22，42.　（4）$x^2<x<\frac{1}{x}$.　（5）55.　**2.**（1）C.　（2）D.　（3）C.　（4）C.　（5）D.　（6）B.　**3.**（1）5.　（2）-2.　**4.**（1）a^4-16b^4.　（2）$-2x^2+x$，0.　（3）$3a+3$，2.　**5.**（1）3 倍.　（2）$5(n^2+2)$，是 5 的倍数.　（3）设中间的数为 n，$(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=3n^2+2$，余数为 2.

第二单元　因式分解、分式、数的开方

§2.1

【基础训练】

1. $1-2xy+3x^2y^2$.　**2.** $-4ab$.　**3.**（1）$3a(a-3b)$.　（2）$(5x+4y)(5x-4y)$.　（3）$(x+2y)^2$.　**4.** A.

【巩固练习】

1.（1）±1.　（2）1，-1.　**2.**（1）C.　（2）C.　**3.**（1）$(x-y)(3x+2y)$.　（2）$(a+2)^2$.　（3）$(x-y)(x-1)(x+1)$.　（4）$(ab-2)^2(ab+2)^2$.　**4.**（1）51.4.　（2）13 600.　**5.** -18.　**6.** 已知 $a^2+1=\frac{1}{a}$，$b^2+1=\frac{1}{b}$，两式相减可得 $a^2-b^2=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$，$(a+b)(a-b)=\frac{b-a}{ab}$，$[ab(a+b)+1](a-b)=0$. 又因为 $a>0$，$b>0$，所以 $a-b=0$，即 $a=b$，所以 $2\,015^{|a-b|}=2\,015^0=1$.

§ 2. 2

【基础训练】

1. $\frac{b}{2a}$、$-\frac{2}{3x}$、$\frac{2}{3-x}$. **2.** (1) $x=-1$. (2) $x=\pm2$. **3.** 1. **4.** -2.

【巩固练习】

1. (1) 2. (2) -1. (3) ① 1；② $x+1$. (4) $\frac{2sb}{a^2-b^2}$. **2.** (1) A. (2) D. **3.** (1) $\frac{1}{m-2}$. (2) $\frac{x^2+y^2}{x+y}$. (3) $\frac{a-1}{a+1}$. **4.** (1) $\frac{1}{3a(a+3)}$，$\frac{1}{3}$. (2) 7. (3) $-\frac{1}{7}$. **5.** (1) $\frac{5}{6}$. (2) $\frac{n}{n+1}$. (3) 17.

§ 2. 3

【基础训练】

1. $x\geqslant2$. **2.** ±2，2，-3. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **4.** $1-2x$. **5.** -8. **6.** 2.

【巩固练习】

1. (1) $\sqrt{2}$. (2) $\sqrt{12}$、$\sqrt{48}$. **2.** (1) A. (2) A. **3.** (1) $6\sqrt{2}-6+2\sqrt{3}$. (2) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$. (3) $\frac{11\sqrt{2}}{4}$. (4) $2-4\sqrt{3}$. **4.** 略. **5.** (1) 因为 $x>0$，$4>0$，所以 $2\left(x+\frac{4}{x}\right)\geqslant2\times2\sqrt{4}=8$，当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=\sqrt{4}=2$ 时，$2\left(x+\frac{4}{x}\right)$ 取最小值 8. (2) 由题意得 $\frac{y_2}{y_1}=\frac{x^2+2x+10}{x+1}=\frac{(x+1)^2+9}{x+1}=(x+1)+\frac{9}{x+1}$. 因为 $x>-1$，所以 $x+1>0$，所以 $\frac{y_2}{y_1}=(x+1)+\frac{9}{x+1}\geqslant2\sqrt{9}=6$，当 $x+1=\frac{9}{x+1}$，即 $x=\sqrt{9}-1=2$ 时，$\frac{y_2}{y_1}$ 取最小值 6. (3) 设学校的学生人数为 x 人，生均投入为 y 元，由题意得 $y=\frac{4\,900+10x+0.01x^2}{x}=\frac{x}{100}+\frac{4\,900}{x}+10$. 因为 $x>0$，所以 $y=\frac{x}{100}+\frac{4\,900}{x}+10=\frac{1}{100}\left(x+\frac{490\,000}{x}\right)+10\geqslant\frac{2}{100}\sqrt{490\,000}+10=14+10=24$，当 $x=\frac{490\,000}{x}$，即 $x=700$ 时，y 取最小值 24. 答：当学校的学生人数为 700 时，该校每天生均投入最低，最低费用是 24 元.

习题二

1. (1) $a(a-b)^2$. (2) $-4xy$. (3) 6. (4) 1. (5) 15，$-\sqrt{5x}$. (6) $5\times\sqrt{\frac{5}{24}}=\sqrt{5+\frac{5}{24}}$，$n\times\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$. **2.** (1) C. (2) A. (3) A. (4) B. (5) D. (6) B. **3.** (1) $m(m+2)(m-2)$. (2) $-y(3x-y)^2$. (3) $4(2a+1)(2a-1)(4a^2+1)$. (4) $(2a+b)^2$. **4.** (1) $-\frac{1}{2(m+3)}$. (2) $-2\,016+2\sqrt{2\,017}$. (3) 1. **5.** (1) $\frac{1}{x+1}$，$\frac{1}{4}$. (2) $-\frac{1}{2x-1}$，$\frac{1}{5}$. **6.** (1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$. (2) $\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$. (3) $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** 解法一：不妨设 $a=2$，$b=3$，$c=4$. 而 $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{9}{2}$，所以 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{9}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$. 解法二：不妨设 $a=2$，$b=3$，$c=4$，则 $a^2b^2=2^2\times3^2=36$，$\frac{a^2+b^2-c^2}{2}=\frac{2^2+3^2-4^2}{2}=-\frac{3}{2}$，所以 $S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{36-\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{36-\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{15}}{2}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$.

第三单元　方程(组)及其应用

§ 3. 1

【基础训练】

1. 1. **2.** -7. **3.** $2x-8$. **4.** $\begin{cases}x=\frac{11}{2},\\ y=\frac{5}{2}.\end{cases}$ **5.** 5.

【巩固练习】

1. C. **2.** 1，−1. **3.** 二. **4.** 2. **5.** (1) $x=-3$. (2) $\begin{cases}x=3,\\ y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

§ 3.2

【基础训练】

1. $\neq 2$，2. **2.** $x=3$. **3.** D. **4.** $m>-6$ 且 $m\neq -4$. **5.** −4.

【巩固练习】

1. (1) $x=2$. (2) 3. **2.** (1) C. (2) B. **3.** (1) $x=-\dfrac{2}{3}$. (2) $x=1$ 是原方程的增根,原方程无解.
(3) $x=3$.

§ 3.3

【基础训练】

1. $x=\pm 1$. **2.** −3. **3.** 9. **4.** −3. **5.** −1.

【巩固练习】

1. B. **2.** −2. **3.** $\dfrac{9}{4}$，$\dfrac{3}{2}$；$\dfrac{25}{8}$，$\dfrac{5}{4}$. **4.** 2，−3. **5.** $x^2-4x-21=0$. **6.** (1) $x_1=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$，$x_2=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$.
(2) $x_1=1$，$x_2=\dfrac{2}{3}$. (3) $x_1=-\dfrac{1}{3}$，$x_2=-3$.

§ 3.4

【基础训练】

1. C. **2.** 28. **3.** 2 或 2.5. **4.** 300.

【巩固练习】

1. B. **2.** 本题的答案不唯一.问题:1 辆大车与 1 辆小车一次可以运货多少吨?设 1 辆大车一次运货 x t,1 辆小车一次运货 y t.根据题意,得 $\begin{cases}3x+4y=22,\\ 2x+6y=23,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\ y=2.5,\end{cases}$ 则 $x+y=4+2.5=6.5$.答:1 辆大车与 1 辆小车一次可以运货6.5 t. **3.** (1)设捐款增长率为 x,根据题意,得 $10\,000(1+x)^2=12\,100$,解得 $x_1=0.1$，$x_2=-2.1$(不合题意,舍去).所以 $x=0.1=10\%$.答:捐款增长率为 10%. (2) $12\,100\times(1+0.1)=13\,310$.答:第四天该单位能收到 13 310 元 捐款. **4.** 设购买了 x 件这种服装,根据题意,得 $[80-2(x-10)]x=1\,200$,解得 $x_1=20$，$x_2=30$.当 $x=30$ 时,$80-2(30-10)=40<50$,不合题意,舍去.答:她购买了 20 件这种服装.

§ 3.5

【基础训练】

1. 10. **2.** $\dfrac{120}{35+v}=\dfrac{90}{35-v}$. **3.** 150. **4.** B.

【巩固练习】

1. $\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}y=48,\\ \dfrac{2}{3}x+y=48.\end{cases}$ **2.** $\left(30-\dfrac{t}{2}\right)$. **3.** 设汽车原来的平均速度为 x km/h,根据题意,得 $\dfrac{420}{x}-\dfrac{420}{(1+50\%)x}=2$,解得 $x=70$.经检验,$x=70$ 是所列方程的解,且符合题意.所以汽车原来的平均速度为 70 km/h. **4.** (1) 50. (2) 12.5.

习题三

1. (1) $x_1=3$，$x_2=-1$. (2) $x=1$. (3) 1. (4) $\begin{cases}x+y=40,\\ 10x+8y=370.\end{cases}$ (5) 2 017. (6) −1. (7) −18.

2. (1) D. (2) D. (3) B. (4) A. (5) A. (6) D. **3.** $m=-4$，$x_2=5$. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** (1) ① $x_1=1$，$x_2=-1$；② $x_1=1$，$x_2=-2$；③ $x_1=1$，$x_2=-3$. (2) $x^2+(n-1)x-n=0$；$x_1=1$，$x_2=-n$. (3) 答案不唯一,如有一根为 1. **6.** 7 人,53 元. **7.** (1) 2 s 或 4 s. (2) 不会,理由略. **8.** (1) $\dfrac{60-3x}{2}$. (2) $(50-2x)(60-3x)-$

$x \cdot \frac{60-3x}{2}=2\,430$,解得 $x_1=2$, $x_2=38$(舍去).答:通道宽度为 2 m. **9.** (1) $(90-A)\times\frac{A}{100}$ 元. (2) 50 kW·h.

10. 由题意,得 $200\times(10-6)+(10-x-6)(200+50x)+(4-6)[600-200-(200+50x)]=1\,250$,即$800+(4-x)(200+50x)-2(200-50x)=1\,250$.整理,得 $x^2-2x+1=0$.解得 $x_1=x_2=1$,所以 $10-1=9$.答:第二周每个旅游纪念品的销售价格为 9 元.

第四单元　不等式(组)及其应用

§4.1

【基础训练】

1. (1) $4.5+3p>16$. (2) $7m-\frac{3}{n}\geqslant 0$. **2.** (1) $>$. (2) $>$. (3) $<$. (4) $<$. (5) $>$. (6) $<$.

3. (1) $x>1$. (2) 1、2. **4.** 略. **5.** D. **6.** $x<-3$. **7.** D.

【巩固练习】

1. (1) $x>2$. (2) -1、0. (3) $a\geqslant 1$. **2.** (1) A. (2) B. (3) A. (4) C. (5) C. **3.** (1) $x>-2$. (2) $x>1$.

4. (1) $2<x\leqslant 4$. (2) $-2\leqslant x<1$,最大整数解为 $x=0$. **5.** (1) 当 $m=1$ 时,$\frac{2-x}{2}>\frac{x}{2}-1$,解得 $x<2$.

(2) $(m+1)x<2(m+1)$. 当 $m\neq -1$ 时,不等式有解. ① 当 $m>-1$ 时,解集为 $x<2$;② 当 $m<-1$ 时,解集为 $x>2$.

§4.2

【基础训练】

1. $2<x<8$. **2.** 23. **3.** 6.

【巩固练习】

1. (1) 13. (2) 5. **2.** (1) D. (2) D. (3) C. **3.** 136 名. **4.** ①③. **5.** (1) A:20, B:30. (2) 34.

6. (1) 设 1 个 A 型口罩的售价是a 元,1 个 B 型口罩的售价是b 元.依题意,有 $\begin{cases}a+3b=26,\\3a+2b=29,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=5,\\b=7.\end{cases}$ 所以 1 个 A 型口罩的售价是 5 元,1 个 B 型口罩的售价是 7 元. (2) 设购进 A 型口罩 x 个,则购进 B 型口罩$(50-x)$个.依题意,有 $\begin{cases}x\geqslant 35,\\x\leqslant 3(50-x),\end{cases}$ 解得 $35\leqslant x\leqslant 37.5$.因为 x 为整数,所以 $x=35, 36, 37$.三种方案如下表:

方　案	A 型口罩/个	B 型口罩/个
一	35	15
二	36	14
三	37	13

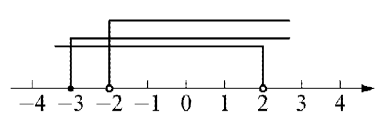
$5\times 35+7\times 15=280$,按方案一购进需要 280 元;$5\times 36+7\times 14=278$,按方案二购进需要 278 元;$5\times 37+7\times 13=276$,按方案三购进需要 276 元.因为 $280>278>276$,所以方案三(购进 A 型口罩 37 个,B 型口罩 13 个)最省钱.

习题四

1. (1) $\frac{5}{3}<x\leqslant 6$. (2) $x<8$. **2.** (1) A. (2) B. (3) A. (4) B. (5) D. (6) D.

3. 根据题意,解不等式组 $\begin{cases}5x+2>3(x-1), & ①\\ \frac{1}{2}x\leqslant 2-\frac{3}{2}x. & ②\end{cases}$ 解不等式①,得 $x>-\frac{5}{2}$,解不等式②,得 $x\leqslant 1$,所以不等式组的解集为 $-\frac{5}{2}<x\leqslant 1$,故满足条件的整数有 -2, -1, 0, 1.

4. (1) $x\geqslant -3$,不等式的性质 3. (2) $x<2$. (3) 把不等式①②③的解集在数轴上表示如图所示. (4) $-2<x<2$. **5.** $-2<x<\frac{5}{4}$. **6.** (1) 甲



(第 4 题)

队在初赛阶段胜 8 场，负 2 场. (2) 乙队至少要胜 6 场. **7.** (1) 设该型号的学生用电脑的单价为 x 万元，教师用笔记本电脑的单价为 y 万元. 依题意，得 $\begin{cases}110x+32y=30.5,\\55x+24y=17.65,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0.19,\\y=0.3.\end{cases}$ 所以该型号的学生用电脑的单价为 0.19 万元，教师用笔记本电脑的单价为 0.3 万元. (2) 设能购进学生用电脑 m 台，则能购进教师用笔记本电脑 $\left(\frac{1}{5}m-90\right)$ 台. 依题意，得 $0.19m+0.3\times\left(\frac{1}{5}m-90\right)\leqslant 438$，解得 $m\leqslant 1\ 860$. 此时 $\frac{1}{5}m-90\leqslant\frac{1}{5}\times 1\ 860-90$，即 $\frac{1}{5}m-90\leqslant 282$. 所以至多能购进学生用电脑 1 860 台，教师用笔记本电脑 282 台. **8.** (1) 设组建中型图书角 x 个，则组建小型图书角为 $(30-x)$ 个. 由题意，得 $\begin{cases}80x+30(30-x)\leqslant 1\ 900,\\50x+60(30-x)\leqslant 1\ 620,\end{cases}$ 化简得 $\begin{cases}50x\leqslant 1\ 000,\\10x\geqslant 180.\end{cases}$ 解这个不等式组，得 $18\leqslant x\leqslant 20$. 因为 x 只能取整数，所以 x 的取值是 18，19，20. 故有三种组建方案：方案一，中型图书角 18 个，小型图书角 12 个；方案二，中型图书角 19 个，小型图书角 11 个；方案三，中型图书角 20 个，小型图书角 10 个. (2) $860\times 18+570\times 12=22\ 320$，方案一的费用是 22 320 元；$860\times 19+570\times 11=22\ 610$，方案二的费用是 22 610 元；$860\times 20+570\times 10=22\ 900$，方案三的费用是 22 900 元. 故方案一费用最低，最低费用是 22 320 元.

第五单元　函数及其应用

§5.1

【基础训练】

1. $(1,-2)$，$(-1,-2)$. **2.** 一. **3.** $x>1$，$x\neq 1$. **4.** $y=36-4t$，$0\leqslant t\leqslant 9$.

【巩固练习】

1. (1) $-2<a<0$. (2) -2，-1. **2.** $(-5,4)$. **3.** (1) $x\geqslant-\frac{5}{2}$. (2) $x\geqslant-1$ 且 $x\neq 2$. **4.** $m=3$ 或 $m=1$. **5.** B. **6.** $\left(\frac{16}{5},-\frac{12}{5}\right)$.

§5.2

【基础训练】

1. $(-3,0)$，$(0,6)$. **2.** $y=3x-7$. **3.** $\frac{1}{2}$，$k<0$. **4.** $m<-1$. **5.** $(1,1)$. **6.** $y=\frac{8}{x}$.

【巩固练习】

1. (1) -2. (2) $1.5<k<2$. (3) 4. **2.** (1) C. (2) C. (3) C. (4) A. (5) A. **3.** (1) 将点 $A(4,-2)$ 代入 $y=\frac{k_2}{x}$，得 $k_2=-8$，故 $y=-\frac{8}{x}$. 将 $(-2,n)$ 代入 $y=-\frac{8}{x}$，得 $n=4$. 所以 $k_2=-8$，$n=4$. (2) $-2<x<0$ 或 $x>4$. (3) 将点 $A(4,-2)$，$B(-2,4)$ 代入 $y=k_1x+b$，得 $k_1=-1$，$b=2$. 故一次函数的表达式为 $y=-x+2$，与 x 轴交于点 $C(2,0)$. 图像沿 x 轴翻折后，得点 $A'(4,2)$，$S_{\triangle A'BC}=\frac{1}{2}\times(4+2)\times(4+2)-\frac{1}{2}\times 2\times 2-\frac{1}{2}\times 4\times(2+2)=8$，即 $\triangle A'BC$ 的面积为 8. **4.** (1) $y=\frac{2}{3}x+6$. (2) $E(8,2)$. (3) $E(11,3)$. **5.** (1) $y=2x+4$. (2) $\frac{\sqrt{11}-1}{2}\pi$. **6.** (1) ① $B(-1,3)$，$k=1$；② $\frac{3}{2}$. (2) $2<k<4$. **7.** (1) $k=12$，$y=-2x+10$. (2) 略. (3) $(4,3)$.

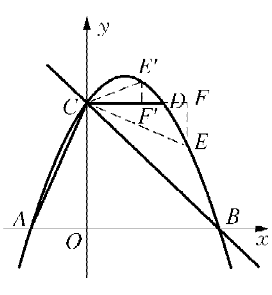
§5.3

【基础训练】

1. 略. **2.** (1) $(2,9)$，$(-1,0)$、$(5,0)$，$(0,5)$. (2) -3 或 2. (3) $<$，$>$，$>$. (4) -1，2，0. (5) $y=(x+3)^2+1$.

【巩固练习】

1. (1) 略. (2) 3，7. **2.** (1) C. (2) D. **3.** (1) $y=x^2-2x+1$. (2) $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2+1$. **4.** (1) $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-6$. (2) $S_{\triangle ABC}=6$. **5.** (1) $y=-\frac{1}{2}x^2+x+4$. (2) $\left(1,\frac{9}{2}\right)$，$\left(3,\frac{5}{2}\right)$.



(第 5 题)

§5.4

【基础训练】

1. (1，−2). **2.** $>\frac{1}{4}$，$<\frac{1}{4}$. **3.** $\frac{1}{16}$. **4.** ①④.

【巩固练习】

1. (1) 大，−3. (2) −1. (3) −1. (4) 答案不唯一，如 $c=6$. (5) (−2，0). **2.** (1) A. (2) B. (3) B. **3.** $y=x^2-2$，该函数的图像与 x 轴的交点的个数为 2. **4.** (1) 对称轴 $x=1$，顶点(1，4). (2) 略. (3) ① $-1<x<3$. ② $-5<y\leqslant 4$. **5.** (1) $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$. (2) $BQ=\sqrt{6}$.

§5.5

【基础训练】

1. $s=40t$，$0\leqslant t\leqslant 6$. **2.** $\frac{25}{2}$. **3.** $y=10+1.8(x-3)(x>3)$.

【巩固练习】

1. (1) $y=20-6x(x>0)$，17. (2) $x>-2$. **2.** (1) 由题意知每千米耗油 0.1 L，故 $y=40-0.1x\ (0\leqslant x\leqslant 400)$. (2) 因为油箱内剩余油量不低于油箱容量的$\frac{1}{4}$，所以 $-0.1x+40\geqslant 40\times\frac{1}{4}$，解得 $x\leqslant 300$. 故该辆汽车最多行驶的路程是 300 km. **3.** (1) 分情况讨论：①当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时，$y=-2x+10$；② 当 $x>3$ 时，$y=\frac{12}{x}$. (2) 能. 理由如下：令 $y=\frac{12}{x}=1$，则 $x=12<15$，故能在 15 天以内不超过最高允许的 1.0 mg/L. **4.** (1) $y=300+30(60-x)=-30x+2\,100$. (2) 设每星期的销售利润为 W 元，依题意，得 $W=(x-40)(-30x+2\,100)=-30x^2+3\,300x-84\,000=-30(x-55)^2+6\,750$. 所以当 $x=55$ 时，$W_{最大值}=6\,750$ 元. 即每件售价定为 55 元时，每星期的销售利润最大，最大利润是 6 750 元. (3) 由题意，得 $-30(x-55)^2+6\,750=6\,480$. 解这个方程，得 $x_1=52$，$x_2=58$. 因为抛物线 $W=-30(x-55)^2+6\,750$ 的开口向下，所以当 $52\leqslant x\leqslant 58$ 时，每星期销售利润不低于 6 480 元. 而在 $y=-30x+2\,100$ 中，$k=-30<0$，y 随 x 的增大而减小，所以当 $x=58$ 时，$y_{最小值}=-30\times 58+2\,100=360$，即每星期至少要销售该款童装 360 件.

习题五

1. (1) 二、三. (2) 一、二、四. (3) −2. (4) (400，800). (5) 4. (6) −2 或 4. (7) 4. **2.** (1) A. (2) D. (3) D. (4) A. **3.** (1) 15，$\frac{4}{15}$. (2) $s=\frac{4}{45}t$. (3) 不难求出 BC 的函数关系式是 $s=-\frac{4}{15}t+12$，再与(2)中的函数关系式联立，解方程组即可. 当小聪与小明迎面相遇时，他们离学校的距离是 3 km. **4.** (1) $y=\frac{8\,000}{x}(x>0)$，4 000 元. (2) 2 000 元. (3) 16. **5.** (1) 根据题意，得 $y=[70x-(20-x)\times 35]\times 40+(20-x)\times 35\times 130=-350x+63\,000$，故 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-350x+63\,000$. (2) 根据题意，得 $70x\geqslant 35(20-x)$，解得 $x\geqslant\frac{20}{3}$. 因为 x 为正整数，且 $x\leqslant 20$，所以 $7\leqslant x\leqslant 20$，且 x 为正整数. 在 $y=-350x+63\,000$ 中，$k=-350<0$，所以 y 随 x 的增大而减小. 因此，当 $x=7$ 时，y 取最大值，最大值为 $-350\times 7+63\,000=60\,550$，故安排 7 名工人进行采摘，13 名工人进行加工，才能使一天的销售收入最大，最大收入为 60 550 元. **6.** $y=\frac{8}{x}$，$y=\frac{1}{2}x+3$. **7.** (1) 抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x$，点 $C(6，10)$，点 $D(1，0)$. (2) 点 A' 在抛物线上，求出点 $A'(-2，4)$，当 $x=-2$ 时，$y=\frac{1}{4}\times 4-\frac{3}{2}\times(-2)=4$. **8.** (1) 2. (2) $P\left(\frac{1}{2}，\frac{15}{4}\right)$. (3) $P(2，3)$或$\left(-\frac{4}{3}，-\frac{13}{9}\right)$.

第六单元　锐角三角函数

§6.1

【基础训练】

1. 45°. **2.** (1) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (2) $\frac{8}{3}$. (3) $\frac{1}{2}$. **3.** $2-\frac{5\sqrt{3}}{6}$. **4.** $\frac{12}{5}$. **5.** (1) 略. (2) $2\sqrt{5}$，$\sqrt{5}$，5. (3) 直角，

10. （4）$\frac{1}{2}$.

【巩固练习】

1.（1）$\frac{3}{4}$.（2）$(1.5+8\sqrt{3})$. **2.**（1）D.（2）A. **3.**（1）2.（2）$3-\frac{5\sqrt{3}}{6}$. **4.**（1）6.（2）$\frac{4\sqrt{41}}{41}$. **5.** $30\sqrt{3}$ m.

§ 6.2

【基础训练】

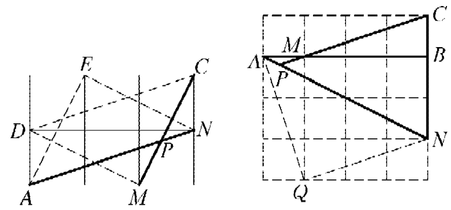
1. 略. **2.** 10. **3.** 5. **4.** 32. **5.** $100\sqrt{3}$.

【巩固练习】

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. **2.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **3.** $15-5\sqrt{3}$. **4.** C. **5.** C. **6.**（1）$BQ=PQ$，理由略.（2）2 000 m. **7.** 52.7 m. **8.**（1）$\angle BPQ=30°$.（2）$PQ\approx 15.8$ m.

习题六

1.（1）$\frac{4}{5}$.（2）$\frac{3}{4}$.（3）$\frac{3}{5}$.（4）60°.（5）25.（6）$\frac{5\sqrt{41}}{41}$，$\frac{4}{5}$.（7）$\frac{1}{2}$. **2.**（1）A.（2）B.（3）A.（4）B.（5）D.（6）D.（7）C. **3.**（1）$\frac{5}{2}$.（2）$\frac{1}{2}-\sqrt{2}$. **4.**（1）$BD=4$.（2）$\cos\angle DAC=\frac{4\sqrt{17}}{17}$. **5.** 塔高 $80\sqrt{3}$ m，楼高$(80\sqrt{3}-80)$m. **6.** 不会穿过公园，理由略. **7.** 17 个. **8.**（1）2.（2）$\frac{\sqrt{2}}{2}$.（3）45°.



（第 8 题）